Spectral and Evolution Problems
Vol. 12

Editors:
N. D. Kopachevsky, I. V. Orlov

National Taurida V.Vernadsky University
Simferopol, Ukraine

Editorial Board:

N. D. Kopachevsky (editor-in-chief, Simferopol, Ukraine)
A. B. Antonevich (Minsk, Belarus)
T. Ya. Azizov (Voronezh, Russia)
Yu. V. Bogdansky (Kiev, Ukraine)
A. A. Chikrii (Kiev, Ukraine)
M. L. Gorbachuk (Kiev, Ukraine)
M. M. Malamud (Donetsk, Ukraine)
I. V. Orlov (associate editor, Simferopol, Ukraine)
Ya. A. Roitberg (Chernigov, Ukraine)
A. G. Rutkas (Kharkov, Ukraine)
Yu. S. Samoĭlenko (associate editor, Kiev, Ukraine)
A. L. Skubachevskii (Moscow, Russia)

Advisory Editorial Board:

M. S. Agranovich (Moscow, Russia)
K. I. Chernyshov (Voronezh, Russia)
V. A. Derkach (Donetsk, Ukraine)
Yoshinori Kametaka (Osaka, Japan)
V. I. Ovchinnikov (Voronezh, Russia)
S. N. Samborsky (Caen, France)
L. R. Volevich (Moscow, Russia)
V. I. Zhukovskiy (Moscow, Russia)

Editorial Group:

I. V. Orlov (Simferopol, Ukraine)
P. A. Starkov (Simferopol, Ukraine)

Simferopol, Ukraine

Taurida National V.Vernadsky University
Black Sea Branch of Moscow State University
Crimean Scientific Center of Ukrainian NAS
Crimean Academy of Sciences
Crimean Mathematical Foundation

SPECTRAL AND EVOLUTION PROBLEMS

Proceedings of the Twelfth Crimean Autumn
Mathematical School-Symposium
(KROMSH-XII)

September 18 – 29, 2001, Sevastopol, Laspi

Volume 12

Simferopol, 2002

UDC 517.432+517.515+515.958

Spectral and Evolution problems: Proceedings of the Twelfth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol. 12. /Group of authors. — Simferopol: Taurida National V. Vernadsky University, Black Sea Branch of Moscow State University, Crimean Scientific Center of Ukrainian NAS, Crimean Academy of Sciences, Crimean Mathematical Foundation, 2002. — 226 pp. — in English and Russian.

This collection contains accounts of lectures and papers of the participants of the Twelfth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium, which was held by the Crimean Mathematical Foundation. The materials of the Symposium are devoted to the actual mathematical investigations in the field of spectral and evolutionary problems, and to the close questions.

It is addressed to teachers, scientists, senior and post-graduated students of mathematical and physical specialities.

© Taurida National V.Vernadsky University
Black Sea Branch of Moscow State University
Crimean Scientific Center of Ukrainian NAS
Crimean Academy of Sciences
Crimean Mathematical Foundation, 2002.

Please visit our site in the World Wide Web: *tnu.crimea.ua/konf/kromsh*

PREFACE

The XII Crimean Autumn Mathematical School-Symposium on Spectral and Evolution Problems was held in a settlement Laspi, on the beautiful cove Batiliman shore on the territory of "Tchaika"holiday home. The school was working from September 18 till 29, 2001.

At the School 70-th anniversary of the well known mathematicians M.S. Agranovich and O.A. Ziza were celebrated.

Just as in previous years Organizing Committee was led by the Head of the Department of Mathematical Analysis of National Taurida V.Vernadsky University Professor N. D. Kopachevsky. The school has been organized and held with the participation of local organizing committee members, workers of the above-mentioned Department: B. D. Maryanin, M. A. Muratov, I. V. Orlov, Ju. S. Pashkova, S. I. Smirnova, P. A. Starkov.

About 130 mathematicians from Ukraine, Russia, Belarus, Armenia, Japan, France, Poland and Israel took part in the Symposium. Among them there were both famous mathematicians and young scientists, post-graduate students, senior students.

At the School there were presented three sections.

Section 1. *Spectral Problems.*

> **Subsection 1.1.** *Spectral Theory of Not Self-Adjoint Operators* (chair persons A. B. Antonevich (Minsk), M. M. Malamud (Donetsk), V. I. Ovchinnikov (Voronezh), V. S. Shulman (Vologda).
>
> **Subsection 1.2.** *Spectral Theory of Operator Pencils* (chair persons N. D. Kopachevsky (Simferopol), K. I. Chernyshov (Voronezh), V. S. Rykhlov (Saratov)).

Section 2. *Evolutionary and Boundary-Value Problems.*

> **Subsection 2.1.** *Differential-Operator and Evolutionary Equations* (chair persons V. S. Melnik (Kiyv), S. N. Samborsky (Caen, France)).
>
> **Subsection 2.2.** *Boundary-Value Problems* (chair persons M. S. Agranovich (Moscow), L. R. Volevich (Moscow), A. L. Skubachevsky (Moscow), Yoshinori Kametaka (Osaka, Japan)).

Section 3. *Optimization, Control, Games and Economic Behavior* (chair persons I. M. Anan'evsky (Moscow), M. V. Mikhalevich (Kiyv), M. I. Zelikin (Moscow).

Adduce here the list of the lectures delivered for the school participants:

1. Агранович М. С. (Москва, Россия)

а) Спектральные задачи для уравнений типа Шредингера

б) Спектральные задачи для системы Дирака

2. Антоневич А. Б. (Минск, Белоруссия)

а) Однородные C*-алгебры

б) Динамика линейного отображения на многообразии Грассмана

3. Ананьевский И. М. (Москва, Россия) Кусочно-линейные управления механическими системами в условиях неопределённости

4. Введенская Н. Д. (Москва, Россия) Некоторые нелинейные дифференциальные уравнения, встречающиеся в теории связи

5. Волевич Л. Р. (Москва, Россия)

а) Краевые задачи с малым параметром при старшей производной (к 80-летию Вишика М. И.)

б) Многоугольник Ньютона и общие параболические системы (к 70-летию Аграновича М. С.)

6. Зеликин М. И. (Москва, Россия) Оптимальное управление для гельдеровых задач

7. Kametaka Yoshinori (Osaka, Japan)

а) Positivity and hierarchy of Green's functions for boundary value problems for deflection of a beam

б) Green's function for biharmonic operator on a disk

8. Kosiek Marek (Krakow, Poland) Common invariant subspace for commuting contractions

9. Кругляк С. А., Самойленко Ю. С. (Киев, Украина) Теория представлений и спектр суммы операторов

10. Лаптев Г. И. (Тула, Россия) Предельные монотонные операторы и приложения

11. Лебедев А. В. (Минск, Белоруссия) Банаховы алгебры, ассоциированные с автоморфизмами. Структурные результаты

12. Маламуд М. М. (Донецк, Украина) Об индексах дефекта и самосопряжённости оператора Штурма-Лиувилля (к 70-летию Аграновича М. С.)

13. Мельник В. С. (Киев, Украина)

а) Неравенство Ки Фаня и операторные включения в банаховых пространствах

б) Многозначные динамические процессы в бесконечномерных пространствах

14. Михалевич М. В. (Киев, Украина) Макроэкономическая модель системы с моноксоническим рынком труда

15. Овчинников В. И. (Воронеж, Россия) Описание интерполяционных орбит в произвольных парах пространств Lp

16. Печенцов А. С. (Москва, Россия) Регуляризованные следы дифференциальных операторов

17. Пивоваров В. Г. (Мурманск, Россия)

а) Вывод преобразований Лоренца без использования постулата о постоянстве скорости света

б) Математические аспекты падения тунгусского метеорита

18. Попов А. Ю. (Москва, Россия) Нули функции Миттаг-Леффлера и обратные задачи

19. Рыхлов В. С. (Саратов, Россия) О полноте системы собственных функций обыкновенных дифференциальных пучков

20. Рябенький В. Ф. (Москва, Россия) Метод разностных потенциалов...

21. Самборский С. Н. (Москва, Россия-Франция) Расширение нелинейных дифференциальных выражений

22. Серов В. С. (Москва, Россия) Восстановление сингулярных потенциалов в двумерном операторе Шредингера. Борн-аппроксимация

23. Скубачевский А. Л. (Москва, Россия) О периодических решениях нелинейных функционально-дифференциальных уравнений

24. Товмасян Н. Е. (Ереван, Армения) Граничные задачи для эллиптических уравнений в круге

25. Хацкевич В. А. (Кармиэль, Израиль) Функциональные уравнения типа Абеля-Шредера

26. Хромов А. П. (Саратов, Россия) Теоремы равносходимости для интегральных операторов

27. Чернышов К. И. (Воронеж, Россия) Эргодические подпространства и аналитические полугруппы

28. Шульман В. С. (Вологда, Россия) О решётках проекторов в гильбертовом пространстве

29. Новокшенов В.Ю. (Уфа, Россия) Метод задачи Римана для DM-солитонов в нелинейном уравнении Шредингера

30. Хапаев М.М. (Москва, Россия) Эволюция солитонов

31. Басов В.В. (С.-Петербург, Россия) Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевыми характеристическими числами

32. Нецветаев Н.Ю. (С.-Петербург, Россия) Топологическое строение комплексных многообразий с изолированными особенностями

33. Котляров В.П. (Харьков, Украина) Нелинейное уравнение Шредингера на всей оси и на полуоси

34. Власов В.В. (Москва, Россия) О некоторых спектральных задачах, возникающих в теории функционально-дифференциальных уравнений

Most of the school participants made their rerports on the section meetings.

Exchange of scientific information did not keep within formal limits and favored the development and strengthening of scientific contacts of the school participants. At the School there was presented a cycle of lectures by V. G. Kopachevskaja devoted to the Crimea.

Both materials of delivered lectures and reports, and papers sent to the editorial board, which were not formally reported during the School because of different reasons, are represented in the present collection.

Section 1

SPECTRAL PROBLEMS

Subsection 1.1

Spectral Theory of Not Self-Adjoint Operators

Спектральный анализ степеней оператора $(Vf)(x) = q(x)\int_0^x w(t)f(t)dt$

Доманов И. Ю.
Донецкий Национальный Университет,
Украина

Keywords: Invariant subspace, cyclic subspace,similarity

1.Введение.Хорошо известно (см. [1], [3]), что оператор интегрирования определенный на $L_p[0,1]$ соотношением $J : f \to \int_0^x f(t)dt$ является одноклеточным при $p \in [1,\infty)$ и его решетка инвариантных подпространств антиизоморфна сегменту $[0,1]$. То же оказывается верным (см. [1], [3]) и для простейших вольтерровых операторов

$$J^\alpha : f \to \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t)dt, \qquad \alpha > 0$$

являющихся комплексными степенями оператора интегрирования J.

Более того, соответствующие решетки инвариантных и гиперинвариантных подпространств имеют вид ([1, 2, 3]) :

$$LatJ^\alpha = HyplatJ^\alpha = \{E_a := \chi_{[a,1]}L_p[0,1] : 0 \le a \le 1\}; \tag{1}$$

Из описания (1) решетки $LatJ^\alpha$ получается следующее описание циклических векторов оператора J^α :

$$f \in CycJ^\alpha \Leftrightarrow 0 \in \mathrm{supp} f(x) \Leftrightarrow \int\limits_0^\varepsilon |f(x)|^p dx > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \tag{2}$$

Условие (2) называют ε-условием.

М.М.Маламудом в [6, 7] проведен спектральный анализ оператора $A = J^\alpha \otimes B$, действующего в $L_p[0,1] \otimes \mathbb{C}^n$ и являющегося тензорным произведением оператора J^α и произвольной невырожденной диагональной $n \times n$ матрицы $B = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. В частности, в [6, 7] описаны решетки $LatA$ и $HyplatA$ инвариантных и гиперинвариантных подпространств оператора A, а также множество $CycA$.

В работе [4] Joo Ho Kang рассматривал оператор

$$V_{q,w} : f \to 2iq(x) \int\limits_0^x f(t)w(t)dt \tag{3}$$

в пространстве $L_2[0,1]$ над полем $\mathbb{R}$ в случае, когда функции $q(x), w(x)$ положительны и непрерывны. При этих условиях на функции q и w была доказана одноклеточность оператора $V_{q,w}$ и было описано множество $CycV_{q,w}$ его циклических векторов.

В настоящем сообщении мы проводим спектральный анализ оператора вида (3) отказывшись от условия $q(x)w(x) > 0$, однако считая функцию $q(x)w(x)$ вещественной. При этом, в случае знакопеременной функции $q(x)w(x)$ обнаружен ряд новых эффектов :

1) оператор $V_{q,w}$ утрачивает свойство одноклеточности;

2) его сужения на некоторые инвариантные подпространства квазиподобны операторам вида $A = J \otimes B$;

3) при некотрых условиях оператор $V_{q,w}$ вида (3) может быть циклическим, не будучи одноклеточным.

Мы приводим также необходимые и достаточные условия на функции $q(x)$, $w(x)$ при которых оператор $V_{q,w}$ не только одноклеточен, но цикличен и даже квазиподобен и подобен оператору J. Оказалось, что одноклеточность оператора $V_{q,w}$ эквивалентна его квазиподобию оператору J и эквивалентна условию $q(x)w(x) > 0$ п.в. на [0,1]. Подчеркнем, что большинство результатов новы и для случая $q(x)w(x) > 0$.

Обозначения.

1) X_1, X_2 - Банаховы пространства; 2) $[X_1, X_2]$- пространство линейных ограниченных операторов из X_1 в X_2; 3) $[X] := [X, X]$ пространство ограниченных операторов в банаховом пространстве X; 4) Lat$T$ - решетка инвариантных подпространств оператора $T \in [X]$; 5) $kerT = \{x \in X \ : \ Tx = 0\}$ -ядро оператора T; 6) $\mathfrak{R}(T) = \{Tx \ : \ x \in X\}$-образ оператора $T \in [X]$; 7) span$E$ замкнутая линейная оболочка множества $E \subset X$; 8) supp f носитель функции $f(x)$; 9) $r * f$ -обозначает свертку функций $r, \ f \in L_1[0,1] \ : \ r * f := \int_0^x r(x-t)f(t)dt$.

2.Квазиподобие операторов $V_{q,w}$ и $V_{r,1}$. Пусть $q \in L_p[0,1]$, $w \in L_q[0,1]$, $q(x)w(x) = \overline{q(x)w(x)} \neq 0$ для п.в. $x \in [0,1]$. Тогда оператор

$$V_{q,w} : f \to q(x) \int\limits_0^x f(t)w(t)dt$$

действующий в пространстве $L_p[0,1]$ ограничен и компактен, так как является оператором класса Хилле-Тамаркина(см. [10]). Не трудно проверить, что его степени имеют вид :

$$(V_{q,w}^{k+1} f)(x) = \frac{1}{k!} q(x) \int\limits_0^x (Q(x) - Q(t))^k f(t)w(t)dt,$$

где $Q(x) = \int\limits_t^x q(s)w(s)ds$. Введем некоторые определения, используемые в дальнейшем.

Определение 1. ([3]) Подпространство E банахова пространства X называется циклическим подпространством для оператора $T \in [X]$ если $span\{T^n E : n \geq 0\} = X$. Вектор $f (\in X)$ называется циклическим если $span\{T^n f : n \geq 0\} = X$.

$Cyc(T)$ -множество всех циклических подпространств оператора T.

Определение 2. ([3]) Положим

$$\mu_T := \inf_E \{dimE : E \text{ циклическое подпространство оператора } T \text{в } X\}.$$

μ_T называют спектральной кратностью оператора T в X.

Отметим, что μ_T может равняться ∞.

Говорят, что оператор T циклический, если $\mu_T = 1$.

Определение 3. Оператор $T \in [X_1, X_2]$ называют деформацией, если $kerT = \{0\}$ и $\overline{(TX_1)} = X_2$.

Пусть $A \in [X_1]$, $B \in [X_2]$. Говорят, что операторы A и B квазиподобны, если существуют деформации $T_1 \in [X_1, X_2]$ и $T_2 \in [X_2, X_1]$ такие, что $T_1 A = BT_1$ и $AT_2 = T_2 B$.

Говорят, что операторы A и B подобны, если существует ограниченный вместе с обратным оператор $T \in [X_1, X_2]$ такой, что $A = T^{-1}BT$.

Легко видеть, что если операторы A и B квазиподобны, то $\mu_A = \mu_B$.

Оказывается, что изучение степеней оператора $V_{q,w}$ с помощью квазиподобия можно свести к случаю когда $|q| \equiv 1$ и $w \equiv const$.

Теорема 1. *Пусть* $R(x) := \int\limits_0^x |q(s)w(s)|ds$, $\ R(1) = 1$, $\ R^{-1}(x)$ *- функция обратная к* $R(x)$ $(R^{-1} \circ R = R \circ R^{-1} = x)$ *и* $r(x) := sign(qw)(R^{-1}(x))$. *Тогда*

1) операторы $V_{q,w}$ *и* $V_{r,1}$ *квазиподобны;*

2) в качестве деформаций X и Y можно взять операторы

$$(Xf)(x) = q(x) \int\limits_0^{R(x)} f(t)dt, \tag{4}$$

$$(Yf)(x) = r(x) \int\limits_0^{R^{-1}(x)} w(t)f(t)dt, \tag{5}$$

то есть $V_{q,w}X = XV_{r,1}$ *и* $YV_{q,w} = V_{r,1}Y$.

3) Справедливы равенства

$$XY = V_{q,w}^2, \qquad YX = V_{r,1}^2$$

Следствие 1. *Пусть оператор Y определен формулой* (5)*. Тогда подпространство $E \subset L_p[0,1]$ - циклическое для оператора $V_{q,w}$ тогда и только тогда, когда подпространство $\overline{YE}$ - циклическое для оператора $V_{r,1}$, т.е.*

$$E \in CycV_{q,w} \Longleftrightarrow \overline{YE} \in CycV_{r,1}.$$

Следствие 2. *(см.*[4]*) Пусть $q > 0$, $w > 0$, $q, w \in C[0,1]$ и $\int_0^1 q(t)w(t)dt = 1$. Тогда операторы $V_{q,w}$ и J подобны, а, следовательно, оператор $V_{q,w}$ одноклеточен.*

Доказательство. Достаточно проверить, что оператор

$$(Tf)(x) = q(x)f(\int\limits_0^x q(t)w(t)dt) \tag{6}$$

ограничен вместе с обратным и $TJ = V_{q,w}T$

Замечание 1. Отметим, что оператор T вида (6) является преобразованием, Лиувилля которое иногда позволяет сводить уравнение Штурма-Лиувилля с несуммируемым потенциалом к уравнению с суммируемым потенциалом (см. [5]).

Замечание 2. В случае, когда $q, w \in AC[0,1]$, подобие операторов $V_{q,w}$ и cJ вытекает из общего результата М.М. Маламуда (см. [8]) о подобии оператора $K((Kf)(x) = \int_0^x k(x,t)f(t)dt)$ оператору интегрирования J.

3. Критерий одноклеточности. Следующая теорема дает критерий одноклеточности оператора $V_{q,w}^k$.

Теорема 2. *Пусть $qw = \overline{qw}$. Тогда следующие условия эквивалентны*

1a. $LatV_{q,w}^k = LatJ = \{\chi_{[a,1]}L_p[0,1] : 0 \le a \le 1\}$;

1b. $CycV_{q,w}^k = CycJ$;

2. Оператор $V_{q,w}^k$ одноклеточный;

3a. Функция $q(x)w(x)$ почти всюду не меняет знак $x \in [0,1]$;

4. Оператор $V_{q,w}^k$ квазиподобен cJ^k, $c = \overline{c}$.

Обозначим через $N(f)$-число перемен знака функции f. Оказывается, что $\mu_{V_{q,w}^k} = [N(qw)/2] + 1$, если k - нечетно и $\mu_{V_{q,w}^k} = N(qw) + 1$, если k–четно. В частности, $\mu_{V_{q,w}^k} = \infty$, если $N(qw) = \infty$.

В случае $N(q) < \infty$ функция $q(x)$ может быть записана в виде

$$q(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a_{2i}, a_{2i+1}], i = 0, 1, \dots, [\frac{n-1}{2}]; \\ -1, & x \in [a_{2i-1}, a_{2i}], i = 0, 1, \dots, [\frac{n}{2}]; \end{cases}, \tag{7}$$

где $n = N(q) + 1$, а $0 = a_0 < a_1 \dots < a_{n-1} < a_n = 1$ - некоторое разбиение отрезка $[0,1]$.

Для каждой функции $f \in L_p[0,1]$ определим функции

$$\tilde{f}^i(x) = f(a_i - x) + f(a_i + x), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Всюду далее для $x \notin [0,1]$ полагаем $f(x) = 0$. В частности, $\tilde{f}^0(x) = f(x)$. Для краткости сформулируем результаты для нечетного k.

Теорема 3. *Пусть k-нечетно и $V^k_{q,1} = q(x)\int\limits_0^x f(t)dt$ с функцией $q(x)$ вида (7). Тогда*

1) $\mu^k_V = \frac{n}{2} + 1$;

2) система $\{f_i\}_{i=1}^N$ векторов f_i порождает циклическое подпространство в $L_p[0,1]$ для оператора $V^k_{q,1}$ тогда и только тогда, когда

a) $N \geq 1 + [\frac{n}{2}]$;

b) матрицы

$$F_1(x) = \begin{pmatrix} \tilde{f}^0_1(x) & \tilde{f}^2_1(x) & \ldots & \tilde{f}^{2i}_1(x) & \ldots & \tilde{f}^{2[n/2]}_1(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{f}^0_j(x) & \tilde{f}^2_j(x) & \ldots & \tilde{f}^{2i}_j(x) & \ldots & \tilde{f}^{2[n/2]}_j(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{f}^0_N(x) & \tilde{f}^2_N(x) & \ldots & \tilde{f}^{2i}_N(x) & \ldots & \tilde{f}^{2[n/2]}_N(x) \end{pmatrix},$$

$$F_2(x) = \begin{pmatrix} \tilde{f}^1_1(x) & \tilde{f}^3_1(x) & \ldots & \tilde{f}^{2i-1}_1(x) & \ldots & \tilde{f}^{2[n/2]-1}_1(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{f}^1_j(x) & \tilde{f}^3_j(x) & \ldots & \tilde{f}^{2i-1}_j(x) & \ldots & \tilde{f}^{2[n/2]-1}_j(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{f}^1_N(x) & \tilde{f}^3_N(x) & \ldots & \tilde{f}^{2i-1}_N(x) & \ldots & \tilde{f}^{2[n/2]-1}_N(x) \end{pmatrix}$$

имеют максимальный $*$-ранг, то есть

$$* - rank F_1(x) + * - rank F_2(x) = n; \tag{8}$$

Теорема 3 доказывается методом, впервые примененном М.М. Маламудом в [6, 7].

Следствие 3. *Оператор $V^k_{q,1}$ циклический, тогда и только тогда когда либо k нечетно и $N(q) \leq 1$, либо k четно и $N(q) = 0$. При этом*

1) если $q(x) \equiv 1$, то $V^k = J^k$ и $f(x) \in CycJ \Leftrightarrow f(x)$ удовлетворяет ε - условию.;

2) если $q(x) = \chi_{[0,a]}(x) - \chi_{[a,1]}(x)$ и k нечетно, то

$f(x) \in CycV^k_{q,1} \Leftrightarrow f(x) * (f(a-x) + f(a+x))$ удовлетворяет ε - условию.

Если функция $f(x)$ непрерывна в окрестности нуля и $f(0) \neq 0$, то $f(x)$ очевидно удовлетворяет ε-условию (2). Следовательно, такая функция $f(x)$ является циклической для оператора интегрирования J. Это же остается в силе и для оператора $V^k_{q,w}$.

Предложение 1. Пусть функции $f_i(x) \in L_p[0,1]$ $(i = 1, \ldots n)$–непрерывны в окрестностях точек a_i $(i = 1, \ldots n)$. Тогда для того, чтобы система $\{f_i\}_{i=1}^n$ векторов f_i порождала циклическое подпространство в $L_p[0,1]$ для оператора $V^k_{q,1}$ (k–нечетно) достаточно выполнения условий

$$det \begin{pmatrix} f_1(0) & f_1(a_2) & \ldots & f_1(a_{2[n/2]}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(0) & f_n(a_2) & \ldots & f_n(a_{2[n/2]}) \end{pmatrix} \neq 0 \tag{9}$$

$$det \begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_3) & \ldots & f_1(a_{2[n/2]-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_3) & \ldots & f_n(a_{2[n/2]-1}) \end{pmatrix} \neq 0 \tag{10}$$

Замечание 3. Можно показать, что условия (9)-(10) не являются необходимыми для цикличности системы векторов $\{f_i\}_{i=1}^n$.

В качестве следствия из Теоремы 3 вытекает следующий результат М.М. Маламуда ([6, 7]). о циклических подпространствах оператора $A = J^k \otimes B$ (в [6, 7] аналогичный результат доказан для более общих операторов вида $A = J^\alpha \otimes B,\ \alpha > 0$).

Предложение 2. (см. [6, 7]) Пусть $B = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$–диагональная невырожденная матрица и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Пусть $A = J^k \otimes B = \oplus_{i=1}^n \lambda_i J^k$–оператор действующий в пространстве $L_p[0,1] \otimes \mathbb{C}^n$ $(1 \leq p < \infty)$. Тогда:
1)$\mu_A = n$;
2) система векторов

$$f_i = \{f_{i1}, \ldots, f_{in}\} \in L_p[0,1] \otimes \mathbb{C}^n \qquad 1 \leq i \leq N$$

порождает циклическое подпространство для оператора A тогда и только тогда, когда :
$i)N \geq n$;
ii) Матрица

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}((\frac{\lambda_1}{\lambda_2})^{\frac{1}{k}} x) & \ldots & f_{1n}((\frac{\lambda_1}{\lambda_n})^{\frac{1}{k}} x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{N1}(x) & f_{N2}((\frac{\lambda_1}{\lambda_2})^{\frac{1}{k}} x) & \ldots & f_{Nn}((\frac{\lambda_1}{\lambda_n})^{\frac{1}{k}} x) \end{pmatrix},$$

имеет максимальный $*$-ранг, т.е. $*$-$rankF(x) = n$.

Теорема 4. *Пусть* $N(qw) = \infty$. *Тогда* $\mu_{V_{q,w}^k} = \infty$.

Комбинируя Теорему 3 и Следствие 3 получаем

Предложение 3. Оператор $V_{q,w}^k$–циклический точно тогда, когда либо k нечетно и $N(qw) \leq 1$, либо k четно и $N(qw) = 0$.

Список литературы

[1] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения М.:Наука, 1967.

[2] М.С.Бродский. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М.Наука, 1969, 287 С.

[3] Н.К.Никольский. Лекции об операторе сдвига. М.Наука, 1980, 383С.

[4] Joo Ho Kang. On the Unicellularity of Volterra-Type Integral Operators. Kyungpook Mathematical Journal, 1990, v. 30, 1-6

[5] F.A.Berezin, M.A. Shubin. Shredinger's equations. M. press of Moscow un-ty (in Russian), 1983,P.392

[6] М.М.Маламуд О воспроизводящих подпространствах вольтерровых операторов. Докл.Акад.Наук, 1996, v. 351,4,стр. 143-146

[7] M.M.Malamud. Invariant and hyperinvariant subspaces of direct sums of simple Volterra operators. Operator Theory : Advan. and App., 1998, Integral and Differential Operators, v. 102, p. 143-167

[8] M.M.Malamud. Similarity of volterra operators and related questions of the theory of diferential equations of fractional order. Trans.Moscow Math. Soc.,1995,v. 55, p.57-122

[9] Domanov I.Yu. On Cyclic and Invariant Subspaces of an Operator $J \otimes B$ in the Sobolev Spaces of Vector Functions. Methods of Functional Analysis and Topology, 1999, v.5, No 1, p. 1-12

[10] Халмош П., Сандер В. Ограниченные интегральные операторы в пространствах L_2. -М.:Наука, 1985.- 160 с.

И.Ю.Доманов, Математический факультет, Донецкий Национальный Университет, Университетская 24, Донецк 83055, Украина

E-mail: `domanovi@yahoo.com, domanov@tcc-online.com`

О ПОДОБИИ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА НОРМАЛЬНЫМ

И. М. Карабаш, А. С. Костенко
Донецкий национальный университет, Донецк

Keywords: Подобие, нормальные операторы, несамосопряжённые дифференциальные операторы, граничные условия

The operator $-(\operatorname{sgn} x)\frac{d^2}{dx^2}$ *with glue boundary conditions at 0 is studied in* $L^2(\mathbb{R})$*. We characterize the class of boundary conditions such that the operator is similar to normal one.*

В $L^2(\mathbb{R})$ *изучается оператор* $-(\operatorname{sgn} x)\frac{d^2}{dx^2}$*, порождаемый граничными условиями типа склейки в точке 0. Мы описываем класс граничных условий, для которых оператор подобен нормальному.*

1. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$ симметрический оператор

$$A_0 = -(\operatorname{sgn} x)\frac{d^2}{dx^2} \tag{1}$$

с областью определения

$$D(A_0) = \{y \in W_2^2(\mathbb{R}_-) \oplus W_2^2(\mathbb{R}_+) : y(+0) = y(-0) = y'(+0) = y'(-0) = 0\}. \tag{2}$$

В данной заметке мы изучаем квазисамосопряжённые (см., например, [13]), расширения оператора A_0 соответствующие различным граничным условиям в точке 0. Наша цель дать описание тех граничных условий, при которых соответствующий дифференциальный оператор подобен нормальному оператору.

Напомним, что операторы A и C в банаховом пространстве X называются подобными, если существует линейный ограниченный оператор T в X с ограниченным обратным T^{-1} такой, что $A = TCT^{-1}$.

Спектральные задачи вида

$$(Ly)(x) = \lambda r(x)y(x),$$

где L - самосопряжённый дифференциальный оператор, а функция $r(x)$ принимает значения разных знаков, исследуются давно в связи с некоторыми задачами механики и физики (см. [1] и имеющуюся там библиографию). В работах Р. Билса [1] и С. Г. Пяткова [2], [3] был рассмотрен вопрос о базисности Рисса собственных функций для такой спектральной задачи. В последнее время активно исследуются аналогичные вопросы для операторов с непрерывным спектром. В работе Б. Кургуса и Б. Наймана [4] с помощью теории М. Крейна - Г. Лангера дефинизируемых операторов в пространстве Крейна было показано, что оператор

$$\tilde{A} = -(\operatorname{sgn} x)\frac{d^2}{dx^2}$$

задаваемый граничными условиями склейки в точке 0

$$y(-0) = y(+0), \quad y'(-0) = y'(+0),$$

подобен самосопряжённому оператору. Позже Б. Кургус, Б. Найман [5] и другим методом И. М. Карабаш [6] распространили этот результат на операторы вида $(\operatorname{sgn} x)p(-id/dx)$ с неотрицательными полиномами $p(t)$. М. М. Фадеев, Р. Г. Штеренберг [7] получили аналогичный результат для некоторого класса операторов Штурма-Лиувилля с убывающим потенциалом. Уравнения с частными производными рассматривались в работе [8].

2. Оператор A_0, определенный выше, является замкнутым симметрическим оператором с индексами дефекта (2,2),

$$A_0 \subset A_0^* \ , \qquad D(A_0^*) = W_2^2(\mathbb{R}_-) \oplus W_2^2(\mathbb{R}_+) \ .$$

Общее квазисамосопряжённое расширение $A_{(a_{ij})}$ оператора A_0 задаётся граничными условиями

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}y(-0) + a_{12}y'(-0) + a_{13}y(+0)a_{14}y'(+0) = 0 \\ a_{21}y(-0) + a_{22}y'(-0) + a_{23}y(+0)a_{24}y'(+0) = 0 \end{array} \right. \tag{3}$$

и имеет область определения

$$D(A_{(a_{ij})}) = \{y \in W_2^2(\mathbb{R}_-) \oplus W_2^2(\mathbb{R}_+) : \ y(x) \text{ удовлетворяет условиям } (3) \ \} \ ,$$

причём матрица (a_{ij}) имеет ранг 2. Здесь $W_2^2(\mathbb{R}_\pm)$ – пространства Соболева (см. например [9]).

Для простоты будем считать, что

$$\left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{array} \right| \neq 0 \ .$$

Тогда условия (3) могут быть переписаны в виде

$$\left\{ \begin{array}{r} y'(+0) = b_{11}y(+0) + b_{12}y'(-0) \\ -y(-0) = b_{21}y(+0) + b_{22}y'(-0). \end{array} \right. \ , \tag{4}$$

где

$$B = \left(\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{array} \right)$$

- матрица порядка 2×2 с комплексными элементами. Оператор, опредляемый дифференциальным выражением

$$-(\operatorname{sgn} x)\frac{d^2}{dx^2}$$

и областью определения

$$D(A_B) = \{y \in W_2^2(\mathbb{R}_-) \oplus W_2^2(\mathbb{R}_+) : \ y(x) \text{ удовлетворяет условиям } (4) \ \} \ .$$

будем обозначать через A_B.

Нетрудно увидеть, что $A_B^* = A_{B^*}$. Таким образом, A_B самосопряжённый оператор точно тогда, когда матрица B самосопряжённая.

Оператору

$$\tilde{A} = -(\operatorname{sgn} x)\frac{d^2}{dx^2}$$

со стандартной областью определения $D(\tilde{A}) = W_2^2(\mathbb{R})$ соответствует матрица

$$B = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right) \ .$$

Очевидно, что $\tilde{A}$ – несамосопряжённый оператор. Как показанно в [4], оператор $\tilde{A}$ подобен самосопряжённому оператору. Наша цель сейчас выделить класс тех матриц B, для которых более общие операторы A_B подобны нормальным. Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть по крайней мере одно из чисел b_{12}, b_{21} не равно нулю. Тогда оператор A_B подобен нормальному, если и только если выполняются следующие три условия. Функции*

$$q(z) = -ib_{22}z^2 + (\det B - i)z + b_{11} \ , \tag{5}$$

$$q^*(z) = -i\overline{b_{22}}z^2 + (\det B^* - i)z + \overline{b_{11}} \ , \tag{6}$$

1) имеют полюс в ∞*;*
2) не имеют нулей в $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z = 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z > 0\}$*;*
3) не имеют кратных нулей в $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\,, \operatorname{Re} z > 0\} \cup \{0\}$*.*

Замечание 4. Случай $b_{12} = 0$, $b_{21} = 0$ менее интересен потому, что оператор с такими граничными условиями распадается в прямую сумму двух дифференциальных операторов, действующих в пространствах $L^2(\mathbb{R}_-)$ и $L^2(\mathbb{R}_+)$, а такие операторы подробно изучены.

3. В этом пункте всюду будем полагать, что по крайней мере одно из чисел b_{12}, b_{21} не равно нулю.

Нам понадобится следующий хорошо известный факт: условие

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{\text{const}}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))} \tag{7}$$

является необходимым для подобия оператора T нормальному оператору.

Обозначим через $\sqrt{\lambda}$ ветвь многозначной аналитической функции $\sqrt{\lambda}$ с разрезом вдоль $\mathbb{R}_+$ и такую, что $\sqrt{-1} = i$. Будем считать, что $\sqrt{\lambda} \geq 0$ для $\lambda \geq 0$.

Предложение 4. Непрерывный спектр оператора A_B совпадает с действительной прямой, $\sigma_c(A_B) = \mathbb{R}$. Точечный спектр (множество собственных значений) $\sigma_p(A_B)$ оператора A_B состоит из $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ таких, что

$$\det(B - M(\lambda)) = 0\ , \qquad \text{где } M(\lambda) := \begin{pmatrix} i\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{i\sqrt{-\lambda}} \end{pmatrix}\ . \tag{8}$$

Доказательство. Простые вычисления показывают, что на действительной оси собственных значений нет, откуда легко следует утверждение о непрерывном спектре.

Второе утверждение можно получить стандартным способом, однако мы воспользуемся терминологией граничных троек (см., например, [12]). Заметим, что $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, где

$$\Gamma_1 y := \operatorname{col}(y'(+0)\ , -y(-0))\ ,\ \Gamma_0 y := \operatorname{col}(y(+0)\ , y'(-0))\ ,\ \mathcal{H} := \mathbb{C}^2,$$

является граничной тройкой для A_0^*. Соответствующая этой граничной тройке функция Вейля имеет вид

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} i\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{i\sqrt{-\lambda}} \end{pmatrix}\ .$$

Кроме того, $D(A_B) = \{y \in D(A_0^*) : \Gamma_1 y = B\Gamma_0 y\}$. Утверждение о точечном спектре следует теперь из [12, Предложение 4]. $\square$

Если $\lambda \in \mathbb{C}_+$, то $\sqrt{-\lambda}/\sqrt{\lambda} = i$, поэтому

$$\det(B - M(\lambda)) = -ib_{22}\sqrt{\lambda} + \det B - i + b_{11}\frac{1}{-i\sqrt{-\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} q(\sqrt{\lambda}).$$

Предложение 5. Если $\lambda_0 \in \mathbb{C}_+$ является нулём второго порядка функции $q(\sqrt{\lambda})$, то у оператора A_B есть собственный и присоединённый вектора, соответствующие собственному значению λ_0, и оценка (7) не выполняется в окрестности точки λ_0.

Рассмотрим теперь случай, когда ноль функции $q(\sqrt{\lambda})$ попадает на непрерывный спектр.

Предложение 6. Если $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $z_0 = \sqrt{\lambda_0}$ является нулём полинома $q(z)$, то для оператора A_B оценка (7) не выполняется в окрестности точки λ_0.

Если $\lambda_0 = 0$ и $z_0 = \sqrt{\lambda_0} = 0$ является нулём второго порядка полинома $q(z)$, то для оператора A_B оценка (7) не выполняется в окрестности точки $\lambda_0 = 0$.

Замечание 5. Если $z_0 = 0$ является нулём первого порядка полинома $q(z)$, то для оператора A_B оценка (7) в окрестности точки $\lambda_0 = 0$ оказывается верной.

Предложение 7. Для того чтобы оценка (7) выполнялась при $\lambda \to \infty$ необходимо, чтобы функция $q(z)$ имела полюс на бесконечности.

Из предложений 1 – 3 следует необходимость выполнения условий 1) - 3) на полином $q(z)$, для подобия оператора A_B нормальному.

Если $\lambda \in \mathbb{C}_-$, то $\sqrt{-\lambda}/\sqrt{\lambda} = -i$, поэтому

$$\det(B - M(\lambda)) = -ib_{22}\sqrt{\lambda} + \det B + i - b_{11}\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{-\sqrt{\lambda}}\overline{q^*(\overline{-\sqrt{\lambda}})}.$$

Аналогичным образом показываем, что условия 1) - 3) на полином $q^*(z)$ необходимы, для подобия оператора A_B нормальному оператору.

Доказательство достаточности основанно на критерии подобия замкнутого оператора самосопряжённому [10], [11].

Список литературы

[1] Beals R. *Indefinite Sturm-Liouville problems and half range completeness* // J. Different. Equat.—1985.— V. 56, no. 3.— P.391–407.

[2] Пятков С. Г. *Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения* // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986.—С.65–84.

[3] Пятков С. Г. *Некоторые свойства собственных функций линейных пучков* // Сибирский мат. журнал.—1989.—Т. 30, no. 4.—С.111–124.

[4] Ćurgus B., Najman B. The operator $-(sgnx)\frac{d^2}{dx^2}$ is similar to selfadjoint operator in $L^2(\mathbb{R})$. // Proc. Amer. Math. Soc.—1995.— V. 123.—P.1125–1128.

[5] Ćurgus B., Najman B. Positive differential operator in Krein space $L^2(\mathbb{R})$. // Oper. Theory Adv. and Appl.,Birkhäuser, Basel.—1996.— V. 87.—P.95–104.

[6] Karabash I. M., *J-selfadjoint ordinary differential operators similar to selfadjoint operators* // Methods of Functional Analysis and Topology.—2000.—V. 6, no. 2.—P.22–49.

[7] Фадеев М. М., Штеренберг Р. Г. *О подобии некоторых сингулярных дифференциальных операторов самосопряжённым* // Записки научных семинаров ПОМИ. —2000.—Т. 270.—С.336–349.

[8] Ćurgus B., Najman B. Positive differential operator in Krein space $L^2(\mathbb{R}^n)$. // Oper. Theory Adv. and Appl.,Birkhäuser, Basel.—1998.—V. 106.—P.113–130.

[9] Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. *Функциональный анализ.*— Киев: Высшая школа, 1990.— 600 с.

[10] Набоко С. Н. *Об условиях подобия унитарным и самосопряжённым операторам* // Функц. анализ и его прилож.—1984.—Т. 18, no. 1.—С.16–27.

[11] Маламуд М. М. *Критерий подобия замкнутого оператора самосопряженному* // Укр. мат. журн.— 1985.—Т. 37, no. 1.—С.49–56.

[12] Деркач В. А., Маламуд М. М. *Характеристические функции почти разрешимых расширений эрмитовых операторов* // Укр. мат. журн.—1992.—Т. 44, no. 4.—С.435–459.

[13] Ахиезер Н. И., Глазман И. М. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.* — Харьков: "Вища Школа", 1978, Т. 2.—287 с.

A. S. Kostenko, I. M. Karabash, Department of Mathematics, Donetsk National University, Universitetskaja 24, 83055 Donetsk, Ukraine

E-mail: `karabashi@yahoo.com`

Скалярные операторы в конечномерных пространствах, представимые в виде суммы проекторов.

Л. Л. Оридорога
Донецкий национальный университет
Украина

Задача о представлении скалярных операторов λI в гильбертовом пространстве H исследовались различными авторами (см., например, [1] и [2] и список литературы в них)

Так в [1] рассматриваются множества Λ_k — множество λ таких, что λI представляется в виде суммы k проекторов и Σ_k — множество λ таких, что λI представляется в виде суммы k ортопроекторов.

Именно, в [1] показано, что $\Lambda_k = \Sigma_k$ при $k \leq 4$ и

$$\Lambda_1 = \{0, 1\}, \quad \Lambda_2 = \{0, 1, 2\}, \quad \Lambda_3 = \{0, 1, \frac{3}{2}, 2, 3\}, \quad \Lambda_4 = \{0, 1, 2, 2 \pm \frac{2}{n}, 3, 4\}.$$

Кроме того, там же, в [1], показано что $\Lambda_k = \mathbb{C}$ при $k \geq 5$ и

$$\Sigma_k \supset \{0, 1, 1 + \frac{n}{n(k-3)+2},\ [1 + \frac{1}{k-3}, k-1-\frac{1}{k-3}],\ k-1-\frac{n}{n(k-3)+2}, k-1, k\}$$

при $k \geq 6$. В [2] показано также, что

$$\Sigma_k \subset \{0, 1, 1 + \frac{1}{k-1},\ \ [1 + \frac{1}{k-2}, k-1-\frac{1}{k-2}],\ \ k-1-\frac{1}{k-1}, k-1, k\}$$

при $k \geq 6$.

Отметим еще работу [3] в которой показано, что оператор $0I$ может быть представлен в виде суммы пяти (но не может быть представлен в виде суммы четырёх !) **ненулевых** проекторов.

В данной заметке описываются Λ^n и Σ^n — множества таких λ, что скалярный оператор λI в n-мерном гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^n$ может быть представлен в виде суммы нескольких произвольных проекторов или ортопроекторов соответственно. Другими словами описываются множества

$$\Lambda^n = \{\lambda\ :\ \lambda I = \sum_{j=1}^{k} P_j\}, \qquad \text{где } P_j = P_j^2 \tag{1}$$

и

$$\Sigma^n = \{\lambda\ :\ \lambda I = \sum_{j=1}^{k} P_j\}, \qquad \text{где } P_j = P_j^* = P_j^2. \tag{2}$$

Подчеркнём, что при этом в отличии от работ [1] и [2] рассматриваются суммы произвольного числа проекторов, т.е. k в формулах (1) и (2) пробегает всё множество натуральных чисел.

Лемма 1. *Пусть H — эвклидово пространство размерности n.*

Пусть $\{P_j\ :\ j = 1, 2, \ldots, k\}$ — система проекторов, такая, что

$$\sum_{j=1}^{k} P_j = \lambda I. \tag{3}$$

Тогда либо $\lambda = 0$, либо $\lambda = \frac{m}{n}$, где m — целое и $m \geq n$.

Доказательство. Из равенства (3) следует что
$$\sum_{j=1}^{k} \operatorname{tr} P_j = \lambda \operatorname{tr} I = \lambda n = m. \tag{4}$$
И поскольку
$$\operatorname{tr} P_j = \operatorname{rank} P_j \tag{5}$$
— целые числа, то и m также целое число.

Кроме того из равенств (4) и (5) следует, что
$$m = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{tr} P_j = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{rank} P_j.$$
И поскольку
$$\sum_{j=1}^{k} \operatorname{rank} P_j \geq \operatorname{rank} \sum_{j=1}^{k} P_j,$$
то $m \geq \operatorname{rank} I = n$.

Теперь покажем, что если n и m удовлетворяют условиям леммы 1, то оператор $\frac{m}{n} I$ может быть представлен в виде суммы ортопроекторов. Пример таких ортопроекторов будет представлен в явном виде.

Пусть n и m – натуральные числа, причём $n \leq m$.

Пусть также $0 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_n < m$. И вектора $\vec{x_l}$ $(0 \leq l < m)$ определены следующим образом:
$$\vec{x_l} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i k_1}{m} l} \\ e^{\frac{2\pi i k_2}{m} l} \\ \dots \\ e^{\frac{2\pi i k_n}{m} l} \end{pmatrix}.$$

Лемма 2. *Пусть P_l – ортопроектор на $\vec{x_l}$.*

Тогда $\sum\limits_{l=0}^{m-1} P_l = \frac{m}{n} I$.

Доказательство. Обозначим p_{lij} элемент матрицы P_l, т.е.
$$P_l = (p_{lij})_{i,j=1}^{n}.$$
Поскольку вектор $\vec{x_l}$ нормирован, то
$$P_l = x_l \cdot x_l^*.$$
Поэтому
$$p_{lij} = \frac{1}{n} e^{\frac{2\pi i (k_i - k_j)}{m} l}.$$
Причём $|k_i - k_j| < m$ и кроме того $|k_i - k_j| = 0$ тогда и только тогда, когда $i = j$.

Следовательно
$$\sum_{l=0}^{m-1} p_{lij} = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{m-1} \left(e^{\frac{2\pi i (k_i - k_j)}{m}} \right)^l = \frac{m}{n} \delta_i^j.$$
А это и означает, что $\sum\limits_{l=0}^{m-1} P_l = \frac{m}{n} I$.

Теперь легко может быть доказана следующая теорема, дающая описание множеств Σ^n и Λ^n.

Теорема 1. *При всех n*

$$\Sigma^n = \Lambda^n = \{0\} \cup \{\frac{m}{n} \ : \ m \in \mathbb{N} \ \& \ m \geq n\}. \tag{6}$$

Доказательство. Из леммы 1 следует, что

$$\Lambda^n \in \{0\} \cup \{\frac{m}{n} \ : \ m \in \mathbb{N} \ \& \ m \geq n\}.$$

Из леммы 2 следует, что

$$\{0\} \cup \{\frac{m}{n} \ : \ m \in \mathbb{N} \ \& \ m \geq n\} \in \Sigma^n.$$

Поэтому из очевидного включения $\Sigma^n \subset \Lambda^n$ вытекает равенство (6)

Ниже приведены примеры наборов ортопроекторов описанных в лемме 2.

Пример 1. $(n = 3, \ m = 4; \quad k_2 = 1, \ k_3 = 2.)$

$$\vec{x_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{x_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\i\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{x_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{x_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-i\\-1\end{pmatrix}$$

При этом

$$P_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}, \qquad P_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-i&-1\\i&1&-i\\-1&i&1\end{pmatrix},$$

$$P_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}, \qquad P_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&i&-1\\-i&1&i\\-1&-i&1\end{pmatrix}.$$

Пример 2. $(n = 5, \ m = 6; \quad k_2 = 1, \ k_3 = 2, k_4 = 3, \ k_5 = 4.)$

$$\vec{x_0} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \vec{x_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\\\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\\-1\\\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\end{pmatrix}, \qquad \vec{x_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\\\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\\-1\\\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\end{pmatrix},$$

$$\vec{x_3} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \qquad \vec{x_4} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\\\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\\-1\\\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\end{pmatrix}, \qquad \vec{x_5} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\\\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\\-1\\\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\end{pmatrix}$$

В этом случае матрицы P_l имеют вид

$$P_l = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^l & \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^l & (-1)^l & \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^l \\ \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^l & 1 & \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^l & \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^l & (-1)^l \\ \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^l & \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^l & 1 & \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^l & \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^l \\ (-1)^l & \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^l & \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^l & 1 & \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^l \\ \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^l & (-1)^l & \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^l & \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^l & 1 \end{pmatrix}$$

Легко убедиться, что сумма этих матриц действительно равна $\frac{6}{5}I$.

Список литературы

[1] *В.И. Рабанович, Ю.С. Самойленко* Когда сумма идемпотентов или проекторов кратна единице // Функциональный анализ и приложения — 2000. — 34, N 4 — p.91–93

[2] *В.И. Рабанович, Ю.С. Самойленко* Скалярные операторы представимые суммой проекторов // Укр. мат. журнал — 2001. — т.53, N 7 — p.939–952

[3] *Bart H., Ehrhart T., Silbermann B.* // Integral Equations Operator Theory — 1994. — 19 — p.123–134

Л.Л. Оридорога, кафедра математического анализа и теории функций, математический факультет, Донецкий национальный университет, ул. Университетская, 24, г. Донецк

E-mail: `oridoroga@skif.net`

Common invariant subspaces for commuting contractions

Marek Kosiek
Mathematical Institute, Jagiellon University,
Cracov, Poland

Keywords: Contractions, Dual algebras, Functional Calculus

The results presented here are contained in [6].

Let $\mathfrak{H}$ be a (complex, separable, infinite dimensional) Hilbert space and $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ the algebra of all bounded linear operators on $\mathfrak{H}$. Denote by $\mathbb{D}$ the (open) unit disk in the complex plane $\mathbb{C}$ and by $\mathbb{T}$ the unit circle. By the *polydisk* $\mathbb{D}^N \subset \mathbb{C}^N$ we mean the Cartesian product of N copies of $\mathbb{D}$ and by $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ the algebra of bounded analytic functions on the polydisk $\mathbb{D}^N$. A set $\Delta \subset \mathbb{D}^N$ is said to be *dominating for* $\mathbb{T}^N$ if

$$\sup_{z\in\Delta} |h(z)| = \|h\|_\infty, \quad \text{for all } h \in H^\infty(\mathbb{D}^N).$$

Several authors (cf., [2], and [9]) have constructed *representations* of $H^\infty(\mathbb{D}^N)$. That is an algebra homomorphism Φ from $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ into $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$. A representation Φ is said to be *generated by* an N–tuple of commuting contractions $T = (T_1, \ldots, T_N)$ if $\Phi_T(p) := \Phi(p) = p(T)$, for any polynomial p in N complex variables. We shall say a representation is *contractive* if $\|\Phi_T(h)\| \le \|h\|_\infty$, for all $h \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$. Recall that the polydisk $\mathbb{D}^N$ is a *spectral set* for the N–tuple $T = (T_1, \ldots, T_N)$ if it satisfies von Neumann's inquality, that is if $\|p(T)\| \le \|p\|_\infty$, for any polynomial p in N complex variables. Note that if the N–tuple T generates a contractive representation, then the polydisk $\mathbb{D}^N$ is a spectral set for the N–tuple.

We define the class $ACC^{(N)}(\mathfrak{H})$ composed of those N–tuples $T = (T_1, \ldots, T_N)$ that generate a contractive representation of $H^\infty(\mathbb{D}^N)$. For an N–tuple to belong to $ACC^{(N)}(\mathfrak{H})$ it is sufficient that the following two conditions are satisfied, first that the polydisk is a spectral set for the

N–tuple and, second, that the N–tuple is absolutely continuous in the sense of [8] (see also [5], and [7]). If $T \in ACC^{(N)}(\mathfrak{H})$, then the first condition holds. Note that the first condition is readily satisfied if $N = 2$, thanks to a celebrated result of T. Ando proving existence of dilations for any pairs of commuting contractions (see [1]) and, of course, if $N = 1$ by the standard Sz.–Nagy-Foiaş dilation theory. If $N > 2$, the first condition is essential for our techniques to work. On the other hand, if the second conditions fails, i.e., if the N–tuple of commuting contractions is not absolutely continuous, then it can be deduced from results in [5] that there exists a common nontrivial invariant subspace for the N–tuple. That is, a subspace $\mathfrak{M}$ of $\mathfrak{H}$, which is nontrivial ($\{0\} \neq \mathfrak{M} \neq \mathfrak{H}$) and invariant for each T_j ($T_j\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$).

Let $T = (T_1, \dots, T_N)$ be an N–tuple of commuting operators acting on $\mathfrak{H}$. We say that T is *left invertible* if there exist an N–tuple of operators (not necessarily commuting) $A_1, \dots, A_N$ such that

$$A_1T_1 + \cdots + A_NT_N = I,$$

where I denotes the identity operator on $\mathfrak{H}$. Similarly, we define *right invertibility* of an N–tuple. The *left (right) spectrum* of T, denoted $\sigma_l(T)$ ($\sigma_r(T)$), consist of those N–tuples $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ of complex numbers such that $(T_1 - \lambda_1, \dots, T_N - \lambda_N)$ is not a left (right) invertible N–tuple. Note that $\sigma_r(T)^* = \sigma_l(T^*)$, where $\sigma_r(T)^*$ denotes those λ such that $\bar{\lambda} \in \sigma_r(T)$. We define the *left essential spectrum* of T by

$$\begin{aligned}\sigma_{le}(T) :=\{(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^N \ &: \text{ there exist an orthonormal sequence of vectors} \\ &\{e_n\} \subset \mathfrak{H} \text{ such that } \|(T_1 - \lambda_1)e_n)\| + \cdots + \|(T_N - \lambda_N)e_n)\| \to 0, \\ &\text{as } n \to \infty\}.\end{aligned}$$

We define the *right essential spectrum* of T by

$$\sigma_{re}(T) = \sigma_{le}(T^*)^*.$$

The union of the left and right (essential) spectrum is called the Harte (essential) spectrum. These definitions, and our notation so far, coincide with those given in [4]. Let us, for the sake of simplicity, denote by σ_{He} the union of σ_{le} and σ_{re} and, similarly, denote by σ_H the union of σ_l and σ_r.

Our main result is as follows

Theorem 1. *Let $T = (T_1, \dots, T_N)$ be an N-tuple of commuting contractions acting on $\mathfrak{H}$ having the polydisk as a spectral set. If $\sigma_H(T) \cap \mathbb{D}^N$ is dominating for $\mathbb{T}^N$ then T has a common (nontrivial) invariant subspace.*

The hypothesis that $\mathbb{D}^N$ is a spectral set is readily satisfied in the case when $N = 2$, by the famous result of Ando [1] about the existence of a joint unitary dilation for pairs. Hence, we obtain the following

Theorem 2. *Let $T = (T_1, T_2)$ be a pair of commuting contractions acting on $\mathfrak{H}$. If $\sigma_H(T) \cap \mathbb{D}^2$ is dominating for $\mathbb{T}^2$ then T has a common (nontrivial) invariant subspace.*

Since T is an N-tuple of commuting contractions the sequence $T^{*n}T^n$ is a nonincreasing sequence of positive operators satisfying the equality

$$0 \leq T^{*n}T^n \leq 1. \tag{1}$$

We recall here that for two multiindices s, t the relation $s < t$ means that $s_j < t_j$ for $j = 1, \dots, N$. It is well known that any nonincreasing sequence of positive bounded operators has a limit in the strong operator topology which is a nonnegative bounded operator. (Due to the metrizability of the strong convergence on bounded sets of operators, we may pass from the nets of multiindices to sequences.) So, we can define the following nonnegative bounded operator on $\mathfrak{H}$:

$$B := \lim_{n\to\infty} T^{*n}T^n = \inf_n T^{*n}T^n.$$

Denote by E the spectral measure of the operator B. Since by (1) B is positive with norm less or equal 1, we have the following spectral representation

$$B = \int_0^1 t\, dE.$$

By a *completely nonisometric* N-tuple of contractions we mean an N-tuple having no nonzero common invariant subspaces on which the restriction of the N-tuple to such subspace would be isometric.

Using the properties of the operator B and its spectral measure E, we get a theorem, which says that for each fixed $x \in \mathfrak{H}$ and each integer n we can find a sequence of multiindices $k_1, \dots, k_n$ such that the vectors $T^{k_1}x, \dots, T^{k_n}x$ are "almost orthogonal".

Theorem 3. *Let $T = (T_1, \dots, T_N)$ be a completely nonisometric N-tuple of commuting contractions and let $\delta > 0$ be given. Then for a fixed $x \in \mathfrak{H}$ and an arbitrary $n \in \mathbb{N}$ we can find a finite sequence of real numbers $0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < 1$ and a corresponding sequence of multiintegers $k_1 < \dots < k_n$ such that*

$$\|E([0,1] \setminus \sigma_i)T^{k_i}x\| < \delta$$

for $i = 1, \dots, n$ and $\sigma_i = [t_i, t_{i+1})$.

As the consequence we obtain the following "vanishing property"which is an essential generalization of Apostol Lemma ([2], Lemma 4.3).

Theorem 4. *Let $T = (T_1, \dots, T_N)$, $\nu > 0$ and $x \in \mathfrak{H}$ with $\|x\| \le 1$ be given. Then there exist $\delta > 0$ and $0 < r < 1$ such that for each fixed $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{D}^N$ with $|\lambda_j| > r$, $j = 1, \dots, N$, and all vectors $y \in \mathfrak{H}$ of norm one, with $\|(T_j - \lambda_j)y\| < \delta$, for $j = 1, \dots, N$, we have $|(Wx, y)| < \nu$ for any operator W in the commutant of $T_1, \dots, T_N$ such that $\|W\| \le 1$.*

The obove theorem together with others, more classical "vanishing properties"or their genaralizations leads to the following

Theorem 5. *Let $T = (T_1, \dots, T_N) \in ACC^{(N)}(\mathfrak{H})$. Then in each of the following situations T has a common (nontrivial) invariant subspace*

(1) *$\sigma_{le}(T) \cap \mathbb{D}^N$ is dominating for $\mathbb{T}^N$.*
(2) *$\sigma_{re}(T) \cap \mathbb{D}^N$ is dominating for $\mathbb{T}^N$.*
(3) *$\sigma_{He}(T) \cap \mathbb{D}^N$ is dominating for $\mathbb{T}^N$ and $T_j \in C_{0\cdot}$ for $j = 1, \dots, N$.*
(4) *$\sigma_{He}(T) \cap \mathbb{D}^N$ is dominating for $\mathbb{T}^N$ and $T_j \in C_{\cdot 0}$ for $j = 1, \dots, N$.*
(5) *$\sigma_{He}(T) \cap \mathbb{D}^N$ is dominating for $\mathbb{T}^N$ and $T_j \in C_{0\cdot}, T_k \in C_{\cdot 0}$ for some j, k.*

Recall that an operator $S \in C_{0\cdot}$ if $S^n x \to 0$ for $n \to \infty$, $x \in \mathfrak{H}$ and $S \in C_{\cdot 0}$ if $S^* \in C_{0\cdot}$.

Proof of Theorem 1. It is well–known that if $\lambda \in \sigma_l(T) \setminus \sigma_{le}(T)$, then λ is an eigenvalue. A similar argument works for the right spectrum and consequently also for Harte spectrum. Thus, in terms of finding common (nontrivial) invariant subspaces, we can always assume that $\sigma_l(T) = \sigma_{le}(T)$, $\sigma_r(T) = \sigma_{re}(T)$ and $\sigma_H(T) = \sigma_{He}(T)$.

If for some j the operator T_j is not in $C_{0\cdot} \cup C_{\cdot 0}$, then, by the well known result of Sz.-Nagy and C.Foiaş (see [10] or Theorem 2.2 of [3]), T_j is quasisimilar to a unitary operator. Consequently T_j has nontrivial hyperinvariant subspaces unless it is equal to the multiplication by a constant. But in the last case the problem is reduced to finding invariant subspaces for the rest of operators in the N-tuple. So, we may assume that for every j, the contraction T_j is either in $C_{0\cdot}$ or in $C_{\cdot 0}$. The rest of the proof consists of reducing to the cases of Theorem 5 through the use of the results contained in [5] to eliminate the situation when the N-tuple T is not absolutely continuous.

References

[1] T. Ando, *On a pair of commutative contractions*, Acta Sci. Math. **24** (1963), 88–90.
[2] C. Apostol, *Functional calculus and invariant subspaces*, J. Operator Theory **4** (1980), 159–190.
[3] H. Bercovici, *Notes on invariant subspaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **23** (1990), 1–36.
[4] R. Curto, *Applications of several complex variables to multiparameter spectral theory*, Surveys of recent results in operator theory, vol. II, ch. 2, pp. 25–90, Surveys of recent results in operator theory, Longman, London, 1988, pp. 25–90.
[5] M. Kosiek, *Representation generated by a finite number of Hilbert space operators*, Ann. Polon. Math. **44** (1984), 309–315.
[6] M. Kosiek and A. Octavio, *On common invariant subspaces for commuting contractions with rich spectrum*, to appear.
[7] ———, *Representations of $H^\infty(\mathbb{D}^N)$ and absolute continuity for N–tuples of contractions*, Houston J. of Mathematics, **23**, (1997), 529–537.
[8] M. Kosiek, A. Octavio, and M. Ptak, *On the reflexivity of pairs of contractions*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 1229–1236.
[9] M. Kosiek and M. Ptak, *Reflexivity of n–tuples of contractions with rich joint left essential spectrum*, Integral Equations Operator Theory **13** (1990), 395–420.
[10] B. Sz.-Nagy and C. Foiaş, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, North Holland, Amsterdam, 1970.

Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński, Reymonta 4, 30-059, Kraków, Poland

E-mail: mko@im.uj.edu.pl

ON OPERATORS COLLINEAR TO THE J-ISOMETRIES

E. I. Iohvidov
Voronezh State Technical University,
Russia

We consider linear operators acting in Kreĭn space H with an indefinite metric $[x,y]=[Jx,y]$, $J=P_+-P_-$, $x,y\in H$, where P_+ and P_- are mutually complementary orthoprojectors. The symbol $\mathcal{L}$ below denotes an arbitrary linear manifold in H, $\mathcal{L}\neq 0$, $\mathcal{L}\subset\mathcal{D}_T$, where $\mathcal{D}_T$ is domain of the linear operator T.

Theorem. *Let operator $(T|\mathcal{L})$ be collinear to the J-isometric one, i.e.*

$$(T\mid\mathcal{L})=\mu\cdot V,$$

where $\mu\in C$, $\mu\neq 0$, and the operator V satisfies condition

$$[Vx,Vy]=[x,y]\quad\forall x,y\in\mathcal{L}.$$

Then the three following conditions are equivalent:

1. The operator $(T\mid\mathcal{L})$ is collinear to some uniformly J-nonexpansive operator, i.e.

$$(T\mid\mathcal{L})=\lambda\cdot U,$$

where the operator U complies with condition

$$[Ux,Ux]\le[x,x]-\delta\,||\,x\,||^2$$
$$\forall x\in\mathcal{L}\quad(\delta>0.)$$

2. The linear manifold $\mathcal{L}$ is uniformly definite.

3. The operator $(T|\mathcal{L})$ is collinear to some uniformly J-noncontractive operator, i.e.

$$(T \mid \mathcal{L}) = \nu \cdot W,$$

where the operator W satisfies condition

$$[Wx, Wx] \geq [x, x] + \tau \cdot \| x \|^2$$
$$\forall x \in \mathcal{L} \quad (\tau > 0).$$

The two following statements make more precise the values of numbers λ and ν in the main theorem.

Lemma 1. *If the linear manifold $\mathcal{L}$ is uniformly negative* ($[x, x] \leq \gamma_- \cdot \|x\|^2 \ \forall x \in \mathcal{L}$ $(\gamma_- < 0),$) *then:*

1) For any $\delta > 0$ the formula

$$\lambda = \lambda(\delta) = | \mu | \sqrt{\frac{\gamma_-}{\gamma_- - \delta}}$$

is true.

2) For any $\tau \in (0; -\gamma_-)$ the formula

$$\nu = \nu(\tau) = | \mu | \sqrt{\frac{\gamma_-}{\gamma_- + \tau}}$$

is true.

Lemma 2. *If the linear manifold $\mathcal{L}$ is uniformly positive* ($[x, x] \geq \gamma_+ \|x\|^2 \ \forall x \in \mathcal{L}$, $(\gamma_+ > 0)$)*, then:*

1) For any $\delta \in (0; \gamma_+)$ we have

$$\lambda = \lambda(\delta) = | \mu | \sqrt{\frac{\gamma_+}{\gamma_+ - \delta}}.$$

2) For any $\tau > 0$ we have

$$\nu = \nu(\tau) = | \mu | \sqrt{\frac{\gamma_+}{\gamma_+ + \tau}}.$$

E. I. Iohvidov, Voronezh State Technical University, Russia

Invariant and hyperinvariant subspaces of the operator J^α in the Liouville spaces

G. S. Romashchenko
Donetsk National University,
Ukraine

1. Introduction

It is well known ([B], [GLR], [N]) that the Volterra integration operator defined on $L_p[0,1]$ by $J\colon f \to \int_0^x f(t)\,dt$ is unicellular for $p \in [1, \infty)$ and it's lattice of invariant subspaces is anti-isomorphic to the segment $[0, 1]$.

Tha same is also true for the complex powers of the integration operator J:

$$J^\alpha\colon f \to \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t)\,dt, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0 \tag{1}$$

More precisely, the lattice of invariant and hyperinvariant subspaces of the operator J^α are of the form:

$$\operatorname{Lat} J^\alpha = \operatorname{Hyplat} J^\alpha = \{E_a := \chi_{[a,1]} L_p[0,1] \colon 0 \le a \le 1\} \tag{2}$$

E. Tsekanovskii [Ts] has obtained a description of the lattice $\operatorname{Lat} J_k$ of invariant subspaces of the integration operator $J_k := J$ defined on the Sobolev space $W_2^k[0,1]$.

I. Domanov and M. Malamud [DM1]- [DM2] have described the lattices $\operatorname{Lat} J_k^\alpha$ and $\operatorname{Hyplat} J_k^\alpha$ of invariant and hyperinvariant subspaces of the operator J_k^α defined on $W_p^k[0,1]$ and investigated the operator algebras $\operatorname{Alg} J_k^\alpha$, commutant $\{J_k^\alpha\}'$, and double commutant $\{J_k^\alpha\}''$.

In particular, it is shown in [DM1]-[DM2] that the operator J^α is unicellular on $W_2^k[0,1]$ (with $k \ge 2$) if and only if $\alpha = 1$.

It is also shown in [DM1]-[DM2] that $\operatorname{Hyplat} J_k^\alpha = \operatorname{Hyplat} J_k = \operatorname{Hyplat}^c J_k \cup \operatorname{Hyplat}^d J_k$, where

$$\operatorname{Hyplat}^c J_k = \{E_a \colon 0 \le a \le 1\}, \qquad E_a := \{f \colon f \in W_p^k[0,1], f = 0 \text{ for } x \in [0,a]\} \tag{3}$$

is a continuous chain and $\operatorname{Hyplat}^d J_k = \{E_l^k\}_{l=0}^k$ with $E_k^k := W_p^k[0,1]$ and

$$E_l^k = \{f \in W_p^k[0,1] \colon f(0) = \cdots = f^{(k-l-1)}(0) = 0\}, \qquad l \in \{0,1,\dots,k-1\} \tag{4}$$

is a discrete chain.

The following description of the commutant $\{J_k^\alpha\}'$: $R \in \{J_k^\alpha\}' \iff R = I + R_1$, where $R_1 \in \bigcap_{q>1} \sigma_q$ have been also obtained in [DM2].

In the paper under consideration we generalize several results from [DM1]-[DM2] to the case of Liouville space $L_p^s[0,1]$ ($s > 0$). Namely, we describe the lattices $\operatorname{Lat} J_s^\alpha$ and $\operatorname{Hyplat} J_s^\alpha$ of invariant and hyperinvariant subspaces of the operator J_s^α defined on Liouville spaces $L_p^s[0,1]$ and investigate the operator algebras $\operatorname{Alg} J_s^\alpha$, commutant $\{J_s^\alpha\}'$, and double commutant $\{J_s^\alpha\}''$. For integer $s = k \in \mathbb{Z}_+$ our results coinside with that from [DM2]. We follow the method proposed in [DM2].

2. Notations

$W_p^k[0,1]$ stands for the Sobolev space: $f \in W_p^k[0,1]$ if f has $k-1$ absolutely continuous derivatives and $f^{(k)} \in L_p[0,1]$.

Let $s > 0$. Then $k - 1 < s \le k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. $L_p^s[0,1]$ stands for the Liouville space: $f \in L_p^s[0,1]$ if f the fractional derivative of the order $s - k + 1$ belongs to $W_p^k[0,1]$. The space $L_p^s[0,1]$ may be characterized by the following way: $f \in L_p^s[0,1]$ iff it admits a representation

$$f(x) = \sum_{m=1}^{k} c_m \frac{x^{s-m}}{\Gamma(s-m+1)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^x (x-t)^{s-1} g(t)\, dt$$

where $c_m = f^{(s-m)}(0)$ and $g(x) = f^{(s)}(x)$.

It is a Banach space with respect to the norm:

$$\|f\|_{w_p^s[0,1]} = \left(\sum_{m=1}^{k} |f^{(s-m)}(0)|^p + \int_0^x |f^{(s)}(x)|^p\, dx \right)^{1/p}.$$

We denote by $L_{p,0}^s[0,1] = \{f \in L_p^s[0,1] \colon f^{(s-m)}(0) = 0, 1 \le m \le k\}$.

3. INVARIANT SUBSPACES AND CYCLIC SUBSPACES OF THE OPERATOR J^α IN $W_p^s[0,1]$ AND $W_{p,0}^s[0,1]$.

Let $J_{s,0}^\alpha$ and J_s^α stand for the operator J^α defined on $L_{p,0}^s[0,1]$ and $L_p^s[0,1]$ respectively. In what follows we assume that either $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ or $\operatorname{Re}\alpha > k - \frac{1}{p}$. Under this assumption the operator J_s^α is well defined on $L_p^s[0,1]$.

Lemma 1. *The operator $J_{s,0}^\alpha$ defined on $L_{p,0}^s[0,1]$ is isometrically equivalent to the operator J_0^α on $L_p[0,1]$.*

Definition 1. Let X be a Banach space. An operator $T \in [X]$ is called unicellular if its lattice of invariant subspaces $\operatorname{Lat} T$ is linearly ordered. We will say that $\operatorname{Hyplat} T$ is unicellular if it is linear ordered too.

Proposition 1. Let $\operatorname{Re}\alpha > 0$ and $J_{s,0}^\alpha$ be defined on $L_p^s[0,1]$. Then

$$\operatorname{Lat} J_{s,0}^\alpha = \{E_a^s\colon 0 \le a \le 1\}, \qquad E_a^s = \{f \in L_{p,0}^s[0,1]\colon f(x) = 0 \text{ for } x \in [0,a]\}. \tag{5}$$

and thus $J_{s,0}^\alpha$ is unicellular.

To present a description of $\operatorname{Lat} J_s^\alpha$ we recall a description of $\operatorname{Lat} Q$ for a nilpotent operator $Q \in [\mathbb{C}^k]$.

Theorem 1 ([BF], [GLR])**.** *If Q is nilpotent of a finite-dimensional vector space V, then*

$$\operatorname{Lat} Q = \bigcup_M \{[M, Q^{-1}M]\colon M \in \operatorname{Lat}(Q|QV)\},$$

where $[M, Q^{-1}M]$ is an interval in the lattice of all subspaces of V. Each interval satisfies the equation

$$\dim Q^{-1} - \dim M = \dim\ker Q.$$

For each bounded operator T on Banach space X, $(T \in [X])$ and $E \in \operatorname{Lat} T$ we denote by $\hat{T}_E$ the quotient operator acting on the quotient space X/E according to the natural rule $\hat{T}\hat{f} = \widehat{(Tf)}$, where $\hat{f}$ stands for a coset $\hat{f} = f + E$.

Theorem 2. *Let π be a quotient map,*

$$\pi\colon L_p^s[0,1] \to X_k := L_p^s[0,1]/L_{p,0}^s[0,1]$$

and $\hat{J}^\alpha$ be the quotient operator on X_k. Then $\operatorname{Lat} J_s^\alpha = \operatorname{Lat}^c J_s^\alpha \cup \operatorname{Lat}^d J_s^\alpha$, where

a)

$$\operatorname{Lat}^c J_s^\alpha = \{E_a^s\colon 0 \le a \le 1\}, \qquad E_a^s = \{f \in L_{p,0}^s[0,1]\colon f(x) = 0 \textit{ for } x \in [0,a]\}$$

is a "continuous part" of $\operatorname{Lat} J_s^\alpha$;

b)

$$\operatorname{Lat}^d J_s^\alpha = \pi^{-1}(\operatorname{Lat}\hat{J}_s^\alpha) = \bigcup_M \pi^{-1}\{[M, (\hat{J}_s^\alpha)^{-1}M]\colon M \in \operatorname{Lat}(\hat{J}_s^\alpha|\hat{J}_s^\alpha M)\}$$

is a "discrete part" of $\operatorname{Lat} J_s^\alpha$.

Here $[M, (\hat{J}_s^\alpha)^{-1}M]$ is a closed interval in the lattice ov all subspaces of X_k. Each interval satisfies the equation

$$\dim(\hat{J}_s^\alpha)^{-1}M - \dim M = d,$$

where $d = \min\{-[-\alpha], k\}$.

One obtains the proof using Lemma 1 and Theorem 1.

Corollary 1. *Let $0 < s \le 1$. The operator J_s^α is unicellular in $L_p^s[0,1]$ if $\operatorname{Re}\alpha > 1 - \frac{1}{p}$. Moreover*

$$\operatorname{Lat} J_s^\alpha = \operatorname{Lat} J_{s,0}^\alpha \cup L_p^s[0,1] = \{E_a\colon 0 \le a \le 1\} \cup L_p^s[0,1].$$

Corollary 2. *Let $s > 1$ $(k-1 < s \le k)$ and either $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ or $\operatorname{Re}\alpha > k - \frac{1}{p}$. Then:*

1) the operator J_s^α is unicellular in $L_p^s[0,1]$ if and only if $\alpha = 1$;

2) $\operatorname{Lat} J_s = \operatorname{Lat}^c J_s \cup \operatorname{Lat}^d J_s$, where $\operatorname{Lat}^c J_s$ is defined by (5) and

$$\operatorname{Lat}^d J_s = \{L_{p,0}^s = E_0^s \subset E_1^s \subset \dots \subset E_k^s := L_p^s[0,1]\}$$
$$E_l^s := \operatorname{span}\{L_p^s, x^{s-1}, \dots, x^{s-l}\}, \quad 1 \le l \le k.$$

Definition 2. Recall that a subspace E of a Banach space X is called a cyclic subspace for an operator $T \in [X]$ if $\operatorname{span}\{T^n E \colon n \ge 0\} = X$. A vector $f \in X$ is called cyclic if $\operatorname{span}\{T^n f \colon n \ge 0\} = X$. The set of all cyclic subspaces of an operator T is denoted by $\operatorname{Cyc}(T)$.

Definition 3. We set

$$\mu_T := \inf_E \{\dim E \colon E \in \operatorname{Cyc}(T)\}.$$

μ_T is called the spectral multiplicity of an operator T in X. Note that μ_T can be ∞.

It is clear that the operator T is cyclic iff $\mu_T = 1$.

The following result immediately follows from Proposition 1.

Proposition 2. Let $\operatorname{Re}\alpha > 0$. Then the operator $J_{s,0}^\alpha$ defined on $L_{p,0}^s[0,1]$ is cyclic. Moreover the following equivalence holds:

$$f \in \operatorname{Cyc} J_{s,0}^\alpha \iff \int_0^\varepsilon |f(x)|^p \, dx > 0 \text{ for all } \varepsilon > 0.$$

Proposition 3. Let $k-1 < s \le k$.

1) The spectral multiplicity $\mu_{J_s^\alpha}$ of J_s^α is

$$\mu := \mu_{J_s^\alpha} = \begin{cases} \min\{\alpha, k\}, & \alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\} \\ k, & \alpha \notin \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}. \end{cases} \tag{6}$$

2) The system $\{f_j\}_1^N$ of vectors $f_j \in L_p^s[0,1]$ generates a cyclic subspace for J_s^α if and only if:

i) $N \ge \mu$

ii) $\operatorname{rank} W_\mu\{f_1, \dots, f_N\}(0) = \mu$, where

$$W_\mu\{f_1,\dots,f_N\}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & \dots & f_N(x) \\ f_1'(x) & \dots & f_N'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(\mu-1)}(x) & \dots & f_N^{(\mu-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Corollary 3. *Let μ be befined by (6). Than a system $\{f_j\}_1^\mu$ generates a cyclic subspace in $L_p^s[0,1]$ for J_s^α if and only if $\det W_\mu\{f_1,\dots,f_\mu\}(0) \ne 0$.*

Definition 4 ([NV])**.** Let $A \in [X]$. Then

$$\operatorname{disc} A := \sup_{E \in \operatorname{Cyc} A} \min\{\dim E' \colon E' \subset E, E \in \operatorname{Cyc} A\}.$$

$\operatorname{disc} A$ is called a disc-characteristic of an operator A.

It is clear, that $\operatorname{disc} A \ge \mu_A$. It is important to note that $\operatorname{disc} A$ as well as μ_A depends not of A itself, but only on $\operatorname{Lat} A$.

Proposition 4. Let J_s^α be as above. Than

$$\operatorname{disc} J_s^\alpha = \mu_{J_s^\alpha}.$$

4. Commutant $\{J_s^\alpha\}'$ and the lattice Hyplat J_s^α

As usual, $\{T\}'$ stands for the commutant of the operator T defined on the Banach space X: $\{T\}' = \{R \in [X] \colon RT = TR\}$.

Recall that an invariant subspace $E \subset X$ of an operator $T \in [X]$ is called hyperinvariant for T if E is invariant for any bounded operator R that commutes with T, that is for $R \in \{T\}'$.

As usual, $\operatorname{Hyplat} T$ stands for the lattice of all hyperinvariant subspaces of T.

Proposition 5. Let $\operatorname{Re}\alpha > 0$ and $J_{s,0}^\alpha$ be the operator J^α defined on $L_{p,0}^s[0,1]$. Then $R \in \{J_{s,0}^\alpha\}'$ if and only if $R \in [L_{p,0}^s[0,1]]$ and

$$(Rf)(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x r(x-t)f(t)\,dt, \qquad r(x) \in L_{p'}[0,1], \quad (p')^{-1} + p^{-1} = 1.$$

Corollary 4. *The lattices of the invariant and hyperinvariant subspaces of the operator $J_{s,0}^\alpha$ coinside:*

$$\operatorname{Hyplat} J_{s,0}^\alpha = \operatorname{Lat} J_{s,0}^\alpha = \{E_a^s \colon 0 \le a \le 1\}, \qquad E_a^s = \{f \in L_{p,0}^s[0,1] \colon f(x) = 0, x \in [0,a]\}.$$

Theorem 3. *Let either $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ or $\operatorname{Re}\alpha > k - \frac{1}{p}$ $(k-1 < s \le k)$ and J_s^α be the operator J^α on $L_p^s[0,1]$. Then $R \in \{J_s^\alpha\}'$ if and only if*

$$(Rf)(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x r(x-t)f(t)\,dt, \qquad r(x) \in W_p^k[0,1],$$

In particular, $\{J_s^\alpha\}'$ is commutative algebra and does not depend on α.

Corollary 5. *The double commutant $\{J_s^\alpha\}''$ of the operator J_s^α coinsides wih it's commutant: $\{J_s^\alpha\}'' = \{J_s^\alpha\}' = \{J_s\}' = \{J_s\}''$.*

Proposition 6. The lattice $\operatorname{Hyplat} J_s^\alpha$ is unicellular. $\operatorname{Hyplat} J_s^\alpha = \operatorname{Lat} J_k$.

Corollary 6. *Let $\alpha \ne 1$. Then* $\operatorname{Hyplat} J_s^\alpha = \operatorname{Lat} J_s^\alpha$ *if and only if* $0 \le s \le 1$.

Corollary 7. *Let $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, $k-1 < s \le k$, $\alpha \le k$. Then*

$$\operatorname{Hyplat}^d J_s^\alpha = \pi^{-1}(\operatorname{Hyplat} J^\alpha(0;k))$$

if and only if k is odd and $\alpha = 2$.

Example 1. Let $\alpha = 2$ and $J_{3,5}^2 \colon L_p^{3,5}[0,1] \to L_p^{3,5}[0,1]$. Then $\operatorname{Hyplat}^d J_{3,5}^2 = \operatorname{Lat}^d J_{3,5}^2 = \{E_0^{3,5}, E^{3,5}, E_2^{3,5}, E_3^{3,5}, E_4^{3,5}\}$, but $\pi^{-1}(\operatorname{Hyplat} J^2(0;3,5)) = \{E_0^{3,5}, E_2^{3,5}, E_4^{3,5}\}$.

Theorem 3 allows us to present a description of the algebra $\operatorname{Alg} J_s^\alpha$.

Proposition 7. The following are true:

1) If either $\alpha = 1$ or $s \le 1$, then $\operatorname{Alg} J_s^\alpha = \{J_s^\alpha\}''$;

2) If $1 < \alpha \le k-1 < s \le k$, then $\operatorname{Alg} J_s^\alpha = \{T = cI + R \colon c \in \mathbb{C}, R \in \operatorname{Alg}_0 J_s^\alpha\}$, where

$$\operatorname{Alg}_0 J_s^\alpha = \{R \colon Rf = r * f, r \in W_p^{k-1}[0,1], r^{(j)}(0) = 0 \quad \text{for } j \ne i\alpha - 1, \quad i \le \left[\frac{k-1}{\alpha}\right]\};$$

3) If $s \ge 2$ and $\operatorname{Re}\alpha \ge k - \frac{1}{p}$, then

$$\operatorname{Alg} J_s^\alpha = \{T = cI + R \colon c \in \mathbb{C}, Rf = r * f, r \in W_{p,0}^{k-1}[0,1]\};$$

Corollary 8. $T \in \operatorname{Alg} J_s^\alpha$ *if and only if the quotient operator*

$$\hat{T} \in \operatorname{Alg}(J(0;s)^\alpha) = \{J(0;s)^\alpha\}''.$$

References

[BF] L. Brikman, P. A. Fillmore. *The invariant subspace lattice of a linear transformation.* — Canad. J. Math. 19 : (1967) 810–822.

[B] M. S. Brodskii. *Triangular and Jordan Representation of Linear Operators.* — Transl. Math. Monographs 32, Ander Math. Soc.: Providence RI, 1971.

[DM1] I. Yu. Domavov, M. M. Malamud. *Invariant and hyperinvariant subspaces of the operator J^α defined on a Sobolev spaces.* — Dopov. NAN Ukr., 7 (2001), 37–42.

[DM2] I. Yu. Domavov, M. M. Malamud. *Invariant and hyperinvariant subspaces of an operator J^α and related operator algebras in Sobolev spaces.* — Linear Alg. and Appl. V.346 (2002).

[GK] I. C. Gohberg, M. G. Krein. *Theory and Applications of the Volterra Operators in Hilbert Space.* — Transl. Math. Monographs 24, Amer. Math. Soc. Providence RI (1970).

[GLR] I. Gohberg, P. Lancaster, L. Roadman. *Invariant subspaces of Matrices with Applications.* — (1986).

[N] N. K. Nikolskii. *Treatise on the shift operator.* — Berlin, Springer Verlag (1986).

[NV] N. K. Nikolskii, V. I. Vasjunin. *Control subspaces of minimal dimensions. Unitary and model operators.* — J. Operator Theory 10 (1981), 307–330.

[Ts] E. R. Tsekanovskii. *About description of invariant subspaces and unicellularity of the integration operator in the space $W_2^{(p)}$.* — Uspekhi Mat. Nauk., 6 (126) : (1965), 169–172.

G. S. Romashchenko, Department of mathematics. Donetsk National University, Donetsk, Ukraine

E-mail: max@anahoret.com

Reconstruction of a singular potential in two dimensional Schrödinger operator. Born approximation

Valery S. Serov
Moscow State University,
Russia

Keywords: Born approximation, Schrödinger scattering, Inverse problems.

AMS subject classification: 35P25, 35R30

We prove that in dimension two potential scattering the leading order singularities (in some special cases - all singularities) of unknown potential are obtained exactly by the Born approximation. The proof is based on the new estimates for the continuous spectrum of the Laplacian in the weighted L^p-spaces and the new estimates for the Green-Faddeev's function in L^p. Using these estimates, we prove the well-known Saito's formula, uniqueness theorem of the reconstruction unknown potential by the scattering amplitude and recovering singularities in the general case, in the backscattering, in the fixed angle scattering and at a fixed energy. We prove also the new asymptotical formula for the Fourier transform of the unknown potential. These estimates allow us to consider the potentials with stronger singularities than in previous publications.

1. Introduction

Let $H = -\Delta + q(x)$ be a Schrödinger operator in R^2 with the real-valude potential $q(x)$. We assume in this article that the potential belongs to the weighted space $L^2_\sigma(R^2)$ defined by the norm

$$\|q\|_{2,\sigma} = \left(\int_{R^2} (1+|x|)^{2\sigma} |q(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}, \tag{1}$$

where $\sigma > 1$.

Below we also use the following notations. The space H^t denotes the usual L^2- based Sobolev space and the space W^t_p denotes the L^p- based Sobolev space in R^2.

Under the above assumptions on the potential the Hamiltonian H is a self-adjoint operator in $L^2(R^2)$. The spectrum of this operator consists of a continuous spectrum, filling out the positive real axes (without non-negative eigenvalues), and a possible negative discrete spectrum of the finite multiplicity with zero as the only possible accumulation point. If in addition we suppose the potential has some power decay at the infinity

$$|q(x)| \leq C|x|^{-\mu}, \quad |x| > R,$$

for some $\mu > 2$, then the negative discrete spectrum can be only finite and zero is the point of the continuous spectrum (see [3],[20]). That's why for arbitrary $k \in R, k \neq 0$, we define the scattering solutions of the homogeneous Schrödinger equation

$$(H - k^2)u(x,k) = 0$$

to be the unique solutions of the Lippmann-Schwinger equation

$$u(x,k,\vartheta) = e^{ik(x,\vartheta)} - \int\limits_{R^2} G^+_k(|x-y|)q(y)u(y,k,\vartheta)\,dy,$$

where $\vartheta \in S^1$ and the outgoing fundamental solution of the Helmholtz equation G^+_k is defined as

$$G^+_k(|x|) = \frac{i}{4}H^{(1)}_0(|k||x|),$$

where $H^{(1)}_0$ is the Hankel function of the first kind and of order 0. The function G^+_k is the kernel of the integral operator $(-\Delta - k^2 - i0)^{-1}$.

The solutions $u(x,k,\vartheta)$ for $k > 0$ admit asymptotically as $|x| \to +\infty$ the representation

$$u(x,k,\vartheta) = e^{ik(x,\vartheta)} + Ce^{ik|x|}k^{-1/2}|x|^{-1/2}A(k,\vartheta',\vartheta) + o\left(\frac{1}{|x|^{1/2}}\right),$$

where $\vartheta' = \frac{x}{|x|} \in S^1, C$ is a constant and the scattering amplitude $A(k,\vartheta',\vartheta)$ is defined by

$$A(k,\vartheta',\vartheta) = \int\limits_{R^2} e^{-ik(\vartheta',y)}q(y)u(y,k,\vartheta)\,dy. \tag{2}$$

It what follows we extend A to negative k by $A(k,\vartheta',\vartheta) = \overline{A(-k,\vartheta',\vartheta)}$ to obtain a well-defined scattering amplitude for all $k \in R, k \neq 0$. We use also the fact that $A(k,\vartheta',\vartheta) = A(k,-\vartheta,-\vartheta')$.

We will consider the problem of recovering the singularities of the potential and the potential itself assuming that we know the scattering amplitude $A(k,\vartheta',\vartheta)$ for certain data.

As a different data for the reconstruction of unknown potential $q(x)$ we consider the kernel $G_q(x,y,k)$ of the integral operator $(H - k^2 - i0)^{-1}$ which is the solution of the following integral equation:

$$G_q(x,y,k) = G^+_k(|x-y|) - \int\limits_{R^2} G^+_k(|x-z|)q(z)G_q(z,y,k)\,dz. \tag{3}$$

Definition 1. We say that the Hamiltonian H has a resonance at zero if the homogeneous Lippmann-Schwinger equation for $k = 0$

$$u(x,0,\vartheta) = -\int\limits_{R^2} G^+_0(|x-y|)q(y)u(y,0,\vartheta)\,dy,$$

where $G^+_0(|x|) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x|}$, has a non-trivial solution from the space of the continuous functions uniformly vanishing at the infinity.

It follows from (1.2) that for every fixed point $\xi \in R^2$ (see, for example, [20])

$$(Fq)(\xi) = \lim_{k\to+\infty} A(k,\vartheta',\vartheta), \quad \xi = k(\vartheta - \vartheta')$$

and also we have

$$(Fq)(2\xi) = A(k,-\vartheta,\vartheta) + o_k(1), \quad k = |\xi|, \quad \vartheta = \frac{\xi}{|\xi|},$$

where F is the ordinary Fourier transform in R^2. The latter formulas justify the following definitions.

Definition 2. The inverse Born approximation $q_B(x)$ of the potential $q(x)$ is defined as follows:

$$q_B(x) := \frac{1}{32\pi^3} \int\limits_{R\times S^1\times S^1} e^{-ik(\vartheta-\vartheta',x)} A(k,\vartheta',\vartheta)|k||\vartheta-\vartheta'|\,dk\,d\vartheta\,d\vartheta'. \tag{4}$$

Definition 3. The inverse Born backscattering approximation $q_B^b(x)$ of the potential $q(x)$ is defined as follows:

$$q_B^b(x) := \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{R^2} e^{-i(\xi,x)} A(\frac{|\xi|}{2}, -\frac{\xi}{|\xi|}, \frac{\xi}{|\xi|})\,d\xi. \tag{5}$$

Definition 4. The inverse Born fixed angle scattering approximation $q_B^{\vartheta_0}$ of the potential $q(x)$ is defined as follows:

$$q_B^{\vartheta_0}(x) := \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{R\times S^1} e^{-ik(\vartheta-\vartheta_0,x)} A(k,\vartheta_0,\vartheta)|k||\vartheta-\vartheta_0|\,dk\,d\vartheta, \tag{6}$$

where $\vartheta_0 \in S^1$ is fixed.

It is very easy to see that within the Born approximation, the scattering amplitude is simply the Fourier transform of the unknown potential. The weaker the potential, the better is this approximation. But even when the potential is not weak the Fourier transform of a scattering amplitude contains essential information of the potential as was shown in [15] and [17] in two dimensions and in [16] and [18] in three and higher dimensions. In a series of papers starting from 1969 Prosser [19] has shown that the inverse backscattering problem has a unique solution assuming the potential has a small enough weighted Hölder norm. Generic uniqueness results for the backscattering problem in two and three dimensions were obtained by Eskin and Relston [4]-[6]: they proved that the nonlinear operator taking the potential to the backscattering data is an analytic local homomorphism on an open and dense set of an appropriate functional space (some subsets of Sobolev's spaces). Without any smallness assumptions Stefanov [26] has shown that if two compactly supported $L^\infty-$ potentials q_1 and q_2 have the same backscattering data and in addition he has assumed $q_1 \geq q_2$, then in fact $q_1 = q_2$. Stefanov [26]-[27] gave also a simple proof in three dimensions for the generic uniqueness of the backscattering problem and the fixed angle scattering problem in the case of compactly supported potentials belonging to the Sobolev's psace W^4_∞. We recall that in the case of less singularity of the potentials (compare with our case in the present paper) Sun and Uhlmann [30] -[31] have considered related problems in two dimensions with the fixed energy data, while Greenleaf and Uhlmann [8] considered related problems in R^n with the backscattering data. We have to mention here the articles of Novikov [13] and Novikov and Henkin [14] where considered some similar problems for singular potentials and also incoming article of Ruiz [21] about the reconstruction of singularities in the fixed angle scattering problem in two dimensional case for the potentials with compact support from Sobolev's spaces $H^s(R^2)$ for some non-negative s.

In this paper we follow to the ideas of the articles [15]-[18]. The main role in these considerations has played the estimates of the resolvent for the Schrödinger operator at the continuous spectrum (see [24]):

$$\|(H-k^2-i0)^{-1}f\|_{L^4_{-\sigma/2}} \leq \frac{C}{|k|^{1/2}}\|f\|_{L^{4/3}_{\sigma/2}}, \quad q(x)\in L^2_\sigma(R^2), \tag{7}$$

where $\sigma > 1$.

In fact we can obtain more sharp estimate of the resolvent for the Schrödinger operator for such potentials (this estimate follows by interpolation from well-known Agmon's estimates for the Laplacian in the L^2- weighted spaces [1] and the estimates for the Laplacian which are contained in the Theorem 2.3 of [9] for $n=2$):

$$\|(H-k^2-i0)^{-1}f\|_{L^4_{-\sigma/2}} \leq \frac{C}{|k|^{3/4}}\|f\|_{L^{4/3}_{\sigma/2}}$$

with the same σ and $q(x)$ as in (1.7).

But for our aims we need the estimate for the integral operator $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} := |q|^{1/2}(-\Delta-k^2-i0)^{-1}|q|^{-1/2}q, \quad q(x)\in L^2_\sigma(R^2),$$

in L^2 which it follows from the latter estimate

$$\|\mathbf{K}\|_{L^2\to L^2} \leq \frac{C}{|k|^{3/4}}. \tag{8}$$

Concerning the inverse problem of reconstruction of the singularities of unknown potential by the knowledge of the scattering amplitude at a fixed energy ($k_0^2 \geq 0$) we would like to say that the crucial role in this problem plays the following Green-Faddeev's function:

$$G_z(x) := \frac{1}{4\pi^2}\int_{R^2}\frac{e^{i(x,z+\xi)}}{\xi^2+2(z,\xi)}\,d\xi, \tag{9}$$

where $z\in\mathbf{C}^2$ is two dimensional complex vector and $(z,z)=k_0^2$ and it's mapping in some L^p- spaces (see [25]):

$$\|e^{-i(x,z)}G_z * f\|_{L^\infty(R^2)} \leq \frac{C}{|z|^\gamma}\|f\|_{L^2\cap L^1(R^2)}, \tag{10}$$

where $\gamma < 2/3$.

Due to last estimate we can prove that there exists the special solution to the Schrödinger equation:

$$(-\Delta+q(x)-k_0^2)u(x)=0$$

in the form (this is the "non-physical"solution or the Faddeev's solution [7]):

$$u(x,z)=e^{i(x,z)}(1+R(x,z)), \tag{11}$$

where function $R(x,z)$ satisfies the estimate

$$\|R\|_{L^\infty(R^2)} \leq \frac{C}{|z|^\gamma}$$

with γ as in (1.10).

The most important fact here is the knowledge of the scattering amplitude at the fixed energy uniquely determines as a function of $\xi\in R^2$ the following function (see [12])

$$T_q(\xi) := \int_{R^2} e^{i(x,\xi)}(1+R(x,z))\,dx, \quad |\xi|>1, \quad T_q(\xi):=0, \quad |\xi|<1, \tag{12}$$

where $z=\frac{1}{2}(i\xi+J\xi)$ and $J=\|a_{jl}\|$ is the matrix with $a_{11}=a_{22}=0, a_{12}=-a_{21}=1$ and for the simplicity we took $k_0=0$. In that case the Born approximation can be has the following form.

Definition 5. The inverse Born fixed energy approximation $q_B^f(x)$ of the potential $q(x)$ is defined as follows:

$$q_B^f(x) := F^{-1}(T_q(\xi)), \tag{13}$$

where F^{-1} is the inverse Fourier transform and the function T_q from (1.12).

The fixed energy inverse problem is well understood in dimensions higher than two (see [7], [10], [28] and [29]). The main result is that the scattering amplitude with a fixed energy uniquely determines a compactly supported bounded potential. However, the problem is not solved in the dimension two (see [11] and [32]). In the articles [30]-[31] Sun and Uhlmann proved that the knowledge of the scattering amplitude at the fixed energy determines the location of the singularity as well as the jumps across the curve of the discontinuity for a compactly supported bounded potential and the reconstruction of singularities for the potentials from $L^p_{comp}(R^2)$ for $p > 2$. We improve these results for the potentials with stronger singularities and without assumption about the compact support of the potential.

The main idea of our considerations consists in the asymptotic expansion for the Born's potential (for all inverse problems which are presented here) in the form:

$$q_B = \sum_{j=0}^{\infty} q_j$$

analogously to the symbol expansions in the pseudodifferential calculus. By noting that q_0 is our unknown potential $q(x)$ the problem is reduced to estimating the smoothness of the higher order terms in the Born's expansions. This expansions is merely the iterations of the Lippmann-Schwinger equation. That's why is so important the estimate (1.8) for to prove the convergence of this series.

We are now in the position to formulate our main results about recovering of the singularities for the Schrödinger operator with singular potentials.

2. Main results

Theorem 1. *([17]) Assume that the potential $q(x)$ belongs to $L^2_\sigma(R^2)$ with $\sigma > 1$ and Hamiltonian H has no resonance at zero. Then*

$$q_B(x) - q(x) \in W^1_\delta(R^2) + H^\beta(R^2), \tag{14}$$

where $\delta < 2$ and $\beta < 1/2$ (if we use "better"estimate for the the resolvent then we can choose $\beta < 1$).

The latter relation allow us assert that the difference between $q_B(x)$ and $q(x)$ belongs to the "smoother"space than unknown potential. This fact means that the leading order singularities of unknown potential are obtained exactly by the Born approximation (1.4). If we suppose that our potential $q(x)$ belongs to the "smoother"space $L^p_{loc}(R^2)$ for $p > 3$ (and even for $p > 2$), then we can prove that the difference $q_B(x) - q(x)$ is a continuous function. It means that in this case we can obtained all singularities of unknown potential by Born approximation. In particular we can reconstruct the boundary of any unknown domain.

Theorem 2. *([15]) Assume that the potential $q(x)$ has bounded support and belongs to the space $H^s(R^2)$ for some $0 < s \leq 1$. Then*

$$q_B^b(x) - q(x) - q_1(x) \in H^t(R^2), \tag{15}$$

where $t < \frac{s+1}{2}$ and the first nonlinear term $q_1(x)$ is a continuous function for $1/2 < s \leq 1$ and belongs to the space $H^{2s}(R^2)$ for $0 < s \leq 1/2$.

From this theorem we obtain the immediate corollary.

Corollary 1. *If a piecewise smooth compactly supported potential $q(x)$ contains the jumps over a smooth curve, then the curve and height function of the jumps are uniquely determined by the backscattering data. Especially, for the potential being the characteristic function of a smooth bounded domain this domain is uniquely determined by the scattering data.*

A potential satisfying the assumptions of the last Corollary is in $H^s_{comp}(R^2)$ for every $s < 1/2$. Thus by Theorem 2, $q^b_B(x) - q(x)$ is in $H^t(R^2)$ for every $t < 3/4$. That's why this Corollary is satisfied.

Theorem 3. *If $q(x)$ as in the Theorem 1 then*

$$q^{\vartheta_0}_B(x) - q(x) \in H^t(R^2), \tag{16}$$

where $t < 1/8$.

Theorem 4. *If $q(x)$ as in the Theorem 1 then*

$$q^f_B(x) - q(x) - q_1(x) \in H^t(R^2), \tag{17}$$

where $t < 1/3$ and first nonlinear term $q_(x)$ (see [31]) is a continuous function.

Theorem 5. (Saito's formula) *([20],[22],[23]) Under the same assumptions for $q(x)$ as in Theorem 1*

$$\lim_{k\to+\infty} k \int\limits_{S^1\times S^1} e^{-ik(\vartheta-\vartheta',x)} A(k,\vartheta',\vartheta)\, d\vartheta\, d\vartheta' = 4\pi \int\limits_{R^2} \frac{q(y)}{|x-y|}\, dy.$$

This limit is valid in the sense of the theory of distributions.

The next theorem is the uniqueness theorem of the reconstruction of unknown potential by the scattering amplitude and it is a simple corollary from Saito's formula.

Theorem 6. *Assume that the potentials $q_1(x)$ and $q_2(x)$ satisfy the conditions of Theorem 1 and the corresponding scattering amplitudes coincide for some sequence $k_j \to +\infty$ and for all $\vartheta, \vartheta' \in S^1$. Then $q_1(x) = q_2(x)$ (in the sense of the theory of distributions).*

It follows from the Saito's formula very interesting connection between the potential $q(x)$ and the scattering amplitude $A(k,\vartheta',\vartheta)$ (see [20])

$$q(x) = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^2}{8\pi^2} \int\limits_{S^1\times S^1} e^{-ik(\vartheta-\vartheta',x)} A(k,\vartheta',\vartheta) |\vartheta-\vartheta'|\, d\vartheta\, d\vartheta'.$$

This formula should be understood in the sense of theory of distributions.

It what follows from the proof of Saito's formula in the case when we have the scattering amplitude only with one fixed direction ϑ_0 that

$$\lim_{k\to+\infty} k^{1/2} \int\limits_{S^1} e^{-ik(\vartheta-\vartheta_0,x)} A(k,\vartheta_0,\vartheta)\, d\vartheta = 0.$$

This limit is valid in the sense of uniformly convergence with respect to x.

The new asymptotical formula for the unknown potential which contains the only Green's function of the Hamiltonian is presented in following theorem.

Theorem 7. *([20]) Assume that the potential $q(x)$ satisfies the conditions (1.1) and has special behaviour at the infinity: $|q(x)| \le C|x|^{-\mu}$ for $|x| > R$ with some positive C, R and $\mu > 2$. Then the Fourier transform $F(q)$ of the potential $q(x)$ belongs to the space $L^\infty(R^2) \cap C(R^2)$ and in every point ξ can be calculated by the formula*

$$F(q)(\xi) = \lim_{|x|,|y|,k\to+\infty} 8\pi i k (|x||y|)^{1/2} e^{-ik(|x|+|y|)} (G_q(|x-y|) - G^+_k(x,y,k)),$$

where $\xi = -k(\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|})$ and the function G_q satisfies the integral equation (1.3).

The main results (Theorem 1 and Theorem 2) of this work were obtained together with Lassi Päivärinta from the University of Oulu, Finland. Theorem 1 was also obtained together with Erkki Somersalo from Helsinki University of Technology, Finland. Theorem 2 was obtained together with Petri Ola from the University of Oulu and Theorems 5-7 were obtained together with my Ph.D students, Aleksey G. Razborov from Moscow State University and Melis K. Sagyndykov from the University of Osh, Kyrgyziya.

References

[1] S. Agmon, Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory. Ann. Sc. Norm. Super Pisa, **2**(1992), pp. 151-218.

[2] A. Bayliss, Y.Li and C. Morawetz, Scattering by potential using hyperbolic methods, Math. Comp., **52**(1989), 321-328.

[3] M.S. Birman, On the number of eigenvalues in the quantum scattering problem. Mat. Zbornik, **52**(1960), pp. 163-166.

[4] G. Eskin and J. Ralston, The inverse backscattering problem in three dimensions. Comm. Math. Phys., **124**(1989), 169-215.

[5] G. Eskin and J. Ralston, Inverse backscattering in two dimensions. Comm. Math. Phys., **138**(1991), 451-486.

[6] G. Eskin and J. Ralston, Inverse backscattering. J. d'Analyse Math., **58**(1992), 177-190.

[7] L.D. Faddeev, Growing solutionsof the Schrödinger equation. Dokl. Akad. Nauk SSSR, **165**(1965), 514-517 (transl. Sov. Phys. Dokl., **10**(1966), 1033-1035).

[8] A. Greenleaf and G. Uhlmann, Recovering singularities of a potential from singularities of scattering data. Comm. Math. Phys., **157**(1993), 549-572.

[9] C.E. Kenig, A. Ruiz and C. Sogge, Sobolev inequalities and unique continuation for second order constant coefficients differential equations. Duke Math. J., **55**(1987), 329-348.

[10] A.I. Nachman, Reconstruction from boundary measurements. Annals of Math., **128**(1988), 531-576.

[11] A.I. Nachman, Global uniqueness for a two dimensional boundary value problem. Annals of Math., **,** **143**(1996), 71-96.

[12] A. Nachman and M. Ablowitz, A multidimensional inverse scattering method. Studies in Appl. Math., **71**(1984), 243-250.

[13] R.G. Novikov, Multidimensional inverse spectral problem for the equation $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$. Funct. Analys. Appl., **22**(1988), pp. 263-272.

[14] R.G. Novikov and G.M. Henkin, $\bar{\partial}$-equation in multidimensional problem of scattering theory. Uspekhi Mat. Nauk, **42**(1987), pp. 93-152.

[15] P. Ola, L. Päivärinta and V. Serov, Recovering singularities from backscattering in two dimensions, Comm. PDE, **26(3-4)**(2001), 697-715.

[16] L. Päivärinta and E. Somersalo, Inversion of discintinuities for the Schrödinger equation in three dimensions. SIAM J. Math. Anal., **22**(1991), 480-499.

[17] L. Päivärinta, V.S. Serov and E. Somersalo, Reconstruction of singularities of a scattering potential in two dimensions. Adv. Appl. Math., **15**(1994), 97-113.

[18] L. Päivärinta and V. Serov, Recovery of singularities of a multidimensional scattering potential. SIAM J. Math. Anal., **29**(1998), 697-711.

[19] R.T. Prosser, Formal solutions of inverse scattering problems, I-IV. J. Math. Phys., **10, 17, 21, 23**(1969, 1976, 1980, 1982), 1819-1822, 1775-1779, 2648-2653, 2127-2130.

[20] A.G. Razborov, M.K. Sagyndykov and V.S. Serov, Some inverse problems for the Schrödinger operator with Kato potential. Ill-posed and Inverse problems, (2002)(at press).

[21] A. Ruiz, Recovery of the singularities of a potential from fixed angle scattering data, Comm. PDE, **26(9-10)**(2001), 1721-1738.

[22] Y. Saito, 1982. Some properties of the scattering amplitude and the inverse scattering problem. Osaka J. Math., **19**, 527-747.

[23] Y. Saito, 1984. An asymptotic behavior of the S-matrix and the inverse scattering problem. J. Math. Phys., **25**, 3105-3109.

[24] V.S. Serov, On estimates of the rezolvent of the Laplace operator over the entire space. Matemat Zametki, **52**(1992), 09-118.

[25] V.S. Serov, Some estimates of Green function and applications in inverse scattering theory for the Schrödinger operator with a singular potential. Lecture Notes in Physics, **422**(1993), pp. 203-206. Proc.of the Conference "Inverse problems in mathematical physics", Saariselka, Finland, 1992.

[26] P. Stefanov, A uniqueness result for the inverse backscattering problem. Inverse Problems, **6**(1990), 1055-1064.
[27] P. Stefanov, Generic uniqueness for two inverse problems in potential scattering. Comm. PDE, **17**, 55-68.
[28] J. Sylvester and G. Uhlmann, A uniqueness theorem for an inverse boundary value problem in electrical prospection. Comm. Pure. Appl. Math., **39**(1986), pp. 91-112.
[29] J. Sylvester and G. Uhlmann, A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. Ann. Math., **125**(1987), pp. 153-169.
[30] Z. Sun and G. Uhlmann, 1993. Inverse scattering for singular potentials in two dimensions. Trans. AMS, **338**, 363-374.
[31] Z. Sun and G. Uhlmann, 1993. Recovery of singularities for formally determined inverse problems. Comm. Math. Phys., **153**, 431-445.
[32] T.Y. Tsai, The Schrödinger operator in the plane. 1989, Thesis, Yale University.

119899, Moscow, Vorob'evy gory, Moscow State University, Department of Computational Mathematics and Cybernetics, Russia

E-mail: serov@cs.msu.su

Strong Hamburger Moment Problem

K. K. Simonov
Donetsk National University, Ukraine

1. The *strong moment problem* was introduced in [3] and [4]. In this problem, moments $\{s_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ of all positive and negative orders are given. A full description of all solutions of the strong Stieltjes moment problem was obtained in [5].

Let us state the strong Hamburger moment problem (SHMP). Given a sequence of real numbers $\{s_k\}_{-\infty}^{+\infty}$. Find a Lebesgue–Stieltjes measure $d\sigma$ on $\mathbb{R}$ such that

$$s_k = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k \, d\sigma(t) \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{1}$$

The following questions are considered: solvability, uniqueness and description of all solutions of the problem (1).

2. The answer to the first question is given by

Theorem 1. *The problem* (1) *is solvable if and only if*

$$\sum_{i,j=0}^{n} s_{2m+i+j}\xi_i\xi_j \geq 0 \quad (m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ \xi_k \in \mathbb{R}). \tag{2}$$

3. It is possible that one of the forms

$$\sum_{i,j=0}^{n} s_{2m+i+j}\xi_i\xi_j \quad (m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}) \tag{3}$$

is not strictly positive. Then the problem is called degenerated. It turns out that in the degenerated case all the forms (3) which order does not exceed some n_0 are strictly positive and all the forms of higher order are degenerated. In this case Theorem 1 can be strengthened.

Theorem 2. *Let SHMP be degenerated and n_0 is defined as above. Then the SHMP has a unique solution $d\sigma$ and the support of $d\sigma$ consists of n_0 points.*

4. Henceforth we assume that all forms (3) are strictly positive. Let us set

$$e_k(t) = t^k \quad (k \in \mathbb{Z},\ t \in \mathbb{R}). \tag{4}$$

Linear combinations of (4) are called quasipolynomials. Let H_0 be the set of all quasipolynomials. Let H be a completion of H_0 with respect to the inner product

$$(e_i, e_j) = s_{i+j} \quad (i, j \in \mathbb{Z}).$$

Let us define a linear operator A_0 in H_0 by the rule

$$A_0 e_k = e_{k+1} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

The closure of A_0 to H is denoted by A. Clearly, H is a Hilbert space and A is a closed symmetric operator in H.

The following theorem describes solutions of the SHMP.

Theorem 3. *Solutions of the problem* (1) *and spectral functions F_t of the operator A (see* [1]*) are in a one-to-one correspondence by the formula*

$$\sigma(t) = (F_t e_0, e_0) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

5. Let the numbers $D_n^{(m)}$ be given by

$$D_n^{(m)} = \begin{vmatrix} s_m & s_{m+1} & \dots & s_{m+n} \\ s_{m+1} & s_{m+2} & \dots & s_{m+n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m+n} & s_{m+n+1} & \dots & s_{m+2n} \end{vmatrix} \quad (m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}).$$

The strict positivity of the forms (3) is equivalent to the inequalities

$$D_n^{(2k)} > 0 \quad (k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}).$$

Let us define the quasipolynomials $\{P_k\}_0^\infty$ of the first kind

$$\begin{aligned} P_{2k} &= \left(D_{2k-1}^{(-2k)} D_{2k}^{(-2k)}\right)^{-\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} s_{-2k} & s_{-2k+1} & \dots & s_0 \\ s_{-2k+1} & s_{-2k+2} & \dots & s_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{-1} & s_0 & \dots & s_{2k-1} \\ e_{-k} & e_{-k+1} & \dots & e_k \end{vmatrix} \quad (k \in \mathbb{N}), \\ P_{2k+1} &= \left(D_{2k}^{(-2k)} D_{2k+1}^{(-2k-2)}\right)^{-\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} s_{-2k-1} & s_{-2k} & \dots & s_0 \\ s_{-2k} & s_{-2k+1} & \dots & s_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{-1} & s_0 & \dots & s_{2k} \\ e_{-k-1} & e_{-k} & \dots & e_k \end{vmatrix} \quad (k \in \mathbb{N}). \end{aligned} \tag{5}$$

Proposition 8. Quasipolynomials (5) form an orthonormal basis in H.

Let the quasipolynomials of the second kind $\{Q_k\}_0^\infty$ be given by

$$Q_k(t) = \big((A - t)^{-1}(P_k - P_k(t)), e_0\big) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

6. Decomposing the functions AP_k by the basis $\{P_k\}_0^\infty$ (cf. [2]), we obtain the following

Proposition 9. The functions $\{AP_k\}_0^\infty$ can be reduced to the form

$$\begin{aligned} AP_0 &= a_0 P_0 + b_0 P_1 + c_0 P_2, \\ AP_1 &= b_0 P_0 + a_1 P_1 + b_1 P_2, \\ AP_{2k} &= c_{2k-2} P_{2k-2} + b_{2k-1} P_{2k-1} + a_{2k} P_{2k} + b_{2k} P_{2k+1} + c_{2k} P_{2k+2} \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \\ AP_{2k+1} &= b_{2k} P_{2k} + a_{2k+1} P_{2k+1} + b_{2k+1} P_{2k+2} \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

where $\{a_k\}_0^\infty$, $\{b_k\}_0^\infty$, $\{c_k\}_0^\infty$ are sequences of real numbers such that

$$a_{2k+1} = \frac{b_{2k}b_{2k+1}}{c_{2k}},\ c_{2k} > 0,\ c_{2k+1} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

7.

Proposition 10. The operator A is selfadjoint if and only if the following series is divergent

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(z)|^2 \quad (\operatorname{Im} z \neq 0). \tag{6}$$

If the series (6) is convergent then A is a symmetric operator with deficiency indices $(1,1)$ and its defect subspace $\mathfrak{N}_z$ is the span of the vector

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(z)P_k.$$

8. Let the indeterminate case takes place, that is deficiency indices of A are $(1,1)$. Let us use the formula for the resolvent matrix $W(z)$ of the operator A from [6]. If $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ then $W(z)$ takes the form

$$W(z) = \begin{pmatrix} w_{11}(z) & w_{12}(z) \\ w_{21}(z) & w_{22}(z) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -(z-a)\sum_{k=0}^\infty Q_k(a)Q_k(z) & 1 + (z-a)\sum_{k=0}^\infty P_k(a)Q_k(z) \\ -1 + (z-a)\sum_{k=0}^\infty Q_k(a)P_k(z) & -(z-a)\sum_{k=0}^\infty P_k(a)P_k(z) \end{pmatrix} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}). \tag{7}$$

Theorem 4. *In the intederminate case the full description of all solutions of the strong Hamburger moment problem is given by the formula*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t-z}\, d\sigma(t) = s_0 \cdot \frac{w_{11}(z)\tau(z) + w_{12}(z)}{w_{21}(z)\tau(z) + w_{22}(z)}, \quad (\tau \in \widetilde{\mathcal{R}}).$$

Here $\mathcal{R}$ is a class of holomorphic functions $\tau(z)$ on $\mathbb{C}_+$ such that $\operatorname{Im}\tau(z) \geq 0$ for all $z \in \mathbb{C}_+$, and $\widetilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \{\infty\}$.

References

[1] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space*, Nauka, Moskow, 1966, (Russian).

[2] E. Hendriksen and C. Nijhuis, *Laurent–Jacobi matrices and the strong Hamburger moment problem*, Acta Appl. Math. **61** (2000), 119–132.

[3] W. B. Jones and W. J. Thron, *Survey of continued fraction methods of solving moment problems and related topics*, Analytic Theory of Continued Fractions (Loen, 1981), Lecture Notes in Math., vol. 932, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1982, pp. 4–37.

[4] W. B. Jones, W. J. Thron, and H. Waadeland, *A strong Stieltjes moment problem*, Trans. Amer. Math. Soc. **261** (1980), 503–528.

[5] I. S. Kats and A. A. Nudelman, *Strong Stieltjes moment problem*, St. Peterburg Math. J. **8** (1997), no. 6, 931–950.

[6] M. G. Krein and Sh. N. Saakyan, *Some new results in the theory of resolvents of Hermitian operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **169** (1966), no. 6, 1269–1272, (Russian).

Simonov K. K., Math. Dept., Donetsk National University, Universitetskaya 24, Donetsk, Ukraine, 83055

E-mail: kirill_simonov@mail.ru

Section 1

SPECTRAL PROBLEMS

Subsection 1.2

Spectral Theory of Operator Pencils

ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОСИНУС - ФУНКЦИИ

Говоров В. М.
НТУУ "Киевский Политехнический Институт",
Киев, Украина

Keywords: Косинус-функция,условие четности

Однопараметрические КОФ или "просто"КОФ впервые были изучены в [1]. *Приложения КОФ к теории абстрактных дифференциальных уравнений второго порядка систематически изучены в* [2] *и* [4],*что дало значительный толчок развитию теории КОФ. В* [3] *можно найти удачную систематизацию основных результатов. В этой статье предлагаетс подход к построению и исследованию двупараметрических косинус-функций (в дальнейшем сокращенно двупараметрических КОФ).*

Пусть - банахово пространство. $L(X,X)$ - пространство линейных ограниченных операторов над X с операторной нормой.

Определение 1. Функция $W : R^2 \to L(X,X)$ называется двупараметрической косинус-функцией, если выполнены следующие услови

i) $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$
$W(x_1+x_2, y_1+y_2) + W(x_1-x_2, y_1-y_2) = 2W(x_1,y_1)W(x_2,y_2)$

ii)$W(0,0) = I$, где I-тождественный оператор

iii) $W(x,y)$ -сильно непрерывная функция,т.е. $\forall u \in X \lim\limits_{x\to 0, y\to 0} W(x,y)u = u$

Приведем простейшие свойства двупараметрических КОФ.

1)$\forall x, y \in R \quad W(x,y) = W(-x,-y)$

2) $\forall x, y \in R \quad W(x,0), W(0,y)$ - однопараметрические КОФ.

3)$\forall x, y \in R \quad W(x,y) + W(x,-y) = 2W(x,0)W(0,y)$

4) $\forall x, y \in R \quad W(x,y) + W(-x,y) = 2W(0,y)W(x,0)$

5)$\forall x, y \in R \quad W(x,0)W(0,y) = W(0,y)W(x,0)$

Рассмотрим примеры двупараметрических КОФ

Пример 1. Пусть C(t) - однопараметрическая КОФ, $C : R \to L(X,X)$. Построим двупараметрическую КОФ W следующим образом. $\forall x, y, \in R$ определим $W(x,y) = C(\alpha x + \beta y)$, где α, β - некоторые действительные числа.

Пример 2. Пусть $T(x)$ и $S(y)$ - группы линейных операторов. Построим двупараметрическую КОФ $W(x,y)$ следующим образом $W(x,y) = \frac{1}{2}(T(\alpha x)S(\beta y) + T(-\alpha x)S(-\beta y))$, где α, β - некоторые действительные числа.

Рассмотрим одно представление двупараметрической КОФ. Известно, что любую двупараметрическую полугруппу линейных операторов $W(x,y)$ можно представить с помощью двух однопараметрических полугрупп следующим образом $W(x,y) = T(x)S(y)$, где $T(x)$ и $S(y)$ - некоторые однопараметрические полугруппы.

Возникает вопрос, справедливо ли подобное представление для КОФ ?

Оказывается, что в общем случае оно не имеет место, но при некотором сужении класса изучаемых КОФ все же удается получить аналогичный факт. С этой целью введем дополнительное условие четности, а именно пусть $\forall x, y, \in R \quad W(x,y) = W(-x,y)$ В дальнейшем будем рассматривать только такие двупараметрические КОФ, которые удовлетворяют этому условию.

По сути, условие четности требует, чтобы функция была четной по первому аргументу. Учитывая свойство 1), нетрудно видеть, что из четности по первому аргументу вытекает четность по второму, и наоборот. Таким образом, в условии четности нет необходимости уточнять аргумент, по которому функция четна. Приведем пример четных двупараметрических КОФ.

Пример 3. Пусть $X = R^3 . W : R^2 \to L(R^3, R^3)$

$$W(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{x^2}{2} & \frac{y^2}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема 1. Для любой четной двупараметрической КОФ $W(x,y)$ существуют такие однопараметрические КОФ $T(x)$ и $S(y)$, что $W(x,y) = T(x)S(y)$. Обратное утверждение неверно, т.е существуют такие однопараметрические КОФ $T(x)$ и $S(y)$, что функция $W(x,y) = T(x)S(y)$ не является двупараметрической КОФ.

Если $T(x)$ и $S(y)$ - некоторые однопараметрические КОФ, то необходимое и достаточное условие того, чтобы функция $W(x,y) = T(x)S(y)$ была четной двупараметрической КОФ, формулируется следующим образом:

1) $\forall x, y \in R \quad C(x)S(y) = S(y)C(x)$

2) $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in R \quad (C(x_1) - C(x_2))(S(y_1) - S(y_2)) = 0.$

Для однопараметрических КОФ одним из ключевых понятий являетс понятие генератора. Справедлива следующее утверджение.

Лемма 1.

Пусть A и B - генераторы некоторых однопараметрических КОФ $T(x)$ и $S(y)$ соотвественно, причем $\forall x, y \in R \quad C(x)S(y) = S(y)C(x)$. Тогда два условия эквивалентны

a)$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in R \quad (C(x_1) - C(x_2))(S(y_1) - S(y_2)) = 0.$

b) $AB|_{D(AB)} = 0$

Обобщим теперь понятие генератора КОФ на двупараметрический случай.

Определение 2. Генератором двупараметрической (необязательно четной) КОФ $W(x,y)$ называется пара операторов $\langle A, B \rangle$, которые действуют в банаховом пространстве X (вообще говоря , неограниченных) и определяютс следующим образом

$$D(A) {=} \left\{ x \in X : \exists \lim_{h \to 0} \tfrac{2}{h^2} \left(W(h,0)x - x \right) \right\},\ Ax {=} \lim_{h \to 0} \tfrac{2}{h^2} \left(W(h,0)x - x \right)$$

$$D(B) {=} \left\{ x \in X : \exists \lim_{h \to 0} \tfrac{2}{h^2} \left(W(0,h)x - x \right) \right\},\ Ax {=} \lim_{h \to 0} \tfrac{2}{h^2} \left(W(0,h)x - x \right)$$

Пример 4. Вернемся к двупараметрической КОФ из примера 3. Генератором такой КОФ будет пара матриц $\langle A, B \rangle$, где $A = \begin{pmatrix} 000 \\ 000 \\ 100 \end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix} 000 \\ 000 \\ 010 \end{pmatrix}$.

Теперь можем сформулировать основной результат, полученный для четных двупараметрических КОФ (критерий генератора четной двупараметрической КОФ)

Теорема 2. Для того, чтобы пара операторов $\langle A, B \rangle$, вообще говоря неограниченных, которые действуют в банаховом пространстве , была генератором некоторой четной двупараметрической КОФ $W(x,y)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия :

1) существовали такие однопараметрические КОФ $T(x)$ и $S(y)$, чтобы A и B были их генераторами соответственно;

2) Резольвенты A и B коммутировали между собой;

3) $AB|_{D(AB)} = 0$

Если эти условия выполнены,то справедливо представление $W(x,y) = T(x)S(y)$.

Возвращаясь к примеру 4, убедимся, что он полностью согласуется со сформулированным в теореме результатом. Действительно, если рассмотреть следующие однопараметрические КОФ

$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{y^2}{2} & 1 \end{pmatrix}$, то их генераторами будут операторы $A = \begin{pmatrix} 000 \\ 000 \\ 100 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 000 \\ 000 \\ 010 \end{pmatrix}$ соответственно. Очевидно, что $AB = 0$, а поэтому и их резольвенты коммутируют. Нетрудно видеть, что $W(x, y) = T(x)S(y)$.

Список литературы

[1] Sova M. Cosine operator functions, Warszawa, PWN,1966, 47s. (Inst.matem.)

[2] Fattorini H. O. Second order differential equations in Banach spaces // North Holland. Amsterdam.- 1985.

[3] Trevis C.C. Webb G.F. Cosine families and abstract non-linear second order differential equations.// Acta math.Acad. Sci Hung. - 1978. - 32,№3. - p.75-96

[4] Крейн С. Г., Хазан М.И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.

В. М. Говоров 03056, Киев, Проспект Победы 37, НТУУ "Киевский Политехнический Институт", Киев, Украина

E-mail: medav@ukr.net

ОБ ИНДЕКСЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ КВАДРАТИЧНЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

А. С. Костенко
Донецкий Национальный Университет,
Украина

Keywords: самосопряженный оператор, спектр, операторный пучок

Исследуется квадратичные операторные пучки с самосопряженными коэффициентами. Для пучка С. Г. Крейна, при дополнительных условиях на его коэффициенты, найдена формула для индекса неустойчивости, а также исследуется э–дихотомичность пучка.

Пусть $H-$ сепарабельное гильбертово пространство.

В книге Копачевского Н.Д., Крейна С.Г. и Нго Зуй Кана [2] при изучении задачи о конвекции в сосуде, частично заполненном жидкостью, исследуются спектральные свойства пучка С.Г.Крейна, то есть пучка вида

$$L(\lambda) = \lambda A + \frac{1}{\lambda} B + \varepsilon K - I \ . \tag{1}$$

В [2] предполагалось, что A и B–неотрицательные компактные операторы, $K = K^*$ компактный оператор в H, а ε–положительный параметр.

Напомним, что точка $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ называется собственным значением пучка L, если найдется ненулевой вектор $x_0 \in H$ такой, что $L(\lambda_0)x_0 = 0$.

В [2] показано, что собственные значения пучка L,которые отвечают нормальным движениям вида $exp(-\lambda x)$, находятся в правой полуплоскости, если $\varepsilon < \frac{1}{\|K\|}$.

В случае, когда $\varepsilon > \frac{1}{\|K\|}$, оператор $I - \varepsilon K$ может иметь конечное число κ отрицательных собственых значений. В этом случае, спектр задачи уже не обязательно лежит в правой полуплоскости $\mathbb{C}_r$. А именно, оказывается, что в левой полуплоскости $\mathbb{C}_l$ может возникать не более конечного числа собственных значений. Это факт означает неустойчивость нормальных колебаний.

Напомним, что количество собственных значений пучка L, расположенных в левой полуплоскости $\mathbb{C}_l$, называется индексом неустойчивости пучка L и обозначается $\kappa_-(L)$.

В статье Копачевского Н.Д. и Пивоварчика В.Н.([3]) было получено достаточное условие неустойчивости нормальных конвективных движений, то есть указано число ε_2, определяемое операторами A, B и K (причем $\ker B \neq \{0\}$), такое, что при $\varepsilon > \varepsilon_2$ индекс неустойчивости $\kappa_-(L) > 0$.

В работах Шкаликова А.А. [5] и [6] исследовался операторный пучок вида

$$L(\lambda) = F\lambda^2 + (D + iG)\lambda + T,$$

где F, D, G, T – операторы в гильбертовом пространстве H, для которых выполнены следующие условия: $F = F^*$ – ограничен и ограниченно обратим, $T = T^*$ – ограниченно обратим, D и G – T–ограниченные симметрические плотно определенные операторы, причем $D \geq 0$. Для таких пучков в [5] и [6], при дополнительных условиях на операторы F и T, получены оценки сверху для индекса неустойчивости $\kappa_-(L)$.

Наиболее близкой к настоящей статье является работа Сухочевой Л.И.([4]). Именно, в ней были получены достаточные условия на коэффициенты матричных пучков вида

$$L(\lambda) = \lambda A + \frac{1}{\lambda} B - C \ , \tag{2}$$

обепечивающие равенство $\kappa_-(L) = 2\kappa$. Здесь A, B, C – эрмитовы матрицы, действующие в пространстве $H = \mathbb{C}^n$ и удовлетворяющие следующим условиям:

$$A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,2,\ldots,n} \,, \quad A > 0 \,, \quad a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| + \varepsilon_i^A \,, \quad \varepsilon_i^A \geq 0 \ , \tag{3}$$

$$B = \|b_{ij}\|_{i,j=1,2,\ldots,n} \,, \quad B > 0 \,, \quad b_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |b_{ij}| + \varepsilon_i^B \,, \quad \varepsilon_i^B \geq 0, \tag{4}$$

$$C = J_\kappa = diag(I_{n-\kappa}, -I_\kappa) \ . \tag{5}$$

Теорема 1. [4] *Пусть эрмитовы матрицы A, B и C удовлетворяют условиям* (3) ,(4), (5) *и определяют матричный пучок вида* (2). *Если спектр пучка $L_d(\lambda)$ содержится в угле:*

$$\Phi = \cap_{i=1}^{n} \{\Psi_i : |\tan \Psi_i| \leq 2(\varepsilon_i^A \varepsilon_i^B)^{1/2}\}, \tag{6}$$

то 2κ собственных значений пучка L лежат в открытой левой полуплоскости, а $2(n-\kappa)$ – в открытой правой полуплоскости.

Здесь L_d – диагональ пучка L :

$$L_d(\lambda) = \lambda \operatorname{diag} A + \frac{1}{\lambda} \operatorname{diag} B - J_\kappa \ ,$$

где $\operatorname{diag} A$ – это матрица, полученная из матрицы A "обнулением"ее внедиагональных элементов.

Будем придерживаться следующих обозначений:

$\mathbb{C}_l$ ($\mathbb{C}_r$) – открытая левая (правая) полуплоскость,

$\kappa_-(A)(\kappa_-(L))$ – количество собственных значений оператора A (пучка L), находящихся в $\mathbb{C}_l$.

В настоящей работе, находятся простые достаточные условия, обеспечивающие равенство $\kappa_-(L) = 2\kappa$, а также э–дихотомичность пучка вида

$$L(\lambda) = \lambda^2 A - \lambda C + B. \tag{7}$$

При этом наш подход отличен от подходов применявшихся в перечисленных работах [2], [3], [4], [5] и [6].

Напомним некоторые определения (см., например, [1]). Оператор A называют положительно определенным, если существует $\delta > 0$ такое, что $(Af, f) > \delta(f, f)$, $\forall f \in H$. Если $\delta = 0$, то оператор называют положительным. Оператор (пучок) называют э–дихотомическим, если его спектр не пересекается с мнимой осью.

Следующая теорема – основной результат заметки.

Теорема 2. *Пусть A, B и C – ограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H, а L – квадратичный пучок вида (7). Пусть также операторы A, B положительно определены, а C – обратим и $\kappa_-(C) = \kappa$. Если оператор*

$$R_0 := CA^{-1}C - B \tag{8}$$

положительно определен, то пучок L является э–дихотомическим и $\kappa_-(L) = 2\kappa$.

В следующей теореме мы покажем, что в теореме 2 можно отказаться от положительной определенности оператора A, заменив подходящим образом условие положительной определенности оператора R_0 вида (8).

Теорема 3. *Пусть A, B, C – ограниченные самосопряженные операторы, определяющие пучок вида (7), удовлетворяют следующим условиям: A – положительный, B – положительно определен, а C – обратим и $\kappa_-(C) = \kappa$. Если при некотором $\varepsilon_0 > 0$ операторы*

$$R_\varepsilon := C(A + \varepsilon I)^{-1}C - B, \ (\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)) \tag{9}$$

положительно определены, то пучок L является э-дихотомическим и $\kappa_-(L) = 2\kappa$.

Следствие 1. *Пусть A, B, C – ограниченные операторы, действующие в гильбертовом пространстве H, и L – квадратичный пучок вида (7). Пусть также выполнены условия: C – обратим, $A = A^* > 0, B = B^* > \delta I > 0$. Если $\kappa_-(C) = \kappa$ и*

$$\|A\| \cdot \|B\| \cdot \|C^{-1}\|^2 < 1 \ , \tag{10}$$

то $\kappa_-(L) = 2\kappa$.

Замечание 6. Пусть выполнены все условия теоремы 2, но оператор A положительно определен, а B является положительным, тогда теорема 2 остается справедливой, только пучок L перестает быть э–дихотомическим (так как $L(0) = B$, а этот оператор не обратим).

Пример 3. $H = \mathbb{C}^2, B = diag(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}), J = diag(1, -1)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Легко видеть, что $\|A\| = 1,5$, $\|B\| = 0,5$, следовательно $\|A\| \cdot \|B\| < 1$ Таким образом, применяя следствие 1, получим $\kappa_-(L) = 2$.

Проверим условия теоремы 1. Ясно, что $\sigma(L_d) = \{(1 \pm i)/2; (-1 \pm i\sqrt{3})/2\}$ и $\Phi = \{\phi : |\tan\phi| < \sqrt{\frac{2}{3}}\}$.

Легко видеть, что теорема 1 из [6] не применима, так как $(1+i)/2 \notin \Phi$.

Пример 4. $H = \mathbb{C}^2, B = I, J = diag(1, -1)$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Легко видеть, что $det(A) = 8$ и

$$R_0 = \begin{pmatrix} -5/8 & 1/8 \\ 1/8 & -5/8 \end{pmatrix} .$$

Таким образом, оператор R_0 не является положительно определенным, а значит теорема 2 не применима.

В то же время $\sigma(L_d) = \{(1 \pm i\sqrt{11})/6; (-1 \pm i\sqrt{11})/6\}$.
$\Phi = \{\phi : |\tan \phi| < \sqrt{11, 6}\}$.
Легко видеть, что $\sigma(L_d) \subset \Phi$ и, значит, по теореме 1 $\kappa_-(L) = 2$.

Приведенные примеры показывают, что теорема 2 не покрывает теорему 1. В то же время она справедлива для операторных (а не только матричных) пучков, а ее условия, в отличие от условий теоремы 1, являются унитарно инвариантными.

Автор выражает искреннюю благодарность М.М. Маламуду за руководство работой, а также С.М. Маламуду и Л.Л. Оридороге за многочисленные полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1970. – 536 стр.
[2] Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике.* – М.: Наука, 1989.
[3] Копачевский Н.Д., Пивоварчик В.Н. *О достаточном условии неустойчивости конвективных движений жидкости в открытом сосуде.*// Ж. вычисл. матем. и матем. физ.—1993.—Т.33,—№ 1.—стр. 101–118.
[4] Сухочёва Л. И. *О некоторых свойствах квадратичного самосопряженного пучка матриц с доминирующими диагоналями* // Матем. заметки. —1997.—Т.61.—Вып.3.—стр. 381–390.
[5] Шкаликов А. А. *Формула индекса неустойчивости для уравнений с диссипацией* // Успехи матем. наук.—1996.—Т.51.—№ 5.,—стр.195–196.
[6] Shkalikov A. A. *Operator pencils arising in alastisity and hydrodinamics. Instability index formula* // In book:Operator Theory Advances and Appl. // Vol.87,—1996.—Bikhauser Verlag,—p.258–285.

Kostenko A.S., Department of Mathematics, Donetsk National University, Universitetskaja 24, 83055 Donetsk, Ukraine

E-mail: karabashi@yahoo.com

КРАТНАЯ ПОЛНОТА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПРОСТЕЙШЕГО ПУЧКА 5-ГО ПОРЯДКА

В.С. Рыхлов[1]
Саратовский госуниверситет, Саратов

Keywords: полнота, собственные функции, пучок обыкновенных дифференциальных операторов

Полностью решена задача о 5-кратной полноте собственных функций простейшего пучка обыкновенных дифференциальных операторов 5-го порядка в пространстве $L_2[0, 1]$, порожденного дифференциальным выражением $y^{(5)} + \lambda^5 y$ и двухточечными двучленными граничными условиями $\alpha_i y^{(i-1)}(0) + \beta_i y^{(i-1)}(1) = 0$, $i = \overline{1, 5}$.

Keywords: completeness, eigenfunctions, pencil of ordinary differential operators

The problem of 5-fold completeness is fully solved for the simpliest pencil of ordinary differential operators of the 5-th order in the space $L_2[0, 1]$, generated by the differential expression $y^{(5)} + \lambda^5 y$ and the two-point two-term boundary conditions $\alpha_i y^{(i-1)}(0) + \beta_i y^{(i-1)}(1) = 0$, $i = \overline{1, 5}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 00-01-00075), программы "Ведущие научные школы"(проект N 00-15-96123) и программы "Университеты России"Министерства образования России (проект N 99-01-89).

1. В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок $L(\lambda)$ обыкновенных дифференциальных операторов

$$l(y,\lambda) := y^{(5)} + \lambda^5 y, \quad U_i(y) := \alpha_i y^{(i-1)}(0) + \beta_i y^{(i-1)}(1) = 0, \quad i = \overline{1,5}, \tag{1}$$

где $|\alpha_i| + |\beta_i| > 0$, $i = \overline{1,5}$.

Определение 1. Будем называть пучок (1) *вырожденным*, если он либо имеет не более конечного числа собственных значений (с.з.), либо все $\lambda \in \mathbb{C}$ являются его с.з.

Теорема 1. *Справедлива следующая альтернатива: либо система собственных функций (с.ф.) пучка* (1) *5-кратно полна в* $L_2[0,1]$, *либо этот пучок вырожденный.*

Дальнейшее изложение посвящено доказательству этой теоремы.

2. Уравнение $l(y,\lambda) = 0$ имеет фундаментальную систему решений $y_j(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_j x)$, $j = \overline{1,5}$, где $\omega_j = \exp((2j-1)\pi i/5)$. Обозначим $U_i(y_j) =: u_{ij}(\lambda) = \left(v_{ij} + e^{\lambda\omega_j} w_{ij}\right)$, где $v_{ij} = \alpha_i \omega_j^{i-1}$, $w_{ij} = \beta_i \omega_j^{i-1}$,

$$V_j = \begin{pmatrix} v_{1j} \\ v_{2j} \\ v_{3j} \\ v_{4j} \\ v_{5j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2\omega_j \\ \alpha_3\omega_j^2 \\ \alpha_4\omega_j^3 \\ \alpha_5\omega_j^4 \end{pmatrix}, \quad W_j = \begin{pmatrix} w_{1j} \\ w_{2j} \\ w_{3j} \\ w_{4j} \\ w_{5j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2\omega_j \\ \beta_3\omega_j^2 \\ \beta_4\omega_j^3 \\ \beta_5\omega_j^4 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_0 = \det(V_1V_2V_3V_4V_5) =: |V_1V_2V_3V_4V_5|, \quad \Delta_1 = |W_1V_2V_3V_4V_5|,$$

$$\Delta_2 = |V_1W_2V_3V_4V_5|, \ldots, \Delta_{12} = |W_1W_2V_3V_4V_5|, \ldots, \Delta_{12345} = |W_1W_2W_3W_4W_5|.$$

Отметим на рисунке все точки 0, ω_j, $\omega_1+\omega_2$, $\omega_1+\omega_3$, $\ldots$, $\omega_1+\omega_5$, $\ldots$, $\omega_4+\omega_5$, $\ldots$, $\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5$ (для краткости через j обозначается ω_j, через $1+2$ обозначается $\omega_1+\omega_2$ и т.д.). Пусть M есть выпуклая оболочка отмеченных точек.

Характеристический определитель пучка $L(\lambda)$ есть

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} u_{11} & \ldots & u_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{51} & \ldots & u_{55} \end{vmatrix} &= \lambda^{10} \left| V_1 + e^{\lambda\omega_1} W_1, \ldots, V_5 + e^{\lambda\omega_1} W_5 \right| \\
= \lambda^{10} \Big\{ &\left[\Delta_{12} e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)} + \Delta_{23} e^{\lambda(\omega_2+\omega_3)} + \cdots + \Delta_{15} e^{\lambda(\omega_5+\omega_1)}\right] \\
&+ \left[\Delta_{123} e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3)} + \Delta_{234} e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_4)} + \cdots + \Delta_{125} e^{\lambda(\omega_5+\omega_1+\omega_2)}\right] \\
&+ \left[\Delta_1 e^{\lambda\omega_1} + \Delta_2 e^{\lambda\omega_2} + \cdots + \Delta_5 e^{\lambda\omega_5}\right] \\
&+ \left[\Delta_{1234} e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)} + \Delta_{2345} e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)} + \cdots + \Delta_{1235} e^{\lambda(\omega_5+\omega_1+\omega_2+\omega_3)}\right] \\
&+ \left[\Delta_{13} e^{\lambda(\omega_1+\omega_3)} + \Delta_{24} e^{\lambda(\omega_2+\omega_4)} + \cdots + \Delta_{25} e^{\lambda(\omega_5+\omega_2)}\right] \\
&+ \left[\Delta_{124} e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_4)} + \Delta_{235} e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_5)} + \cdots + \Delta_{135} e^{\lambda(\omega_5+\omega_1+\omega_3)}\right] \\
&+ \Delta_{12345} + \Delta_0 \Big\}.
\end{aligned}$$

Лемма 1. *Справедливы следующие равенства*

$$
\begin{array}{lllllllll}
\Delta_{12} & = & \Delta_{23} & = & \Delta_{34} & = & \Delta_{45} & = & \Delta_{15}, \\
\Delta_{123} & = & \Delta_{234} & = & \Delta_{345} & = & \Delta_{145} & = & \Delta_{125}, \\
\Delta_{1} & = & \Delta_{2} & = & \Delta_{3} & = & \Delta_{4} & = & \Delta_{5}, \\
\Delta_{1234} & = & \Delta_{2345} & = & \Delta_{1345} & = & \Delta_{1245} & = & \Delta_{1235}, \\
\Delta_{13} & = & \Delta_{24} & = & \Delta_{35} & = & \Delta_{14} & = & \Delta_{25}, \\
\Delta_{124} & = & \Delta_{235} & = & \Delta_{134} & = & \Delta_{245} & = & \Delta_{135}.
\end{array}
$$

В силу этой леммы

$$
\begin{gathered}
\Delta(\lambda) = \lambda^{10} \left\{ \Delta_{12} \left[e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3)} + \cdots + e^{\lambda(\omega_5+\omega_1)} \right] \right. \\
+\Delta_{123} \left[e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3)} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_4)} + \cdots + e^{\lambda(\omega_5+\omega_1+\omega_2)} \right] \\
+\Delta_{1} \left[e^{\lambda\omega_1} + \Delta_2 e^{\lambda\omega_2} + \cdots + e^{\lambda\omega_5} \right] \\
+\Delta_{1234} \left[e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)} + \cdots + e^{\lambda(\omega_5+\omega_1+\omega_2+\omega_3)} \right] \\
+\Delta_{13} \left[e^{\lambda(\omega_1+\omega_3)} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_4)} + \cdots + e^{\lambda(\omega_5+\omega_2)} \right] \\
+\Delta_{124} \left[e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_4)} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_5)} + \cdots + e^{\lambda(\omega_5+\omega_1+\omega_3)} \right] \\
\left. +\Delta_{12345} + \Delta_0 \right\}.
\end{gathered}
$$

Отметим на рисунке точки $\omega_1+\omega_2$, $\omega_2+\omega_3$, $\ldots$, $\omega_5+\omega_1$, если $\Delta_{12} \neq 0$, точки $\omega_1+\omega_2+\omega_3$, $\omega_2+\omega_3+\omega_4$, $\ldots$, $\omega_5+\omega_1+\omega_2$, если $\Delta_{123} \neq 0$, и т.д. Пусть M_Δ есть выпуклая оболочка отмеченных точек. Возможны следующие случаи:

- **(I)** $\Delta_{12} \neq 0 \wedge \Delta_{123} \neq 0$. Здесь $M_\Delta = M$ и, следовательно, пучок (1) регулярен [1]. Из результатов [1] следует, что в этом случае система с.ф. пучка 5-кратно полна в $L_2[0,1]$.
- **(II)** $(\Delta_{12} \neq 0 \wedge \Delta_{123} = 0) \vee (\Delta_{12} = 0 \wedge \Delta_{123} \neq 0)$. Здесь $M_\Delta \subset M$ и M_Δ касается M либо в точках $1+2$, $2+3$, $\ldots$, $5+1$, либо в точках $1+2+3$, $2+3+4$, $\ldots$, $5+1+2$. Следовательно, пучок (1) является нормальным (по терминологии [1]). В этом случае система с.ф. пучка также 5-кратно полна в $L_2[0,1]$ (см. [1]).
- **(III)** $\Delta_{12} = \Delta_{123} = 0$. Здесь $M_\Delta \subset M$ и M_Δ не касается границы M. Следовательно, пучок (1) не является нормальным (см. [1]). Этот случай содержит как пучки

с распадающимися граничными условиями, так и пучки с нераспадающимися граничными условиями. В первом подслучае система с.ф. является 5-кратной полной в $L_2[0,1]$. Этот результат есть частный случай теоремы Келдыша, которая была сформулирована без доказательства в [2]. Во втором подслучае вопрос о полноте с.ф. пучка (1) до сих пор до конца не решен.

Замечание 7. Так как доказательство теоремы Келдыша полностью так и не было опубликовано, то было много попыток доказать различные варианты этой теоремы. Серьезное продвижение в этом направлении было сделано в 1973 Хромовым в его докторской диссертации [3]. Им было получено доказательство теоремы Келдыша в случае аналитических коэффициентов дифференциального выражения. Аналогичный результат другим методом был доказан Эберхардом [5]. В случае произвольных суммируемых коэффициентов эта теорема была доказана Шкаликовым в 1976 году [6].

Замечание 8. Хромов [7] был первым, кто рассмотрел нерегулярную задачу на собственные значения третьего порядка (то есть при $n = 3$) вида

$$y^{(3)} + \lambda y = 0, \quad \alpha_i y^{(i-1)}(0) + \beta_i y^{(i-1)}(1) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Он доказал, что условие $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ в случае $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ является необходимым и достаточным для обращения в нуль коэффициентов при экспонентах, соответствующих точкам $\omega_1 + \omega_2$, $\omega_2 + \omega_3$, $\omega_3 + \omega_1$, в характеристическом определителе. Хромов исследовал вопрос о разложении функций в биортогональные ряды по с.ф. задачи (2) при выполнении этого условия. Решение этого вопроса имело принципиальное значение, так как функция Грина задачи (2) в данном случае имеет экспоненциальный рост по λ как при $t \le x$, так и при $t \ge x$, в отличие от случая распадающихся граничных условий, когда функция Грина имеет экспоненциальный рост или при $t \le x$, или при $t \ge x$. Но с точки зрения вопроса о полноте системы с.ф. эта задача не представляет трудности, так как она является нормальной в указанном выше смысле. Отметим, что все возможные нерегулярные ситуации при $n = 3$ или $n = 4$ либо также нормальные, либо вырожденные.

Дмитриев [8] распространил результаты [7] на случай задачи n-го порядка, аналогичной задаче (2), где $n = 4k + 1$. В случае $\beta_i = 1$, $i = \overline{1, n}$ он накладывал на коэффициенты α_i условия, которые при $n = 5$ имеют вид

$$\alpha_1 - \omega_j \alpha_2 + \omega_j^2 \alpha_3 - \omega_j^3 \alpha_4 + \omega_j^4 \alpha_5 = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Эти условия являются достаточными для того, чтобы соответствующая задача на собственные значения принадлежала случаю **(III)** (см. выше).

В этой статье дается полное описание пучков, принадлежащих случаю **(III)**.

Рассмотрим следующую матрицу

$$\Omega := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \cdots & \omega_5^4 \end{pmatrix} = (Y_1 Y_2 \dots Y_5),$$

а также транспонированную к ней матрицу

$$\Omega^T := \begin{pmatrix} 1 & \omega_1 & \cdots & \omega_1^4 \\ 1 & \omega_2 & \cdots & \omega_2^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_5 & \cdots & \omega_5^4 \end{pmatrix} = (Z_1 Z_2 \dots Z_5).$$

Очевидно, справедливо равенство $\theta := \det \Omega = \det \Omega^T \neq 0$ и, следовательно, векторы Y_1, $Y_2, \dots, Y_5$ и векторы $Z_1, Z_2, \dots, Z_5$ образуют базисы в $\mathbb{C}^n$. Обозначим $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5)^T$,

$\beta := (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_5)^T$ и разложим эти векторы по системе Z_1, Z_2, …, Z_5

$$\alpha = \hat{\alpha}_1 Z_1 + \hat{\alpha}_2 Z_2 + \cdots + \hat{\alpha}_5 Z_5 = \Omega^T \hat{\alpha},$$
$$\beta = \hat{\beta}_1 Z_1 + \hat{\beta}_2 Z_2 + \cdots + \hat{\beta}_5 Z_5 = \Omega^T \hat{\beta},$$

где $\hat{\alpha} := (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_5)^T$ и $\hat{\beta} := (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_5)^T$. Так как $\theta \neq 0$, то соответствия между α и $\hat{\alpha}$ и между β и $\hat{\beta}$ взаимно однозначны.

Обозначим для краткости $\omega := \omega_1$.

Лемма 2. *Имеют место следующие равенства для $j = \overline{1,5}$*

$$V_j = a_1 Y_j + a_2 Y_{\mathrm{mod}_5(j+1)} + \cdots + a_5 Y_{\mathrm{mod}_5(j+4)} = \Omega \hat{V}_j,$$
$$W_j = b_1 Y_j + b_2 Y_{\mathrm{mod}_5(j+1)} + \cdots + b_5 Y_{\mathrm{mod}_5(j+4)} = \Omega \hat{W}_j,$$

где $a_k = \hat{\alpha}_k \omega^{k-1}$, $b_k = \hat{\beta}_k \omega^{k-1}$, $k = \overline{1,5}$ и

$$\hat{V}_j = \left(a_{\mathrm{mod}_5(2-j)}, a_{\mathrm{mod}_5(3-j)}, \ldots, a_{\mathrm{mod}_5(6-j)}\right)^T,$$
$$\hat{W}_j = \left(b_{\mathrm{mod}_5(2-j)}, b_{\mathrm{mod}_5(3-j)}, \ldots, b_{\mathrm{mod}_5(6-j)}\right)^T.$$

Выясним, при каких значениях параметров a_j, b_j реализуется случай **(III)**. Очевидно,

$$\Delta_{12} = |W_1 W_2 V_3 V_4 V_5| = \theta \left|\hat{W}_1 \hat{W}_2 \hat{V}_3 \hat{V}_4 \hat{V}_5\right| = \theta \hat{\Delta}_{12},$$
$$\Delta_{123} = |W_1 W_2 W_3 V_4 V_5| = \theta \left|\hat{W}_1 \hat{W}_2 \hat{W}_3 \hat{V}_4 \hat{V}_5\right| = \theta \hat{\Delta}_{123},$$
$$\Delta_1 = |W_1 V_2 V_3 V_4 V_5| = \theta \left|\hat{W}_1 \hat{V}_2 \hat{V}_3 \hat{V}_4 \hat{V}_5\right| = \theta \hat{\Delta}_1,$$
$$\Delta_{1234} = |W_1 W_2 W_3 W_4 V_5| = \theta \left|\hat{W}_1 \hat{W}_2 \hat{W}_3 \hat{W}_4 \hat{V}_5\right| = \theta \hat{\Delta}_{1234},$$

где

$$\hat{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & b_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ b_2 & b_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ b_3 & b_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ b_4 & b_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ b_5 & b_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \hat{\Delta}_{123} = \begin{vmatrix} b_1 & b_5 & b_4 & a_3 & a_2 \\ b_2 & b_1 & b_5 & a_4 & a_3 \\ b_3 & b_2 & b_1 & a_5 & a_4 \\ b_4 & b_3 & b_2 & a_1 & a_5 \\ b_5 & b_4 & b_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix},$$
$$\hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ b_2 & a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ b_3 & a_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ b_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ b_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \hat{\Delta}_{1234} = \begin{vmatrix} b_1 & b_5 & b_4 & b_3 & a_2 \\ b_2 & b_1 & b_5 & b_4 & a_3 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_5 & a_4 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & a_5 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Далее рассмотрим для определенности случай $\beta_i \neq 0$, $i = \overline{1,5}$. Не нарушая общности, можно считать, что $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_5 = 1$. Это дает $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$, или

$$\hat{W}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{W}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad , \hat{W}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Лемма 3. *Случай* **(III)** *имеет место тогда и только тогда, когда для вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_5)$ имеет место одно из следующих представлений при $x, t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $y, p, q \in \mathbb{C}$*

(1) $a = (tx, t^2x, t^3x, y, x)$ *(здесь $\Delta_{1234} \neq 0$, а $\Delta_1 = 0$ тогда и только тогда, когда $y = t^4 x$ или $y = \frac{x}{t}$);*

(2) *$a = (t^2x, t^3x, y, x, tx)$ (здесь $\Delta_{1234} \neq 0$, а $\Delta_1 = 0$ тогда и только тогда, когда $y = t^4x$ или $y = \frac{x}{t}$);*

(3) *$a = (0, 0, 0, p, q)$, где $q \neq 0$ (здесь $\Delta_{1234} = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$ тогда и только тогда, когда $p \neq 0$, то есть $p = 0$ дает вырожденный случай);*

(4) *$a = (0, 0, p, q, 0)$, (здесь $\Delta_{1234} = 0$ и $\Delta_1 \neq 0$ тогда и только тогда, когда $p \neq 0$ и $q \neq 0$, то есть любое равенство $p = 0$ или $q = 0$ дает вырожденный случай);*

(5) *$a = (0, p, q, 0, 0)$, где $p \neq 0$ (здесь $\Delta_{1234} = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$ тогда и только тогда, когда $q \neq 0$, то есть $q = 0$ дает вырожденный случай).*

Далее будем считать, что для вектора a имеет место одно из представлений **(1)–(5)** Леммы 3, дающее невырожденный случай.

Предположим, что вектор-функция $f = (\bar{f}_0, \bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_4) \in L_2^5[0, 1]$ ортогональна системе производных цепочек пучка (1). Обозначая через $g(x, \lambda)$ порождающую функцию для системы с.ф. и предполагая, что $g(x, \lambda)$ есть целая аналитическая функция по λ первой степени, условие ортогональности можно записать в виде

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_0^1 g(x, \lambda) \left(f_0(x) + \lambda f_1(x) + \cdots + \lambda^4 f_4(x)\right) dx \\ &= \int\limits_0^1 g(x, \lambda) f(x, \lambda)\, dx =: F(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda, \end{aligned} \tag{4}$$

где Λ есть множество нулей характеристического определителя $\Delta(\lambda)$. Известно, что множество Λ совпадает с множеством с.з. пучка (1) с возможным исключением $\lambda = 0$.

Рассмотрим следующую функцию

$$\mathcal{F}(\lambda) := \frac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Эта функция, вообще говоря, есть мероморфная функция, полюсами которой могут быть только нули $\Delta(\lambda)$. В силу предположения (4) полюса функции $\mathcal{F}(\lambda)$ являются устранимыми, то есть $\mathcal{F}(\lambda)$ на самом деле есть целая аналитическая функция.

Введем следующее условие для целой аналитической функции $F(\lambda)$ первой степени:

(A) *Существуют по крайней мере три луча в λ-плоскости, исходящие из начала координат, такие, что углы между соседними лучами меньше π и функция $\mathcal{F}(\lambda)$ имеет не более чем степенной рост на этих лучах.*

Если $F(\lambda) \in (A)$ (то есть F удовлетворяет (A)), то на основании принципа Фрагмена-Линделефа функция $\mathcal{F}(\lambda)$ имеет не более чем степенной рост во всей $\mathbb{C}$. По теореме Лиувилля отсюда следует, что $\mathcal{F}(\lambda)$ есть полином по λ, коэффициенты которого есть функционалы от $f(x)$, порожденные вполне конкретным конечным набором функций из $L_2^5[0, 1]$. Предполагая, что $f(x)$ ортогональна этому конечному набору функций (это предположение не приводит к конечному дефекту системы с.ф., так как из [9] следует, что для пучка (1) справедлива следующая альтернатива: *либо система с.ф. пучка* (1) *5-кратно полна в $L_2^5[0, 1]$, либо эта система имеет бесконечный дефект*), получим $\mathcal{F}(\lambda) \equiv 0$. Следовательно, $F(\lambda) \equiv 0$, откуда стандартными расуждениями (см., например, [6, 9]) выводим, что $f(x) = 0$ п.в. на $[0, 1]$, и 5-кратная полнота тем самым установлена.

Из изложенного видно, что проблема заключается в нахождении подходящей порождающей функции, то есть такой порождающей функции, что $F(\lambda) \in (A)$.

Традиционно (см., например, [10]) в качестве порождающих функций берутся функции

$$g_1(\cdot,\lambda)=\begin{vmatrix} y_1(\cdot,\lambda) & \dots & y_5(\cdot,\lambda) \\ u_{21} & \dots & u_{25} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{51} & \dots & u_{55} \end{vmatrix},\ \dots\ ,g_5(\cdot,\lambda)=\begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{41} & \dots & u_{45} \\ y_1(\cdot,\lambda) & \dots & y_5(\cdot,\lambda) \end{vmatrix}.$$

Некоторые из этих функций хорошо работают в случае распадающихся краевых условий (см. [3, 6, 9]), но в случае пучка (1) для каждой из этих функций $F(\lambda)\notin(A)$.

В [11] предлагается искать подходящую порождающую функцию в виде линейной комбинации функций $g_j(x,\lambda)$, $j=\overline{1,5}$,

$$\begin{aligned} g(x,\lambda;\Gamma) &:= \gamma_1 g_1(x,\lambda)+\dots+\gamma_5 g_5(x,\lambda) \\ &= \lambda^{10}\begin{vmatrix} 0 & e^{\lambda\omega_1 x} & e^{\lambda\omega_2 x} & \dots & e^{\lambda\omega_5 x} \\ -\Gamma & V_1+e^{\lambda\omega_1}W_1 & V_2+e^{\lambda\omega_2}W_2 & \dots & V_5+e^{\lambda\omega_5}W_5 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где вектор $\Gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_5)^T$ является параметром. Покажем, что этот вектор можно подобрать так, что соответствующая функция $F(\lambda)\in(A)$. Чтобы подчеркнуть зависимость этой функции от Γ, будем писать $F(\lambda;\Gamma)$.

Запишем $g(x,\lambda;\Gamma)$ подробно. Для краткости будем использовать следующие обозначения

$$X^1:=|\Gamma V_2V_3V_4V_5|,\ X_2^1:=|\Gamma W_2V_3V_4V_5|,\ \dots\ ,X_{124}^3:=|W_1W_2\Gamma W_4V_5|,\ \dots\ ,$$

где верхний индекс обозначает позицию, на которой находится вектор Γ, а нижние индексы обозначают позиции, на которых находятся векторы W_j. Имеет место представление

$$\begin{aligned} g(x,\lambda;\Gamma) = \lambda^{10}e^{\lambda\omega_1 x}\big(&X^1+e^{\lambda\omega_2}X_2^1+e^{\lambda\omega_3}X_3^1+e^{\lambda\omega_4}X_4^1+e^{\lambda\omega_5}X_5^1+e^{\lambda(\omega_2+\omega_3)}X_{23}^1 \\ &+e^{\lambda(\omega_2+\omega_4)}X_{24}^1+e^{\lambda(\omega_2+\omega_5)}X_{25}^1+e^{\lambda(\omega_3+\omega_4)}X_{34}^1+e^{\lambda(\omega_3+\omega_5)}X_{35}^1 \\ &+e^{\lambda(\omega_4+\omega_5)}X_{45}^1+e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}X_{234}^1+e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_5)}X_{235}^1 \\ &+e^{\lambda(\omega_2+\omega_4+\omega_5)}X_{245}^1+e^{\lambda(\omega_3+\omega_4+\omega_5)}X_{345}^1+e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)}X_{2345}^1\big) \\ +\lambda^{10}e^{\lambda\omega_2 x}\big(&X^2+e^{\lambda\omega_1}X_1^2+e^{\lambda\omega_3}X_3^2+e^{\lambda\omega_4}X_4^2+e^{\lambda\omega_5}X_5^2+e^{\lambda(\omega_1+\omega_3)}X_{13}^2 \\ &+e^{\lambda(\omega_1+\omega_4)}X_{14}^2+e^{\lambda(\omega_1+\omega_5)}X_{15}^2+e^{\lambda(\omega_3+\omega_4)}X_{34}^2+e^{\lambda(\omega_3+\omega_5)}X_{35}^2 \\ &+e^{\lambda(\omega_4+\omega_5)}X_{45}^2+e^{\lambda(\omega_1+\omega_3+\omega_4)}X_{134}^2+e^{\lambda(\omega_1+\omega_3+\omega_5)}X_{135}^2 \\ &+e^{\lambda(\omega_1+\omega_4+\omega_5)}X_{145}^2+e^{\lambda(\omega_3+\omega_4+\omega_5)}X_{345}^2+e^{\lambda(\omega_1+\omega_3+\omega_4+\omega_5)}X_{1345}^2\big) \\ +\lambda^{10}e^{\lambda\omega_3 x}\big(&X^3+e^{\lambda\omega_1}X_1^3+e^{\lambda\omega_2}X_2^3+e^{\lambda\omega_4}X_4^3+e^{\lambda\omega_5}X_5^3+e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}X_{12}^3 \\ &+e^{\lambda(\omega_1+\omega_4)}X_{14}^3+e^{\lambda(\omega_1+\omega_5)}X_{15}^3+e^{\lambda(\omega_2+\omega_4)}X_{24}^3+e^{\lambda(\omega_2+\omega_5)}X_{25}^3 \\ &+e^{\lambda(\omega_4+\omega_5)}X_{45}^3+e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_4)}X_{124}^3+e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_5)}X_{125}^3 \\ &+e^{\lambda(\omega_1+\omega_4+\omega_5)}X_{145}^3+e^{\lambda(\omega_2+\omega_4+\omega_5)}X_{245}^3+e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_4+\omega_5)}X_{1245}^3\big) \\ +\lambda^{10}e^{\lambda\omega_4 x}\big(&X^4+e^{\lambda\omega_1}X_1^4+e^{\lambda\omega_2}X_2^4+e^{\lambda\omega_3}X_3^4+e^{\lambda\omega_5}X_5^4+e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}X_{12}^4 \\ &+e^{\lambda(\omega_1+\omega_3)}X_{13}^4+e^{\lambda(\omega_1+\omega_5)}X_{15}^4+e^{\lambda(\omega_2+\omega_3)}X_{23}^4+e^{\lambda(\omega_2+\omega_5)}X_{25}^4 \\ &+e^{\lambda(\omega_3+\omega_5)}X_{35}^4+e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3)}X_{123}^4+e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_5)}X_{125}^4 \\ &+e^{\lambda(\omega_1+\omega_3+\omega_5)}X_{135}^4+e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_5)}X_{235}^4+e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_5)}X_{1235}^4\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\lambda^{10}e^{\lambda\omega_5 x}\big(X^5+e^{\lambda\omega_1}X_1^5+e^{\lambda\omega_2}X_2^5+e^{\lambda\omega_3}X_3^5+e^{\lambda\omega_4}X_4^5+e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}X_{12}^5\\
&\qquad+e^{\lambda(\omega_1+\omega_3)}X_{13}^5+e^{\lambda(\omega_1+\omega_4)}X_{14}^5+e^{\lambda(\omega_2+\omega_3)}X_{23}^5+e^{\lambda(\omega_2+\omega_4)}X_{24}^5\\
&\qquad+e^{\lambda(\omega_3+\omega_4)}X_{34}^5+e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3)}X_{123}^5+e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_4)}X_{124}^5\\
&\qquad+e^{\lambda(\omega_1+\omega_3+\omega_4)}X_{134}^5+e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}X_{234}^5+e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_5)}X_{1235}^4\big)\,.
\end{aligned}\tag{5}$$

Анализируя $g(x,\lambda;\Gamma)$, можно заметить, что "плохими"слагаемыми (с точки зрения условия $F(\lambda;\Gamma)\in(A)$) являются слагаемые с коэффициентами

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\
(\boldsymbol{i}) & X_2^1 & X_5^1 & X_{23}^1 & X_{25}^1 & X_{34}^1 & X_{45}^1 & X_{234}^1 & X_{345}^1\\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\
(\boldsymbol{ii}) & X_3^2 & X_1^2 & X_{34}^2 & X_{13}^2 & X_{45}^2 & X_{15}^2 & X_{345}^2 & X_{145}^2\\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\
(\boldsymbol{iii}) & X_4^3 & X_2^3 & X_{45}^3 & X_{24}^3 & X_{15}^3 & X_{12}^3 & X_{145}^3 & X_{125}^3\\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\
(\boldsymbol{iv}) & X_5^4 & X_3^4 & X_{15}^4 & X_{35}^4 & X_{12}^4 & X_{23}^4 & X_{125}^4 & X_{123}^4\\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\
(\boldsymbol{v}) & X_1^5 & X_4^5 & X_{12}^5 & X_{14}^5 & X_{23}^5 & X_{34}^5 & X_{123}^5 & X_{234}^5\\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow
\end{array}\tag{6}$$

(для дальнейшего изложения удобно разбить эти коэффициенты на пять групп $(\boldsymbol{i})-(\boldsymbol{v})$). Смысл стрелок будет ясен из дальнейшего изложения.

Введем вектор $\hat\Gamma=\Omega^{-1}\Gamma=(\hat\gamma_1,\hat\gamma_2,\dots,\hat\gamma_5)^T$. Далее будем писать $X_2^1(\Gamma)$, $X_5^1(\Gamma)$, …, чтобы подчеркнуть, какой вектор Γ используется. Аналогично будем писать $\hat X_2^1(\hat\Gamma)$, $\hat X_5^1(\hat\Gamma)$, …. Кроме того, введем оператор S циклического сдвига вверх

$$\hat\Gamma=(\hat\gamma_1,\hat\gamma_2,\dots,\hat\gamma_5)^T\longmapsto S\hat\Gamma:=(\hat\gamma_2,\hat\gamma_3,\dots,\hat\gamma_5,\hat\gamma_5)^T.$$

Лемма 4. *Для любого вектора $\hat\Gamma$ справедливы равенства (см. стрелки в таблице* (6)*):*

$$\begin{array}{llll}
\hat X_3^2(\hat\Gamma)=\hat X_2^1(S\hat\Gamma), & \hat X_1^2(\hat\Gamma)=\hat X_5^1(S\hat\Gamma), & \dots, & \hat X_{145}^2(\hat\Gamma)=\hat X_{345}^1(S\hat\Gamma);\\
\hat X_4^3(\hat\Gamma)=\hat X_3^2(S\hat\Gamma), & \hat X_2^3(\hat\Gamma)=\hat X_1^2(S\hat\Gamma), & \dots, & \hat X_{125}^3(\hat\Gamma)=\hat X_{145}^2(S\hat\Gamma);\\
\hat X_5^4(\hat\Gamma)=\hat X_4^3(S\hat\Gamma), & \hat X_3^4(\hat\Gamma)=\hat X_2^3(S\hat\Gamma), & \dots, & \hat X_{123}^4(\hat\Gamma)=\hat X_{125}^3(S\hat\Gamma);\\
\hat X_1^5(\hat\Gamma)=\hat X_5^4(S\hat\Gamma), & \hat X_4^5(\hat\Gamma)=\hat X_3^4(S\hat\Gamma), & \dots, & \hat X_{234}^5(\hat\Gamma)=\hat X_{123}^4(S\hat\Gamma);\\
\hat X_2^1(\hat\Gamma)=\hat X_1^5(S\hat\Gamma), & \hat X_5^1(\hat\Gamma)=\hat X_4^5(S\hat\Gamma), & \dots, & \hat X_{345}^1(\hat\Gamma)=\hat X_{234}^5(S\hat\Gamma).
\end{array}$$

В каждом случае **(1)**–**(5)** Леммы 3 (и даже подслучае) дальнейшие рассуждения будут различными. Ввиду ограниченности объема статьи, рассмотрим только подслучай $y\neq t^4x$ и $y\neq\frac{x}{t}$ случая **(1)**. В этом подслучае $\Delta_1\neq0$ и $\Delta_{1234}\neq0$ (см. рисунок).

Подсчитывая в рассматриваемом подслучае коэффициенты группы $(\boldsymbol{i})$, получим следующий результат

Лемма 5. *Справедливы следующие соотношения*

$$\begin{array}{lll}
(\boldsymbol{\alpha}) & t\hat\gamma_1-\hat\gamma_2=0 \iff & X_{34}^1=X_{345}^1=0;\\
(\boldsymbol{\beta}) & t\hat\gamma_2-\hat\gamma_3=0 \iff & X_{45}^1=0;\\
(\boldsymbol{\gamma}) & t\hat\gamma_3-\hat\gamma_4=0 \iff & X_5^1=X_{25}^1=0;\\
(\boldsymbol{\delta}) & t\hat\gamma_4-\hat\gamma_5=0 \iff & X_{21}^1=0;\\
(\boldsymbol{\varepsilon}) & t\hat\gamma_5-\hat\gamma_1=0 \iff & X_{234}^1=0;
\end{array}$$

и всегда $X_{23}^1=0$ без каких-либо условий на вектор $\hat\Gamma$.

Найдем вектор $\hat{\Gamma}$ из условия, что все равенства системы $\boldsymbol{(\alpha)} - \boldsymbol{(\varepsilon)}$ выполняются. Очевидно, для существования такого вектора, необходимо и достаточно, чтобы $t^5 = 1$, то есть $t = \varepsilon_j$, $j = \overline{1,5}$, где ε_j есть различные корни пятой степени из 1. Следовательно, в случае $t^5 = 1$ имеется 5 линейно независимых решений системы $\boldsymbol{(\alpha)} - \boldsymbol{(\varepsilon)}$, нормированных условием $\hat{\gamma}_1 = 1$,

$$\hat{\Gamma}_j^0 = (1, \varepsilon_j, \varepsilon_j^2, \varepsilon_j^3, \varepsilon_j^4)^T, \quad j = \overline{1,5}.$$

По построению все коэффициенты группы $\boldsymbol{(i)}$ на векторах Γ_j^0 равны нулю. С учетом этого и на основании Леммы 4 получаем следующий результат.

Лемма 6. $\big(\forall j = \overline{1,5}\big)$ $F(\lambda, \Gamma_j^0) \in (A)$.

Если $t^5 \neq 1$, то ищем вектор $\hat{\Gamma}$ из условия выполнения всех равенств системы $\boldsymbol{(\alpha)} - \boldsymbol{(\varepsilon)}$, кроме одного. В этом случае существуют также 5 линейно независимых решений (с точностью до умножения на отличную от нуля константу)

$$\hat{\Gamma}_1^1 = \begin{pmatrix} 1, \\ t, \\ t^2, \\ t^3, \\ t^4 \end{pmatrix}, \hat{\Gamma}_2^1 = \begin{pmatrix} t^4, \\ 1, \\ t, \\ t^2, \\ t^3 \end{pmatrix}, \hat{\Gamma}_3^1 = \begin{pmatrix} t^3, \\ t^4, \\ 1, \\ t, \\ t^2 \end{pmatrix}, \hat{\Gamma}_4^1 = \begin{pmatrix} t^2, \\ t^3, \\ t^4, \\ 1, \\ t \end{pmatrix}, \hat{\Gamma}_4^1 = \begin{pmatrix} t, \\ t^2, \\ t^3, \\ t^4, \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При этом

1) для $\hat{\Gamma}_1^1$ не выполняется равенство $\boldsymbol{(\varepsilon)}$, то есть $\hat{X}_{234}^1(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы $\boldsymbol{(i)}$ равны нулю;
2) для $\hat{\Gamma}_2^1$ не выполняется равенство $\boldsymbol{(\alpha)}$, то есть $\hat{X}_{34}^1(\hat{\Gamma}_2^1) \neq 0$ и $\hat{X}_{345}^1(\hat{\Gamma}_2^1) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы $\boldsymbol{(i)}$ равны нулю;
3) для $\hat{\Gamma}_3^1$ не выполняется равенство $\boldsymbol{(\beta)}$, то есть $\hat{X}_{45}^1(\hat{\Gamma}_3^1) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы $\boldsymbol{(i)}$ равны нулю;
4) для $\hat{\Gamma}_4^1$ не выполняется равенство $\boldsymbol{(\gamma)}$, то есть $\hat{X}_5^1(\hat{\Gamma}_4^1) \neq 0$ и $\hat{X}_{25}^1(\hat{\Gamma}_4^1) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы $\boldsymbol{(i)}$ равны нулю;
5) для $\hat{\Gamma}_5^1$ не выполняется равенство $\boldsymbol{(\delta)}$, то есть $\hat{X}_2^1(\hat{\Gamma}_5^1) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы $\boldsymbol{(i)}$ равны нулю.

Легко видеть, что $|\hat{\Gamma}_1, \ldots, \hat{\Gamma}_5| = (1 - t^5)^4 \neq 0$, откуда следует линейная независимость векторов Γ_j, $j = \overline{1,5}$.

Лемма 7. $\big(\forall j = \overline{1,5}\big)$ $F(\lambda, \Gamma_j^1) \in (A)$.

Доказательство. Рассуждения проведем только для случая $j = 1$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Очевидно,

$$S\hat{\Gamma}_1^1 = \Gamma_5^1, \quad S\hat{\Gamma}_2^1 = \Gamma_1^1, \quad S\hat{\Gamma}_3^1 = \Gamma_2^1, \quad S\hat{\Gamma}_4^1 = \Gamma_3^1, \quad S\hat{\Gamma}_5^1 = \Gamma_4^1. \tag{7}$$

Выясним, какие коэффициенты из таблицы (6) на векторе Γ_1^1 не равны нулю. По построению $\hat{X}_{234}^1(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0$. Далее, используя соотношения (7) и Лемму 5, будем иметь

$$\begin{array}{lcl}
0 \neq \hat{X}_{34}^1(\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_{23}^5(S\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_{23}^5(\hat{\Gamma}_1^1) & \Longrightarrow & \hat{X}_{23}^5(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0; \\
0 \neq \hat{X}_{345}^1(\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_{234}^5(S\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_{234}^5(\hat{\Gamma}_1^1) & \Longrightarrow & \hat{X}_{234}^5(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0; \\
0 \neq \hat{X}_{45}^1(\hat{\Gamma}_3^1) = \hat{X}_{34}^5(\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_{23}^4(\hat{\Gamma}_1^1) & \Longrightarrow & \hat{X}_{23}^4(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0; \\
0 \neq \hat{X}_5^1(\hat{\Gamma}_4^1) = \hat{X}_4^5(\hat{\Gamma}_3^1) = \hat{X}_3^4(\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_2^3(\hat{\Gamma}_1^1) & \Longrightarrow & \hat{X}_2^3(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0; \\
0 \neq \hat{X}_{25}^1(\hat{\Gamma}_4^1) = \hat{X}_{14}^5(\hat{\Gamma}_3^1) = \hat{X}_{35}^4(\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_{24}^3(\hat{\Gamma}_1^1) & \Longrightarrow & \hat{X}_{24}^3(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0; \\
0 \neq \hat{X}_2^1(\hat{\Gamma}_5^1) = \hat{X}_1^5(\hat{\Gamma}_4^1) = \hat{X}_5^4(\hat{\Gamma}_3^1) = \hat{X}_4^3(\hat{\Gamma}_2^1) = \hat{X}_3^2(\hat{\Gamma}_1^1) & \Longrightarrow & \hat{X}_3^2(\hat{\Gamma}_1^1) \neq 0.
\end{array}$$

Следовательно, все коэффициенты из таблицы (6) на векторе Γ_1^1 обращаются в нуль, кроме коэффициентов $X_{234}^1(\Gamma_1^1)$, $X_{23}^5(\Gamma_1^1)$, $X_{234}^5(\Gamma_1^1)$, $X_{23}^4(\Gamma_1^1)$, $X_2^3(\Gamma_1^1)$, $X_{24}^3(\Gamma_1^1)$, $X_3^2(\Gamma_1^1)$.

Пусть $M(\Gamma_1^1)$ есть наименьший выпуклый многоугольник, содержащий многоугольники $M_{g_1(0,\cdot))}$ и $M_{g_1(1,\cdot))}$, где обозначено $g_1(x,\lambda) := g(x,\lambda;\Gamma_1^1)$. Сравнивая многоугольники $M(\Gamma_1^1)$ и M_Δ, получаем утверждение леммы.

В заключение сформулируем лемму, которая необходима на завершающей стадии доказательства Теоремы 1.

Лемма 8. *Если векторы* Γ_j, $j=\overline{1,5}$, *линейно независимы, то функции* $g(\cdot,\lambda;\Gamma_j)$, $j=\overline{1,5}$, *также линейно независимы* $\forall\lambda\in\mathbb{C}\setminus(\sigma\bigcup\{0\})$.

Используя Леммы 1 – 8 и применяя модифицированную схему рассуждений при доказательстве кратной полноты с.ф., которая обсуждалась выше, получаем утверждение Теоремы 1.

Список литературы

[1] А.А. Шкаликов, *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях* // Труды семинара имени И.Г. Петровского. — М.: Изд-во Моск. ун-та. — 1983. — Вып. 9. — С. 190–229.

[2] М.В. Келдыш, *О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений* // Докл. АН СССР. — 1951. — Том 77. — № 1. — С. 11–14.

[3] А.П. Хромов, *Конечномерные возмущения вольтерровых операторов.* Дис. . . . докт. физ.-мат. наук. — Институт математики СО АН СССР. Новосибирск. — 1973. — 242 с. (Автореферат опубликован в [4]).

[4] А.П. Хромов, *Конечномерные возмущения вольтерровых операторов* // Матем. заметки. — 1974. — **16**. — № 4. — С. 669–680.

[5] W. Eberhard, *Zur Vollständigkeit des Biorthogonalsystems von Eigenfunktionen irregulärer Eigenwertprobleme*, Math. Z. 1976, **146**, no. 3, pp. 213–221 (German).

[6] А.А. Шкаликов. *О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями* // Функц. анализ. — 1976. — Том 10. — № 4. — С. 69–80.

[7] А.П. Хромов, *Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка* // В сб.: Исследования по теории операторов. — Уфа. — 1988. — С. 182–193.

[8] О.Ю. Дмитриев, *Разложение по собственным функциям дифференциального оператора n-го порядка с нерегулярными краевыми условиями* // В сб.: Математика и ее приложения. Теория, методы, алгоритмы. Межвуз. сб. научн. трудов. Выпуск 2. — Саратов: Изд-во СГУ. — 1991. — С. 70–72.

[9] А.И. Вагабов, *Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов.* — Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та. — 1994. — 160 с.

[10] М.А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы.* — М.: Наука, 1968.

[11] V.S. Rykhlov, *On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operators* // Spectral and Evolutional Problems: Proceedings of the Seventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. — Simferopol: Simferopol State University. — 1997. – Vol. 7. — P. 70–73.

В.С. Рыхлов, Механико–математический факультет, Саратовский государственный университет, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410026, Россия

E-mail: RykhlovVS@info.sgu.ru

Операторный подход к задачам сопряжения

П. А. Старков
Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь, Украина

Keywords: Операторный пучок, уравнение Гельмгольца

В работе на примере первой спектральной задачи сопряжения для уравнения Гельмгольца показано приведение задачи к исследованию линейного операторного пучка.

1. Постановка первой задачи сопряжения.

Пусть Ω_1 и Ω_2 – ограниченные области в действительном m-мерном пространстве:

$$\Omega_1 \subset \mathbb{R}^m, \quad \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m,$$

такие что $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \partial\Omega_1$, Ω_1 односвязна, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m \backslash \overline{\Omega}_1$ и для любой точки $w \in \partial\Omega_1$ существует окрестность содержащая только точки из Ω_1 и Ω_2. Здесь и далее $\partial\Omega_1$ – граница области Ω_1, $\partial\Omega_2$ – граница области Ω_2. Полагаем, что $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ достаточно гладкие. Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнений Гельмгольца:

$$u_1 - \Delta u_1 + \lambda u_1 = 0 \ (\text{ в } \Omega_1\,), \quad u_2 - \Delta u_2 + \lambda u_2 = 0 \ (\text{ в } \Omega_2\,), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} = \mu u_1 \ (\text{ на } \Gamma\,), \quad u_2 = u_1 \ (\text{ на } \Gamma\,), \quad u_2 = 0 \ (\text{ на } S\,). \tag{2}$$

Здесь $\vec{n}$ – единичная внешняя нормаль к Ω_1, $\lambda \in \mathbb{C}$ – фиксированное число, $\mu \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, функция u_1 определена в Ω_1, функция u_2 определена в Ω_2, $\Gamma = \partial\Omega_1$, $S = \partial\Omega_2 \backslash \Gamma$. Мы будем называть задачу (1)–(2) первой задачей сопряжения [1], [4].

2. Приведение задачи к линейному операторному пучку и исследование свойств операторных коэффициентов.

Приведем задачу (1)–(2) к исследованию линейного операторного пучка согласно подходу, изложенному в [5].

Введём исходный объект – пару

$$u := (u_1(x),\, x \in \Omega_1; u_2(x),\, x \in \Omega_2)$$

и гильбертово пространство $H = H_1 \oplus H_2$, где $H_1 = L_2(\Omega_1),\ H_2 = L_2(\Omega_2)$, со скалярным произведением

$$(u, \varphi) := \sum_{k=1}^{2} \int_{\Omega_k} u_k(x)\overline{\varphi_k(x)}\, dx. \tag{3}$$

Ищем решение задачи (1)–(2) в виде

$$u = v + w,$$

где $v = (v_1; v_2) \in H$ – решение первой вспомогательной задачи (см. ниже), а $w = (w_1; w_2) \in H$ – решение второй вспомогательной задачи.

Первую вспомогательную задачу получаем из (1)–(2) при $\mu = 0$:

$$(v_1 - \Delta v_1; v_2 - \Delta v_2) = f = (f_1; f_2) := (-\lambda u_1; -\lambda u_2), \qquad \frac{\partial v_1}{\partial n} - \frac{\partial v_2}{\partial n} = 0 \ (\text{ на } \Gamma\,), \tag{4}$$

$$v_2 = v_1 \ (\text{ на } \Gamma\,), \quad v_2 = 0 \ (\text{ на } S\,).$$

Для этой задачи определим вспомогательный оператор A_3 следующим образом:

$$\begin{aligned} A_3 v \ &:= \ (v_1 - \Delta v_1; v_2 - \Delta v_2) \\ \mathcal{D}(A_3) \ &:= \ \{v \in H : \Delta v_1 \in H_1,\ \Delta v_2 \in H_2,\ \frac{\partial v_1}{\partial n} - \frac{\partial v_2}{\partial n} = 0 \text{ (на } \Gamma\text{)}, \\ &\qquad v_2 = v_1 \text{ (на } \Gamma\text{)}, \quad v_2 = 0 \text{ (на } S\text{)}\}. \end{aligned}$$

Определение обобщённого решения задачи (4) основано на формуле Грина и понятии энергетического пространства оператора A_3.

Имеем следующую формулу Грина (с учётом условия слипания на Γ):

$$\sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} (v_k - \Delta v_k)\overline{\varphi_k}\, d\Omega_k = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} [v_k\overline{\varphi_k} + \nabla v_k \cdot \overline{\nabla\varphi_k}] d\Omega_k - \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial v_1}{\partial n} - \frac{\partial v_2}{\partial n}\right) \overline{\gamma\varphi}\, dS \tag{5}$$

Для обобщенного решения первой вспомогательной задачи получаем тождество:

$$\sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} f_k\overline{\varphi_k}\, d\Omega_k = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} [v_k\overline{\varphi_k} + \nabla v_k \cdot \overline{\nabla\varphi_k}] d\Omega_k.$$

Введём операторы A_1, A_2, γ_1 и γ_2

$$A_1 v := v - \Delta v, \quad \mathcal{D}(A_1) := \{v \in H_1 : \Delta v \in H_1,\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ (на } \Gamma\text{)}\},$$

$$A_2 v := v - \Delta v, \quad \mathcal{D}(A_2) := \{v \in H_2 : \Delta v \in H_2,\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ (на } \Gamma\text{)}, \quad v = 0 \text{ (на } S\text{)}\},$$

γ_i, $(i = 1, 2)$ – операторы следа на Γ функций, заданных в Ω_1 и Ω_2 соответственно.

Определение 1. Обобщённым решением первой вспомогательной задачи называется такой элемент $v \in \mathcal{H}_{A_3}$, для которого при любом $\varphi \in \mathcal{H}_{A_3}$ выполнено тождество

$$(v, \varphi)_{A_3} = (f, \varphi) \tag{6}$$

Лемма 1. *Имеет место ортогональное разложение*

$$\mathcal{H}_{A_3} = H^0_{A_1} \oplus H^0_{A_2} \oplus U_3, \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered} H^0_{A_1} := \{(u_1; 0) \in \mathcal{H}_{A_3} : \gamma_1 u_1 = 0\}, \quad H^0_{A_2} := \{(0; u_2) \in \mathcal{H}_{A_3} : \gamma_2 u_2 = 0\}, \\ U_3 := \{(w_1; w_2) \in \mathcal{H}_{A_3} : w_i - \Delta w_i = 0 \ (\Omega_i),\ i = 1, 2; \gamma_1 w_1 = \gamma_2 w_2\}. \end{gathered}$$

Лемма 2. *Оператор A_3, заданный на $\mathcal{D}(A_3) \subset H$, является положительно определённым самосопряжённым оператором с дискретным спектром, его собственные значения имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_n(A_3) = \left(\frac{\sum_{k=1}^{2} \operatorname{mes}\Omega_k}{6\pi^2}\right)^{-2/3} n^{2/3}(1 + o(1)) \quad (k \to \infty, \quad \Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^3). \tag{8}$$

При этом $\mathcal{H}_{A_3}$ – энергетическое пространство оператора A_3, где скалярное произведение имеет вид

$$(v, \varphi)_{A_3} := \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} [v_k\overline{\varphi_k} + \nabla v_k \cdot \overline{\nabla\varphi_k}] d\Omega_k,$$

причём

$$\mathcal{H}_{A_3} = \{u \in H : ||u||^2_{A_3} = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} [|u_k|^2 + |\nabla u_k|^2] d\Omega_k < \infty,\ \gamma u_1 = \gamma u_2\}.$$

Оператор A_3^{-1} является положительным и компактным.

Доказательство проводится по обычной схеме [2]. Требуется лишь обоснование асимптотической формулы (8). Это устанавливается следующим образом.

Воспользуемся оператором A_4 из второй задачи сопряжения (исследование которой в данной статье не приводится) :

$$A_4 v := (v_1 - \Delta v_1; v_2 - \Delta v_2)$$

$$\mathcal{D}(A_4) = \{v \in H : \Delta v_i \in H_i,\ \frac{\partial v_i}{\partial n} = 0\ (\Gamma),\ i = 1, 2;\ v_2 = 0\ (S)\}.$$

Соответствующее $\mathcal{H}_{A_4}$ шире, чем $\mathcal{H}_{A_3}$.

$$\mathcal{H}_{A_4} = H^0_{A_1} \oplus H^0_{A_2} \oplus U_4, \qquad \mathcal{H}_{A_3} = H^0_{A_1} \oplus H^0_{A_2} \oplus U_3.$$

$$U_4 = \{v \in \mathcal{H}_{A_4} : v_i - \Delta v_i = 0\ (\Omega_i)\ i = 1, 2;\ \frac{\partial v_1}{\partial n} = \frac{\partial v_2}{\partial n}\ (\Gamma)\}.$$

Отсюда имеем

$$H^0_{A_1} \oplus H^0_{A_2} \subset \mathcal{H}_{A_3} \subset \mathcal{H}_{A_4} = \mathcal{H}_{A_1} \oplus \mathcal{H}_{A_2}.$$

Однако при использовании максиминимального принципа можно установить, что крайние энергетические пространства порождают одну и ту же асимптотику собственных значений, причём соответствующая константа в асимтотической формуле входит аддитивно. Отсюда и следует формула (8) (Основная идея состоит в том, что вариационные отношения для $H^0_{A_i}$ и $\mathcal{H}_{A_i}$, $i = 1, 2$, т. е. для задач Дирихле и Неймана, порождают одну и ту же асимптотику собственных значений). □

Вторую вспомогательную задачу получаем из (1)–(2) при $\lambda = 0$, $\psi := \mu\gamma_1 u_1$:

$$(w_1 - \Delta w_1; w_2 - \Delta w_2) = (0; 0), \qquad \frac{\partial w_1}{\partial n} - \frac{\partial w_2}{\partial n} = \psi\ (\text{ на } \Gamma\ ), \tag{9}$$
$$w_2 = w_1 = 0\ (\text{ на } \Gamma\ ), \quad w_2 = 0\ (\text{ на } S\ ).$$

Введем скалярное произведение $(\psi, \eta) := \int_\Gamma \psi\overline{\eta}\, d\Gamma$ в пространстве $L_2(\Gamma)$, а также, на его основе, линейный функционал $\langle\psi, \eta\rangle_0\ \forall\psi \in H^{-1/2}(\Gamma),\ \eta \in H^{1/2}(\Gamma)$ [3].

Определение 2. Обобщённым решением второй вспомогательной задачи называется такой элемент $w \in \mathcal{H}_{A_3}$, для которого при любом $\varphi \in \mathcal{H}_{A_3}$ выполнено тождество

$$(w, \varphi)_{A_3} = \langle\psi, \gamma_1\varphi_1\rangle_0. \tag{10}$$

Лемма 3. *Задача* (9) *при любом* $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ *имеет единственное обобщённое решение* $w = T_3\psi \in \mathcal{H}_{A_3}$.

Опираясь на тождества (6) и (10), для задачи (1)–(2) получим

$$(I_3 + \lambda B_{31} - \mu B_{32})u = 0, \qquad u \in \mathcal{H}_{A_3}, \tag{11}$$

где I_3 – единичный оператор в $\mathcal{H}_{A_3}$, а B_{31} и B_{32} заданы своими билинейными формами согласно формулам:

$$(B_{31}u, \varphi)_{A_3} = (u, \varphi) = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} u_k\overline{\varphi_k}\, d\Omega_k, \tag{12}$$

$$(B_{32}u, \varphi)_{A_3} = (\gamma_1 u_1, \gamma_1\varphi_1)_0 = \int\limits_{\Gamma} \gamma_1 u_1\overline{\gamma_1\varphi_1}\, d\Gamma. \tag{13}$$

Введём оператор γ_3 по закону

$$\gamma_3 u := \gamma_1 u_1 = \gamma_2 u_2, \qquad \forall u \in \mathcal{H}_{A_3}. \tag{14}$$

Лемма 4. *Операторы*

$$\gamma_3 : \mathcal{H}_{A_3} \to H^{1/2}(\Gamma), \qquad T_3 : H^{-1/2}(\Gamma) \to \mathcal{H}_{A_3}$$

взаимно сопряжены и ограничены как операторы, действующие из одного пространства в другое.

Лемма 5. *Операторы*

$$Q_3 := \gamma_3 A_3^{-1/2} : H \to L_2(\Gamma), \quad Q_3^* := A_3^{1/2} T_3 : L_2(\Gamma) \to H, \tag{15}$$

являются компактными операторами, которые взаимно сопряжены.

Лемма 6. *Оператор B_{31} имеет представление*

$$B_{31} = A_3^{-1/2} A_3^{-1} A_3^{1/2}, \qquad \mathcal{D}(B_{31}) = \mathcal{H}_{A_3}, \tag{16}$$

это положительный компактный оператор, действующий в $\mathcal{H}_{A_3}$. Его собственные значения $\lambda_n(B_{31})$ равны $\lambda_n(A_3^{-1})$, положительны, имеют пердельную точку нуль и асимптотическое поведение, следующее из формулы (8)*.*

Лемма 7. *Оператор $\gamma_3 : \mathcal{H}_{A_3} \to L_2(\Gamma)$ имеет следующее ядро*

$$\ker \gamma_3 = H^0_{A_1} \oplus H^0_{A_2},$$

его сужение

$$\widetilde{\gamma}_3 := \gamma_3 \Big|_{U_3} : U_3 \to H^{1/2}(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$$

имеет ограниченный обратный оператор

$$(\widetilde{\gamma}_3)^{-1} : H^{1/2}(\Gamma) \to U_3.$$

Лемма 8. *Разложение* (7) *порождает ортогональное разложение*

$$H = H^0_3 \oplus V_3,$$

$$H^0_3 := A_3^{1/2}(H^0_{A_1} \oplus H^0_{A_2}), \qquad V_3 := A_3^{1/2} U_3,$$

$$H^0_3 = \{\eta \in H : \gamma_1(A_3^{-1/2}\eta)_1 = \gamma_2(A_3^{-1/2}\eta)_2 = 0\},$$

$$V_3 = \{\zeta \in H : w = A^{-1/2}\zeta,\ w_k - \Delta w_k = 0\ (\Omega_k),\ k = 1, 2;$$

$$w_2 = 0\ (S),\ \gamma_1(A_3^{-1/2}\zeta)_1 = \gamma_2(A_3^{-1/2}\zeta)_2\}$$

Лемма 9. *Для оператора $Q_3 := \gamma_3 A_3^{-1/2} : H \to L_2(\Gamma)$, справедливы соотношения*

$$\ker Q_3 = H^0_3, \qquad Q_3^* : L_2(\Gamma) \to V_3 \subset H.$$

Лемма 10. *Оператор B_{32} имеет представление*

$$B_{32} = A_3^{-1/2} Q_3^* Q_3 A_3^{1/2}, \qquad \mathcal{D}(B_{32}) = \mathcal{H}_{A_3}. \tag{17}$$

Этот оператор является неотрицательным компактным оператором с ядром

$$\ker B_{32} = H^0_{A_1} \oplus H^0_{A_2}.$$

Его сужение на подпространство U_3 является компактным положительным оператором, а собственные значения этого сужения имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_n(B_{32}) = \lambda_n(Q_3^* Q_3) = \left(\frac{\mathrm{mes}\Gamma}{16\pi}\right)^{1/2} n^{-1/2}(1 + o(1)) \quad (k \to \infty).$$

Теорема 1. *Спектральная задача* (1)–(2) *равносильна задаче* (11) *в пространстве* $\mathcal{H}_{A_3}$, *а эта задача в свою очередь равносильна задаче*

$$L_3(\mu)\eta := (I_3 + \lambda A_3^{-1} - \mu B_3)\eta = 0 \quad \eta \in H,$$

где I_3 *– единичный оператор в* H, *а*

$$B_3 := Q_3^* Q_3, \quad 0 \leq B_3 \in \S(H), \quad \ker B_3 = H_{A_1}^0 \oplus H_{A_2}^0.$$

При этом собственные и присоединенные элементы этих задач связаны соотношением

$$A_3^{1/2} u = \eta,$$

а спектры, в частности, собственные значения, совпадают.

Автор выражает благодарность Н. Д. Копачевскому за руководство работой.

Список литературы

[1] Агранович М. С., Менникен Р. *Спектральные задачи для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничных условиях на негладкой поверхности.* // Математич. сборник. 1999, Т.190, N1, с. 29-68.

[2] Каразеева Н. А., Соломяк М. З. *Асимптотика спектра задач типа Стеклова в составных областях.* // Проблемы мат. анализа. Вып. 8. - Ленинград: ЛГУ, 1981.-с. 36-48.

[3] Березанский Ю. М. *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.*– К.:Наукова думка, 1965, – 800 с.

[4] Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н. *Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции.*– М.:Наука, 1977, – 416 с.

[5] Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан *Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи.*– М.:Наука, 1989, – 416 с.

Украина, 95007, г. Симферополь, ул. Ялтинская, 4, Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, кафедра математического анализа

E-mail: pstarksci@aport.ru

Условие о-компакности в K-пространстве

В. М. Щербин

В настоящей заметке рассматриваются множества, принадлежащие K–пространству.

Сначала дается определение компакности множества, затем определяется конечная проекционная $(\mathcal{E}l)$–сеть, наконец формулируется теорема о необходимом и достаточном условии о–компактности.

Определение 1. Пусть $M \subset X$ – K–пространство, $u \in X^+ \backslash \{0\}$ – фиксированный элемент. Множество M называется о–компактным, если из любой последовательности $\{X_n\} \subset M$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ – о–сходящуюся к элементу этого множества.

Определение 2. Множество $N \subset X$ называется конечной проекционной $(\mathcal{E}l_\varepsilon)$– сетью для множества $M \subset X$, если для любого $x \in M$, $\forall$ $g.r.e.$ l, $\exists y \in N$, $\exists g.r.e.$ $l_\varepsilon :$ $0 < l_\varepsilon < l$ такие что $Pr_{l_\varepsilon}|x - y| < \mathcal{E}l_\varepsilon$.

Теорема 1. *(о необходимом и достаточном условии о–компактности множества). Для того, чтобы множество* M *было о–компактным необходимо и достаточно, чтобы при любом* $\varepsilon > 0$ *существовала конечная проекционная* $(\mathcal{E}l)$*–сеть.*

Список литературы

[1] Б. З. Вулих. Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961г.

[2] Л. В. Конторович, Б. З. Вулих, Пинскер. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М., 1950г.

Certain Problems Of The Spectral Theory Of Linear Relations And Degenerate Semigroups Of Operators

A. G. Baskakov
Voronezh State University, Russia
K. I. Chernyshov
Voronezh State Forestry Academy, Russia

Certain problems of the spectral theory of linear relations on Banach spaces are considered. Linear generalized differential equations in a Banach space are studied. Construction of a phase space and solutions with the help of the spectral theory of linear relations, ergodic theorems and degenerate semigroups of linear operators is carried out.

§ 1. Introduction

The present paper[2] is devoted to the investigation of certain questions of the spectral theory of linear relations (multivalued linear operators) as well as to the construction of solutions of linear generalized differential equations in a Banach space with the help of degenerate semigroups of linear bounded operators. The extensive bibliography on the indicated topics is contained in monographs [1, 2], which successfully complement each other. At the same time the theory of linear relations is covered insufficiently in the Russian mathematical literature. Let us draw attention to paper [3], in which linear relations on Hilbert space are considered.

Let us introduce principal notions of the theory of linear relations used below. We do not adhere to the terminology of [1, 2] (for example, we avoid the notion of the multivalued linear operator) and consider linear relations on one Banach space, as usual.

Let X and Y be complex Banach spaces. Every linear subspace $\mathcal{A} \subset X \times Y$ is called *a linear relation* between X and Y. If $\mathcal{A}$ is closed in $X \times Y$, then it is called *a closed linear relation.*

The subspace $D(\mathcal{A}) = \{x \in X \mid \exists y \in Y \text{ such that } (x, y) \in \mathcal{A}\}$ from X is called *the domain* of relation $\mathcal{A} \subset X \times Y$. The sets $\{y \in Y \mid (x, y) \in \mathcal{A}\}$, $\{x \in D(\mathcal{A}) \mid (x, 0) \in \mathcal{A}\}$, $\{y \in Y \mid \exists x \in D(\mathcal{A}) \text{ such that } (x, y) \in \mathcal{A}\} = \bigcup\limits_{x \in D(\mathcal{A})} \mathcal{A}x$ are denoted by $\mathcal{A}x$ (where $x \in D(\mathcal{A})$), $Ker\ \mathcal{A}$, $Im\ \mathcal{A}$, respectively. Note that $D(\mathcal{A})$ and $Im\ \mathcal{A}$ is the projection of $\mathcal{A}$ on X and Y, respectively; $\mathcal{A}x = y + \mathcal{A}\,0 \ \ \forall y \in \mathcal{A}x$.

The linear subspace $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{(x, y) \in X \times Y \mid \ x \in D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B}), \quad y \in \mathcal{A}x + \mathcal{B}x\}$ is called *the sum* of linear relations $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset X \times Y$. So $D(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B})$, and the algebraic sum of sets $\mathcal{A}x$, $\mathcal{B}x$ is understood as $\mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ for $x \in D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B})$.

Let Z be a Banach space. The linear subspace $\mathcal{B}\mathcal{A} = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists\ y \in D(\mathcal{B}) \subset Y$ such that $(x, y) \in \mathcal{A}, \ (y, z) \in \mathcal{B}\}$ is called *the product* of linear relations $\mathcal{A} \subset X \times Y$, $\mathcal{B} \subset Y \times Z$.

The relation $\mathcal{A}^{-1}$, which is defined by equality $\mathcal{A}^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid \ (x, y) \in \mathcal{A}\}$, is called *the inverse relation* with respect to $\mathcal{A}$.

Each linear relation $\mathcal{A} \subset X \times Y$ is a graph of multivalued operator $\widetilde{\mathcal{A}} : D(\mathcal{A}) \subset X \to 2^Y$, where $\widetilde{\mathcal{A}}x = \mathcal{A}x \in 2^Y$. Further they are identified and the same symbol $\mathcal{A}$ is used for their notation.

Let us denote by $LR(X, Y)$ the set of closed linear relations from $X \times Y$; if $X = Y$, then we suppose that $LR(X) = LR(X, X)$. Moreover, set $LO(X, Y)$ of linear closed operators, acting

[2]The work was carried out with a financial support of The Russian Foundation for Basic Research

from X to Y, is considered as a subspace of $LR(X,Y)$. Besides, $LR(X,Y)$ contains Banach space $Hom\ (X,Y)$ of linear bounded operators (homomorphisms), defined on X with values in Y. If $X=Y$, then $LO(X)=LO(X,X)$, and $End\ X$ is Banach algebra of linear bounded operators (endomorphisms), acting in X. Thus, $End\ X\subset LO(X)\subset LR(X)$.

Definition 1.1. The relation $\mathcal{A}$ from $LR(X,Y)$ is called *injective*, if $Ker\ \mathcal{A}=\{0\}$, and *surjective*, if $Im\ \mathcal{A}=Y$.

Definition 1.2. The relation $\mathcal{A}$ from $LR(X,Y)$ is called *continuously reversible*, if it is injective and surjective, simultaneously, and then $\mathcal{A}^{-1}\in Hom\ (Y,X)$.

The symbol I is used for the notation of the identity operator in any Banach space in the following definition and later on.

Definition 1.3. The totality $\rho(A)$ of all $\lambda\in\mathbb{C}$ for which $(\mathcal{A}-\lambda I)^{-1}\in End\ X$, is called *the resolvent set* of relation $\mathcal{A}\in LR(X)$. The set $\sigma(\mathcal{A})=\mathbb{C}\setminus\rho(\mathcal{A})$ is called *the spectrum* of relation $\mathcal{A}\in LR(X)$.

The set $\rho(\mathcal{A})$ is open, set $\sigma(\mathcal{A})$ is closed.

Definition 1.4. The mapping

$$R(\ .\ ,\mathcal{A}):\ \rho(\mathcal{A})\to End\ X,\ R(\lambda,\mathcal{A})=(\mathcal{A}-\lambda I)^{-1},\ \ \lambda\in\rho(\mathcal{A})$$

is called *the resolvent* of relation $\mathcal{A}\in LR(X)$.

The resolvent of relation $\mathcal{A}\in LR(X)$ is the pseudoresolvent in the generally accepted sense [4, p. 140], and also $Ker\ R(\lambda_0,\mathcal{A})=\mathcal{A}\ 0,\ \ Im\ R(\lambda_0,\mathcal{A})=D(\mathcal{A}),\ \ \forall\lambda_0\in\rho(\mathcal{A})$.

If $B\in End\ X$ is the quasinilpotent operator, then $\sigma(B^{-1})=\varnothing$ (see § 2). To avoid problems connected with the possible emptiness of the spectrum of the relation let us use the following notion.

Definition 1.5. The subset of the extended complex plane $\widetilde{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, coinciding with $\sigma(\mathcal{A})$, if 1) $\mathcal{A}\ 0=\{0\}$, i. e. $\mathcal{A}\in LO(X)$; 2) the resolvent $R(\ .\ ,\mathcal{A})$ of relation $\mathcal{A}$ admits the analytic extension into point ∞; 3) $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty}R(\lambda,\mathcal{A})=0$, and coinciding with $\sigma(\mathcal{A})\cup\{\infty\}$ in the opposite case is called *the extended spectrum* $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A})$ of relation $\mathcal{A}\in LR(X)$. The set $\widetilde{\rho}(\mathcal{A})=\widetilde{\mathbb{C}}\setminus\widetilde{\sigma}(\mathcal{A})$ is called *the extended resolvent set* of relation $\mathcal{A}\in LR(X)$.

Note that if $X\neq\{0\}$, then $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A})\neq\varnothing\ \ \forall\mathcal{A}\in LR(X)$, besides, $\infty\in\widetilde{\sigma}(A)$, when $dim\ A\ 0\geqslant 1$, i. e. when $\mathcal{A}\in LR(X)\setminus LO(X)$.

The definition of the extended spectrum of the linear operator is found in monographs [4, 5]. Note that the results from §§ $2-5$ demonstrate that the definition of the extended spectrum of the linear relation is of primary importance.

Urgency of investigation of linear relations is demonstarated by the examples of the problems given below. The presentation will be accompanied by the introduction of new notions and definitions.

1. If $\mathcal{A}\in LO(X)$ and $Ker\ \mathcal{A}\neq\{0\}$, then $\mathcal{A}^{-1}$ is a relation from $LR(X)\setminus LO(X)$.

2. Let $\mathcal{A}\in LO(X)$ be a linear operator with a nondense domain, i. e. $\overline{D(\mathcal{A})}\neq X$. Then the conjugate operator is not defined. Nevertheless one may define (see also [2, p. 1.5]) the conjugate relation $\mathcal{A}^*\subset X^*\times X^*$ to $\mathcal{A}$, where X^* is a dual Banach space to X, in a natural way:

$$\mathcal{A}^*=\{(\eta,\xi)\in X^*\times X^*\mid\ \xi(y)=\eta(x)\ \ \forall(x,y)\in\mathcal{A}\}. \tag{1.1}$$

It is clear that $\mathcal{A}^*0=\{\eta\in X^*\mid\eta(x)=0\ \ \forall x\in D(\mathcal{A})\}=D(\mathcal{A})^{\perp}$.

It is significant that this definition of relation $\mathcal{A}^*$ is appropriate for $\mathcal{A}\in LR(X)\setminus LO(X)$.

The definition of a conjugate linear relation was first given by von Neumann J. in [6], and his paper has given impetus to the development of the theory of linear relations, evidently.

3. Any pseudoresolvent $\mathcal{R}:\ U\subset\mathbb{C}\to End\ X$, defined on open set $U\subset\mathbb{C}$, is a resolvent of relation $\mathcal{A}=(\mathcal{R}(\lambda_0))^{-1}+\lambda_0 I$, where $\lambda_0\in U$, and also $\rho(\mathcal{A})\supset U$, and the definition of $\mathcal{A}$ does not depend on the choice of number λ_0 from U (see § 2).

4. The operator sequence $\mathcal{A}_n$ from $LO(X)$ is called *convergent,* if resolvent sets $\rho(\mathcal{A}_n),\ n \geqslant 1$ have a nonempty intersection, besides, $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} \rho(\mathcal{A}_n)$ contains an open connected set U, and for certain $\lambda_0 \in U$ sequence $R(\lambda_0, \mathcal{A}_n),\ n \geqslant 1$ is fundamental with respect to the operator norm in $End\ X$. Then for any $\lambda \in U$ there exists $\lim\limits_{n\to\infty} R(\lambda, \mathcal{A}_n) = R(\lambda) \in End\ X$, and function $R : U \to End\ X$ is a pseudoresolvent, but it does not need to be a resolvent of a certain operator from $LO(X)$. With regard to p. 3 we conclude that limit $\mathcal{A}_0$ of the sequence of closed linear operators is, generally speaking, a linear relation.

5. The linear operator $A : D(A) \subset X \to X$ is called admitting *a dense extension* (see [8, ch. III, § 1, p. 3]), if from conditions: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,\ \ x_n \in D(A)$; 2) there exists $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$, it follows that $y = 0$. The equivalent definition: linear operator $A : D(A) \subset X \to X$ admits a dense extension, if closure $\overline{\Gamma(A)}$ of its graph $\Gamma(A) = \{(x, Ax) \in X \times X|\ x \in D(A)\}$ is a graph of a linear *operator*. Generally, the closure $\overline{\Gamma(\mathcal{A})}$ of the graph of operator $\mathcal{A}$ is *relation* $\mathcal{A} \in LR(X)$.

6. Let $A, B \in Hom\ (X, Y)$. The function $\mathcal{P}(\lambda) = A + \lambda B,\ \lambda \in \mathbb{C}$ is called a linear bundle. It is known that many problems of mathematical physics are reduced to the study of the reversibility conditions of operators $\mathcal{P}(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C}$. Linear bundles appear also after special transformations of polynomial bundles and S.G. Krein bundle, while the investigation of linear bundles is reduced in many cases to the study of spectral properties of relations $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A},\ \mathcal{A}\,\mathcal{B}^{-1}$ from $LR(X),\ LR(Y)$, respectively (see § 6).

7. Let us consider Cauchy problem

$$x(0) = x_0 \in X \tag{1.2}$$

for homogeneous linear differential equation

$$F\ \dot{x}(t) = G\ x(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+ = [0; +\infty) \tag{1.3}$$

with the pair of linear closed operators mapping from Banach space X to Banach space Y under condition $Ker\ F \neq \{0\}$.

In the questions of the solvability and of the construction of solutions to equation (1.3) two approaches are used. The first is founded on the spectral theory of ordered pairs of linear operators (see, for example, [9 – 12]). The second is based on the use of the linear generalized differential equation

$$\dot{y}(t) \in \mathcal{A}\ y(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \qquad y(0) = y_0 \in D(\mathcal{A}), \tag{1.4}$$

where $\mathcal{A} \in LR(X)$ and it is written in the form $\mathcal{A} = F^{-1}G$. This technique is used in monograph [2] (see also [13]).

In this paper certain questions of the spectral theory of linear relations are considered, which are poorly dealt with in monographs [1, 2]. However, they are very useful in applications to the theory of generalized differential equations of form (1.4). In § 2 certain results concerning pseudoresolvents are contained, which one may obtain using linear relations, as well as theorems are proved about the spectral resolution of the linear relation and about the spectrum of the inverse relation. In § 3 isolation conditions of point ∞ in the extended spectrum of the linear relation are obtained. In § 4 with the help of ergodic theorems the description of the phase space for the generalized differential equation (1.4) is obtained, and also strongly continuous degenerate semigroups of operators with respect to linear relations with the use of certain analogs of Hille – Phillips – Yosida – Feller – Miyadera (HPYFM) theorem conditions [4] are constructed. In § 5 analytic degenerate semigroups are constructed with respect to sector linear relations. Applications of the spectral theory of linear relations to the spectral theory of ordered pairs of linear operators are given in § 6.

§ 2. **On pseudoresolvents, the spectral resolution of the linear relation and spectrum of the inverse relation**

The widest class of strongly continuous for $t > 0$ semigroups of bounded operators, which is considered in monograph [4], are semigroups of class E (see [4, definition 18.4.1]).

The pseudoresolvents, the construction of which was carried out in [4] with the help of Laplace transform of semigroups, give the total information about semigroups of class E. Sufficiently great attention is focused on the investigation of pseudoresolvents in [4, ch. 18, theorems 5.8.3 – 5.8.6, 5.9.1 – 5.9.3] as well as in a number of modern papers (see [1, 2, 7, 14, 15]). The spectral theory of linear relations may provide an essentially useful guide to the study of pseudoresolvents, since they are resolvents of linear relations, which were not considered in [4].

Let us describe this approach more explicitly. Let us appeal to a number of the well-known results and obtain them in a simple way and at times make them more precise.

Definition 2.1. The function $\mathcal{R} : \ \Omega \subset \mathbb{C} \to End\ X$ is called *a pseudoresolvent*, if for all $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \Omega$ the equality (Hilbert identity)

$$\mathcal{R}(\lambda_1) - \mathcal{R}(\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathcal{R}(\lambda_1)\mathcal{R}(\lambda_2)$$

is fulfilled.

Note that definition 2.1 admits the case, when $\Omega = \{\lambda_0\}$ is a singleton, and then $\mathcal{R}(\lambda_0)$ may be an arbitrary endomorphism from algebra $End\ X$.

Definition 2.2. The pseudoresolvent $\mathcal{R}_{\max} :\ \Omega_{\max} \subset \mathbb{C} \to End\ X$ is called *a maximal extension* of pseudoresolvent $\mathcal{R} :\ \Omega \subset \mathbb{C} \to End\ X$, if it is the completion of any extension $\mathcal{R}$. Such pseudoresolvent is called *maximal*. Set $Sing\ \mathcal{R} = \mathbb{C}\ /\ \Omega_{max}$ is called *a singular set* of pseudoresolvent $\mathcal{R}$.

Definition 2.3. Let $Q \in End\ X,\ \lambda_0 \in \mathbb{C}$ and $\mathcal{R} : \Omega \subset \mathbb{C} \to End\ X$ be a pseudoresolvent. Operator Q will be called *embedded into* $\mathcal{R}$ *at point* λ_0, if $\lambda_0 \in \Omega$ and $Q = \mathcal{R}(\lambda_0)$.

Directly from definitions 2.1 – 2.3 it follows that the question of the embedding of a certain operator into the set of values of the pseudoresolvent may be reduced to the question of the construction of the maximal extension of the pseudoresolvent.

Theorem 2.1. *Every pseudoresolvent $\mathcal{R} :\ \Omega \subset \mathbb{C} \to End\ X$ has the unique maximal extension. It is a resolvent of a certain linear relation $\mathcal{A}$, and $Sing\ \mathcal{R} = \sigma(\mathcal{A})$. In particular, if $Q \in End\ X$ and $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, then the unique maximal pseudoresolvent $\mathcal{R}_0 :\ \Omega \subset \mathbb{C} \to End\ X$ exists such that $\lambda_0 \in \Omega$, and operator Q is embedded into $\mathcal{R}_0$ at point λ_0.*

The statement of theorem 2.1 about the existence of the maximal extension was obtained in [4, theorem 5.8.6]. The statement about the embedding of the bounded operator into a certain pseudoresolvent is proved in [7, theorem 3.6]. Since the estimate

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| \geqslant r(R(\lambda, \mathcal{A})) \geqslant (dist(\lambda, \sigma(\mathcal{A})))^{-1} \quad \forall\, \lambda \in \rho(\mathcal{A})$$

is valid (see corollary 2.1 of theorem 2.4), then theorem 2.1 contains also proposition 3.5 from [7] about the increase of the pseudoresolvent norm under the approach to $Sing\ \mathcal{R}$.

The notion of a pseudoresolvent singular set was introduced in [15]. By virtue of theorem 2.1 it coincides with the linear relation spectrum, the resolvent of which is the extension of the pseudoresolvent under investigation.

The following theorem defines more exactly statement 5.8.4 from [4], and it easily arises from theorem 2.1.

In its conditions let us denote by symbol $Sp\ \mathfrak{A}$ the spectrum of the commutative Banach algebra $\mathfrak{A}$ with the unity, i. e. $Sp\ \mathfrak{A}$ is a compact topological space of nonzero continuous complex homomorphisms of algebra $\mathfrak{A}$, $\widehat{a} :\ Sp\ \mathfrak{A} \to \mathbb{C},\ \widehat{a}(\chi) = \chi(a),\ \chi \in Sp\ \mathfrak{A}$ is Gelfand transform of element a from $Sp\ \mathfrak{A}$ (see [16]).

Theorem 2.2. *Let $\mathcal{R} :\ \Omega \subset \mathbb{C} \to End\ X$ be a maximal pseudoresolvent and $\mathfrak{A}$ be the least closed subalgebra from Banach algebra End X, which contains all operators $\mathcal{R}(\lambda),\ \lambda \in \Omega$ and operator I. Then its spectrum $Sp\ \mathfrak{A}$ is homeomorphic to the extended spectrum $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A})$ of linear* *relation $\mathcal{A} \in LR(X)$, for which function $\mathcal{R}: \ \Omega = \rho(\mathcal{A}) \to End\ X$ is the resolvent. Further, homeomorphism $\alpha: \ Sp\ \mathfrak{A} \to \widetilde{\sigma}(\mathcal{A})$ exists, for which*

$$\widehat{R(\lambda, \mathcal{A})}\ (\chi) = \frac{1}{\lambda - \alpha(\chi)}, \qquad \chi \in Sp\ \mathfrak{A}, \qquad \lambda \in \rho(\mathcal{A}).$$

Besides, $\alpha(\chi_\infty) = \infty$ for the character $\chi_\infty \in Sp\ \mathfrak{A}$, defined by conditions: $R(\lambda, \mathcal{A}) \in Ker\ \chi_\infty \ \ \forall\, \lambda \in \rho(\mathcal{A}), \ \ \chi_\infty(I) = 1$.

Due to theorem 2.1 the definitions, introduced further, and the staements, proved on their basis, are quite correct.

Definition 2.4. The closed linear subspace $X_0 \subset X$ is called *invariant* for relation $\mathcal{A} \in LR(X)$ with nonempty $\rho(\mathcal{A})$, if X_0 is invariant with respect to all operators $R(\lambda, \mathcal{A}),\ \lambda \in \rho(\mathcal{A})$. *The restriction of relation* $\mathcal{A} \in LR(X)$ on subspace X_0 is called relation $\mathcal{A}_0 \in LR(X)$, the resolvent of which is the restriction $R_0 : \rho(\mathcal{A}) \to End\ X_0,\ R_0(\lambda) = R(\lambda, \mathcal{A}) \upharpoonright X_0,\ \lambda \in \rho(\mathcal{A})$ of resolvent $R(\ .\ , \mathcal{A}) : \rho(\mathcal{A}) \to End\ X$ on X_0 and it is denoted by $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \upharpoonright X_0$.

Definition 2.5. Let

$$X = X_0 \oplus X_1 \tag{2.1}$$

be a direct sum of invariant with respect to $\mathcal{A} \in LR(X)$ subspaces, $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \upharpoonright X_0,\ \ \mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \upharpoonright X_1$. Then relation $\mathcal{A}$ is called *a direct sum of relations* $\mathcal{A}_0$ and $\mathcal{A}_1$, and it is written as

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1. \tag{2.2}$$

In addition, $\mathcal{A}\ 0 = \mathcal{A}_0\ 0\ \oplus \mathcal{A}_1\ 0$, and equalities (2.1), (2.2) mean that set $\mathcal{A}x$ for every $x \in D(\mathcal{A})$ is defined by formulae

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}_0 x_0 + \mathcal{A}_1 x_1, \qquad x = x_0 + x_1,$$

where $x_i \in D(\mathcal{A}_i) \subset X_i,\ i = 0, 1$ and $\mathcal{A}x$ is an algebraic sum of sets $\mathcal{A}_0 x_0,\ \mathcal{A}_1 x_1$.

Lemma 2.1. *If for relation $\mathcal{A} \in LR(X)$ equalities* (2.1), (2.2) *take place, then $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_0) \cup \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_1)$, where $\mathcal{A}_i$ is the restriction $\mathcal{A}$ on $X_i,\ i = 0, 1$.*

Lemma 2.2. *Let $\mathcal{A} \in LR(X)$. Then $\infty \notin \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}) \Longleftrightarrow \mathcal{A} \in End\ X$.*

Note that in [1] the condition $\infty \notin \widetilde{\sigma}(\mathcal{A})$ for relation $\mathcal{A} \in LR(X)$ means, in the definition, that $0 \notin \sigma(\mathcal{A}^{-1})$.

Theorem 2.3. *Let $\mathcal{A} \in LR(X)$ and its extended spectrum $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A})$ be represented in the form*

$$\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \sigma_0 \cup \sigma_1, \tag{2.3}$$

where σ_0 is a compact set from $\mathbb{C}$, σ_1 is a closed set from $\widetilde{\mathbb{C}}$ and $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \varnothing$. Then expansions (2.1), (2.2) *exist, in which invariant with respect to $\mathcal{A}$ closed subspaces $X_0,\ X_1$ and restrictions $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \upharpoonright X_0,\ \mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \upharpoonright X_1$ possess the following properties:*

1) $\ \mathcal{A}_0 \in End\ X_0,\ \ \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_0) = \sigma(\mathcal{A}_0) = \sigma_0$;

2) $\ \mathcal{A}_1 0 = \mathcal{A}0 = Ker\ R(\ .\ , \mathcal{A}) = Ker\ R(\ .\ , \mathcal{A}_1) \subset X_1,\ \ D(\mathcal{A}) = X_0 \oplus D(\mathcal{A}_1),\ \ \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_1) = \sigma_1$.

Theorem 2.4. *If $\mathcal{A} \in LR(X)$, then the extended spectrum $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}^{-1})$ of the inverse relation $\mathcal{A}^{-1} \in LR(X)$ to $\mathcal{A}$ is represented in the form $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}^{-1}) = \{\lambda^{-1} |\ \ \lambda \in \widetilde{\sigma}(\mathcal{A})\}$.*

Corollary 2.1. *If $\mathcal{A} \in LR(X)$ and $\mu \in \rho(\mathcal{A})$, then $\sigma(R(\mu, \mathcal{A})) = \{(\mu - \lambda)^{-1}\ |\ \ \lambda \in \widetilde{\sigma}(\mathcal{A})\}$.*

The conclusion of corollary 2.1 is obtained in [1, theorem V.4.2].

Note that the definition of the linear relation spectrum was introduced by A. Favini, A. Yagi in [17], however, they do not use the notion of the linear relation extended spectrum neither in [17], nor in monograph [2]. The definition of the extended spectrum for linear relations on normed spaces was introduced in monograph [1] by R. Cross, but, essentially, it was little used.

Corollary 2.2. *For $\mathcal{A} \in LR(X)$ the following conditions are equivalent:*

$$1)\ \mathcal{A} \in End\ X; \qquad 2)\ \infty \notin \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}); \qquad 3)\ 0 \notin \sigma(\mathcal{A}^{-1}).$$

Corollary 2.3. *For $\mathcal{A} \in LR(X)$ equality $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \{\infty\}$ is valid iff $\mathcal{A}^{-1} \in End\ X$ is a quasinilpotent operator.*

Corollary 2.4. *If $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, $\lambda \neq 0$, then equalities*

$$(\mathcal{A}^{-1} - \lambda^{-1} I)^{-1} = -\lambda I - \lambda^2 (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}, \qquad (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} = -\lambda^{-1} I - \lambda^{-2} (\mathcal{A}^{-1} - \lambda^{-1} I)^{-1} \quad (2.4)$$

take place.

Corollary 2.5. *If $\mathcal{A} = B^{-1}$, where B is a quasinilpotent operator from End X, then $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \{\infty\}$ and $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} = B + \lambda B^2 + \lambda^2 B^3 + \ldots$. In particular, $R(\ .\ , \mathcal{A})$ is a polynomial, if B is the nilpotent operator from End X.*

Theorem 2.4 and correlations (2.4) allow us to state that for the extended spectrum of linear relations all points of the extended complex plane $\widetilde{\mathbb{C}}$, including ∞, have the same rights in a sense. If point ∞ is contained in the extended spectrum of the linear closed operator and is isolated there, then it may only be an essential singularity of its resolvent (see [4, theorem 5.9.4]).

Let Δ be an open set from the extended complex plane $\widetilde{\mathbb{C}}$ containing the extended spectrum $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A})$ of the relation. The algebra of complex functions, defined and analytic on Δ, will be denoted by symbol $\mathfrak{F}(\Delta)$. Let γ be a certain closed Jordan curve, surrounding $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A})$, and function $f \in \mathfrak{F}(\Delta)$ be such that integral $\int\limits_{\gamma} f(\lambda) R(\lambda, \mathcal{A}) d\lambda$ converges absolutely. Then formula

$$f(\mathcal{A}) = \delta f(\infty) I - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(\lambda) R(\lambda, \mathcal{A}) d\lambda \quad (2.5)$$

defines the bounded operator from algebra *End X*, where $\delta = 1$ or $\delta = 0$ depending on whether $\lambda = \infty$ is inside γ or outside of γ. Moreover, it belongs to commutative subalgebra $\mathfrak{A}$, introduced before theorem 2.2. This fact allows us to obtain the following statement:

Theorem 2.5. *For $\mathcal{A} \in LR(X)$ the equality $\sigma(f(\mathcal{A})) = f(\widetilde{\sigma}(\mathcal{A})) = \{f(\lambda) |\ \lambda \in \widetilde{\sigma}(\mathcal{A})\}$ takes place.*

§ 3. Compactness conditions of the linear relation spectrum

In the remaining part of the paper it is supposed that the following condition of *nonsingularity* of linear relations is fulfilled.

Assumption 3.1. Resolvent set $\rho(\mathcal{A})$ of linear relation $\mathcal{A} \in LR(X)$ is not empty.

Immediately from the definition of the inverse relation and from the properties of linear relations formulated in § 2 (see also the properties of relations, enumerated in § 6) follows

Lemma 3.1. *Let $\mathcal{A} \in LR(X)$. Independent of the choice $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$ equalities*

$$Ker\ (R(\lambda_0, \mathcal{A}))^k = \mathcal{A}^k\ 0, \qquad Im\ (R(\lambda_0, \mathcal{A}))^k = D(\mathcal{A}^k), \quad k \in \mathbb{N}$$

are valid.

This lemma ensures the correctness of notations $Ker\ R^k$ and $Im\ R^k$, $k \in \mathbb{N}$ for the degrees of the resolvent of relation $\mathcal{A} \in LR(X)$.

Definition 3.1. Relation $\mathcal{A} \in LR(X)$ is said to possess the property of *degrees stability in infinity*, if the number $m \in \mathbb{N}$ exists such that

$$\mathcal{A}^{m-1}\ 0 \subset \mathcal{A}^m\ 0 = \mathcal{A}^{m+1}\ 0, \qquad D(\mathcal{A}^{m-1}) \supset D(\mathcal{A}^m) = D(\mathcal{A}^{m+1}), \quad (3.1)$$

where inclusions are strict. The number m is called *the order* of the stability.

Note that for $m = 1$ it is assumed that $\{0\} \subset \mathcal{A}\ 0 = \mathcal{A}^2\ 0$, $X \supset D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A}^2)$.

Assumption 3.2. Relation $\mathcal{A} \in LR(X)$ possesses the property of degrees stability in infinity of the order m.

Theorem 3.1. *Let $m \geqslant 2$ be a natural number. For relation $\mathcal{A} \in LR(X) \setminus LO(X)$ the following conditions are equivalent:*

1) *point ∞ is the pole of function $R(\ .\ , \mathcal{A})$ of the order $m - 2$ for $m \geqslant 3$, ∞ is the removable singularity of function $R(\ .\ , \mathcal{A})$ for $m = 2$;*
2) *Banach space X is represented in the form of the direct sum $X = X_0 \oplus X_\infty$ of invariant*

with respect to $\mathcal{A}$ *closed subspaces* $X_0 = D(A^m)$, $X_\infty = \mathcal{A}^m\ 0$, *and also the restriction* $\mathcal{A}_0$ *of relation* $\mathcal{A}$ *on* X_0 *belongs to End* X_0, $\sigma(\mathcal{A}_0) = \sigma(\mathcal{A})$, *and, besides,* $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_\infty) = \{\infty\}$, $\mathcal{A}_\infty^{-1} \in$ *End* X_∞, $(\mathcal{A}_\infty^{-1})^m = 0$ *for the restriction* $\mathcal{A}_\infty$ *of relation* $\mathcal{A}$ *on* X_∞ *and* $(\mathcal{A}_\infty^{-1})^{m-1} \neq 0$;

3) *conditions of assumption* 3.2 *are fulfilled.*

Results from [18, ch. 6] and [19, theorem 2.2] are used in the proof.

Let us introduce into consideration eigenvectors and adjoint vectors of linear relations, corresponding to point ∞. Here the results of theorems 2.4 and 3.1 will be taken into account.

Definition 3.2. An arbitrary nonzero vector x_0 from $\mathcal{A}\ 0 \subset X$ is called *the eigenvector* of relation $\mathcal{A} \in LR(X)$, corresponding to point ∞. Vector $x_1 \in X$ is called *the root vector* of relation $\mathcal{A}$, corresponding to point ∞, if the number $k \in \mathbb{N}$ exists such that $x_1 \in \mathcal{A}^k\ 0$. The number k from $\mathbb{N}$ is called *the height* of the root vector x_1, if $x_1 \in \mathcal{A}^k\ 0 \setminus \mathcal{A}^{k-1}\ 0$.

Immediately from definition 3.2 it follows that the closed subspace $\mathcal{A}^k\ 0 = Ker\ (\mathcal{A}^{-1})^k$ consists of root vectors of relation $\mathcal{A}$, corresponding to point ∞, with the height not exceeding k.

Definition 3.3. The relation $\mathcal{A} \in LR(X)$ is said to have the finite Jordan chain $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ of the height k, corresponding to point ∞, if x_0 is the eigenvector for $\mathcal{A}$, corresponding to point ∞, and x_i, $2 \leqslant i \leqslant k-1$ are root vectors, corresponding to the same point, for which the following correlations

$$x_0 \in \mathcal{A}\ 0, \quad x_i \in \mathcal{A}\ x_{i-1},\ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \quad x_{k-1} \notin \mathcal{A}^k\ 0$$

take place (and, consequently, every vector x_i, $0 \leqslant i \leqslant k-1$ has the height i). Vectors $x_1, ..., x_{k-1}$ are called *adjoint* to eigenvector x_0.

Lemma 3.2. *The relation* $\mathcal{A} \in LR(X)$ *has the finite Jordan chain* $x_0, ..., x_{k-1}$ *of the height* k, *corresponding to point* ∞, *iff for certain* $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$ *(and hence for all* $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$*) equalities*

$$R(\lambda_0, \mathcal{A})x_0 = 0, \quad x_0 \in \mathcal{A}\ 0, \quad R(\lambda_0, \mathcal{A})x_i = x_{i-1}, \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1$$

are valid, and vector x *is absent such that* $R(\lambda_0, \mathcal{A})x = x_{k-1}$.

Definition 3.4. The relation $\mathcal{A} \in LR(X)$ is called *Fredholm in infinity*, if $D(\mathcal{A})$ is a closed subspace in X, and, besides, $\mathcal{A}\ 0$, $X/D(\mathcal{A})$ are finite-dimensional linear spaces. The number $ind\ \mathcal{A} = dim\ \mathcal{A}\ 0 - dim\ (X/D(\mathcal{A})$ is called *the index* of Fredholm relation $\mathcal{A}$, corresponding to point ∞.

Directly from definition 3.4 it follows that relation $\mathcal{A}$ is Fredholm in infinity iff operator $R(\lambda_0, \mathcal{A})$, $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$ is Fredholm, and their indices coincide. skip0.1cm

The following statement arises from theorem 3.1, definitions 3.2 – 3.4 and lemma 3.2, and it deciphers the notions contained in them. Let us take into account that if the relation index is equal to zero, then indices of all its degrees are the same.

Theorem 3.2. *Let* $m \in \mathbb{N}$. *For Fredholm in infinity relation* $\mathcal{A} \in LR(X) \setminus LO(X)$ *of zero index the following conditions are equivalent:*

1) *all Jordan chains of relation* $\mathcal{A}$, *corresponding to point* ∞, *have the height which does not exceed number* $m \in \mathbb{N}$, *moreover, Jordan chain exists with height* m;
2) $\mathcal{A}^{m-1}0 \subset \mathcal{A}^m 0 = \mathcal{A}^{m+1}0$;
3) $D(\mathcal{A}^{m-1}) \supset D(\mathcal{A}^m) = D(\mathcal{A}^{m+1})$;
4) *point* ∞ *is the pole of resolvent* $R(\lambda, \mathcal{A})$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ *of relation* $\mathcal{A}$ *of the order* $m-2$, *if* $m \geqslant 3$, *and point* ∞ *is the removable singularity, if* $m = 2$.

Corollary 3.1. *If* $\mathcal{A} \in LR(X) \setminus LO(X)$, X *is a finite-dimensional space, then* $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A})$ *consists of a finite set of points, the number of which does not exceed* $n = \dim\ X$, *and also for relation* $\mathcal{A}$ *the following spectral resolution*

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i + Q + \mathcal{A}_\infty, \qquad m+1 \leqslant n$$

takes place, where $P_i \in End\ X$ *are Riesz projectors, constructed on singletons* $\{\lambda_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda_1, ...\lambda_m\}$, $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_\infty) = \{\infty\}$, Q, $\mathcal{A}_\infty^{-1}$ *are nilpotent operators from algebra* $End\ X$, *which are commutative between themselves and with projectors* P_i, $1 \leqslant i \leqslant m$.

§ 4. On certain analogs of conditions Hille – Phillips – Yosida – Feller – Miyadera for linear relations

Let $\mathcal{A}$ be a relation from $LR(X)$. Let us consider Cauchy problem for the generalized differential equation

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{A}\ x(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+ = [0; +\infty), \tag{4.1}$$

$$x(0) = x_0 \in D(\mathcal{A}). \tag{4.2}$$

Differentiable function $x : \mathbb{R}_+ \to X$, for which $x(0) = x_0$, $x(t) \in D(\mathcal{A})\ \forall\ t \geqslant 0$, is called *the solution* to Cauchy problem (4.1) – (4.2), if it satisfies inclusion (4.1).

Definition 4.1. The closure in X of initial conditions set of the form (4.2), for which the solution to problem (4.1) – (4.2) exists, is called *the phase space* of the generalized differential equation (4.1), and it is denoted by symbol $\Phi(\mathcal{A})$.

In this paragraph the relations are considered, for which ∞ is not necessarily an isolated point in the extended spectrum. With the help of ergodic theorems the subspaces are formed, containing the phase space for the generalized differential equations, and thereupon with the help of certain analogs of Hille – Phillips – Yosida – Feller – Miyadera (HPYFM) theorem conditions degenerate semigroups of linear bounded operators are constructed for linear relations.

It is provided, as before, that assumption 3.1 holds.

Definition 4.2. Let $m \in \mathbb{N}$. The degree m of resolvent of relation $\mathcal{A} \in LR(X)$ is said to possess the property of *the minimal growth in infinity*, if sequence $\{\lambda_n\} \subset \rho(A)$ exists such that

$$1)\ \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty; \qquad 2)\ \sup_{n\geqslant 1} \{|\lambda_n^m| \cdot \|(R(\lambda_n, \mathcal{A}))^m\|\} < \infty. \tag{4.3}$$

Assumption 4.1. The resolvent of relation $\mathcal{A} \in LR(X)$ satisfies conditions (4.3) from definition 4.2.

Theorem 4.1. *If for relation* $\mathcal{A} \in LR(X)$ *assumption* 3.2 *is fulfilled, then for it assumption* 4.1 *is fulfilled too.*

Lemma 4.1. *If assumption* 4.1 *is fulfilled, then lengths of all Jordan chains of relation* $\mathcal{A} \in LR(X)$, *corresponding to point* ∞, *do not exceed* m, *and all chains lie in* $X_\infty = \mathcal{A}^m\ 0$.

Under the conditions of assumption 4.1 let us introduce into consideration the bounded sequence of operators from algebra $End\ X$ of the form

$$A_n = I - (-\lambda_n R(\lambda_n, \mathcal{A}))^m, \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.4}$$

and the closed subspace

$$\widetilde{X} = \{x \in X : \exists \lim_{n\to\infty} A_n\ x\}.$$

For the construction of the phase space $\Phi(\mathcal{A})$ of the generalized differential equation (4.1) let us use ergodic theorems from paper [20], applied to the consequence A_n. At first let us formulate certain notions and results from [20], used here (not in the most general form).

Let $\mathfrak{A}$ be the least closed subalgebra from Banach algebra $End\ X$, containing all operators $R(\lambda; \mathcal{A})$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ and the identity operator I. Then $\mathfrak{A}$ is a commutative Banach algebra with the unity and sequence (A_n) belongs to $\mathfrak{A}$. Let $m \in \mathbb{N}$. Let us consider the least closed ideal $\mathcal{J} = \mathcal{J}_m$ from algebra $\mathfrak{A}$, containing operators $(R(\lambda; \mathcal{A}))^m$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$.

Definition 4.3. The bounded sequence of linear operators (A_n) from algebra $\mathfrak{A}$ is called $\mathcal{J}-$ *sequence*, if the following two conditions are fulfilled:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \|A_n\ F\| = 0 \quad \forall F \in \mathcal{J}; \qquad 2)\ A_n\ x - x \in \overline{\mathcal{J}x} = \overline{\{F\ x;\ F \in \mathcal{J}\}} \quad \forall x \in X.$$

Let (A_n) be $\mathcal{J}-$ sequence. By symbol $Erg\ (X, (A_n))$ we denote (closed) subspace

$$Erg\ (X, (A_n)) = \{x \in X : \exists \lim_{n\to\infty} A_n\ x\},$$

and it is called *the ergodic* subspace, corresponding to $\mathcal{J}-$ sequence (A_n).

Lemma 4.2. *Under the conditions of assumption* 4.1 *sequence* (A_n) *is* $\mathcal{J}$ *– sequence, and, hence,* $\widetilde{X} = Erg\ (X, (A_n))$.

Since subspace $\widetilde{X}$ is invariant with respect to all operators $R(\lambda, \mathcal{A}),\ \lambda \in \rho(\mathcal{A})$, then it is invariant with respect to relation $\mathcal{A}$, and so one may consider the restriction $\widetilde{\mathcal{A}}$ of relation $\mathcal{A}$ on $\widetilde{X}$ (see definition 2.4).

The following statement arises from [20, lemma 1] and is the concrete realization of the properties, formulated there.

Theorem 4.2. *Under the conditions of assumption* 4.1 *subspace* $\widetilde{X}$ *admits the expansion into the direct sum*

$$\widetilde{X} = X_0 \oplus X_\infty \tag{4.5}$$

of two closed invariant with respect to $\mathcal{A}$ *subspaces* $X_0,\ X_\infty$, *and also* $X_0 = \overline{D(\mathcal{A}^m)},\ X_\infty = \mathcal{A}^m\ 0$, *and the corresponding expansion of relation* $\widetilde{\mathcal{A}} \in LR(\widetilde{X})$

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_\infty \tag{4.6}$$

possesses properties: $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_\infty) = \{\infty\},\ (\mathcal{A}_\infty^{-1})^m = 0,\ \mathcal{A}_0 :\ D(\mathcal{A}_0) \subset X_0 \to X_0$ *is a linear closed operator with the spectrum* $\sigma(\mathcal{A}_0) = \sigma(\widetilde{\mathcal{A}}) = \sigma(\mathcal{A})$ *and with the dense in* X_0 *domain* $D(\mathcal{A}_0^m)$ *of operator* $\mathcal{A}_0^m$.

Remark 4.1. The projector P_0, which realizes the expansion (4.5) of space $\widetilde{X}$, is defined by correlations

$$P_0\ x = \lim_{n\to\infty} (I - A_n)\ x = \lim_{n\to\infty} (-\lambda_n R(\lambda_n, \mathcal{A}))^m\ x,\quad x \in \widetilde{X},\quad Im\ P_0 = X_0,\quad Ker\ P_0 = X_\infty,$$

and it does not depend on the choice of sequence (λ_n) from $\rho(\mathcal{A})$, satisfying conditions of assumption 4.1 (see [20, lemma 2]). Besides, $D(\mathcal{A}_0^k)$ is dense in X_0 for every $k \in \mathbb{N}$ (see [20]).

Corollary 4.1. *Under the conditions of assumption* 4.1 *relation* $\mathcal{A} \in LR(X)$ *is a linear operator, if domain* $D(\mathcal{A}^m)$ *of relation* $\mathcal{A}^m$ *is dense in* X.

The following statement arises from [20, theorem 1].

Theorem 4.3. *Let assumption* 4.1 *be fulfilled. In order that* $\widetilde{X} = X$, *it is necessary and sufficient that the vectors from subspace* $\mathcal{A}^m\ 0$ *should separate functionals from subspace* $(\mathcal{A}^*)^m\ 0$ *of the dual to* X *Banach space* X^* *(*$\mathcal{A}^* \subset X^* \times X^*$ *is the conjugate to* $\mathcal{A}$ *linear relation; see* § 1, *p.* 2*).*

In particular, $\widetilde{X} = X$, *if one of the following conditions is fulfilled:*

1) X *is a reflexive Banach space;*
2) $R(\lambda_0, \mathcal{A}) \in End\ X$ *is a weakly compact operator for certain* $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$;
3) $dim\ \mathcal{A}^m\ 0 = dim\ (\mathcal{A}^*)^m\ 0 < \infty$.

Note that the statement of theorem 4.2 for a reflexive Banach space and for $m = 1$ is given in [2, p. 1.3] and in [13].

Corollary 4.2. *If relation* $\mathcal{A} \in LR(X)$ *has a compact resolvent under the conditions of assumption* 4.1, *then* $X = X_0 \oplus X_\infty = \mathcal{A}^m\ 0 \oplus \overline{D(\mathcal{A}^m)}$.

Assumption 4.2. There exist such numbers $M > 0,\ \omega \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}$, that for all $\lambda \in \mathbb{C}$ with $Re\ \lambda > \omega$ and for all $n \in \mathbb{N}$ estimates

$$\|(R(\lambda, \mathcal{A}))^{mn}\| \leqslant \frac{M}{(Re\ \lambda - \omega)^{mn}},\qquad n \in \mathbb{N} \tag{4.7}$$

take place.

Let us carry out the construction of the phase space $\Phi(\mathcal{A})$ and degenerate semigroups of linear operators, with the help of which the solutions to problem (4.1) – (4.2) are defined. The constructions are realized under the conditions of assumption 4.2 and for $dim\ \mathcal{A}\ 0 \geqslant 1$, i. e. $\mathcal{A} \in LR(X) \setminus LO(X)$. Assumption 4.2 implies assumption 4.1, so according to lemma 4.1 one may consider an ergodic subspace $\widetilde{X} = Erg\ (X, (A_n))$, constructed with the help of the bounded sequence $(A_n) \in End\ X$. It is defined by formula (4.4), where (λ_n) is an arbitrary sequence from $\mathbb{R}_+ \cap \rho(\mathcal{A})$ with the property $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. Thus, the statement of theorem 4.2 about the decomposition of subspace $\widetilde{X}$ is valid. Besides, subspaces $X_\infty = \mathcal{A}^m\ 0,\ X_0 = \overline{D(\mathcal{A}^m)}$ are invariant for relation $\mathcal{A}$. For the restriction $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \upharpoonright X_0 \in LO(X_0)$ of relation $\mathcal{A}$ on X_0 assumption 4.2 remains fulfilled. It allows us to construct on X_0 semigroup $\{T_0(t);\ t \geqslant 0\}$ of class C_0 with the generator $\mathcal{A}_0$, having, according to theorem 4.2, the dense domain $D(\mathcal{A}_0)$ in X_0. For the construction of such a semigroup let us use the analog of Yosida approximation (see [4, theorem 12.3.1]) of the form:

$$A_n^0 = (-\lambda_n/m)(I - (-\lambda_n R(\lambda_n, \mathcal{A}_0))^m) \in End\ X_0, \qquad n \geqslant 1.$$

Lemma 4.3. *Under the conditions of assumption* 4.1 *for every* $\mu \in \rho(\mathcal{A})$ *the estimate*

$$\|(A_n^0 - (-\lambda_n R(\lambda_n, \mathcal{A}_0))^m\ \mathcal{A}_0)\ (R(\mu, \mathcal{A}_0))^m\| \leqslant const \cdot |\lambda_n|^{-1}, \qquad n \geqslant 1 \tag{4.8}$$

is valid.

Theorem 4.4. *Let for relation* $\mathcal{A} \in LR(X)$ *assumption* 4.2 *be fulfilled and dim* $\mathcal{A}\ 0 \geqslant 1$. *Then*

$$\Phi(\mathcal{A}) \cap \widetilde{X} = \overline{D(\mathcal{A}^m)} = X_0,$$

and the unique degenerate semigroup of operators $\{\widetilde{T}(t);\ t \geqslant 0\} \subset End\ \widetilde{X}$ *exists, the generator of which is relation* $\widetilde{\mathcal{A}} \in LR(\widetilde{X})$, *defined by equalities* $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_0$ *on* X_0, $D(\widetilde{\mathcal{A}}) = X_0 \cap D(\mathcal{A})$, $\widetilde{\mathcal{A}}\ 0 = X_\infty$. *Semigroup* $\{\widetilde{T}(t);\ t \geqslant 0\}$ *possesses the following properties:*

1) *its restriction* $\{T_0(t);\ \ t \geqslant 0\} \subset End\ X_0$ *on* X_0 *is a semigroup of class* C_0, *and any solution* $x:\ \mathbb{R}_+ \to X$ *to problem* (4.1) – (4.2) *with* $x_0 \in D(\mathcal{A}_0) \subset X_0$ *is written as* $x(t) = T_0(t)\ x_0,\ t \geqslant 0$;
2) $\widetilde{T}(0) \in End\ \widetilde{X}$ *is a projector on subspace* X_0, *parallel to* X_∞.

If vectors from subspace $X_\infty = \mathcal{A}^m\ 0 \subset X$ *separate functionals from subspace* $X_\infty^* = (\mathcal{A}^*)^m\ 0 \subset X^*$ *(for example, if one of three conditions of theorem* 4.3 *is fulfilled), then* $\widetilde{X} = X$, *and* $\Phi(\mathcal{A}) = X_0$.

Remark 4.2. Statements of theorem 4.4 for $m = 1$ are contained in monograph [2, ch. II]. If $\mathcal{A}$ is a linear relation on finite-dimensional space X, and also $\mathcal{A}^2\ 0 \neq \mathcal{A}\ 0$, then results from [2] are inapplicable even in this case. The expansion $X = \overline{D(\mathcal{A})} \oplus \mathcal{A}\ 0$ was obtained in [2] only for a reflexive Banach space. For $m > 1$ generalized differential equations of the form (4.1) are considered in [13] by the $n-$ *integrated* semigroups method. However, principal results are announced in [13] under a priori assumption about the existence of the expansion $X = \overline{D(\mathcal{A}^m)} \oplus \mathcal{A}^m\ 0$; its presence was marked for a reflexive Banach space X under the condition of $m = 1$.

Corollary 4.3. *Let for relation* $\mathcal{A} \in LR(X)$, *satisfying assumption* 4.1, *numbers* $M > 0,\ \omega \in \mathbb{R}$ *exist such that for all* $x \in X_0,\ \lambda \in \mathbb{C}$ *with* $Re\ \lambda > \omega$ *and all* $n \in \mathbb{N}$ *estimates*

$$\|(R(\lambda, \mathcal{A}))^n\ x\| \leqslant \frac{M\ \|x\|}{(Re\ \lambda - \omega)^n}$$

take place. Then all statements of theorem 4.4 *are valid.*

Directly from theorem 4.4 follows

Theorem 4.5. *If for linear operator* $A \in LO(X)$ *with* $\overline{D(A)} = X$ *conditions of assumptions* 4.2 *are fulfilled, then* A *is a generator of a semigroup of class* C_0.

From theorems 3.1 (condition 2)), 4.1 and 4.4 arises

Theorem 4.6. *If relation* $\mathcal{A} \in LR(X)$ *satisfies one of the condition of theorem* 3.1, *then* $\Phi(\mathcal{A}) = X_0$, *and every solution* $x: \mathbb{R}_+ \to X$ *to problem* (4.1) – (4.2) *with* $x_0 \in X_0$ *is defined with the help of the analytic group of operators* $\{\exp \mathcal{A}_0 t,\ \ t \in \mathbb{R}\}$ *and it is written in the form* $x(t) = (\exp \mathcal{A}_0 t)x_0,\ \ t \in \mathbb{R}$.

Note that semigroup $\{\widetilde{T}(t);\ t \geqslant 0\}$, constructed in theorem 4.4 according to expansion (3.2) of space X, has the form $\widetilde{T}(t) = \exp \mathcal{A}_0 t \oplus 0$. It may be written as $T_0(t) = (\exp \mathcal{A}_0 t)\ P_0,\ t \geqslant 0$. Every solution x to inclusion (4.1) for all $t \geqslant 0$ is represented in the form $x(t) = T_0(t)\ x_0,\ \ x_0 \in X_0 = \Phi(\mathcal{A})$.

REMARK 4.3. Subspace X_0 under the conditions of assumption 4.2 is the phase space $\Phi(\mathcal{A})$ (subspace of initial data) for mild solutions [14].

REMARK 4.4. Subspace X_∞, appearing under the conditions of assumption 4.1, according to theorem 4.1 does not contribute to the phase space $\Phi(\mathcal{A})$ by virtue of the nilpotency of operator $\mathcal{A}_\infty^{-1}$. However, if $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \{\infty\}$, i. e. $\mathcal{A}^{-1} \in End\ X$ is a quasinilpotent operator, then it may appier that $\Phi(\mathcal{A}) = X$. An arbitrary operator $A \in LO(X)$, which is a generator of a semigroup of class C_0 with $\widetilde{\sigma}(A) = \{\infty\}$, may be such an example. In particular, the generator of a nilpotent semigroup of class C_0 (see [14]).

§ 5. **Sectorial linear relations and analytic degenerate semigroups of operators**

In this paragraph sectorial linear relations are defined and the construction of degenerate analytic semigroups of linear operators for them is carried out. In obtaining principal results the ergodic theorems are also used essentially.

Definition 5.1. The relation $\mathcal{A} \in LR(X)$ is called *sectorial* with angle $\theta \in (\pi/2, \pi)$, if for a certain $a \in \mathbb{R}$ the sector

$$\Omega = \Omega_{a,\theta} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \quad |\arg(\lambda - a)| < \theta, \quad \lambda \neq a\}$$

is contained in the resolvent set $\rho(\mathcal{A})$ of relation $\mathcal{A}$, and for every $\delta \in (0, \theta - \pi/2)$ the numbers $m \in \mathbb{N}$ и $M_\delta \geqslant 1$ exist such that

$$\sup_{\lambda \in \Omega_{a,\,\theta-\delta}} \|((a-\lambda)R(\lambda, \mathcal{A}))^m\| = M_\delta < \infty. \tag{5.1}$$

Further in this paragraph it is assumed that holds

Assumption 5.1. Relation $\mathcal{A} \in LR(X)$ is sectorial.

To construct the analytic semigroup of operators, whose generator is a sectorial relation $\mathcal{A}$, we need

Lemma 5.1. *For the resolvent of a sectorial relation $\mathcal{A} \in LR(X)$ the constant $C > 0$ exists such that for all $\delta \in (0, \theta - \pi/2)$ the estimate*

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leqslant C(1 + |\lambda|)^{m-2}, \qquad \lambda \in \Omega_{a,\,\theta-\delta} \tag{5.2}$$

is valid.

Definition 5.2. Let $\mathcal{A}$ be a sectorial relation from $LR(X)$ with the angle θ.

Let us assume for $z \in \Omega_{0,\,\theta-\delta}$, where $\delta \in (0, \theta - \pi/2)$, that

$$T(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} e^{\lambda z} R(\lambda, \mathcal{A}) d\lambda. \tag{5.3}$$

The union of three curves $\gamma_k(r, \varepsilon),\ k = 1, 2, 3$ of the form

$\gamma_1(r, \varepsilon) = \{-\rho\ e^{-i(\theta-\varepsilon)} \mid \quad -\infty \leqslant -\rho \leqslant -r\}, \quad \gamma_2(r, \varepsilon) = \{r\ e^{i\alpha} \mid \quad -(\theta - \varepsilon) \leqslant \alpha \leqslant \theta - \varepsilon\},$

$\gamma_3(r, \varepsilon) = \{\rho\ e^{i(\theta-\varepsilon)} \mid \ r \leqslant \rho \leqslant \infty\}$, where $\varepsilon = (\delta_0 - \delta)/2,\ \delta_0 = \theta - \pi/2$ and $r = 1/|z|$, can be used as the curve $\gamma = \gamma(r, \varepsilon)$ in definition 5.2.

The convergence of the integral from (5.3) in the uniform operator topology for all $z \in \Omega_{0,\delta},\ \delta \in (0, \delta_0)$ follows from lemma 5.1.

Further it is assumed that $\delta_0 = \theta - \pi/2$.

Theorem 5.1. *Let $\mathcal{A} \in LR(X)$ be a sectorial relation (condition* (5.1) *from assumption* 5.1 *is fulfilled). Then equality* (5.4) *assigns the analytic in the sector $\Omega_{0,\delta_0} \subset \rho(\mathcal{A})$ and bounded for $t > 0$ semigroup of operators from algebra End X.*

The investigation of the semigroup $\{T(t);\ t > 0\}$ is conducted with the help of two operator-valued functions

$$A(\lambda) = I - ((-\lambda R(\lambda, \mathcal{A}))^m), \quad \lambda > 0, \qquad B(t) = I - T(t), \quad t > 0. \tag{5.4}$$

Further two arbitrary sequences (λ_n), (t_n) $\forall\ n \geqslant 1$ from $\mathbb{R}_+$ with the properties

$$\lambda_n \in \Omega \subset \rho(\mathcal{A}), \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} t_n = 0$$

and the corresponding bounded sequences of operators $A_n = A(\lambda_n)$, $B_n = B(t_n)$, $n \in \mathbb{N}$ from Banach algebra $End\ X$ are considered.

Lemma 5.2. *Under the conditions of assumption* 5.1 *for any fixed* $\lambda_0 \in \Omega_{0,\,\theta} \subset \rho(\mathcal{A})$ *the following properties are valid*:
1) $Im\ (I - A_n) \subset \overline{Im\ (R(\lambda_0, \mathcal{A}))^m}$, $\quad Im\ (I - B_n) \subset \overline{Im\ (R(\lambda_0, \mathcal{A}))^m}$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n\ (R(\lambda_0, \mathcal{A}))^m = 0$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} B_n\ (R(\lambda_0, \mathcal{A}))^m = 0$.

Thus, according to the terminology from § 4 (definition 4.3) both sequences (A_n) and (B_n) are $\mathcal{J}$ – sequences for the ideal $\mathcal{J} \subset \mathfrak{A}$ considered in § 4.

Theorem 5.2. *Under the conditions of assumption* 5.1 *the equalities*

$$Erg\ (X, (A_n)) = Erg\ (X, (B_n)) = \widetilde{X} = X_0 \oplus X_\infty \tag{5.5}$$

are valid, and all subspaces from the right parts in (5.5) *are closed. The equalities*

$$P_\infty\ x = \lim_{n\to\infty} A_n\ x = \lim_{n\to\infty} B_n\ x, \ \ x \in \widetilde{X}$$

define the bounded projector $P_\infty \in End\ \widetilde{X}$ *with the following properties*:

$$1)\ \|P_\infty\| \leqslant \min\{\underline{\lim}_{n\to\infty} \|A_n\|,\ \underline{\lim}_{n\to\infty} \|B_n\|\}; \qquad 2)\ Im\ P_\infty = X_\infty, \quad Ker\ P_\infty = X_0.$$

All statements of theorem 5.2 arise from [20, lemma 1], provided lemma 5.2 is used for its application.

Let us denote $P_0 = I - P_\infty$ and note that

$$P_0\ x = \lim_{n\to\infty} (-\lambda_n R(\lambda_n, \mathcal{A}))^m\ x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)\ x, \ \ x \in \widetilde{X}.$$

The indicated limits exist and are equal independent of the concrete form of the sequences (λ_n), (t_n), $n \in \mathbb{N}$ with the properties determined earlier. By the same token the representation of the subspaces X_0 and X_∞ from $\widetilde{X}$ is provided in the form

$$X_0 = \{x \in X \mid \lim_{t\to+0} T(t)\ x = x\}, \qquad X_\infty = \bigcap_{t>0} Ker\ T(t). \tag{5.6}$$

From this representation it follows that the restriction $\{T_0(t);\ t \geqslant 0\}$ of the semigroup $T(t)$ on the subspace X_0 is a semigroup strongly continuous in zero and analytic in the sector Ω_{0,δ_0}. The restriction $\{\widetilde{T}(z);\ z \in \Omega_{0,\delta_0}\}$ of the function $T : \Omega_{0,\delta_0} \to End\ X$ on the subspace $\widetilde{X}$ is analytic on the subspace X_0 too.

Let us denote by $\mathcal{O}_\infty = 0_\infty^{-1}$ the inverse relation to zero operator on X_∞.

Theorem 5.3. *Let* $\mathcal{A} \in LR(X) \setminus LO(X)$ *be a sectorial relation. Then* $\{\widetilde{T}(t);\ t \geqslant 0\} \subset End\ \widetilde{X}$ *is a semigroup of the operators analytic in sector* Ω_{0,δ_0}, *and it is a degenerate semigroup with the generator* $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{O}_\infty \in LR(\widetilde{X})$, *where* $\mathcal{O}_\infty \in LR(X_\infty)$, $D(\mathcal{O}_\infty) = \{0\}$, $\mathcal{O}_\infty\, 0 = X_\infty$, *the operator* $\mathcal{A}_0 = \widetilde{\mathcal{A}} \upharpoonright X_0 \in LO(X_0)$ *is a generator of the semigroup of operators* $\{T_0(t);\ t \geqslant 0\}$ *strongly continuous and analytic in the sector* Ω_{0,δ_0}, *and* $\Phi(\mathcal{A}) \cap \widetilde{X} = X_0$. *An arbitrary solution to problem* (4.1) – (4.2) *with* $x_0 \in D(\mathcal{A}_0)$ *has the form* $x(t) = T_0(t)x_0$, $t \geqslant 0$.

If the vectors from the subspace $\mathcal{A}^m\ 0 \subset X$ *separate functionals from the subspace* $(\mathcal{A}^*)^m\ 0 \subset X^*$ *(in particular, if one of three conditions of theorem* 4.3 *is fulfilled), then* $\widetilde{X} = X$, *and then* $\Phi(\mathcal{A}) = X_0$.

§ 6. On the spectral theory of ordered pairs of linear operators

In this paragraph applications of the spectral theory of linear relations to the spectral theory of ordered pairs (G, F) of linear closed operators $F: D(F) \subset X \to Y$, $G: D(G) \subset X \to Y$, mapping from complex Banach space X to complex Banach space Y, are obtained.

Domains $D(F)$, $D(G)$ will be considered to satisfy one of the following conditions:

(i) $D(F) = X$, $D(G) \neq X$;

(ii) $D(F) \neq X$, $D(G) = X$;

(iii) $D(F) = X$, $D(G) = X$.

The subspace $D(F) \cap D(G)$ is denoted by $\mathcal{D} = \mathcal{D}(G, F)$ and is called *the domain* of the ordered pair of operators (G, F).

Definition 6.1. To *the resolvent set* $\rho(G, F)$ of the ordered pair of operators (G, F) we refer all numbers $\lambda \neq 0$ from $\mathbb{C}$, for which $G - \lambda F: \mathcal{D} \subset X \to Y$ is a continuously reversible operator and, besides, point $\lambda = 0$, if $G: \mathcal{D} \to Y$ is a continuously reversible operator and $D(F) = X$. The set $\sigma(G, F) = \mathbb{C} \setminus \rho(G, F)$ is called *the spectrum* of this pair.

The operator-valued function

$$R\ (\ .\ ; G, F): \ \rho(G, F) \subset \mathbb{C} \to Hom\ (Y, X), \ \ R\ (\lambda; G, F) = (G - \lambda F)^{-1}, \qquad \lambda \in \rho(G, F)$$

is called *the resolvent* of the ordered pair (G, F). It is defined on the open set $\rho(G, F)$ and it is analytic there.

Remark 6.1. If the condition $0 \in \rho(G, F)$ is understood only formally as the continuous reversibility of the operator G, then point 0 is isolated in $\rho(G, F)$ in case (ii), and so the set $\rho(G, F)$ is not open. Also a variety of other problems arises.

Here the introduction of the notion of the extended spectrum of the ordered pair provides an especially useful guide as well as in the case of linear relations.

Definition 6.2. The subspace $\widetilde{\sigma}(G, F)$ from $\widetilde{\mathbb{C}}$, coinciding with $\sigma(G, F)$, when the function $R(\ .\ ; G, F)$ admits the analytic extension at point ∞ provided $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} R(\lambda; G, F) = 0$, and $\widetilde{\sigma}(G, F) = \sigma(G, F) \cup \{\infty\}$ in the opposite case is called *the extended spectrum* of the ordered pair (G, F). The set $\widetilde{\rho}(G, F) = \widetilde{\mathbb{C}} \setminus \widetilde{\sigma}(G, F)$ is called *the extended resolvent set* of the pair (G, F).

When the reducing of problem (1.3) – (1.2) to problem (4.1) – (4.2) takes place, two relations $\mathcal{A}_l = F^{-1}G \subset X \times X$, $\mathcal{A}_r = GF^{-1} \subset Y \times Y$ arise naturally and are called *the left and the right relation* for the ordered pair (G, F), respectively.

From the definitions it follows that for the left $\mathcal{A}_l$ and the right $\mathcal{A}_r$ relation, constructed on the ordered pair (G, F), the following representations are valid:

$$D(\mathcal{A}_l) = G^{-1}\ (Im\ F), \qquad Im\ \mathcal{A}_l = F^{-1}\ (Im\ G), \tag{6.1}$$

$$D(\mathcal{A}_r) = F\ (D(G)), \qquad Im\ \mathcal{A}_r = G\ (D(F)), \tag{6.2}$$

$$R(\lambda, \mathcal{A}_l) = (G - \lambda F)^{-1}\ F, \qquad \lambda \in \rho(G, F), \tag{6.3}$$

$$R(\lambda, \mathcal{A}_r) = F\ (G - \lambda F)^{-1}, \qquad \lambda \in \rho(G, F). \tag{6.4}$$

Formula (6.3) is true only if $D(G), D(F)$ obey one of the conditions (i) or (iii).

If condition (ii) is fulfilled, then formula (6.3) is incorrect, since $D(F) \neq X$. In this case one may apply formula (2.4) to $G^{-1}F$ for $0 \neq \lambda \in \rho(G, F)$, as a result we obtain the correlation

$$R(\lambda, \mathcal{A}_l) = -\lambda^{-1}I - \lambda^{-2}(\mathcal{A}_l^{-1} - \lambda^{-1}I)^{-1} = -\lambda^{-1}I - \lambda^{-2}(G^{-1}F - \lambda^{-1}I)^{-1} =$$
$$= -\lambda^{-1}(I - (G - \lambda F)^{-1}G). \tag{6.5}$$

From representations (6.3)–(6.5) it follows that if $\infty \in \widetilde{\rho}(G, F)$, then $\infty \notin \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_l) \cup \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_r)$, and so $\mathcal{A}_l \in End\ X$, $\mathcal{A}_r \in End\ Y$. Thus, we obtain the following

Lemma 6.1. *The inclusions*

$$\widetilde{\rho}(G, F) \subset \widetilde{\rho}(\mathcal{A}_l) \cap \widetilde{\rho}(\mathcal{A}_r), \qquad \widetilde{\sigma}(G, F) \supset \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_l) \cup \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_r) \tag{6.6}$$

take place.

The resolvents of relations $\mathcal{A}_l$ and $\mathcal{A}_r$ are called *the left and the right resolvent* of the ordered pair of operators (G, F) and they are denoted by symbols $R_l(\ .\ ; G, F)$ and $R_r(\ .\ ; G, F)$, respectively. The values of these functions, by definition, are in algebras $End\ X$ and $End\ Y$, respectively.

Further it is supposed that the following condition of *nonsingularity* of the pair $(G, F))$ is fulfilled.

Assumption 6.1. For the ordered pair (G, F) the set $\rho(G, F)$ is not empty.

REMARK 6.2. In monograph [2] the conditions $D(F) \subset \overline{D(G) \subset X} = Y$ are fulfilled. In papers [11, 12] operators F, G with the properties $F \in Hom\ (X, Y)$, $\overline{D(G)} = X$ were considered. The most general case is studied in [23], where $D(F), D(G)$ cannot coincide with X, simultaneously. However, the investigation was carried out under the assumption that $\mathcal{D} = D(F) \cap D(G) \neq \{0\}$ and, moreover, under our assumption 6.1. It allows us to introduce the norm $\|x\|_* = \|(G - \lambda_0 F)\, x\|,\ x \in \mathcal{D}$, where λ_0 is a certain number from $\rho(G, F)$, on $\mathcal{D}$. With respect to this norm $\mathcal{D}$ is a Banach space isomorphic to Y. Considering $\mathcal{D}$ instead of X, one may regard that condition (iii) is fulfilled and take one of the subspaces $D(F)$, $D(G)$ with the corresponding graph norm as a Banach space containing $\mathcal{D}$.

Let us select, along with conditions (i)–(iii), the following conditions:

(iv) $D(F) \subset D(G) \neq X$;

(v) $D(G) \subset D(F) \neq X$.

Then, if condition (iv) is fulfilled, then on $D(G)$ a graph norm of operator G : $\|x\|_* = \|x\| + \|G\, x\|,\ x \in D(G)$ is introduced, and considering $D(G)$ instead of X, one may regard that condition (ii) is fulfilled. If condition (v) is fulfilled, then on $D(F)$ a graph norm of operator F is introduced, and we have the conditions, when (i) is fulfilled.

Theorem 6.1. *For the ordered pair of operators (G, F) the following properties take place:* 1) $\widetilde{\sigma}(G, F) = \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_l)$; 2) $\widetilde{\sigma}(G, F) \setminus \{0, \infty\} = \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_r) \setminus \{0, \infty\}$; 3) $\widetilde{\sigma}(G, F) = \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_l) = \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_r)$, *if* $\mathcal{D} = X$; 4) $0 \in \rho(\mathcal{A}_l) \iff G^{-1}\ F \in End\ X$; 5) $0 \in \rho(\mathcal{A}_r) \iff F\ G^{-1} \in End\ Y$; 6) $0 \in \rho(\mathcal{A}_l)\ \cap\ \rho(\mathcal{A}_r) \iff 0 \in \rho(G, F)$; 7) $\infty \in \widetilde{\rho}(\mathcal{A}_l) \iff \mathcal{A}_l = F^{-1}\ G \in End\ X$; 8) $\infty \in \widetilde{\rho}(\mathcal{A}_r) \iff \mathcal{A}_r = G\ F^{-1} \in End\ Y$; 9) $\infty \in \widetilde{\rho}(\mathcal{A}_l) \cap \widetilde{\rho}(\mathcal{A}_r) \iff \infty \in \widetilde{\rho}(G, F)$.

Corollary 6.1. *If points $0, \infty$ are contained in $\widetilde{\rho}(G, F)$, simultaneously, then $\mathcal{D} = X$ and operators $G, F \in Hom\ (X, Y)$ are continuously reversible.*

Corollary 6.2. *The ordered pair (G, F) possesses the following properties:*

a) $\widetilde{\sigma}(G, F) = \{0\} \iff$ *operator $F : \mathcal{D} \to Y$ is continuously reversible, $D(G) = X$ and operators $\mathcal{A}_l = F^{-1}G \in End\ X,\ \mathcal{A}_r = GF^{-1} \in End\ Y$ are quasinilpotent;*

b) $\widetilde{\sigma}(G, F) = \{\infty\} \iff$ *operator $G : \mathcal{D} \to Y$ is continuously reversible, $D(F) = X$ and operators $\mathcal{A}_l^{-1} = G^{-1}F \in End\ X,\ \mathcal{A}_r^{-1} = FG^{-1} \in End\ Y$ are quasinilpotent.*

Let us denote $S_0(\delta) = \{0 \neq \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \delta,\ \delta > 0\}$.

REMARK 6.3. The following two conditions are equivalent:

a) $D(F) = X$ and $G :\ D(G) \subset X \to Y$ is a continuously reversible operator;

b) $\delta > 0$ exists such that $S_0(\delta) \subset \rho(G, F)$ and $\sup\limits_{\lambda \in S_0(\delta)} \|(G - \lambda F)^{-1}\| < \infty$.

Note that the sets $\widetilde{\sigma}(G, F) = \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_l)$ and $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_r)$ can be distinguished.

Example 6.1. Let $\mathcal{H}$ be a complex Hilbert space and let $T :\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ be an irreversible isometry. Then operator T^* has a nonzero kernel, moreover, $TT^* \neq I,\ T^*T = I$. Let us consider at first the ordered pair (G, F), where $G = T^* \in End\ \mathcal{H},\ F = T^{-1} :\ Im\ T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Then $0 \in \sigma(G, F)$. At the same time $\mathcal{A}_l = TT^* \neq I$ and $\mathcal{A}_r = T^*T = I$, consequently, $0 \in \sigma(\mathcal{A}_l)$, but $0 \notin \sigma(\mathcal{A}_r) = \{1\}$. Further, let us consider the ordered pair (F, G). Since the left and the right relation coincides with $\mathcal{A}_l^{-1}$ and $\mathcal{A}_r^{-1}$, respectively, then according to theorems 2.4 and 6.1 we obtain $\infty \in \widetilde{\sigma}(F, G) = \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_l^{-1})$, but $\infty \notin \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_r^{-1})$. At last, both the cases are united by the consideration of a suitable pair of operators in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Theorem 6.2. *The extended spectrums of the ordered pairs (G, F) and (F, G) are connected by the correlation*

$$\widetilde{\sigma}(F, G) = \{1/\lambda \mid \ \lambda \in \widetilde{\sigma}(G, F)\}. \tag{6.7}$$

Definition 6.3. The ordered pair of subspaces (X_1, Y_1), where $X_1 \subset X,\ Y_1 \subset Y$, is called *invariant* for the pair (G, F), if $GX_1 \subset Y_1$ and $FX_1 \subset Y_1$.

Definition 6.4. Let

$$X = X_0 \oplus X_1, \qquad Y = Y_0 \oplus Y_1 \tag{6.8}$$

be direct sums of closed subspaces provided $(X_0, Y_0),\ (X_1, Y_1)$ are invariant pairs of subspaces for (G, F). Let $G_i,\ F_i : \mathcal{D}(G, F) \cap X_i = \mathcal{D}_i \to Y_i,\ i = 0, 1$ be restrictions of operators G, F on $X_i,\ i = 0, 1$. Then we shall use the notation

$$(G, F) = (G_0,\ F_0)\ \oplus\ (G_1,\ F_1) \tag{6.9}$$

and we shall say that the ordered pair of operators (G, F) assumes the representation (6.12) according to expansions (6.11) of spaces, and it is *a direct sum* of pairs $(G_0,\ F_0)$ and $(G_1,\ F_1)$.

Theorem 6.3. *Let the extended spectrum $\widetilde{\sigma}(G, F)$ of the ordered pair (G, F) be represented in the form*

$$\widetilde{\sigma}(G, F) = \sigma_0 \cup \sigma_1, \tag{6.10}$$

where set σ_0 is compact, set σ_1 is closed and $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \varnothing$. Then the pairs of subspaces $(X_0, Y_0),\ (X_1, Y_1)$ invariant for (G, F) exist such that expansions (6.8), (6.9) take place and, besides,

1) *projectors $P_i \in End\ X,\ \ Q_i \in End\ Y,\ i = 0, 1,$ realizing expansions* (6.8) *(i. e. $Im\ P_i = X_i,\ Im\ Q_i = Y_i,\ i = 0, 1$), are defined by the formulae*

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} R(\lambda, \mathcal{A}_l)\ d\lambda, \quad Q_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} R(\lambda, \mathcal{A}_r)\ d\lambda, \tag{6.11}$$

$$P_1 = I - P_0, \quad Q_1 = I - Q_0, \quad i = 0, 1, \tag{6.12}$$

where γ_0 is a closed Jordan circle (or a finite number of such circles), placed in $\rho(\mathcal{A})$ so that σ_0 lies inside it, and σ_1 lies outside of it;

2) $\widetilde{\sigma}(G_0, F_0) = \sigma(G_0, F_0) = \sigma_0, \quad \widetilde{\sigma}(G_1, F_1) = \sigma_1$;

3) *$D(G_0) = X_0,\ F_0 : D(F_0) = D(F)\ \cap\ X_0 \subset X_0 \to Y_0$ is a continuous reversible operator, and $\mathcal{A}_l^{(0)} = F_0^{-1}G_0 \in End\ X_0,\ \mathcal{A}_r^{(0)} = G_0F_0^{-1} \in End\ Y_0$;*

4) *the left $R_l(\ .\ ; G_0, F_0) = R(\ .\ , \mathcal{A}_l^{(0)})$ and the right $R_r(\ .\ ; G_0, F_0) = R(\ .\ , \mathcal{A}_r^{(0)})$ resolvents of pair (G_0, F_0) are similar, and $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_l^{(0)}) = \sigma(\mathcal{A}_l^{(0)}) = \widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_r^{(0)}) = \sigma(\mathcal{A}_r^{(0)}) = \widetilde{\sigma}(G_0, F_0)$;*

5) *$D(F_1) = X_1,\ G_1 : D(G_1) = D(G)\ \cap\ X_1 \subset X_1 \to Y_1$ is a continuous reversible operator, if $0 \notin \sigma_1$, and then $R_l(0; G_1, F_1) = G_1^{-1}F_1 \in End\ X_1,\ R_r(0; G_1, F_1) = F_1G_1^{-1} \in End\ Y_1$, and $R_l(\ .\ ; G_1, F_1) = 0,\ \ R_r(\ .\ ; G_1, F_1) = 0$, if $X_1 = \mathcal{A}_l\ 0$.*

Remark 6.4. If subspace $D(F)$ or $D(G)$ with the corresponding graph norm is chosen as space X according to remark 6.2, then in theorem 6.3 instead of (6.11) the expansion of subspace $D(F)$ or $D(G)$ is realized.

Theorem 6.3 was unknown to us in such a general formulation. Many of its statements were obtained earlier under specific conditions on the domain $D(G, F)$ of pair (G, F). Thus, in paper [24] A.G. Rutkas formulated without proof a portion of statements 1) – 3) of theorem 6.3 in the case, when $D(G, F) = X$. The case $\sigma_0 = \{0\},\ D(G, F) = D(F)$ was explicitly considered in [25] and further in [26]. In paper [27] the result was obtained by V.V. Ditkin, which is contained in statements 1) – 3) of theorem 6.3 provided $D(F) \subset D(G) \subset X$ and $X = Y$ (see remarks 6.2, 6.4). The most general result for the pair (G, F) of the closed operators was considered by N.I. Radbel in [23] (see remark 6.4). However, in formulae of the form (6.15) the resolvent of relation $\mathcal{A}_l$ was replaced by the right part of formula (6.3), but it is possible only in the case $D(F) = X$.

In the papers, mentioned above, possibilities and advantages, connected with the invoking of a extended spectrum of the pair, were not properly used.

In example 6.1 it was noted, that the sets $\widetilde{\sigma}(G,F)$ and $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_r)$ can be distinguished by the presence or absence of points $0,\infty$. Their distinction is characterized more exactly by

Theorem 6.4. *The following two statements take place:*

1) $0\in\sigma(G,F)\setminus\sigma(\mathcal{A}_r) \iff Ker\ G\neq\{0\},\ Y=Im\ G,\ \overline{D(F)}=D(F)$ *u* $X = Ker\ G\oplus D(F)$;
2) $\infty\in\widetilde{\sigma}(G,F)\setminus\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}_r) \iff Ker\ F\neq\{0\},\ Y=Im\ F,\ \overline{D(G)}=D(G)$ *u* $X = Ker\ F\oplus D(G)$.

Theorem 6.5. *Let* $B_1\in Hom\ (X,Y)$, $B_2\in Hom\ (Y,X)$, *and also* $Ker\ B_2=\{0\}$. *Then* $\sigma(B_1B_2)\setminus\{0\}=\sigma(B_2B_1)\setminus\{0\}$. *Moreover,* $0\in\sigma(B_2B_1)\setminus\sigma(B_1B_2) \iff Ker\ B_1\neq\{0\}$, $Im\ B_1=Y$, $\overline{Im\ B_2}=Im\ B_2$ *and* $X=Ker\ B_1\oplus Im\ B_2$.

Note that the statement of theorem 6.5 for the elements of Banach algebras is contained in many monographs (see, for example, [16, ch. 1, § 1]). The detailed analysis of the spectral properties, corresponding to the second part of theorem 6.5, was not carried out there.

Let us formulate the results, which are closely connected with the results from § 3 and are their direct corollary.

With the help of the left $\mathcal{A}_l$ and the right $\mathcal{A}_r$ relation of pair (G,F) let us introduce into consideration sequences of linear subspaces

$$\mathcal{X}_k=\mathcal{A}_l^k\ 0,\quad \mathcal{X}^{(k)}=D(\mathcal{A}_l^k),\quad \mathcal{Y}_k=\mathcal{A}_r^k\ 0,\quad \mathcal{Y}^{(k)}=D(\mathcal{A}_r^k),\quad k\in\mathbb{N}. \tag{6.13}$$

From properties 1) – 3) of the relations, given at the beginning of this paragraph, we obtain the representation of subspaces in terms of images and preimages of operators F and G :

$$\mathcal{X}_0=\{0\},\ \mathcal{X}_1=Ker\ F,\dots,\mathcal{X}_n=F^{-1}(G\mathcal{X}_{n-1}),\dots\ n\in\mathbb{N},$$
$$\mathcal{X}^{(0)}=X,\ \mathcal{X}^{(1)}=G^{-1}(Im\ F),\dots,\mathcal{X}^{(n)}=G^{-1}(F\mathcal{X}^{(n-1)}),\dots\ n\in\mathbb{N},$$
$$\mathcal{Y}_0=\{0\},\ \mathcal{Y}_1=G(Ker\ F),\dots\mathcal{Y}_n=G(F^{-1}\mathcal{Y}_{n-1}),\dots\ n\in\mathbb{N},$$
$$\mathcal{Y}^{(0)}=Y,\ \mathcal{Y}^{(1)}=F(D(G)),\dots\ \mathcal{Y}^{(n)}=F(G^{-1}\mathcal{Y}^{(n-1)}),\dots\ n\in\mathbb{N}.$$

It is clear that the pairs of subspaces $(\mathcal{X}_n,\mathcal{Y}_n)$, $(\mathcal{X}^{(n)},\mathcal{Y}^{(n)})$ are invariant for the pair of operators (G,F).

Under the conditions of the following theorem $m\in\mathbb{N}$, $m\geqslant 2$, and inclusions are strict.

Theorem 6.6. *If* $Ker\ F\neq\{0\}$, *then for the ordered pair* (G,F) *the following conditions are equivalent:*

1) *point* ∞ *is a pole of the resolvent of the left relation* $\mathcal{A}_l$ *of pair* (G,F) *of the order* $m-1$ *for* $m\geqslant 2$, ∞ *is its removable singularity for* $m=1$;
2) *invariant pairs of subspaces* $(X_0,Y_0),(X_1,Y_1)$ *exist, for which representations (6.11), (6.12) are valid, and*
   a) $\widetilde{\sigma}(G_0,F_0)=\sigma(G,F)$, $\widetilde{\sigma}(G_1,F_1)=\{\infty\}$;
   b) $D(G_0)=X_0$, $F_0^{-1}\in Hom\ (Y_0,X_0)$, $D(F_1)=X_1$, $G_1^{-1}\in Hom\ (Y_1,X_1)$;
   c) $(G_1^{-1}F_1)^{m-1}\neq 0$, $(G_1^{-1}F_1)^m=0$;
3) *the stability of subspaces takes place*: $\mathcal{X}_{m-1}\subset\mathcal{X}_m=\mathcal{X}_{m+1}$, $\mathcal{X}^{(m-1)}\supset\mathcal{X}^m=\mathcal{X}^{(m+1)}$.

To obtain the analogs of theorems 4.3, 4.4, 5.3 in terms of operator pairs one may take subspaces $(\mathcal{X}^*)_m=(\mathcal{A}_l^*)^m\ 0\subset X^*$, which are described by analogy with (6.13), as

$$\mathcal{X}_0^*=\{0\},\ \mathcal{X}_1^*=G^*(Ker\ F^*),\ \dots,\ \mathcal{X}_n^*=G^*((F^*)^{-1}\mathcal{X}_{n-1}^*),\dots,\ n\in\mathbb{N}.$$

References

[1] Cross R. *Multivalued linear operators.* New York: M. Dekker, 1998.

[2] Favini A., Yagi A. *Degenerate differential equations in Banach spaces.* Pure and Applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks/215. New York: M. Dekker, 1998.

[3] Ritsner V.S. *Theory of linear relations* // Deposited in VINITI. 1982. № 846–82. (in Russian)

[4] Hille E., Phillips R., *Functional analysis and semigroups*, M.: IL, 1962. (in Russian)
[5] Dunford N., Schwartz J.T., *Linear operators. P. I: General theory*, M.: IL, 1962. (in Russian)
[6] Neumann J. von. *Über adjungierte Functionaloperatoren* // Ann. of Math. **33** (1932), no. 2, 294–310.
[7] Arendt W. *Approximation of degenerate semigroups* // Tübinger Berichte zur Funktionalanalysis. Heft **9** (1999/2000), 33–46.
[8] *Functional analysis, ser. SMB, edit. Krein S.G.*, M.: Nauka, 1972. (in Russian)
[9] Baskakov A.G., Chernyshov K.I. *Ordered pairs of operators and semigroups* // Izv. RAEN. MMMIU, **2** (1998), no. 3, 39–69. (in Russian)
[10] Baskakov A.G., Chernyshov K.I. *Construction of the phase space and solutions of linear equations unsolved with respect to the derivative* // Dokl. RAN, **371** (2000), no. 3, 295–298. (in Russian)
[11] Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *On units of analytic semigroups of operators with kernels* // Sib. math. zh., **39** (1998), no. 3, 604–616. (in Russian)
[12] Fedorov V.E. *Degenerate strongly continuous semigroups of operators* // Algebra i analiz, **12** (2000), no. 3, 173–200. (in Russian)
[13] Melnikova I.V., Gladchenko A.V. *Correctness of Cauchy problem for inclusions in Banach spaces* // Dokl. RAN, **361** (1998), no. 6, 736–739. (in Russian)
[14] Engel K.-J., Nagel R. *One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.* Gradute Texts in Mathematics. **194**. Springer – Verlag, 2000.
[15] Räbiger F., Wolff M.P.H. *Spectral and asymptotic properties of resolvent-dominated operators* // Tübinger Berichte zur Funktionalanalysis. Heft **7** (1997/1998), 217–235.
[16] Bourbaki N. *Spectral theory.* M.: Mir, 1972. (in Russian)
[17] Favini A., Yagi A. *Multivalued linear operators and degenerate evolution equations* // Ann. Math. pur. et appl. **CLXIII** (1993), 353–384.
[18] Pietsch A., *Operator ideals*, M.: Mir, 1982. (in Russian)
[19] Baskakov A.G., Chernyshov K.I. *On the spectrum compactness conditions of ordered pairs of linear operators* // Izv. RAEN. MMMIU, **3** (1999), no. 3, 5–24. (in Russian)
[20] Baskakov A.G., *Operator ergodic theorems and the complementability of subspaces of Banach spaces*, Izv. vuzov, ser. math., (1988), no. 11 (318), 3–11. (in Russian)
[21] Krein S.G. *Linear differential equations in Banach space.* M.: Nauka, 1967. (in Russian)
[22] Henry D. *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, M.: Mir, 1985. (in Russian)
[23] Radbel N.I., *Ordered pairs of linear operators and the Cauchy problem for equation* $A\dot{x}(t) + Bx(t) = 0$ *in a Banach space*, Disser. kand. phys.-math. nauk. Donetsk: IPMM, 1984. (in Russian)
[24] Rutkas A.G., *Cauchy problem for equation* $A\dot{x}(t) + Bx(t) = f(t)$, Differen. uravneniya, **11** (1975), no. 11, 1996–2010. (in Russian)
[25] Chernyshov K.I. *On operator differential equations unsolved with respect to the derivative* // Disser. kand. phys.-math. nauk. Kiev: IM AN USSR, 1979. (in Russian)
[26] Krein S.G., Chernyshov K.I. *Singularly perturbed differential equations in Banach space* // IX International conf. on nonlinear oscillations. Kiev: Nauk. dumka. **1** (1984), 193–197. (in Russian)
[27] Ditkin V.V., *On certain spectral properties of the bundle of linear bounded operators*, Matem. zametki, **31** (1982), no. 1, 75–79. (in Russian)
[28] Sviridyuk G.A., *To the general theory of semigroups of operators*, Uspekhi Mat. Nauk. **49** (1994), no. 4, 47–74. (in Russian)
[29] Baskakov A.G., Chernyshov K.I. *Ergodic subspaces and analytic semigroups* // Spectral and evolutionary problems. Simferopol. **11** (2001), 136–143.

Баскаков Анатолий Григорьевич 394018, г. Воронеж, пер. Печатников, 18;

Воронежский государственный университет; кафедра математических методов исследования операций (ММИО), зав. кафедрой; д.ф.-м.н., проф.; с.т. (0732)789282

E-mail: pmmmmio@main.vsu.ru

Чернышов Корнелий Исидорович 394000, г. Воронеж, ул. Театральная, 19, кв. 64; д.т. (0732)532718

E-mail: chern@vsau.ru

Воронежская государственная лесотехническая академия, кафедра математики,
проф.; д.ф.-м.н., проф.; с.т. (0732)537505

Small Fluctuations of Viscous Magnetizable Fluid

Borisov I.D., Yatsenko T.Yu.
Kharkov National University, Ukraine

Let us consider a closed vessel at rest in a uniform gravitational field filled with a homogeneous incompressible fluid and gas, which is also placed in a magnetic field. We assume that the fluid and gas are non-conductive and their ponderomotive interaction with the magnetic field is caused by magnetization of the substances. We neglect any motion of gas.

We shall denote Ω_1 and Ω_2 to be the volumes occupied with the fluid and gas at the equilibrium state, $\Omega_3 = R^3 \setminus \overline{\Omega}$ to be the unbounded volume outside of the vessel Ω. Let Γ be a free surface of the fluid at the equilibrium state; S be the closed surface of the vessel Ω; S_1 and S_2 be the surfaces of contact, respectively, of the fluid and gas with the vessel walls, such that $S = \overline{S_1 \cup S_2}$. We assume Γ and S to be smooth enough surfaces, which cross one another at each point of the boundary $\partial\Gamma$ of the surface Γ at a nonzero dihedral angle.

For simplicity, we assume that magnetic permeability of substance in the volume Ω_3 is constant. The relations between the magnetic induction $\vec{B}$ and magnetic field strength $\vec{H}$ in each of the volumes Ω_k, $k = \overline{1,3}$ are supposed to have the form:

$$\vec{B}^{(k)} = \overset{0}{\mu}_k \vec{H}^{(k)}, \quad \overset{0}{\mu}_k = \overset{0}{\mu}_k (|H^{(k)}|), \quad k = \overline{1,3},$$

where $\overset{0}{\mu}_k$ is the absolute magnetic permeability of the k's substance. The intensity of the magnetic field $\vec{H}^{(k)}(\vec{x})$ is considered to be a smooth enough function in each volume $\overline{\Omega}_k$, $k = \overline{1,3}$. Let us also suppose that $\overset{0}{\mu}_k (H)$, $k = \overline{1,3}$ are smooth functions, which satisfy the conditions

$$m_0 < \overset{0}{\mu}_k (|H^{(k)}|) \pm | \overset{0}{\mu}{}^{(k)}_H ||H^{(k)}| < m^0, \qquad \forall |H^{(k)}| \geq 0, \qquad k = \overline{1,3},$$

where m_0 and m^0 are some positive constants.

Let $\vec{v}(t, \vec{x})$ be the field of fluid velocities, $\zeta(t, \xi^1, \xi^2)$ be the deviation, counted along the normal $\vec{n}$ to Γ (ξ^1 and ξ^2 are the curvilinear coordinates on Γ), of the free surface $\Gamma'(t)$ from the equilibrium state Γ. $\psi(t, \vec{x})$ is the potential of perturbation of magnetic field caused by the motion of the fluid.

In the linear approximation the motion of capillary fluid near the equilibrium state is described by the following system of equations, as well as the boundary and initial conditions [1, 2, 3]:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \triangle \vec{v} + \vec{f}, \qquad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \qquad (\text{in } \Omega_1), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_n (:= \vec{n} \cdot \vec{v}), \quad (\text{on } \Gamma), \qquad v_{\alpha,3} + v_{3,\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \qquad (\text{on } \Gamma), \tag{2}$$

$$-p + 2\rho\nu v_{3,3} = \sigma \left(-\triangle_\Gamma \zeta + a\zeta \right) + \left\{ B_n \frac{\partial \psi}{\partial \hat{u}} - \vec{B}_\tau \cdot \nabla_\Gamma \psi \right\}_\Gamma, \qquad (\text{on } \Gamma), \tag{3}$$

$$\zeta = 0, \qquad (\text{on } \partial\Gamma), \qquad \vec{v} = 0, \qquad (\text{on } S), \tag{4}$$

$$\operatorname{div} \mu_k \hat{\nabla} \psi^{(k)} = 0, \qquad k = \overline{1,3}, \qquad (\text{in } \Omega_k), \tag{5}$$

$$\{\psi\}_\Gamma = \{H_n\} \zeta, \qquad \left\{ \mu \frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}} \right\}_\Gamma = -\left\{ \operatorname{div}_\Gamma \zeta \vec{B}_\tau \right\}_\Gamma, \quad (\text{on } \Gamma), \tag{6}$$

$$\{\psi\}_S = 0, \qquad \left\{\mu\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}}\right\}_S = 0, \qquad (\text{on } S), \tag{7}$$

$$\psi(t,\vec{x}) \to 0, \qquad \text{if} \quad |\vec{x}| \to \infty, \tag{8}$$

$$\vec{v}(0,\vec{x}) = \vec{v}_0(\vec{x}), \qquad \zeta(0,\xi) = \zeta_0(\xi), \tag{9}$$

$$\hat{\nabla}(\cdot) := \left(\nabla + \frac{\mu_H \vec{H}}{\mu H}(\vec{H}\cdot\nabla)\right)(\cdot), \qquad \mu(\vec{x}) :=\overset{0}{\mu}(\vec{H}(\vec{x})),$$

$$\mu_H(\vec{x}) := \frac{d\overset{0}{\mu}(\vec{H}(\vec{x}))}{dH}, \qquad \frac{\partial(\cdot)}{\partial\hat{n}} := \vec{n}\cdot\hat{\nabla}(\cdot);$$

$$a := \frac{\rho}{\sigma}\vec{g}\cdot\vec{n} - (k_1^2 + k_2^2) + \frac{1}{\sigma}\left\{\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} b^{\alpha\beta}H_\alpha H_\beta - (k_1+k_2)H_n B_n\right\}_\Gamma .$$

Here ρ and ν are the density and coefficient of kinematic viscosity of the fluid; σ is the coefficient of surface tension on Γ; H_n and $\vec{H}_\tau$ are the projection on the normal and the tangent component of the magnetic field strength at Γ; k_1, k_2 and $b^{\alpha\beta}$ are, respectively, the main curvatures and the components of the second fundamental form of the surface Γ.

For simplicity, we assume that the fluid completely moistens the vessel walls, so that $\partial\Omega_1 = \Gamma\bigcup S$ and $\Gamma\bigcap S = \emptyset$. We set a Hilbert space $\mathcal{H} := \mathcal{L}_2(\Gamma)\ominus\{1\}$. In the Hilbert space $\mathcal{H}$ we shall define the operators

$$\mathcal{L}\zeta := \sigma(-\triangle_\Gamma + a(\vec{x}))\zeta, \quad \mathcal{B}_0\zeta := \mathcal{P}_\mathcal{H}\mathcal{L}\zeta = \mathcal{L}\zeta(\operatorname{mes}\Gamma)^{-1}\int_\Gamma(\mathcal{L}\zeta)d\Gamma, \qquad D(\mathcal{B}_0) := \mathcal{H}^2(\Gamma)\cap\mathcal{H},$$

where $\mathcal{P}_\mathcal{H}$ is the operator of orthogonal projection on the subspace $\mathcal{H}$ in $\mathcal{L}_2(\Gamma)$. One can prove that $\mathcal{B}_0$ is a bounded operator from $\mathcal{H}^{s-1/2}(\Gamma)$ to $\mathcal{H}^{3/2-s}(\Gamma)$, its low bound depends on physical parameters of the system [4].

We note in passing that the trace operator $\gamma^{(k)}$ and operator $\hat{\gamma}^{(k)}\psi^{(k)} := \vec{n}\cdot\psi^{(k)}\big|_\Gamma$, $k=\overline{1,3}$ are bounded operators from $\mathcal{H}^s(\Omega_k)$ to $\mathcal{H}^{s-1/2}(\Gamma)$ and $\mathcal{H}^{s-3/2}(\Gamma)$, respectively, [4]. Under the made assumptions the equation (5) is of uniform elliptical type in Ω_k, $k=\overline{1,3}$. For an arbitrary function $\zeta\in\mathcal{H}^{s-1/2}(\Gamma)$ there exists a unique solution, $\psi = \mathcal{M}\zeta$ ($\mathcal{M}$ is the resolving operator), of the boundary-value problem (5)–(8). For what follows we define the operator

$$\mathcal{B}_1\zeta := \mathcal{P}_\mathcal{H}\left\{B_n(\hat{\gamma}_n\mathcal{M}\zeta) - \vec{B}_\tau\cdot\nabla_\Gamma(\gamma\mathcal{M}\zeta)\right\}_\Gamma = \left\{B_n\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}} - \vec{B}_\tau\cdot\nabla_\Gamma\psi\right\}_\Gamma - \\ - (\operatorname{mes}\Gamma)^{-1}\int_\Gamma\left\{B_n\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}} - \vec{B}_\tau\cdot\nabla_\Gamma\psi\right\}_\Gamma . \tag{10}$$

It is easy to show that $\mathcal{B}_1$ is a bounded operator from $\mathcal{H}^{s-1/2}(\Gamma)$ to $\mathcal{H}^{s-3/2}(\Gamma)$. Also is possible to prove that the operator $\mathcal{B}_1 : \mathcal{H}^{3/2}(\Gamma)\cap\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ is an unbounded symmetric one.

Let us define the potential energy operator, $\mathcal{B}$, of the system by the relations

$$\mathcal{B} := \mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_1, \qquad D(\mathcal{B}) := D(\mathcal{B}_0) = \mathcal{H}^2(\Gamma)\cap\mathcal{H}. \tag{11}$$

Using the Eringen-Nirenberg inequality [5], one can show that $\mathcal{B}$ is a self-adjoined semi-bounded operator in $\mathcal{H}$. In the remaining part of our contribution we shall also use the standard "hydrodynamical" operators A and T [4]. Note that there exists a decomposition $\mathcal{J}_{0,S}(\Omega_1) = \mathcal{M}_0(\Omega_1)\oplus\mathcal{N}_0(\Omega_1)$, where $\mathcal{N}_0(\Omega_1) = A^{1/2}\mathcal{N}_1(\Omega_1)$, $\mathcal{N}^1(\Omega_1) = \{\vec{u}\in\mathcal{J}^1_{0,S}(\Omega_1) : \gamma_n\vec{u} = 0\}$ is the kernel of the operator γ_n [4].

With the help of defined operators the initially-boundary problem (1)–(8) can be presented as a Cauchy problem in the Hilbert space $\mathcal{E} = \mathcal{J}_{0,S}(\Omega_1) \oplus \mathcal{M}_0(\Omega_1)$:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \mathcal{A}y(t) = f(t), \tag{12}$$

$$y(0) = y_0, \qquad y_0 \in \mathcal{E}. \tag{13}$$

The operator $\mathcal{A}$ has the form

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \nu A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\nu^{-1}Q^*\mathcal{B}Q & -\nu^{-1}Q^*\mathcal{B}Q \\ \nu^{-1}Q^*\mathcal{B}Q & \nu^{-1}Q^*\mathcal{B}Q \end{pmatrix}, \tag{14}$$

where $Q = \gamma_n A^{-1/2}$, $Q = A^{1/2}T$, $y(t) = (\xi(t), \eta(t))^t \in \mathcal{E}$, $y_0 = (\xi(0), \eta(0))^t$ and $f(t) = (A^{1/2}\vec{f}(t); 0)^t$. It turns out that the operators $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}^*$, respectively, have the estimates

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{E}} \geq c\|y\|^2_{\mathcal{E}}, \qquad (y \in D(\mathcal{A})). \tag{15}$$

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}^*y, y)_{\mathcal{E}} \geq c^*\|y\|^2_{\mathcal{E}}, \qquad (y \in D(\mathcal{A}^*)). \tag{16}$$

It follows, that the operator $-\mathcal{A}+cI$ is a maximal dissipative one and, therefore, an estimation holds

$$\|\mathcal{U}(t)\| \leq \exp(-c_m t), \qquad c_m = \max\{c, c^*\}. \tag{17}$$

for a semi-group $\mathcal{U}(t)$ generated by the operator $-\mathcal{A}$ [6].

We then infer that the homogeneous Cauchy problem (12)–(13) is uniformly correct and for its solution $y(t) = \mathcal{U}(t)y_0$ an exponential estimation $\|y(t)\| \leq \exp(-c_m t)\|y_0\|$ holds. If $f(t)$ is a continuous function, which takes values in $\mathcal{E}$ and $y_0 \in \mathcal{E}$, then the non-uniform problem (12)–(13) has the generalized solution $y(t)$ given by the formula

$$y(t) = \mathcal{U}(t)y_0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-\tau)f(\tau)d\tau. \tag{18}$$

If $f(t)$ is a continuously differentiable function, which takes values in $\mathcal{E}$, and $y_0 \in \mathcal{A}$, then the non-homogeneous problem (12)–(13) has the classical solution $y(t)$ which is defined by the formula (18).

Let the following conditions, $\vec{v}^0 \in \mathcal{J}^1_{0,S}(\Omega_1)$, $\zeta^0 \in \mathcal{H}^{3/2}_\Gamma(\Gamma)$ and $\vec{f}(t,x)$ is a continuous function of t with values in $\mathcal{J}^1_{0,S}(\Omega_1)$, hold. Then, the initial-boundary problem (1)–(8) has a unique generalized solution, which is continuous in t, with values in $\mathcal{J}^1_{0,S}(\Omega_1)$.

For $f \equiv 0$ the solution of the problem (12)–(13), which depends on t by the law $\exp(-\lambda t)$, describes the normal fluctuations of the system

$$\mathcal{A}y = \lambda y. \tag{19}$$

We draw the reader's attention to the main properties of the spectrum of the problem under investigation. The problem (1)–(8) has a discrete spectrum $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, which is located in the right half-plane with a unique accumulation point $\lambda = \infty$. For any $\varepsilon > 0$ all the eigenvalues λ_j, with exception of, perhaps, their finite number, are located in the sector $|\arg\lambda| < \varepsilon$, i.e. are adjoined to the positive half-axis. The system of the eigen- and adjoined vectors of the problem (19) is complete in the Hilbert space $\mathcal{E}$.

References

[1] Blum E.Ya., Mayorov M.M., Zhebers A.O. Magnetic fluids – Riga: Zunate. – 1989. – 386 p.

[2] Pozenzhveyg R.E. Ferrohydrodynamics – M.: Mir. – 1989. – 345 p.

[3] Borisov I.D. Stability of balance state of magnetizable capillary fluid // Magnetic hydrodynamics. – 1983. – N 22. – P. 45-54.

[4] Kopachevskyy N.D., Kreyn S.G., Ngo Zuy Kan Operator methods in linear hydrodynamics. – M.: Nauka. – 1989. – 416 p.

[5] Lions J.L., Magenes E Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1. – Paris: Dunod. – 1968. – 371 p.
[6] Kreyn S.G. Linear differential equation in banach space – M.: Nauka. – 1967. – 464 p.

Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkov – 61077
E-mail: dream@bi.com.ua

BANACH ALGEBRAS ASSOCIATED WITH AUTOMORPHISMS. STRUCTURAL PROPERTIES. 2. OPERATORS WITH MEASURABLE COEFFICIENTS

A. Lebedev[3]
Belarusian State University, Minsk, Belarus;
University of Bialystok, Poland

In the present paper we continue the study of the structure of a Banach algebra $B(A, T_g)$ generated by a certain Banach algebra A of operators acting in a Banach space D and a group $\{T_g\}_{g\in G}$ of isometries of D such that $T_g A T_g^{-1} = A$. We investigate the interrelations between the existence of the expectation of $B(A, T_g)$ onto A, metrical freedom of the automorphisms of A induced by T_g and the dual action of the group G on $B(A, T_g)$. The results obtained are applied to the description of the structure of Banach algebras generated by 'weighted composition operators' acting in Lebesgue spaces.

AMS Subject Classification: 47D30, 16W20, 46H15, 46H20
Keywords: Banach algebras, isometries, automorphisms, metrically free action, dual action, Banach algebras generated by weighted composition operators, Lebesgue spaces

1. Introduction

This article should be considered as a 'measurable counterpart' of [1]. As in [1] the principal object under consideration here is a Banach algebra $B(A, T_g)$ generated by a certain Banach algebra A of operators acting in a Banach space D and a group $\{T_g\}_{g\in G}$ of isometries of D (a representation $g \to T_g$ of a discrete group G) such that

$$T_g A T_g^{-1} = A, \qquad g \in G \tag{1.1}$$

which means that T_g generates the automorphism $\hat{T}_g$ of A given by

$$\hat{T}_g(a) = T_g a T_g^{-1}, \qquad a \in A. \tag{1.2}$$

In [1] we obtained some principle characteristics of the structure of such algebras and also considered a number of examples where the role of A was played by algebras of continuous operator valued functions. In the present article we continue this investigation and present the results on the structure of the corresponding algebras in the situation when as A are taken algebras of measurable operator valued functions acting in Lebesgue spaces. Therefore roughly speaking the material of the paper describes a passage from the 'topological' picture given in [1] to a 'measurable' one.

We recall that in the Hilbert space situation (that is in the C^*-algebra theory) the analogous objects are closely related to the crossed products (see, for example [2]) and description of their structure is the theme of numerous investigations. In particular, Landstad [3] presented the necessary and sufficient conditions (in terms of *duality theory*) for a C^*-algebra to be isomorphic to a crossed product (of an algebra and a locally compact group of automorphisms). In the case

[3]Research is partially supported by the Fundamental Research Fund of the Republic of Belarus

of a discrete group in [4], Chapter 2 there were found the conditions for a C^*-algebra to be isomorphic to a crossed product in terms of the group action (the so called *topologically free action* (see 1.3)) and also in terms of satisfaction of a certain inequality (*property (*)* (1.3)) guaranteeing the existence of the expectation of the algebra $B(A,T_g)$ onto the algebra A (see (1.4), (1.5)).

In [1] we have shown that the mentioned properties (topologically free action, property (*) and dual action of the group) play an exceptional role in the general Banach space situation as well. By means of these properties there were established a number of results describing the structure of of $B(A,T_g)$ up to isomorphism.

In this paper we show (in Section 2) that in the 'measurable' situation the natural substitute for the topologically free action is the *metrically free* action (see 2.2). We investigate the interrelation between these notions and in particular find out that from a ceratin point of view they are equivalent. This enables us to transfer the main structural results of [1] from the 'topological' to the 'measurable' situation.

Since in the general Banach space situation we do not have a universal object like the crossed product in the Hilbert space situation to describe the structure of $B(A,T_g)$ we have to specify the algebra A and the isometries T_g. Sections 3-5 are devoted to the applications of the results obtained in Section 2 and in [1] to the description of the structure of concrete Banach algebras associated with automorphisms, namely the algebras generated by 'weighted composition operators' acting in Lebesgue spaces.

We establish a number of isomorphism results for the algebras investigated and in addition find out that the arising algebras are in a way qualitatively different. In particular when considering the operators in $L^\infty_\mu(\Omega,E)$ and in $L^1_\mu(\Omega,E)$ we *can* calculate their norms (see Theorems 8 and 10) while for the operators in $L^p_\mu(\Omega,E)$, $1<p<\infty$ we have nothing like this. Moreover to obtain the isomorphism theorems for the algebras $B(A,T_g)$ in $L^\infty_\mu(\Omega,E)$, $L^1_\mu(\Omega,E)$ we do not need any information on the structure of the group of operators generating automorphisms while this structure (namely the amenability of the group G) is vital when we are investigating the operators in $L^p_\mu(\Omega,E)$, $1<p<\infty$ (see Theorem 7 and Remark 6.1).

To make the presentation selfcontained we have to recall a number of notions and results from [1].

1.1. Property (*). *It was shown in* [1] *that one of the most important properties of the algebra $B(A,T_g)$ in the presence of which one can obtain the deep and fruitful theory of the subject is the next* property (*)*:*

for any finite sum $b=\sum a_gT_g$, $a_g\in A$ the following inequality holds

$$\|b\|=\|\sum a_gT_g\|\geq\|a_e\|, \tag{1.3}$$

where e is the identity of the group G.

If an algebra $B(A,T_g)$ possesses the property (*) then for every $g_0\in G$ there is correctly defined the mapping

$$N_{g_0}:\sum a_gT_g\to a_{g_0} \tag{1.4}$$

which can be extended up to the mapping

$$N_{g_0}:B(A,T_g)\to A. \tag{1.5}$$

1.2. Property (**). *One more important property is the following.*
We shall say that an algebra $B(A,T_g)$ which possesses the property (*) also possesses the property (**) *if*

$$B(A,T_g) \ni b = 0 \text{ iff } N_g(b) = 0 \text{ for every } g \in G \tag{1.6}$$

where N_g is the mapping introduced above.

In fact the presence of the properties (*) and (**) makes it possible to 'reestablish' an element $b \in B(A,T_g)$ via its 'Fourier' coefficients $N_g(b)$, $g \in G$ and we shall find out further that in many reasonable situations this 'reestablishing' can be carried out successfully.

If A is a C^*-algebra of operators containing the identity and acting in a Hilbert space H and $\{T_g\}_{g\in G}$ is a unitary representation of a group G in H then the C^*-algebra generated by A and $\{T_g\}_{g\in G}$ will be denoted by $C^*(A,T_g)$.

In the C^*-algebra situation we have (see [4], Theorems 12.8 and 12.4):

if G is a discrete amenable group and $C^*(A,T_g)$ possesses the property (*) then $C^*(A,T_g)$ possesses the property (**) as well.

The main reason why in the C^*-algebra case the property (**) (1.6) follows from the property (*) is that

the presence of the property (*) implies ([4], Theorem 12.8)

$$C^*(A,T_g) \cong A \times_{\hat{T}} G$$

where by $A \times_{\hat{T}} G$ we denote the crossed product of the algebra A by the group $\{\hat{T}_g\}_{g\in G}$ of its automorphisms (here G is considered as a discrete group).
Since in a Banach space case we do not have anything like the isomorphism mentioned above we have to check the property (**) even when $B(A,T_g)$ possesses the property (*). In a general situation (that is for an *arbitrary* discrete group of isometries $\{\hat{T}_g\}_{g\in G}$ with $T_gAT_g^{-1} = A$) the verification of the property (**) may be very sophisticated. The next Theorem 1 (proved in [1]) shows that in the case of a *locally compact commutative* group G and under a special assumption (which as it will be seen later is in fact rather common) the algebra $B(A,T_g)$ possesses the properties (*) and (**) simultaneously.

Theorem 1. *Let G be a locally compact commutative group. If for any finite set $F \subset G$ and any character $\chi \in \hat{G}$ there is satisfied the equality*

$$\|\sum_{g\in F} a_g T_g\| = \|\sum_{g\in F} a_g \chi(g) T_g\| \tag{1.7}$$

then the algebra $B(A,T_g)$ possesses the properties (*) and (**).

In [1] we have also established a close relation between the property (*) and the so-called *topological freedom* of the action of the group of automorphisms $\{\hat{T}_g\}$. So let as recall the latter notion.

1.3. Topologically free action. *Observe first that if $\{T_g\}_{g\in G}$ is a group of isometries satisfying (1.1) then evidently*

$$T_g \mathbb{Z}(A) T_g^{-1} = \mathbb{Z}(A) \tag{1.8}$$

where $\mathbb{Z}(A)$ is the center of A.
Let A be a certain Banach algebra isomorphic to $C(X,B)$ where X is a completely regular space and B is a Banach algebra then

$$\mathbb{Z}(A) = C(X, \mathbb{Z}(B)). \tag{1.9}$$

Henceforth in this subsection we confine ourselves to the case

$$\mathbb{Z}(B) = \{cI\} \tag{1.10}$$

The reason justifying this choice was discussed in [1]. *Obviously if* $B = L(E)$ *is the Banach algebra of all linear bounded operators acting in a Banach space* E *then (1.10) is satisfied.*
So let $A \subset L(D)$ *be a Banach algebra of operators isomorphic to* $C(X, L(E))$ *where* X *is a certain completely regular space and* E *and* D *are Banach spaces (thus* $\mathbb{Z}(A) \cong C(X)$*). Let* $\{T_g\}_{g\in G}$ *be a group of isometries satisfying (1.1). According to (1.8) the automorphisms* $\hat{T}_g$ *(1.2) preserve the center and henceforth we assume that their action on the center is given by*

$$[\hat{T}_g(z)](x) = z(t_g^{-1}(x)), \quad z \in \mathbb{Z}(A), \ x \in X. \tag{1.11}$$

where $t_g : X \to X$ *are some homeomorphisms of* X*.*

Denote by $X_g, \ g \in G$ *the set*

$$X_g = \{x \in X : t_g(x) = x\}. \tag{1.12}$$

We say that the group G *acts* topologically freely *on* A *by automorphisms* $\hat{T}_g$ *(or on* X *by homeomorphisms* t_g *mentioned in (1.11)) if for any* $g \in G, \ g \neq e$ *the set* X_g *has an empty interior.*

One can observe that G *acts topologically freely iff for any finite set* $\{g_1, ..., g_n\} \subset G \ (g_i \neq e)$ *the set* $[\cup_{i=1}^n X_{g_i}]$ *has an empty interior.*

Just as in [4]*, 12.13 and 12.13' it can be shown that the foregoing definition is equivalent to the next one: the action of* G *is said to be topologically free if for any finite set* $\{g_1, ..., g_k\} \subset G$ *and a non empty open set* $U \subset X$ *there exists a point* $x \in U$ *such that all the points* $t_{g_i}(x), \ i = 1, ..., k$ *are distinct.*

Since X *is Hausdorff the latter definition is also equivalent to the following: the action of* G *is said to be topologically free if for any finite set* $\{g_1, ..., g_k\} \subset G$ *and a non empty open set* $U \subset X$ *there exists a non empty open set* $V \subset U$ *such that*

$$t_{g_i}(V) \cap t_{g_j}(V) = \emptyset \quad i, j \in \overline{1, k}, \ i \neq j. \tag{1.13}$$

In [1] we proved the following

Theorem 2. *If* G *acts topologically freely then* $B(A, T_g)$ *possesses the property (*).*

1.4. Regular representation of an algebra and a group of automorphisms. *Let us also recall one more algebra (examined in* [1]*) where the properties (*) and (**) can be checked easily* — the regular representation of an algebra A and a group of automorphisms $\{\hat{T}_g\}_{g\in G}$.
Namely let $A \subset L(D)$ *be a certain Banach algebra and* $\{\hat{T}_g\}_{g\in G}$ *be a certain group of its automorphisms (*G *is an* arbitrary *group that is* not necessarily commutative*).*
Denote by H *any of the spaces* $l^p(G, D), 1 \leq p \leq \infty$ *or* $l_0(G, D)$ *(here* $l_0(G, D)$ *is the space of vector valued functions on* G *having values in* D *and tending to zero at infinity (with the sup-norm)).*
Set the operators $V_{g_0} : H \to H$ *by the formula*

$$(V_{g_0}\xi)(g) = \xi(gg_0), \quad g, g_0 \in G \tag{1.14}$$

and consider the algebra $\bar{A} \subset L(H)$ *isomorphic (as a Banach algebra) to* A *and given by*

$$(\bar{a}\xi)(g) = \hat{T}_g(a)\xi(g), \quad a \in A. \tag{1.15}$$

Routine computation shows that with this notation we have

$$V_g \bar{a} V_g^{-1} = \overline{\hat{T}_g(a)}$$

which in view of the isomorphism between A *and* $\bar{A}$ *means that the operators* $V_g, g \in G$ *given by (1.14) generate the automorphisms* $\hat{T}_g$ *of* $\bar{A}$.

The algebra $B(\bar{A}, V_g) \subset L(H)$ *is called the* (right) regular representation *corresponding to the algebra* A *and the group of automorphisms* $\{\hat{T}_g\}_{g\in G}$ *(in fact we have the series of representations depending on the type of the space* H *chosen).*

In [1] we have proved that

the algebra $B(\bar{A}, V_g)$ *possesses the properties (*), (**) and (1.7) (for every* H *considered).*

2. Metrically free action and topologically free action

2.1. *Let* (Ω, μ) *be a space with a* $\sigma-$*additive* $\sigma-$*finite measure* μ, H *be a certain Banach space and* $L^p_\mu(\Omega, H)$, $1 \le p \le \infty$ *be the spaces of (equivalence classes) of measurable functions* $f : \Omega \to H$ *bounded with respect to the norms*

$$\|f\| = \left[\int\limits_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\| = \operatorname{esssup}_\Omega |f|, \qquad p = \infty$$

where $|\cdot|$ *is the norm in* H *(for details see, for example, Dunford, Schwarts* [5]*).*
Consider an algebra $A \subset L(D)$ *isomorphic to* $L^\infty_\mu(\Omega, L(E))$ *where* D *and* E *are Banach spaces. If* $\{T_g\}_{g\in G}$ *is a group of isometries of* D *satisfying (1.1) then the automorphisms* $\hat{T}_g$ *(given by (1.2)) generate the mappings* $\alpha_g : \Sigma \to \Sigma$ *(*Σ *is the set of (equivalence classes) of measurable subsets of* Ω*) defined in the following way.*

Observe that for the algebra considered the center $\mathbb{Z}(A) \cong L^\infty_\mu(\Omega)$. *Let* χ_Δ *be the element of* $\mathbb{Z}(A)$ *corresponding to the characteristic function* $\chi_\Delta(\omega)$ *of a certain set* $\Delta \in \Sigma$.
Since ${\chi_\Delta}^2 = \chi_\Delta$ *it follows that* $\hat{T}_g(\chi_\Delta)$ *is a projection belonging to* $\mathbb{Z}(A)$ *(non zero iff* $\chi_\Delta \ne 0$*) and we have*

$$\hat{T}_g(\chi_\Delta) = \chi_{\tilde{\Delta}} \tag{2.1}$$

for some $\tilde{\Delta} \in \Sigma$.
We set

$$\alpha_g(\Delta) = \tilde{\Delta}. \tag{2.2}$$

The substitution for the topologically free action of G *(see 1.3) in the situation under consideration is the so-called metrically free action. Here it is.*

2.2. *We say that the group* G *acts* metrically freely *on* A *(considered in 2.1) by automorphisms* $\hat{T}_g$ *(or on* Σ *by the mappings* α_g*) if for any finite set* $\{g_1, ..., g_k\} \subset G$ *and any* $\Delta \in \Sigma$ *with* $\mu(\Delta) > 0$ *there exists a set* $\Delta' \in \Sigma$ *such that*
(i) $\mu(\Delta') > 0$,
(ii) $\Delta' \subset \Delta$,
(iii) $\mu(\alpha_{g_i}(\Delta') \cap \alpha_{g_j}(\Delta')) = 0, \quad i, j \in \overline{1,k},\ i \ne j.$

It is worth mentioning that from a certain point of view the notion of the metrically free action of G just introduced 'coincides' with the notion of the topologically free action.

Indeed.
The algebra $L^\infty_\mu(\Omega)$ is a commutative C^*-algebra (with the natural involution). Let M be its maximal ideal space then

$$L^\infty_\mu(\Omega)\check{\cong}C(M)$$

where the isomorphism is established by means of the Gelfand transform. The mentioned 'coincidence' between the topologically and metrically free actions is established in the next

Theorem 3. *The metrically free action of the automorphisms $\hat{T}_g$ on $L^\infty_\mu(\Omega)$ corresponds to the topologically free action of the automorphisms $\check{T}_g$ on $C(M)$ (induced by the automorphisms $\hat{T}_g$ and the isomorphism $L^\infty_\mu(\Omega)\check{\cong}C(M)$).*

Now the analogue to Theorem 2 for the measurable case considered is

Theorem 4. *Let A and $T_g,\ g\in G$ be those considered in 2.1. If G acts metrically freely then $B(A,T_g)$ possesses the property (*).*

3. Example 1. Operators in $L^p(\Omega, E), 1<p<\infty$

3.1. *Let (Ω,μ) be a space with a $\sigma-$additive $\sigma-$finite measure μ. Consider the space $D = L^p_\mu(\Omega, E),\ \ 1<p<\infty$. Let $A = L^\infty_\mu(\Omega, L(E))\subset L(D)$ be the algebra of* multiplication operators *defined by*

$$(af)(x) = a(x)f(x), \quad a\in A,\ f\in D \tag{3.1}$$

and let $\alpha_g:\Omega\to\Omega,\ \ g\in G$ be a group of measurable mappings preserving the equivalence class of μ. By T_g we denote the isometry of D defined by

$$(T_gf)(x) = \left[\frac{d\alpha_g^{-1}(\mu)}{d\mu}\right]^{\frac{1}{p}} f(\alpha_g^{-1}(x)) \tag{3.2}$$

where $\frac{d\alpha_g^{-1}(\mu)}{d\mu}$ is the Radon-Nikodim derivative of $\alpha_g^{-1}(\mu)$ with respect to μ.
One can easily verify that T_g satisfies (1.1) and the mentioned mappings α_g coincide with those described in 2.1.

Let $B(A,T_g)\subset L(D)$ be the algebra generated by A and $\{T_g\}_{g\in G}$.

Theorem 5. *Let $B(A,T_g)$ be the algebra described in 3.1 and $B(\bar{A},V_g)$ be the corresponding regular representation in the space $H = l^p(G, L^p_\mu(\Omega,E))$. If G acts metrically freely then the mapping*

$$B(A,T_g)\to B(\bar{A},V_g)$$

defined by

$$a\to\bar{a},\quad a\in A$$
$$T_g\to V_g,\quad g\in G$$

is norm decreasing.

Theorem 6. *Let $B(A,T_g)$ be the algebra described in 3.1 and $B(\bar{A},V_g)$ be the corresponding regular representation in the space $H = l^p(G, L^p_\mu(\Omega,E))$. If G is amenable then the mapping*

$$B(\bar{A},V_g)\to B(A,T_g)$$

generated by the mappings

$$\bar{a}\to a,\quad a\in A \tag{3.3}$$
$$V_g\to T_g,\quad g\in G \tag{3.4}$$

is norm decreasing.

We can summarize the results obtained in

Theorem 7. *Let $B(A,T_g)$ and $B(\bar{A},V_g)$ be those considered in the lemma. If G is amenable and acts metrically freely then*

$$B(A,T_g)\cong B(\bar{A},V_g)$$

where the isomorphism is given by (3.3) and (3.4). In particular the algebra $B(A,T_g)$ possesses the properties (*) and (**) and (1.7).

4. Example 2. Operators in $L^\infty_\mu(\Omega,E)$

4.1. *Let $D=L^\infty_\mu(\Omega,E)$ (where Ω is a space with a $\sigma-$additive $\sigma-$finite measure μ) and $A=L^\infty_\mu(\Omega,L(E))$ be the algebra of multiplication operators (see (3.1)) and $\alpha_g:\Omega\to\Omega,\ g\in G$ be a group of measurable mappings preserving the equivalence class of μ. By T_g we denote an isometry of D given by*

$$(T_gf)(x)=f(\alpha_g^{-1}(x)). \tag{4.1}$$

Let $B(A,T_g)$ be the algebra generated by A and $\{T_g\}_{g\in G}$.

For any fixed finite set $F\subset G$ we denote by $B_F(D)$ and $S_F(D)$ respectively the sets

$$B_F(D)=\{\{f_g\}_{g\in F}:f_g\in D,\ \|f_g\|\le 1,\ \ g\in F\}, \tag{4.2}$$

$$S_F(D)=\{\{f_g\}_{g\in F}:f_g\in D,\ \|f_g\|=1,\ \ g\in F\}. \tag{4.3}$$

Theorem 8. *Let $B(A,T_g)$ be the algebra introduced above. If G acts metrically freely then for any finite F we have*

$$\|\sum_{g\in F}a_gT_g\|=\sup_{\{f_g\}_{g\in F}\in S_F(D)}\|\sum_{g\in F}a_gf_g\|=\sup_{\{f_g\}_{g\in F}\in B_F(D)}\|\sum_{g\in F}a_gf_g\| \tag{4.4}$$

where $B_F(D)$ and $S_F(D)$ are defined by (4.2) and (4.3).

Remark 1.

(1) If $E=\mathbb{C}$ (that is $D=L^\infty_\mu(\Omega)$ and $A=L^\infty_\mu(\Omega)$) then (4.4) implies

if G acts metrically freely then

$$\|\sum_F a_gT_g\|=\ \ \mathrm{esssup}_\Omega\sum_F|a_g(x)|$$

Indeed on the one hand

$$\sup_{\{f_g\}\in B_F(D)}\|\sum_{g\in F}a_gf_g\|\le \mathrm{esssup}_\Omega\sum_F|a_g(x)|$$

and to obtain the opposite inequality just set

$$f_g(x)=\begin{cases}[\arg a_g(x)]^{-1} & ,\ \text{ if }\ a_g(x)\ne 0\\ 1 & ,\ \text{ if }\ a_g(x)=0\end{cases}$$

(since $a_g\in L^\infty_\mu(\Omega)$ we have that $f_g\in L^\infty_\mu(\Omega)$ as well).

(2) The equality (4.4) also shows that

if G acts metrically freely then

$$\|\sum_F a_gT_g\|=\|\tilde{b}_F\|$$

where

$$\tilde{b}_F : D_1 \times D_2 \times ... \times D_{|F|} \to D, \quad D_i = D$$

is given by

$$\tilde{b}_F(\xi_1, ..., \xi_{|F|}) = a_{g_1}\xi_1 + ... + ag_{|F|}\xi_{|F|} \tag{4.5}$$

$(\{g_1, ..., g_{|F|}\} = F)$.

(3) The preceding remark leads in turn to the next observation.

Since $a_g \in L^\infty_\mu(\Omega, L(E)),\ g \in F$ *it follows (by the structure of* $\tilde{b}_F$*) that*

$$\tilde{b}_F \in L^\infty_\mu(\Omega, L(\tilde{E}, E))$$

where $\tilde{E} = E_1 \times E_2 \times ... \times E_{|F|}, \quad E_i = E.$
But this means that

$$\|\tilde{b}_F(\cdot)\| \in L^\infty_\mu(\Omega)$$

and

$$\|\tilde{b}_F\| = \quad \mathrm{esssup}_\Omega \|\tilde{b}_F(x)\|$$

which along with the preceding remark (2) implies

if G acts metrically freely then

$$\|\sum_F a_g T_g\| = \quad \mathrm{esssup}_\Omega \sup_{\{f_g\} \in B_F(E)} \|\sum_{g \in F} a_g(x) f_g\| =$$

$$\mathrm{esssup}_\Omega \sup_{\{f_g\} \in S_F(E)} \|\sum_{g \in F} a_g(x) f_g\| \tag{4.6}$$

thus strengthening the statement of Theorem 8.

Theorem 9. *Let* $B(A, T_g)$ *be the algebra described in 4.1 and* $B(\bar{A}, V_g)$ *be the corresponding regular representation in the space*

$$H = l_0(G, L^\infty_\mu(\Omega, E)) \ \ (\text{or} \ \ l^\infty(G, L^\infty_\mu(\Omega, E))).$$

If G *acts metrically freely then*

$$B(A, T_g) \cong B(\bar{A}, V_g)$$

where the isomorphism is generated by the mappings

$$a \to \bar{a}, \quad a \in A$$

$$T_g \to V_g, \quad g \in G$$

and in particular $B(A, T_g)$ *possesses the properties (*) and (**) and (1.7).*

5. Example 3. Operators in $L^1_\mu(\Omega, E)$

Our final example deals with the space L^1. By means of duality this case can be reduced to the L^∞ situation already studied.

5.1. *Let* (Ω, μ) *be the space considered in 3.1,* $D = L^1_\mu(\Omega, E)$ *and* $A = L^\infty_\mu(\Omega, L(E))$ *be the algebra of operators defined by (3.1) and* T_g *be defined by (3.2) (with* $p = 1$*).*
Let $B(A, T_g) \subset L(D)$ *be the algebra generated by* A *and* $\{T_g\}_{g \in G}$*.*

Theorem 10. *Let $B(A, T_g)$ be the algebra introduced in 5.1. If G acts metrically freely then*

$$\|\sum_{g\in F} a_g T_g\| = \quad \mathrm{esssup}_\Omega \sup_{\{f_g\}\in B_F(E^*)} \|\sum_{g\in F} [a_g(\alpha_g(x))]^* f_g\| =$$

$$\mathrm{esssup}_\Omega \sup_{\{f_g\}\in S_F(E^*)} \|\sum_{g\in F} [a_g(\alpha(x))]^* f_g\| \tag{5.1}$$

Remark 2. *(cf. Remark 1 (1)).*
If $E = \mathbb{C}$ and G acts metrically freely then

$$\|\sum_F a_g T_g\| = \quad \mathrm{esssup}_\Omega \sum_F |a_g(\alpha_g(x))|.$$

And finally the analogue to Theorem 9 here is

Theorem 11. *Let $B(A, T_g)$ be the algebra described in 5.1 and $B(\bar{A}, V_g)$ be the corresponding regular representation in the space $l^1(G, L^1_\mu(\Omega, E))$. If G acts metrically freely then*

$$B(A, T_g) \cong B(\bar{A}, V_g)$$

where the isomorphism is generated by the mappings

$$a \to \bar{a}, \quad a \in A$$

$$T_g \to V_g, \quad g \in G$$

and in particular $B(A, T_g)$ possesses the properties (*) and (**) and (1.7).

6. Final remarks. Isomorphism theorems.

Now we would like to observe certain interrelations between the examples considered and the Isomorphism Theorem ([4], Corollary 12.17).

6.1. *(1) Observe that in Examples 2, 3 we did not use any information about the group G thus the group in these examples is* not necessarily amenable*.*

(2) The essentially different picture is drawn in Example 1.
Here
(i) if G acts metrically freely then
$B(\bar{A}, V_g)$ is a representation of $B(A, T_g)$ for any *G (*not necessarily amenable*)*
(Theorem 5).

While
(ii) if G is amenable then
$B(A, T_g)$ is a representation of $B(\bar{A}, V_g)$ for an arbitrary *action of G (*not necessarily metrically free*).*
(Theorem 6).

Thus in these examples the metrical freedom of the action of G and the amenability of G are lying in a sense opposite each other.
If G acts metrically freely then $B(A, T_g)$ is 'larger' than $B(\bar{A}, V_g)$ (see (i)).
And
if G is amenable then $B(\bar{A}, V_g)$ is 'larger' than $B(A, T_g)$ (see (ii)).

Both these algebras 'coincide' if G acts metrically freely and is amenable (Theorem 7).

(3) Consideration of Example 1 leads to certain Isomorphism Theorems *which (just as it was done in* [4]*, Corollary 12.17) establish the isomorphism between* essentially spatially different

operator algebras (thus wiping off the spaces where these operators act).
For example.
Let (Ω, μ_i), $i = 1,2$ *be two spaces with* $\sigma-$*additive* $\sigma-$*finite separable measures* μ_1 *and* μ_2 *absolutely continuous with respect to each other (thus* $L^\infty_{\mu_1}(\Omega, L(E)) \cong L^\infty_{\mu_2}(\Omega, L(E))$*) and let* $\{\alpha_g\}_{g\in G}$ *be a group of measurable mappings of* Ω *preserving the equivalence classes of* μ_1 *and* μ_2*. Consider the spaces* $D_i = L^p_{\mu_i}(\Omega, E)$, ß $= 1,2$*. Let* $A_i = L^\infty_{\mu_1}(\Omega, L(E)) \subset L(D_i)$ *be the algebras of multiplication operators defined by (3.1) and* T^i_g, $i = 1,2$ *be the isometries of* D_i *defined by (3.2) (with* $\mu = \mu_i$*) and* $B(A, T^i_g)$ *be the algebras generated by* A_i *and* $\{T^i_g\}_{g\in G}$*.*
The Isomorphism Theorem related to Example 1 is stated as follows:

If E is a separable Banach space and G is a countable amenable group acting metrically freely then $B(A_1, T^1_g)$ and $B(A_2, T^2_g)$ are isomorphic (as Banach algebras) and the isomorphism is established by the natural isomorphism

$$A_1 \cong A_2$$

and the mapping

$$T^1_g \to T^2_g.$$

References

[1] A. Lebedev, Banach algebras associated with automorphisms. Structural properties, *Spectral and evolutionary problems* (Proceedings of the Eleventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (September 18-29, 200, Sevastopol, Laspi)), Simferopol. 2001, V. 11, p. 39 - 50.
[2] G.K. Pederesen, *C^*-algebras and their automorphisms groups.* Academic Press, 1979.
[3] M.B. Landstad, Duality theory for covariant systems, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 1979, V. 248, p. 223-267.
[4] A. Antonevich, A. Lebedev, *Functional differential equations: I. C^*-theory.* Longman Scientific & Technical, 1994.
[5] N. Dunford, J.T Schwarts, *Linear operators. Part 1: General theory* Interscience, 1958.

On the spectral theory of operator measures

M. M. Malamud and S. M. Malamud
Donetsk State University,
Ukraine

1. Introduction Operator measures naturally arise in different questions of the spectral theory of selfadjoint operators (with spectrum of finite and infinite multiplicity), integral representations of operator-valued functions of Herglotz and Nevanlinna classes, in the theory of models for symmetric operators, etc.

Everywhere in the note H is a separable Hilbert space, $\Sigma(t) = \Sigma(t)^*$ is a nondecreasing strongly continuous from the left $(\Sigma(t-0) = \Sigma(t))$ operator-function on $\mathbb{R}$ with values in the $B(H)$. By a standart procedure (see [3], [4]) the function $\Sigma(t)$ generates an operator measure Σ, defined on the algebra $\mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ of bounded Borel subsets of $\mathbb{R}$.

The theory of orthogonal measures (resolutions of the identity) is constructed in details. In this note we consider several questions for the theory of nonorthogonal operator measures. The principal role in our considerations is played by the Berezanskii-Gelfand-Kostyuchenko theorem (BGK-theorem) on differentiating of an operator measure.

We obtain an inner description of the space $L_2(\Sigma, H)$. Эта This problem has been posed by M. G. Krein [9] and in the case dim$H < \infty$ solved by I. S. Kac [1], [7], [8].

Further, we construct the theory of Hellinger spectral types for a nonorthogonal operator measure. We establish the existence of subspaces realizing Hellinger spectral types and in particular the existence of vectors of maximal type.

Some fact are new even for orthogonal measures. We show how the spectral Hellinger types of an operator $A = A^*$ can be found via a cyclic subspace L. It turnes out that the set of the vectors of maximal type, lying in L is an everywhere dense G_δ of second category.

Moreover an analog of the Zhordan Theorem for Operator measures-charges is established. For the simplicity, we state all the results for measures of the line, though they remain valid for measures on $\mathbb{R}^n$.

2. The space $L_2(\Sigma, H)$. Recall, following [3], the definition of the space $L_2(\Sigma, H)$. Let $C_{00}(H)$ be the set of all strongly continuous vector-function with finite support, and with values on a finite-dimensional subspace of H, depending on f. Further, for $f, g \in C_{00}(H)$ we define $(f,g)_{L_2(\Sigma,H)} = \int_{\mathbb{R}}(d\Sigma(t)f(t), g(t))_H$. (the intergal is understood as the limit of the Riemann sums). Faktorizing $C_{00}(H)$ by the lineal $L_0 = \{f : \ (f,f)_{L_2(\Sigma,H)} = 0\}$ and completing it we arrive at the Hilbert space $L_2(\Sigma, H)$.

Let $\mathfrak{S}_2(H)$ be the ideal of Hilbert-Schmidt operators in H and let $T \in \mathfrak{S}_2(H)$, $\ker T = \ker T^* = \{0\}$. Let also ρ be a scalar measure, equivalent to Σ $(\Sigma \sim \rho)$.

By the BGK-Theorem the operator measure $\Sigma_T(\Delta) := T^*\Sigma(\Delta)T$ is differentiable in the weak sence with respect to ρ and its density $\Psi(t) := d\Sigma_T/d\rho (\geq 0)$ exists ρ-a.e. and takes values in $\mathfrak{S}_1(H)$.

Following [5] we can show that the derivative Ψ exists ρ-a.e. with respect to the $\mathfrak{S}_1(H)$-norm. (in [5] it is shown for an orthogonal measure $\Sigma = E$.)

Let $\widetilde{\mathfrak{H}}_t$ be the completion of $\mathcal{D}(T^{-1})$ with respect to the semi-norm

$$\|f\|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}_t} = (\Psi(t)T^{-1}f, T^{-1}f) = (\Psi(t)^{1/2}T^{-1}f, \Psi(t)^{1/2}T^{-1}f) \tag{1}$$

Denote by $\mathfrak{H}_t$ the corresponding quotient space.

Theorem 1. *Let $T \in \mathfrak{S}_2(H)$ with $\ker T = \ker T^* = \{0\}$ and ρ be a scalar measure equivalent $\Sigma(\rho \sim \Sigma)$. Then the space $L_2(\Sigma, H)$ isometrically coincides with the direct intergal of the spaces $\mathfrak{H}_t$ by measure $\rho(t)$:*

$$L_2(\Sigma, H) = \int_{\mathbb{R}} \oplus \mathfrak{H}_t d\rho(t) =: \mathfrak{H}. \tag{2}$$

Moreover, the identity

$$\|f\|^2_{L_2(\Sigma,H)} = \int_{\mathbb{R}} \|\Psi(t)^{1/2}T^{-1}f(t)\|^2 d\rho(t) \tag{3}$$

holds for the dense in $L_2(\Sigma, H)$ set of vector-functions $f(t)$ with values in $H_+ = \mathcal{D}(T^{-1})$.

In particular, the space $\mathfrak{H}$ does not depend on the choice of T.

If $\Sigma(t) = E(t)$ is a resolution of the identity in H and $f(t) = E(\Delta)h$ with $h \in H_+$ and $\Delta \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ then identity (3) takes the form

$$(E(\Delta)h, h) \ (= \|f(t)\|^2_{L_2(\Sigma,H)}) = \int_{\Delta} \|\Psi(t)^{1/2}T^{-1}h\|^2_H d\rho(t).$$

This identity is equivalent to the direct integral form of the BGK Theorem for the orthogonal measure E.

In the case $\dim H < \infty$ Theorem 1 is equivalent to the I. Kac theorem [8], though our proof is much simplier than all the known ones. Observe, that there is a principal difference between the cases $\dim H < \infty$ and $\dim H = \infty$.

While for $\dim H < \infty$ the space $L_2(\Sigma, H)$ turnes out to be a space of ρ-measurabel vector-functions with values in H, this fails to be true for $\dim H = \infty$ even in the simplest cases.

Let for example $\Sigma_0 \geq 0$ be a compact operator in H and $\Sigma(t) = 0$ for $t \leq t_0$ and $\Sigma(t) = \Sigma_0$ for $t > t_0$. Thena $L_2(\Sigma, H) = H\_$ with $H\_$ being the completion of H with respect to the negative norm $\|f\|_- = \|\Sigma_0^{1/2} f\|$.

3. The multiplicity function of a measure Σ.

Definition 1. Let $\rho \sim \Sigma$ and $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ an orthonormal basis of H. Let further $\sigma_{ij}(t) := (\Sigma(t)e_i, e_j)$, $\psi_{ij}(t) := d\sigma_{ij}(t)/d\rho$ and $\Psi_n(t) := (\psi_{ij}(t))_{i,j=1}^{n}$.

Define the multiplicity function N_Σ and the general multiplicity $m(\Sigma)$ of an operator measure Σ, by letting

$$N_\Sigma(t) := \sup_{n\geq 1} \operatorname{rank} \Psi_n(t), \qquad m(\Sigma) := vraisup N_\Sigma(t) (\operatorname{mod} \rho). \tag{4}$$

The multiplicity function N_Σ is defined ρ-a.e. and it can be shown, that it is independent of the choice of a basis $\{e_i\}_1^\infty$.

Definition 2. a) Let Σ_1 and Σ_2 be operator measures on $\mathbb{R}$.

A measure Σ_1 is said to be subordinated to Σ_2 ($\Sigma_1 \prec \Sigma_2$), if Σ_1 is absolutely continuous with respect to Σ_2, that is $\Sigma_1(\delta) = 0$ as soon as $\Sigma_2(\delta) = 0$.

b) We say, that Σ_1 is spectrally subordinated to Σ_2 ($\Sigma_1 \prec\prec \Sigma_2$), if

$$\Sigma_1 \prec \Sigma_2 \quad \text{and} \quad N_{\Sigma_1} \leq N_{\Sigma_2} \ (\operatorname{mod} \Sigma_2).$$

The measures Σ_1 and Σ_2 are said to be spectrally equivalent if $\Sigma_1 \prec\prec \Sigma_2$ and $\Sigma_2 \prec\prec \Sigma_1$.

Let A be a selfadjoint operator in H, $E(t) := E_A(t)$ its resolution of the identity and L a subspace of H. Denote H_L the minimal A-invariant subspace, containing L :

$$H_L = \operatorname{span}\{E(\delta)L : \delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

A subspace L is cyclic ($L \in \operatorname{Cyc}(A)$) if $H_L = H$. For $L = \{\lambda g : = \lambda \in \mathbb{C}\}$, we set $H_g := H_L$.

The following theorem is proved with the help of Theorem 1.

Theorem 2. *Let Σ be a generalized resolution of the identity in $\mathcal{H}$, that is $\Sigma(-\infty) = 0, \Sigma(+\infty) = I_{\mathcal{H}}$. Let A be a selfadjoint operator in H and $E(t)$ its resolution of the identity. Then:*

a) $N_E(t)$ from Definition 1 coincides with the classical multiplicity function of E in the sence of [4], [11]*;*

b) $\Sigma \prec\prec E$ if and only if there exist a Hilbert space $\widetilde{H} \supset \mathcal{H}$ and a unitary operator $U : H \to \widetilde{H}$ such that $\Sigma(t) = P_{\mathcal{H}} U E(t) U^* \lceil \mathcal{H}$ ($P_{\mathcal{H}}$ is the orthoprojection in $\widetilde{H}$ onto $\mathcal{H}$).

c) If $U^*\mathcal{H} \in \operatorname{Cyc} A$ then Σ is spectrally equivalent to E.

Conversely, if Σ is spectrally euivalent to E and $N_E(t)$ is E-a.e. finite (for example, if $m(E) < \infty$), then $U^*\mathcal{H} \in \operatorname{Cyc} A$.

In particular (for $H = \widetilde{H}$ and $U = I$) the measure Σ and its minimal orthogonal dilation are spectrally equivalent.

d) The resolution of the identity E_Q of the operator $Q : \ f \to xf$ in $L_2(\Sigma, H)$ is a minimal orthogonal dilation of Σ.

Theorem 2 complements the known Najmark theorema([1]), providing an answer to the question, which resolution of the identity can be a dilation of Σ.

Corollary 1. *The multiplication operators $Q_i : \ f \to xf$ in the spaces $L_2(\Sigma_i, H_i)$ $(i = 1, 2)$ are unitary equivalent iff Σ_1 and Σ_2 are spectrally equivalent.*

4. The elements of maximal type. Every operator measure Σ in H generates a family of σ-finite scalar measures μ_f ($\mu_f(\delta) := (\Sigma(\delta)f, f)$), defined on the σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. It is clear that $\mu_f \prec \Sigma$ for all $f \in H$. It is known ([1], [4]) that any orthogonal measure E in H posesses an element f of maximal type, that is such, that $\mu_f \sim E$.

It turnes out, that this fact also holds true for nonorthogonal measures. Moreover, the following stronger result is valid. We note, that this result is new even for orthogonal measures.

Theorem 3. *Let $\Omega_\Sigma := \{f \in H : \Sigma \sim \mu_f\}$ be the set of all vectors of maximal type for an operator measure Σ in H. Then:*
a) Ω_Σ is an everywhere dense G_δ-set of second category in H;
b) $\omega(\Omega_\Sigma) = 1$ for any Gaussian measure ω in H.

Corollary 2. *Let A be a selfadjoint operator in H H, $E(t)$ its resolution of the identity and $L \in \mathrm{Cyc}(A)$. Then:*
a) Ω_E is an everywhere dense G_δ-set of second category in L;
b) $\omega(\Omega_E \cap L) = 1$ for any Gaussian measure ω in L.

5. The Hellinger types. The class of all Borel measures, equivalent to a measure μ is called the type of the measure μ and is denoted by $[\mu]$ (see [4]. Let $A = A^*$, $E := E_A$, $g \in H$ and $\mu_g : \delta \to \mu_g(\delta) := (E(\delta)g, g)$, $\delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. The type $[g]$ of an element $[g]$ (with respect to E) is the type of the measure μ_g, $[g] = [\mu_g]$.

Consider an orthogonal decomposition of the form $H = \oplus_{i=1}^m H_{g_i}$, $(m \le \infty)$ If the types of the elements g_i do not increase, $[g_{i+1}] \prec [g_i]$, then their number $m(\le \infty)$ and types are defined uniquely and referred to as the Hellinger types of the measure E. They form (see [4]) a complete set of unitary invariants of the operator A.

Let $g_1 \in \Omega_E := \{g \in H : \ \mu_g \sim E\}$. Then $\mu_g \prec \mu_{g_1} := \mu$ for all $\in h$ and the type $[g]$ is uniquely determined by the support of the measure μ_g with respect to $\mu : \Gamma(g) := \{t \in \mathbb{R} : d\mu_g/d\mu > 0\}$. Therefore the Hellinger types are uniquely determined (mod E) by their supports $\Gamma_i(E) := \Gamma(g_i), i \le m$.

The sets $\Gamma_i(E)$ themselves are determined (see [4]) by the multiplicity function (and the measure μ): $\Gamma_i(E) = \{t \in \mathbb{R} : \ N_E(t) \ge i\}$.

The existence of the multiplicity function N_Σ of the form (3) allows us to introduce the i-th Hellinger type for a nonorthogonal measure Σ as the type of the scalar measure $d\mu_i := \chi_i d\rho$ with $\rho \sim \Sigma$ and χ_i being the indicator of the set

$$\Gamma_i(\Sigma) = \{t \in \mathbb{R} : \ N_\Sigma(t) \ge i\}, \qquad i \in \{1, \ldots, m(\Sigma)\}. \tag{5}$$

Let us call $\Gamma_i(\Sigma)$ the support of the i-th Hellinger type of the measure Σ. It is clear that $\Gamma_i(\Sigma) \supset \Gamma_{i+1}(\Sigma)$. Let i_0 be the number of Γ_i, equivalent to $\Gamma_1(\Sigma)$ (mod ρ), that is $\rho(\Gamma_1(\Sigma) \setminus \Gamma_i(\Sigma)) = 0$.

If $g_1 \in \Omega_\Sigma$ (by Theorem 3 $\Omega_\Sigma \ne \emptyset$,) then $\mu_g \prec \mu_{g_1} =: \mu \sim \Sigma$ with $\mu_g(\delta) := (\Sigma(\delta)g, g)$. Therefore the set $\Gamma(g) := \{t : \ d\mu_g/d\mu > 0\}$ is a (nontopological) support of the measure μ_g (i.e. $\mu_g(\mathbb{R} \setminus \Gamma(g)) = 0$).

It turnes out that, though $\Omega_\Sigma \ne \emptyset$, elements of “junior” types (that is vectors $g \in H \setminus \Omega_\Sigma$, such that $\Gamma(g) = \Gamma_i(\Sigma)$ for some $i > i_0$) may happen not to exist.

Example 2. Let for example

$$\Sigma(t) = \sum_{i<t} P_i$$

be a 2×2 discrete measure with jumps

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in the points $1, 2, 3$. It is easy to see that $N_\Sigma(1) = N_\Sigma(2) = 1$ and $N_\Sigma(3) = 2$. Therefore $\Gamma_1(\Sigma) = \{1, 2, 3\}, \Gamma_2(\Sigma) = \{3\}$. If $h = (h_1, h_2)$, then $\Gamma(h) = \{1, 2, 3\} = \Gamma_1(\Sigma)$ for $h_1 h_2 \ne 0$. Further, $\Gamma(h) = \{2, 3\}$, if $h_1 = 0$ and $\Gamma(h) = \{1, 3\}$ if $h_2 = 0$. Therefore $\Gamma(h) \ne \{3\} = \Gamma_2(\Sigma)$ for any h.

The wish to realize the “junior” Hellinger types with the help of some subspaces forced us to introduce the following

Definition 3. A subspace $L = L_k$ ($\dim L_k = k$) is called a k-th Hellinger subspace for an operator measure Σ in H if

$$\Gamma_i(P_L \Sigma \lceil L) = \Gamma_i(\Sigma) \quad \text{for all} \quad i \leq k,$$

where P_L is the orthoprojection onto L.

In particular, a vector of maximal type generates a one-dimensional (first) Hellinger subspace.

Theorem 4. *Under the hypothesis of Theorem 3 for each $h \in \Omega_\Sigma$ there exists a chain of Hellinger subspaces (Hellinger chain):*

$$\{\lambda h\} =: H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_k \subset \ldots \subset H_m, \quad \dim H_k = k. \tag{6}$$

Let $H_1 \subset \ldots \subset H_m$ be a chain of subspaces of the form (6) and $\{e_i\}_1^m$ a basis in в H_m, such that H_k =span$\{e_i\}_1^k$, $k \in \{1, \ldots, m\}$. Let us set $\sigma_{ij}(t) := (\Sigma(t)e_i, e_j)$, $\psi_{ij}(t) := d\sigma_{ij}(t)/d\rho$ and $\Psi_k(t) := (\psi_{ij}(t))_{i,j=1}^k$. Then the chain $H_1 \subset \ldots \subset H_m$ is a Hellinger chain iff

$$\Gamma_k(\Sigma) = \{t \in \mathbb{R} : \ \det \Psi_k(t) \neq 0\} \ (\operatorname{mod} \Sigma), \quad k \in \{1, \ldots, m\}. \tag{7}$$

Thus, Theorem 4 amounts to saying that there exists an orthonormal system $\{e_i\}_1^m$ in H, such that the k-th Hellinger type is realized by the measure $(\wedge^k \Psi(t)\varphi_k, \varphi_k)d\mu$, where $\wedge^k \Psi(t)$ is the k-th exterior power of $\Psi(t) := d\Sigma_T/d\mu$, and $\varphi_k := e_1 \wedge \wedge e_k$ is a k-vector, $\varphi_k \in \wedge^k(H)$.

Corollary 3. *Let A be a selfadjoint operator in H and $E(t)$ its resolution of the identity, $L \in \operatorname{Cyc}(A)$ and $h \in \Omega_E \cap L$.. Then there exists a chain of Hellinger subspaces in L of the form (6), $H_k \in L$, $k \in \{1, \ldots, m\}$.*

If the multiplicity $m = m(E)$ of the measure E is finite, then $H_m \in \operatorname{Cyc} A$.

If the vectors $\{e_i\}_{i=1}^m$ are spectrally orthogonal with respect to E and H_k :=span$\{e_i\}_1^k$, then the chain $H_1 \subset \ldots \subset H_m$ is a Hellinger chain if and only if $\Gamma(e_i) = \Gamma_i(E)$, $i \leq m$.

If $L \in \operatorname{Cyc}(A)$, a system of spectrally orthogonal vectors, realizing Helliger types does not exist in general. But, according to Corollary 3 these types are realized by means of subspaces $H_k \subset L$ or, equivalently, the k-vectors $\varphi_k = e_1 \wedge \ldots \wedge e_k \in \wedge^k(L)$.

6. An analog of the Zhordan Theorem. The results of this section have obtained by the second author only.

Definition 4. An operator-function $\Sigma = \Sigma^* : \ \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to B(H)$ (operator measure-charge) is of weakly bounded variation on $\mathbb{R}$, if $\mu_{f,g} : \ \delta \to (\Sigma(\delta)f, g)$ is a finite charge on the Borel σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ for any $f, g \in H$.

Theorem 5. *An operator measure-charge Σ of weakly bounded variation on $\mathbb{R}$ can be be expressed as the difference of two finite nonnegative operator measures $\Sigma = \Sigma_1 - \Sigma_2$ if and only if*

$$\operatorname{Var}_{\mathbb{R}} \|T^*\Sigma(\Delta)T\|_1 := \sup_\pi \sum_i \|T^*\Sigma(\Delta_i)T\|_1 =: c(T) < \infty$$

for any $T \in \mathfrak{S}_2(H)$, where $\|\cdot\|_1$ is the trace norm and the supremum is taken over all partitions $\pi = \{t_j\}_{-\infty}^\infty$ of $\mathbb{R}$, $\Delta_i = [t_i, t_{i+1})$.

The proof is based on some facts from the theory of C^*-algebras and completely bounded maps [12].

Let $x_i^{(n)} = x_i^{(n)*}$ be $2^n \times 2^n$-Clifford matrices, that is

$$x_i^{(n)} x_j^{(n)} + x_j^{(n)} x_i^{(n)} = 2\delta_{ij} I, \quad i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Define the operator measure-charge

$$\Sigma(\Delta) = \oplus_1^\infty \Sigma_n(\Delta), \qquad \Sigma_n(\Delta) = 1/\sqrt{2n} \sum_{1/k \in \Delta, \ k \leq n} x_k^{(n)}.$$

Clearly, $\Sigma(\Delta)$ is a discrete measure with the support $\{0\} \cup \{1/k\}_{k=1}^{\infty}$. It is of weakly bounded variation, but can not be expressed as the difference of two nonnegative operator measures.

The idea of use of the Clifford matrices is taken from [10], where it was used in a different context.

References

[1] N. I. Achiezer and I. M. Glazman, *The theory of linear operators in Hilbert space*, M. Nauka, 1966, p. 544 (Russian).
[2] Yu. M. Berezanskii, Dokl. Acad. Sci. USSR, 1956, **108, No. 3**, pp. 379–382 (Russian).
[3] Yu. M. Berezanskii, *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*, K. Naukova Dumka, 1965, p.798 (Russian).
[4] M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*, L. Leningradski Univ., 1980, p. 264 (Russian).
[5] M. Sh. Birman and C. B. Entina, Izv. AN. USSR 1967, **31**, pp. 401–430 (Russian).
[6] I. M. Gelfand and A. G. Kostyuchenko, Dokl. Acad. Sci USSR 1955, **103, No. 3**, pp. 349-352 (Russian).
[7] N. Dunford and J. T. Schwarz, *Linear operators. Part II. Spectral Theory. Selfadjoint operators in Hilbert space*, New York, Interscience Publishers, 1963, p. 1064.
[8] I. S. Kac, Zap. Khark. Mat. Soc. 1950 **(4), 22**, pp. 95-113 (Russian).
[9] M. G. Krein, Trudy Math. Inst. AN USSR 1948, **10**, pp. 83-106 (Russian).
[10] V. Paulsen, J. Funct. Anal. 1992, **109**, pp. 113-129.
[11] A.I. Plesner, *Spectral Theory of operators*, M. Nauka, 1965, p. 624.
[12] G. Pisier, *Similarity problems and completely bounded maps*, Berlin, Springer-Verlag, 2001, p. 198.

M.M. Malamud, S.M. Malamud, Math. Dept., Donetsk National University, Universitetskaya Str. 24, Donetsk 83055, Ukraine

E-mail: m3@rambler.ru

ON NORMAL OSCILLATIONS OF A VISCOUS STRATIFIED FLUID

D. O. Tsvetkov
Taurida National V. Vernadsky University,
Ukraine

The spectrum of normal oscillations, basis properties of eigenfunctions and other questions were studied.

Let a rigid immovable vessel be partially filled with a heavy viscous incompressible stratified fluid (with coefficient of dynamical viscosity $\mu > 0$). We assume that in an equilibrium state the density of a fluid is a function of the vertical variable x_3, i.e., $\rho_0 = \rho_0(x_3)$. In this case the gravitational field with constant acceleration $\vec{g} = -g\vec{e}_3$ acts on the fluid, here $g > 0$ and $\vec{e}_3$ is a unit vector of the vertical axis Ox_3, which is directed opposite to $\vec{g}$. Let Ω be a domain filled with a fluid in equilibrium state, S be a rigid wall of the vessel adherent to the fluid, Γ be a free surface of a fluid. We take the origin O of Cartesian coordinate system $Ox_1x_2x_3$ on Γ. Then the equation of the surface Γ has the form $x_3 = 0$.

Let us consider the basic case of stable stratification of the fluid:

$$\begin{gathered} 0 < N^2_{min} \le N^2(x_3) \le N^2_{max} = N_0^2 < \infty, \\ N^2(x_3) = -\frac{g\rho_0'(x_3)}{\rho_0(x_3)}, \quad \rho_0(0) > 0, \end{gathered} \tag{1}$$

where $N^2(x_3)$ is square frequency of buoyancy.

In equilibrium state the pressure in a fluid is distributed under the law:

$$p_0 = p_0(x_3) = p_0(0) - g\int\limits_0^{x_3} \rho_0(\tau)d\tau. \tag{2}$$

Consider small motions of a fluid near equilibrium state. We denote by $p = p(x,t)$, where $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, the difference of a pressure field from equilibrium field (2), and by $\rho = \rho(x,t)$ the difference of density field from initial field $\rho_0(x_3)$. We denote also the small velocity field in a fluid by $\vec{u}(x,t)$ and a vertical displacement of a free surface from equilibrium one by $\zeta(\hat{x},t)$, $\hat{x} = (x_1,x_2) \in \Gamma$. In the sequel, we suppose the unknown function $\vec{u}(x,t)$, $p(x,t)$, $\rho(x,t)$ and $\zeta(\hat{x},t)$ are infinitesimal of the first order.

Consider linearized Navier-Stokes equations which describe small motion of a viscous stratified fluid, and also boundary conditions and initial data. The initial boundary value problem has the form (see, for instance, [1], [3]):

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3)(-\nabla p - g\rho\vec{e}_3 + \mu\Delta\vec{u}) + \vec{f}(x,t) \quad (\,\text{in}\,\Omega\,), \\
\operatorname{div}\vec{u} = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\rho_0\cdot\vec{u} = 0 \quad (\,\text{in}\,\Omega\,), \\
\vec{u} = \vec{0} \quad (\,\text{on}\,S\,), \quad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = u_n = \vec{u}\cdot\vec{n} \quad (\,\text{on}\,\Gamma\,), \quad \int\limits_\Gamma \zeta d\zeta = 0, \\
\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i}\right) = 0 \quad (\,i=1,2;\,\text{on}\,\Gamma\,), \quad -p + 2\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -g\rho_0(0)\zeta \quad (\,\text{on}\,\Gamma\,), \\
\vec{u}(x,0) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(x,0) = \rho^0(x) \quad (\,x\in\Omega\,), \quad \zeta(\hat{x},0) = \zeta_0(\hat{x}) \quad (\,\hat{x}\in\Gamma\,).
\end{gathered} \tag{3}$$

Fist let us introduce the following functional spaces.

a) Denote by $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ the space of vector-functions with inner product

$$(\vec{u},\vec{v}) = \int\limits_\Omega \rho_0(x_3)\vec{u}(x)\overline{\vec{v}(x)}d\Omega.$$

For this space the orthogonal decomposition

$$\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0)$$

holds ([3]). Here

$$\begin{aligned}
\vec{J}_0(\Omega,\rho_0) &= \{\vec{u}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) : \operatorname{div}\vec{u} = 0\,(\text{in}\,\Omega), \quad u_n := \vec{u}\cdot\vec{n} = 0\,(\text{on}\,\partial\Omega)\}, \\
\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho_0) &= \{\,\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) :\ \vec{v} = \rho_0^{-1}\nabla p, \quad \vec{v}\cdot\vec{n} = 0\,(\text{on}\,S), \\
&\qquad\qquad \nabla\cdot\vec{v} = 0\,(\text{in}\,\Omega), \int\limits_\Gamma p d\Gamma = 0\,\}, \\
\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega,\rho_0) &= \{\vec{w}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0) :\ \vec{w} = \rho_0^{-1}\nabla\varphi, \quad \varphi = 0(\text{on}\,\Gamma)\}.
\end{aligned}$$

b) Denote by $L_2(\Gamma)$ the space of function with inner product

$$(\zeta,\eta)_0 = \int\limits_\Gamma \zeta(\hat{x})\overline{\eta(\hat{x})}d\Gamma.$$

Denote by $\Im_2(\Omega)$ the space of scalar-function with inner product

$$(\varphi,\psi) = g^2\int\limits_\Omega [\rho_0(x_3)N^2(x_3)]^{-1}\varphi\overline{\psi}d\Omega.$$

Further, consider auxiliary boundary value problems and corresponding operators.
Problem 1. Solve the following boundary value problem in unknown function $p_1(x)$:

$$\nabla \cdot (\rho_0^{-1} \cdot \nabla p_1) = 0 \quad (\text{in}\,\Omega\,), \quad \rho_0^{-1}(x_3) \cdot \nabla p_1 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{on}\, S\,),$$

$$\rho_0^{-1}(0) p_1 = \psi \quad (\text{on}\,\Gamma\,), \quad \int\limits_\Gamma \psi d\Gamma = 0.$$

Let $p_1(x)$ be a solution of Problem 1 for $\psi \in H_\Gamma^{\frac{1}{2}}$ ($H_\Gamma^{\frac{1}{2}} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \cap H_0$; $H_0 = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$ and $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ is the space of Sobolev-Slobodetskij [1]). Then $\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p_1 \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ and $\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p_1 = G\psi$, where $G:\ H_\Gamma^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ is linear bounded operator.

Problem 2. Solve the following boundary value problem in unknown function $\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ and $\rho_0^{-1}\nabla p_2 \in \vec{G}(\Omega, \rho_0)$:

$$\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p_2 - P_{0,S}(\rho_0^{-1}\mu\Delta\vec{u}) = \vec{f}_1, \quad \text{div}\vec{u} = 0\,(\text{on}\,\Omega\,),$$

$$\vec{u} = \vec{0}\,(\text{on}\, S\,), \quad \mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i}) = 0\,(\,i = 1, 2, \text{on}\,\Gamma\,),$$

$$-p_2 + 2\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0\,(\text{on}\,\Gamma\,),$$

where $P_{0,S}$ is orthoprojector on the subspace $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) := \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$.

The solution of this problem can be written in the form $\vec{u} = \mu^{-1}A^{-1}\vec{f}$, where the operator A is self-adjoint and positive definite (strictly positive) operator, and has the following properties:
1. $D(A) \subset D(A^{\frac{1}{2}}) = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega, \rho_0) \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$, $\overline{D(A)} = \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$.
2. Operator A has a discrete spectrum $\{\lambda_n(A)\}_{n=1}^\infty$ with accommodation point $+\infty$.
3. Inverse operator A^{-1} is compact and positive and acts in the space $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$.

Using the operators defined above and auxiliary boundary value problems, we can formulate the problem (3) as Cauchy problem for differential operator equation in Hilbert space:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \zeta \\ \rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu A & gG & C \\ -\gamma_n & 0 & 0 \\ -C^* & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \zeta \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_{0,S} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$(\vec{u}(0), \zeta(0), \rho(0))^t = (\vec{u}^0, \zeta^0, \rho^0)^t, \tag{5}$$

$$(\vec{u}, \zeta, \rho)^t \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) \oplus H_0 \oplus \Im_2(\Omega) =: \mathcal{H},$$

where $C^*u := -\nabla\rho_0 \cdot \vec{u}$, $C\rho := P_{0,S}(\rho_0^{-1}(x_3)g\rho\vec{e}_3)$ and $\|C\| = \|C^*\| \le N_0$, γ_n is trace operator of normal velocity component: $\gamma_n\vec{u} := u_n = \vec{u} \cdot \vec{n}|_\Gamma$ ($\vec{u} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega, \rho_0)$).

Lemma 1. *a) The operator γ_n can be expanded to operator $\tilde{\gamma_n}$ with the domain $D(\tilde{\gamma_n}) = \{\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) :\ \tilde{\gamma_n}\vec{v} \in L_{2,\Gamma}\}$ and in this case operator $\tilde{\gamma_n}$ is operator adjoint to the operator G from problem1: $\tilde{\gamma_n} = G^*$. b) For operators A and $\tilde{\gamma_n}$ the following inclusions hold:*

$$D(A) \subset D(A^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega, \rho_0) \subset D(\tilde{\gamma_n}).$$

We connect with the problem (4) the operator matrix

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A & G & C \\ -G^* & 0 & 0 \\ -C^* & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

which has dense in $\mathcal{H}$ domain $D(\mathcal{A}_0) = D(A) \oplus D(G) \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega)$. It turns out that the operator $\mathcal{A}_0$ is not closed and therefore is not maximal accretive one.

Put $y(t) := (\vec{u}, \zeta, \rho)^t = e^{at}(\vec{v}, \eta, \sigma)^t$. Then we have the following Cauchy problem from (4)

$$dy/dt + \mathcal{A}_a y = f(t), \quad y(0) = y^0, \tag{6}$$

where $\mathcal{A}_a = \mathcal{A}_0 + a\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ is the identity operator in $\mathcal{H}$.

Theorem 1. *The closure $\mathcal{A} := \overline{\mathcal{A}_a}$ of the operator $\mathcal{A}_a$ is a maximal accretive operator. In addition*

$$D(\mathcal{A}) = \{(\vec{v}, \eta, \sigma)^t \in \mathcal{H} : \ \vec{v} \in D(A_a^{\frac{1}{2}}), \, \vec{v} + A_a^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \eta \in D(A_a)\}, \tag{7}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_a^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & Q_1^* & Q_2^* \\ -Q_1 & aI & 0 \\ -Q_2 & 0 & aI \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_a^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \tag{8}$$

where $A_a = A + aI$, $Q_1 := G^* A_a^{-\frac{1}{2}}$, $Q_2 := C^* A_a^{-\frac{1}{2}}$.

Consider the homogeneous problem

$$dy/dt + \mathcal{A}y = 0, \tag{9}$$

and its solution of the form

$$y(t) = y \cdot \exp(-\lambda t), \quad y \in \mathcal{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

We shall call solution (10) by normal oscillations. Substituting function (10) into (9), we obtain the spectral problem

$$\mathcal{A}y = \lambda y, \quad y \in D(\mathcal{A}). \tag{11}$$

Here $\mathcal{A}$ is the matrix operator defined by formulae (7), (8). We shall call $\mathcal{A}$ the operator associated with initial boundary value problem (3).

The operator $\mathcal{A}$ has the following properties.

Lemma 2. *The operator $\mathcal{A}$ has bounded inverse one $\mathcal{A}^{-1}$ such that $\|\mathcal{A}^{-1}\| \leq a^{-1}$. The spectrum $\sigma(\mathcal{A})$ of the operator $\mathcal{A}$ belongs to the domain*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \ Re\lambda \geq a\}. \tag{12}$$

In this the point $\lambda = a$ is infinite multiple eigenvalue and some set of equilibrium states of viscous stratified fluid corresponds to it:

$$\vec{v} = 0, \quad \eta = 0, \quad \sigma = \sigma(x_3) \in L_2(x_{3,min}, x_{3,max}).$$

The further investigation is based on the theory of linear operators that are self-adjoint in Hilbert space with indefinite metric [2]. Let us introduce the following notations: $\mathfrak{K}_+ := \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$, $\mathfrak{K}_- := H_0 \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega)$.

Lemma 3. *1. The operator matrix $\mathcal{A}$ and its inverse $\mathcal{A}^{-1}$ are $\mathcal{J}$-selfadjoint operators with $\mathcal{J} := diag(I_{\mathfrak{K}_+}, I_{\mathfrak{K}_-})$, where $I_{\mathfrak{K}_+}$ and $I_{\mathfrak{K}_-}$ are identity operators in $\mathfrak{K}_+$ and $\mathfrak{K}_-$, respectively. Spectrum $\sigma(\mathcal{A})$ of the operator $\mathcal{A}$ is symmetrical with respect to the real axis and is located in domain* (12)*.*
2. Essential (limiting) spectrum $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ of the operator $\mathcal{A}$ coincides with the set $\{a\} \cup \{\infty\}$.
3. Eigenelements corresponding to infinite multiple eigenvalue $\lambda = a$ are negative and has no associate elements.

Lemma 4. *Problem* (11) *has countable set of (finite-multiple) positive eigenvalues $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty$ with a unique accumulation point $\lambda = +\infty$ and eigenelements $\{y_k^+\}_{k=1}^\infty$, $y_k^+ = (\vec{v}_k^+, \eta_k^+, \sigma_k^+)^t \in \mathcal{H}$, such that the set of projections $\{\vec{v}_k^+\}_{k=1}^\infty$ onto $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ form Riesz basis with a finite defect in the space $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$. This Riesz basis is a p_0-basis (with a finite defect) in $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ for $p_0 > 3/4$.*

Lemma 5. *Problem* (11) *has countable set (finite multiple) positive eigenvalues* $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_k^- > a > 0$, *with unique accumulation point* $\lambda = a$ *and eigenelements* $\{y_k^-\}_{k=1}^{\infty}$, $y_k^- = (\vec{v}_k^-, \eta_k^-, \sigma_k^-)^t \in \mathcal{H}$, *such that the set of projections* $(\eta_k^-, \sigma_k^-)^t$ *onto* $H_0 \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega)$ *form Riesz basis with a finite defect in the space* $H_0 \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega)$. *This Riesz basis is a* p_0*-basis (with a finite defect) in* $H_0 \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega)$ *for* $p_0 > 3/4$.

We denote by $F_0(\mathcal{A})$ the closure of linear hull of eigenelements of the operator $\mathcal{A}$ corresponding to the finite multiple eigenvalues, and by $F(\mathcal{A})$ we denote the closure of linear hull of root elements, respectively.

As a corollary of Lemma 4 and Lemma 5, we have the following result.

Theorem 2. *For the operator* $\mathcal{A}$ *from problem* (11), *the following assertions hold:*

1. $dim(F(\mathcal{A})/F_0(\mathcal{A})) < \infty$.

2. $\mathcal{H} = F(\mathcal{A})$, *i.e., the closure of linear hull of root elements of the operator* $\mathcal{A}$ *coincides with the whole* $\mathcal{H} = \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) \oplus H_0 \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega)$.

3. $\mathcal{H} = F_0(\mathcal{A})$ *iff there are no adjoint elements corresponding to the nonreal eigenvalue* λ *of the operator* $\mathcal{A}$, *i.e.,* $\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) = ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})$.

4. If $\mathcal{H} = F_0(\mathcal{A})$ *(respectively* $\mathcal{H} = F(\mathcal{A})$*), then there exists nearly J-orthonormal Riesz basis formed by eigenelements (respectively root elements) of the operator* $\mathcal{A}$.

5. If $F_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$, *then J-orthonormal basis in the space* $\mathcal{H}$ *formed by eigenelements of the operator* $\mathcal{A}$ *exists iff* $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}$.

6. Above-mentioned basises can be chosen as p-basises for $p > 3/2$.

It can be proved that the solutions of spectral problem (11) are directly connected with the solutions of the problem in the form a some operator pencil.

Theorem 3. *Let* λ_0 *be a finite multiple eigenvalue of the operator* $\mathcal{A}$ *and elements* $y_0, y_1, \ldots, y_k$ *be the chain of eigenelement and associated to it,* $y_j = (\vec{v}_j, \eta_j, \sigma_j)^t$, $j = \overline{0, k}$. *Then* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$, $\varphi_j = A^{\frac{1}{2}}\vec{v}_j$, *form the chain of eigenelement and associated to it (in M.V. Keldysh's sense) for the operator pencil:*

$$L(\lambda) = I - \lambda A^{-1} - \lambda^{-1}(B + E), \tag{13}$$

$$B := \tilde{Q}_1^*\tilde{Q}_1 \in \mathfrak{S}_\infty, \quad E := \tilde{Q}_2^*\tilde{Q}_2 \in \mathfrak{S}_\infty, \quad \tilde{Q}_1 := G^*A^{-\frac{1}{2}}, \quad \tilde{Q}_2 := C^*A^{-\frac{1}{2}},$$

and these elements correspond to eigenvalue $\lambda = \lambda_0 - a$.

Inversely, to each chain $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ *of eigen- and associated to it elements of the pencil* (13) *and eigenvalue* $\lambda_0 - a$ *there corresponds the chain of root elements* $y_1, y_2, \ldots, y_k$ *of the operator* $\mathcal{A}$ *and eigenvalue* λ_0, *where*

$$\begin{aligned} y_j &= (\vec{v}_j, \eta_j, \sigma_j)^t = \\ &= (A^{-\frac{1}{2}}\varphi_j, \tilde{Q}_1 \sum_{i=0}^{j} (a - \lambda_0)^{i-j-1}\varphi_i, \tilde{Q}_2 \sum_{i=0}^{j} (a - \lambda_0)^{i-j-1}\varphi_i)^t, \; j = \overline{0, k}. \end{aligned} \tag{14}$$

As a corollary of Theorem 2 and Theorem 3 we have the following assertion.

Theorem 4. *For the operator* $\mathcal{A}$ *the following properties are valid.*

1. Nonreal eigenvalues of the operator $\mathcal{A}$ *and those real ones to which there correspond associated elements are located in the segment*

$$M := \{\lambda \in \mathbb{C} : \; Re\lambda - a \geq \mu(2\|A^{-1}\|)^{-1}, \quad |\lambda - a| \leq 2\mu^{-1}\|gB + E\|\}$$

of complex domain $\mathbb{C}$. *To this finite set of eigenvalues there correspond neutral eigenelements of the operator* $\mathcal{A}$. *Conversely, to neutral eigenelements of the operator* $\mathcal{A}$ *there correspond eigenvalues that are located in the segment* M *and for real eigenvalues the operator* $\mathcal{A}$ *has associated elements.*

2. Eigenvalues λ_k^+ *corresponding to the positive eigenelements from nonnegative invariant subspace* $\mathfrak{L}_+$ *are located on interval* $(a + 2\mu^{-1}\|gB + E\|, \infty)$*. Respectively, eigenvalues* λ_k^- *corresponding to negative eigenelements from nonpositive invariant subspace* $\mathfrak{L}_-$ *are located on the interval* $[a, a + \mu(2\|A^{-1}\|)^{-1})$*.*
3. If condition $4\|A^{-1}\| \cdot \|gB + E\| < \mu^2$ *holds, then the operator* $\mathcal{A}$ *has no nonreal eigenvalues, neutral eigenelements and also associated elements. Here the union of normalized eigenelements* $\{y_k^+\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{L}_+$ *and* $\{y_k^-\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{L}_-$ *form* $\mathcal{J}$*-orthonormal basis in the space* $\mathcal{H}$*.*
4. For eigenvalues λ_k^+ *and* λ_k^- *two-side estimates*

$$\mu\lambda_k(A) - 2\mu^{-1}\|gB + E\| \leq \lambda_k^+ - a \leq \mu\lambda_k(A), \quad k \in \mathbb{N},$$
$$\mu^{-1}\lambda_k(gB + E) \leq \lambda_k^- - a \leq \mu^{-1}\lambda_k(gB + E)/[1 - 2\mu^{-2}\lambda_k(gB + E)\|A^{-1}\|],$$

and asymptotic formulas

$$\lambda_k^+ = \mu\lambda_k(A) + O(1) = \mu c_a^{-\frac{2}{3}} k^{\frac{2}{3}}[1 + o(1)] \quad c_a = (3\pi^2)^{-1} \int_\Omega [\rho_0(x_3)]^{\frac{3}{2}}\, d\Omega,$$
$$\lambda_k^- = a + \mu^{-1}\lambda_k(gB + E)[1 + o(1)] \quad (k \to \infty).$$

hold.

Author is thankful to prof. Kopachevsky N. D. for statement of the problem and useful discussions.

References

[1] N. D. Kopachevsky, S. G. Krein, Ngo Zuy Can *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: Evolutsionnye i spektral'nye zadachi.*– M.:Nauka, 1989, – 416 s. (Russian)
[2] T. Ya. Azizov, I.S. Iohvidov *Osnovi teorii linejnih operatorov v prostranstvah s indefinitnoy metrikoy.*– M.:Nauka, 1986. – 352 s.(Russian)
[3] N. D. Kopachevsky, A. N. Temnov *Kolebanya stratificirovannoy gidkosti v bassejne proizvolnoy formi* .— G. Vichisl. matem. i matem. phizika, 1986, T. 26, №5, 734 — 755 s. (Russian)

Mathematical Analysis Chair, Taurida National V. Vernadsky University, Yaltinskaya, 4, Simferopol 95007, Crimea, Ukraine.

Section 2

EVOLUTION AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Subsection 2.1

Differential-Operator and Evolution Equations

Задача Коши для уравнения с существенно бесконечномерным эллиптическим оператором, зависящим от времени

А. Ю. Мальцев
Национальный Технический Университет Украины 'КПИ'

1. Здесь мы рассмотрим некоторые основные определения и факты, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Пусть H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство, $L(H)$ - пространство ограниченных линейных операторов в H. Множество $M \subseteq L(H)$ называется почти компактным, если $\forall \varepsilon > 0$ существует компактное множество $K \subseteq L(H)$, и числа $n \in \mathbf{N}$, $c > 0$, такие, что $K + Q_{n,c}$ является ε–сетью для M ($Q_{n,c}$–множество всех операторов ранг которых $\leq n$, а норма $\leq c$). В работе [1] введена алгебра функций $\mathfrak{A}_0 \in C^2(H)$. В $\mathfrak{A}_0$ входят те и только те финитные функции из $C^2(H)$ для которых: 1.) $\forall R > 0 \quad \exists$ почти компактное множество $M \subseteq L(H)$ такое, что $u''(x) \in M, \forall x \in B_R = \{x \mid \|x\| \leq R\}$; 2.)$u''(\cdot)$ равномерно непрерывна на ограниченных подмножествах в H. Все рассмотрения в этой статье мы будем проводить в банаховом пространстве X функций, которое является замыканием $\mathfrak{A}_0$ в $C^2(H)$ по $sup\,|\cdot|$ норме.

Обозначим через $B_C(H)$ пространство самосопряжённых ограниченных операторов в пространстве H. В соответствии с терминологией [2] назовём функционал j в пространстве $B_C(H)$ существенно бесконечномерным, если в его ядро входят все операторы конечного ранга. Рассмотрим функцию $j(\cdot)$, где $t \in [0, T] = \triangle$. $\forall t_0 \in \triangle : j(t_0)$ – положительный существенно бесконечномерный линейный функционал в пространстве $B_C(H)$. Будем здесь считать, что $j(t)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $\triangle$. В работе [2] была построена C_0 - полугруппа операторов $T^j(t)$ в пространстве X (j – положительный существенно бесконечномерный). Результатом действия оператора $T^j(t)$ на функцию $\varphi \in \mathfrak{A}_0$ является решение задачи Коши $\frac{du(t,x)}{dt} = \frac{1}{2}j(u''_{xx}(t,x))$ в точке t с начальным условием $u(0,x) = \varphi$. В [1] доказано, что $(T^j(t)\varphi)(x) = \lim_{n\to\infty}\int_H \varphi(x-y)\mu_{tA_n}(dy)$, где A_n – положительные операторы конечного ранга такие, что $\|A_n\| \to 0$; $\forall n \in \mathbf{N}\; Sp(A_n) = \|j\|$, а $\mu_A(dx)$ — гауссова мера с корреляционным оператором A. В дальнейшем мы будем пользоваться свойствами полугруппы $T^j(t)$, полученными в работе [2] без дополнительных ссылок.

В работе [4] были введены и изучены векторные поля Z класса $\mathfrak{A}_0$. Векторное поле Z на H принадлежит классу $\mathfrak{A}_0$, если: 1.) Z имеет ограниченный носитель; 2.)$\{Z'(x) \mid x \in H\}$–почти компактно; 3.)$\{(\xi, Z''(x)) = (\xi, Z)''(x) \mid \|\xi\| \leq 1; x \in H\}$–почти компактно; 4.)$Z$ дважды непрерывно дифференцируемо на H, причём второй ковариантный дифференциал Z–равномерно непрерывная на H операторнозначная функция. В дальнейшем мы будем пользоваться свойствами векторных полей класса $\mathfrak{A}_0$, полученными в работе [4] без дополнительных ссылок.

Пусть $q = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_n = T\}$ – некоторое разбиение отрезка $\triangle$. Пусть $t, s \in \triangle; s \leq t$, причём $t_{j-1} < s \leq t_j$, $t_m \leq t < t_{m+1}$. Если $U(t,s)$–некоторое семейство операторов в пространстве X, то $U_q(t,s) \triangleq U(t,t_m)U(t_m,t_{m-1})\ldots U(t_{j+1},t_j)U(t_j,s)$.

2. А сейчас мы рассмотрим задачу Коши для уравнения $\frac{du(t,x)}{dt} = \frac{1}{2}j(t)(u''_{xx}(t,x))$, где t $\in [0,T] = \triangle$. Будем полагать, что начальное условие $\varphi \in \mathfrak{A}_0$. $U(t,s) \triangleq T^{j(s)}(t-s)$. Обозначим через $\widetilde{U}(t,\tau)$ решение задачи Коши в точке t с начальным условием $\varphi \in \mathfrak{A}_0$ в точке τ.

Теорема 1. *Решение рассматритваемой задачи Коши даётся следующей формулой:*

$$\widetilde{U}(t,\tau)\varphi = \lim_q U_q(t,\tau)\varphi.$$

Доказательство. Для доказательства существования предела воспользуемся теоремой 2.1 из гл.6 [3]. В соответствии с этой теоремой достаточно доказать равномерную липшицевость семейства $U_q(t,s)$, а так же проверить выполнение оценки $\|U(t,s)\varphi - U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi\| \le K(\varphi)(t-\theta)(\theta-s)^{\alpha} \quad (0<\alpha\le 1)$, для всех φ из некторого всюду плотного в X и инвариантного относительно семейства $U(t,s)$ множества D; причём функция $K(\varphi)$ должна удовлетворять условию $\sup_{q,t,s} K(U_q(t,s)(\varphi)) = k(\varphi) < \infty \quad (\varphi \in D)$. В качестве множества D в нашем случае будет выступать $\mathfrak{A}_0$. Равномерная липшицевость семейства $U_q(t,s)$ немедленно вытекает из того, что $\|U_q(t,s)\| \le 1; \forall t,s \in \triangle, \forall q \in \{q\}$. Теперь остаётся оценить норму разности $U(t,s)\varphi - U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi, \varphi \in \mathfrak{A}_0$.

$$\begin{aligned}\| U(t,s)\varphi - U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi \| &= \| T^{j(s)}(t-s)\varphi - T^{j(\theta)}(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)\varphi \| = \\ &= \| T^{j(s)}(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)\varphi - T^{j(\theta)}(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)\varphi \| = \\ &= \| T^{j(s)}(t-\theta)\psi - T^{j(\theta)}(t-\theta)\psi \| . \end{aligned} \tag{1}$$

Мы обозначили $\psi = T^{j(s)}(\theta-s)\varphi$. $\psi \in \mathfrak{A}_0$ согласно свойствам полугруппы $T^{j(s)}(t)$. Для оценки $\| T^{j(s)}(t-\theta)\psi - T^{j(\theta)}(t-\theta)\psi \|$, используем следующую формулу:

$$T^{j_2}(t)\psi - T^{j_1}(t)\psi = t\int_0^1 T^{j_1+\alpha(j_2-j_1)}(t)(L_2-L_1)\psi d\alpha, \tag{2}$$

для любых двух положительных существенно бесконечномерных функционалов j_1, j_2. Операторы $L_1 = L^{j_1}$ и $L_2 = L^{j_2}$ таковы, что $\overline{L_1}$ - генератор полугруппы $T^{j_1}(t)$, а $\overline{L_2}$ - генератор полугруппы $T^{j_2}(t)$. Из этой формулы вытекает, что

$$\begin{aligned}&\|T^{j(\theta)}(t-\theta)\psi - T^{j(s)}(t-\theta)\psi\| \le \\ \le (t-\theta)\int_0^1 &\|T^{j(s)+\alpha(j(\theta)-j(s))}(t-\theta)(L^{j(\theta)} - L^{j(s)})\psi\| d\alpha \le (t-\theta)\|(L^{j(\theta)} - L^{j(s)})\psi\|.\end{aligned} \tag{3}$$

Зафиксируем теперь $x \in H$.

$$| (L^{j(\theta)} - L^{j(s)})\psi(x) | = | (j(\theta)-j(s))(\psi^{''}(x)) | \le \|j(\theta)-j(s)\| \cdot \|\psi^{''}(x)\|. \tag{4}$$

Поскольку семейство $j(t)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $\triangle$, то $\exists C>0, \forall \theta, s \in \triangle : \|j(\theta)-j(s)\| \le C \mid \theta - s \mid$. Поэтому, учитывая (4), будем иметь:

$$| (L^{j(\theta)-} - L^{j(s)})\psi(x) | \le C(\theta-s)\sup_{x\in H} \|\psi^{''}(x).\| \tag{5}$$

Следовательно, учитывая (3) и (5), будем иметь:

$$\|T^{j(\theta)}(t-\theta)\psi - T^{j(s)}(t-\theta)\psi\| \le C(t-\theta)(\theta-s)\sup_{x\in H}\|\psi^{''}(x)\|. \tag{6}$$

Пусть теперь $K(\psi) \triangleq \sup_{x\in H}\|\psi^{''}(x)\|$. Если доказать, что $K(\psi) = K(U(\theta,s)\varphi) = K(T^{j(s)}(\theta-s)\varphi) \le K(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathfrak{A}_0$, то учитывая (1) и (6) будем иметь, что $\|U(t,s)\varphi - U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi\| \le C \cdot K(\varphi)(t-\theta)(\theta-s)$. Кроме того, учитывая определение $U_q(t,s)$, последовательное применение данного утверждения приведёт к тому, что для всех функций $\varphi \in \mathfrak{A}_0$ $\sup_{q,t,s} K(U_q(t,s)\varphi) \le K(\varphi) = \sup_{x\in H}\|\varphi^{''}(x)\| < +\infty$. Тем самым существование предела $lim_q U_q(t,s)\varphi$ в соответствии с теоремой 2.1 из главы 6 [3] будет полностью доказано. Для доказательства высказанного утверждения воспользуемся следующим свойством полугрупп $T^j(t)$: для любой функции $\varphi \in \mathfrak{A}_0$ и для любых векторов $h_1, h_2 \in H \quad (\varphi^{'}(\cdot), h_1) \in X, (\varphi^{''}(\cdot)h_1, h_2) \in X$. При этом выполняются следующие равенства:

$$((T(t)\varphi)^{'}, h_1) = T(t)(\varphi^{'}(\cdot), h_1); \tag{7}$$

$$((T(t)\varphi)''h_1, h_2) = T(t)(\varphi''(\cdot)h_1, h_2). \tag{8}$$

Итак,

$$\begin{aligned} &K(U(\theta,s)\varphi) = \sup_{x\in H} \|(T^{j(s)}(\theta-s)\varphi)''(\cdot)\| = \\ &= \sup\{((T^{j(s)}(\theta-s)\varphi)''(x)h,h) \mid x\in H; \| h \|\leq 1\} = \sup\{T^{j(s)}(\theta-s)(\varphi''(\cdot)h,h)(x) \mid \\ &x \in H; \| h \|\leq 1\} \leq \sup\{(\varphi''(x)h,h) \mid x\in H; \| h \|\leq 1\} = \sup_{x\in H}\|\varphi''(x)\|. \end{aligned} \tag{9}$$

Согласно предложению 2.2 из главы 6 [3], производящим оператором $A(t)$ семейства $\widetilde{U}(t,s)$ является $U_1'(t,t)$.

$$\frac{d}{dt}U(t,s)\varphi = \frac{d}{dt}T^{j(s)}(t-s)\varphi = T^{j(s)}(t-s)L^{j(s)}\varphi.$$

Отсюда, $U_1'(t,t)\varphi = L^{j(t)}\varphi$. Теорема полностью доказана.

3. Теперь мы готовы к рассмотрению задачи Коши для уравнения $\frac{du(t,x)}{dt} = \frac{1}{2}j(t)(u''_{xx}(t,x)) + Zu$, где t $\in [0,T] = \triangle$. Будем полагать, что начальное условие $\varphi \in \mathfrak{A}_0$. Решение задачи Коши будем искать именно в этом классе функций. Z - векторное поле класса $\mathfrak{A}_0$. Поток, $\Phi_t(x) = \Phi(t,x)$, соответствующий такому векторному полю определён для всех $(t,x) \in \mathbb{R} \dot{+} H$. Определим в пространстве X полугруппу $P(t)$ по формуле $P(t)u = u\circ\Phi_t$. Свойства таких полугрупп были изучены в [4]. Обозначим через $\widetilde{U}(t,\tau)$ решение рассматриваемой задачи Коши в точке t с начальным условием $\varphi \in \mathfrak{A}_0$ в точке τ. Введём в рассмотрение следующие семейства операторов: $V(t,s) = T^{j(s)}(t-s); Z(t,s) = P(t-s)$. Положим в этом пункте, что $U(t,s) = V(t,s)Z(t,s)$

Теорема 2. *Решение рассматриваемой задачи Коши даётся следующей формулой:*

$$\widetilde{U}(t,\tau)\varphi = \lim_q U_q(t,\tau)\varphi.$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой 2.1 из гл. 6 [3]. Равномерная липшицевость семейства $U_q(t,s)$ немедленно вытекает из того, что $\|U_q(t,s)\| \leq 1; \forall t,s\in\triangle, \forall q\in\{q\}$, а это в свою очередь следует из того, что $\|P(t)\|\leq 1$ и $\|V(t,s)\|\leq 1$. Теперь остаётся оценить норму разности $U(t,s)\varphi - U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi, \varphi\in\mathfrak{A}_0$.

$$\begin{aligned} &\|U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi - U(t,s)\varphi\| = \\ &= \|T^{j(\theta)}(t-\theta)P(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)P(\theta-s)\varphi - T^{j(s)}(t-s)P(t-s)\varphi\| = \\ &= \|T^{j(\theta)}(t-\theta)P(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)P(\theta-s)\varphi - T^{j(s)}(t-s)P(t-\theta)P(\theta-s)\varphi\| = \\ &= \|T^{j(\theta)}(t-\theta)P(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)\psi - T^{j(s)}(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)P(t-\theta)\psi\|. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь через ψ мы обозначили $P(\theta-s)\varphi$. Согласно свойствам полугруппы $P(t), \psi\in\mathfrak{A}_0$. Введём следующие обозначения: $A = T^{j(\theta)}(t-\theta); B = T^{j(s)}(t-\theta)$, $\psi_1 = P(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)\psi$, $\psi_2 = T^{j(s)}(\theta-s)P(t-\theta)\psi$. Поскольку $\|A\psi_1 - B\psi_2\| \leq \|\psi_1-\psi_2\| + \|A\psi_2 - B\psi_2\|$ ($\|A\|\leq 1$), то для оценки (10) достаточно оценить $\|\psi_1-\psi_2\|$ и $\|A\psi_2 - B\psi_2\|$. Оценим сначала $\|\psi_1-\psi_2\|$.

$$\begin{aligned} &(T^{j(s)}(\theta-s)P(t-\theta)\psi - P(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)\psi)(x) = T^{j(s)}(\theta-s)(\psi\circ\Phi_{t-\theta})(x) - \\ &-T^{j(s)}(\theta-s)\psi(\Phi_{t-\theta}(x)) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_H (\psi(\Phi(t-\theta,x+y)) - \psi(\Phi(t-\theta,x)+y))\mu_{(\theta-s)A_n}(dy) \end{aligned} \tag{11}$$

Правая часть данного выражения зависит только от значения подынтегральной функции в шаре $\|y\| \leq \sqrt{(\theta-s)\|j(s)\|}$, поскольку функционал $j(s)$ существенно бесконечномерный. С другой стороны имеют место следующие неравенства

$$\|\Phi(t-\theta,x+y) - \Phi(t-\theta,x) - y\| \leq \sup_x \|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(t-\theta,x) - I\|\|y\|; \tag{12}$$

$$\sup_x \|\Phi(t-\theta, x) - I\| \le \exp{(t-\theta)C_1} - 1 \le C_2(t-\theta), \tag{13}$$

для некоторых положительных констант C_1 и C_2. Из соотношений (12) и (13) следует, что

$$\|\Phi(t-\theta, x+y) - \Phi(t-\theta, x) - y\| \le C_2\|j(s)\|^{1/2}(t-\theta)(\theta-s)^{1/2} \le const(t-\theta)(\theta-s)^{1/2}. \tag{14}$$

С учётом (14) можем написать, что

$$|\ \psi(\Phi(t-\theta, x+y)) - \psi(\Phi(t-\theta, x)+y)\ | \le const(t-\theta)(\theta-s)^{1/2}\sup_x \|\psi^{'}(x)\|. \tag{15}$$

Исходя из (11) и (15) делаем окончательный вывод:

$$\|(T^{j(s)}(\theta-s)P(t-\theta)\psi - P(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)\psi)\| \le K_1(\psi)(t-\theta)(\theta-s)^{1/2}. \tag{16}$$

Мы ввели следующее обозначение: $K_1(\psi) \triangleq const \cdot \sup_x \|\psi^{'}(x)\|$.
Теперь оценим $\|A\psi_2 - B\psi_2\|$. Исходя из (6) и определения операторов A и B, будем иметь

$$\|T^{j(\theta)}(t-\theta)\psi_2 - T^{j(s)}(t-\theta)\psi_2\| \le K_2(\psi_2)(t-\theta)(\theta-s); K_2(\psi_2) \triangleq C\sup_{x\in H}\|\psi_2^{''}(x)\|, \tag{17}$$

где C — констаната Липшица для функции $j(t)$. Резюмируя (6), (16) и (17), можем написать

$$\|U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi - U(t,s)\varphi\| \le K_1(\psi)(t-\theta)(\theta-s)^{1/2} + K_2(\psi_2)(t-\theta)(\theta-s), \tag{18}$$

где $K_1(\psi) = const_1 \cdot \sup_x \|\psi^{'}(x)\|; K_2(\psi_2) = const_2 \cdot \sup_x \|\psi_2^{''}(x)\|; \psi = P(\theta-s)\varphi; \psi_2 = T^{j(s)}(\theta-s)P(t-\theta)\psi$. Сейчас мы докажем, что имеют место неравенства: $K_1(\psi) \le const \cdot K_1(\varphi)$ и $K_2(\psi_2) \le const \cdot K_1(\varphi) + const \cdot K_2(\varphi)$.

$$K_1(P(t)\varphi) = \sup_x \|\ (\varphi \circ \Phi_t)^{'}(x)\ \| \le$$
$$\le exp(tC_1)\sup_x \|\varphi^{'}(\cdot)\| \le exp(TC_1)\sup_x\|\varphi^{'}(\cdot)\| \le const \cdot K_1(\varphi).$$

$$\begin{aligned} &\sup_x \|(T^{j(s)}(\theta-s)P(t-\theta)\psi)^{''}(x)\| = \\ &= \sup_x \|(T^{j(s)}(\theta-s)(P(t-\theta)\psi))^{''}(x)\| \le \sup_x \|(P(t-\theta)\psi)^{''}(x)\|. \end{aligned} \tag{19}$$

На основании свойств полугруппы $P(t)$, установленных в работе [4], для некоторых констант $C_1, C_2 > 0$ будем иметь при $t \in \triangle$

$$\begin{aligned} &\sup_x \|(P(t-\theta)\psi)^{''}(x)\| \le exp(2(t-\theta)C_1)\sup_x \|\psi^{''}(x)\| + \\ &+2C_2(t-\theta)exp(3(t-\theta)C_1)\sup_x\|\psi^{'}(x)\| \le const \cdot \sup_x \|\psi^{''}(x)\| + const \cdot \sup_x \|\psi^{'}(x)\| \end{aligned} \tag{20}$$

Из (19), (20) и определения K_2 выводим: $K_2(\psi_2) \le const \cdot K_1(\psi) + const \cdot K_2(\psi)$. Вспомнив, что $\psi = P(t-\theta)\varphi$, и применив аналогичные утверждения ещё раз, с учётом (18) получим: $\|U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi - U(t,s)\varphi\| \le const \cdot K_2(\varphi)(t-\theta)(\theta-s) + const \cdot K_1(\varphi)(t-\theta)(\theta-s)^{1/2}$. Рассуждениями, подобными приведённым в предыдущем параграфе (см. в частности формулу (9)), доказывается, что:

$$\sup_{q,t,s} K_2(U_q(t,s)\varphi) = \sup_{q,t,s}\sup_x \|(U_q(t,s)\varphi)^{''}(x)\| = k_2(\varphi) < +\infty;$$
$$\sup_{q,t,s} K_1(U_q(t,s)\varphi) = \sup_{q,t,s}\sup_x \|(U_q(t,s)\varphi)^{'}(x)\| = k_1(\varphi) < +\infty;$$

Теперь достаточно применить утверждение теоремы 2.1 из главы 6 [3], чтобы завершить доказательство существования предела $\lim_q U_q(t,s)\varphi$.

$$\frac{d}{dt}U(t,s)\varphi = \frac{d}{dt}V(t,s)P(t-s)\varphi = V_1^{'}(t,s)(P(t-s)\varphi) + V(t,s)P^{'}(t-s)\varphi.$$

Значит, $U_1^{'}(t,t)\varphi = L^{j(t)}\varphi + Z\varphi$. Это завершает доказательство теоремы.

Список литературы

[1] Богданский Ю.В. *Задача Коши для уравнения теплопроводности с нерегулярным эллиптическим оператором*//Укр. мат. журн.—1989.–т41, №5.–с.584-590.

[2] Богданский Ю.В. *Задача Коши для существенно бесконечномерного параболического уравнения с переменными коэффициентами*//Укр. мат. журн.—1994.–т46, №6.–с.663-670.

[3] Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах* М.:Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983.—384 с.

[4] Bogdansky Yu.V., *Cauchy problem for the essentially infinite-dimensional heat equation on a surface in Hilbert space*//Укр. мат. журн.—1995.–т47, №6.–с.737-746.

НОРМАЛЬНЫЕ ИНДЕКСЫ И НОРМАЛЬНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

И. В. Орлов

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Украина

На базе понятия нормального индекса линейного непрерывного оператора строится теория нормального дифференцирования отображений в локально выпуклых пространствах. Рассмотрены элементарные свойства нормальных производных, нормальная форма теоремы о среднем и ее непосредственные приложения.

0. Введение

Классическая теория Фреше дифференцирования в банаховых пространствах [1] не допускает, как известно, прямого обобщения на важнейший для современного анализа класс локально выпуклых пространств (ЛВП). Основной причиной этого служит отсутствие в небанаховом случае подходящих топологий в пространствах линейных операторов.

Широко применявшийся на протяжении ряда лет псевдотопологический подход (см., например, [2]–[5]) хотя и дал формальный выход из положения, тем не менее, на наш взгляд, не обладает той степенью алгоритмичности и прозрачности, которая присуща анализу Фреше, и которая, безусловно, необходима для регулярного применения метода.

Предлагаемый ниже подход базируется на понятии нормального индекса линейного непрерывного оператора $A : E \to F$, описывающего непрерывность A на языке соответствия индексов преднорм из ЛВП F и E. Аналогичным образом вводятся относительные нормальные индексы малых отображений. Эти вопросы, рассмотренные в [6]–[8], мы излагаем в пп.1–2 работы в обзорном порядке.

В п.3 дается соответствующее определение нормальной дифференцируемости и строится элементарная теория нормального дифференцирования отображений ЛВП. При этом, на базе пп.1–2, вычисляются соответствующие нормальные индексы, вплоть до индексов операторной матрицы Якоби. В п.4 рассмотрена теорема о среднем для нормально дифференцируемых отображений, причем оценка связана с нормальным индексом производной. Второй идейный план работы связан с п.5. Здесь показано, что разложение $(E;F)$ в индуктивную шкалу ЛВП в соответствии с нормальными индексами операторов позволяет применять теорему о среднем вполне аналогично случаю банаховых пространств, вплоть до почленного дифференцирования.

Отметим, что в работе не затронуты вопросы, связанные с высшими производными и обратными отображениями, поскольку это требует переноса предыдущей конструкции на отображения индуктивных шкал ЛВП.

Метод дифференцирования, использованный в настоящей работе, не является принципиально новым. Как отмечено ниже (см. пп. 2.2, 3.2, 5.5), дифференцируемость по Хайерсу-Ленгу (см. [13]) в топологических векторных пространствах в случае ЛВП равносильна нормальной дифференцируемости. Таким образом, данный метод является псевдотопологическим методом дифференцирования в смысле Ламадрида-Смолянова ([13]). Цель данной работы — продемонстрировать преимущества применения в дифференцировании нормальных индексов и соответствующих нормальных разложений операторных пространств в шкалы ЛВП. Это позволило, в частности, получить и существенно новые результаты, такие, как нормальная форма теоремы о среднем 1 и теорема о почленном дифференцировании 2.

Всюду далее $\mathbb{K}$ — поле скаляров; E, E_i, F, F^j, G — ЛВП с соответствующими определяющими системами преднорм $\{\|\cdot\|_t\}_{t\in T}$, $\{\|\cdot\|_{t_i}\}_{t_i\in T_i}$, $\{\|\cdot\|^s\}_{s\in S}$, $\{\|\cdot\|^{s_j}\}_{s_j\in S_j}$, $\{\|\cdot\|_r\}_{r\in R}$, индуктивно упорядоченными в соответствии с возрастанием преднорм; $(E;F)$ — пространство линейных непрерывных операторов, действующих из E в F; $(E_1,E_2;F)$ — пространство билинейных непрерывных операторов, действующих из $E_1\times E_2$ в F.

1. Нормальные индексы линейных операторов в ЛВП (n-индексы)

Определение 1. Пусть $A\in(E;F)$. Для любого $s\in S$ положим

$$n_A(s)=\{t\in T|\ \|A\|_t^s:=\sup_{\|x\|_t\le 1}\|Ax\|^s<+\infty\}.$$

Многозначное отображение n_A назовем *нормальным индексом*, или *n-индексом* оператора A, величины $\|A\|_t^s$ — *конормами.*

Замечание 9. Пусть $\mathrm{ray}(T)$ — множество всех *лучей* в T, т.е. подмножеств T, содержащих вместе с каждым своим элементом все последующие. Множество $\mathrm{ray}(T)$ индуктивно упорядочено противоположно включению и образует решетку относительно операций $T'\vee T'':=T'\cap T''$ и $T'\wedge T'':=T'\cup T''$. Легко видеть, что всякий нормальный индекс n_A отображает S в $\mathrm{ray}(T)$. Отметим также, что конормы обладают обычными свойствами норм; кроме того, при $t\in n_A(s)$ и $x\in E$

$$\|Ax\|^t\le\|A\|_s^t\cdot\|x\|_s. \tag{1}$$

Отметим основные свойства нормальных индексов (см. [6], [7]).

Предложение 8. Любой нормальный индекс является возрастающим отображением $S\to\mathrm{ray}(T)$. Кроме того:

1) если $c\in\mathbb{K}$, $c\ne 0$, то $n_{c\cdot A}(s)=n_A(s)$;

2) если $A_i\in(E;F)$, $i=\overline{1,k}$, то $n_{\sum\limits_{i=1}^k A_i}(s)\preccurlyeq\bigvee_{i=1}^k n_{A_i}(s)$;

3) если $A_j\in(E;F^j)$, $j=\overline{1,m}$, то $n_{(A_1,\dots,A_m)}(s_1,\dots,s_m)=\bigvee_{j=1}^m n_{A_j}(s_j)$; при этом $\|(A_1,\dots,A_m)\|_t^{s_1\dots s_m}=\max\limits_{1\le j\le m}\|A_j\|_t^{s_j}$;

4) если $A_i \in (E_i; F)$, $i = \overline{1,k}$, то $n_{\bigoplus\limits_{i=1}^{k} A_i}(s) = \prod\limits_{i=1}^{k} n_{A_k}(s)$; при этом $\|\bigoplus\limits_{i=1}^{k} A_i\|_{t_1\ldots t_k}^{s} = \max\limits_{1\le i\le k} \|A_i\|_t^{s_i}$;

5) если $A_1 \in (E; F)$, $A_2 \in (F; G)$, то $n_{A_2\circ A_1}(r) \preccurlyeq n_{A_1}[n_{A_2}(r)]$; при этом $\|A_2 \circ A_1\|_t^r \le \|A_2\|_s^r \cdot \|A_1\|_t^s$.

Примеры вычисления нормальных индексов рассмотрены в [7]. Отметим лишь один важный пример.

Пример 5. Если $I_j : E_j \to \prod\limits_{i=1}^{k} E_i$ — канонические инъекции, $j = \overline{1,k}$, то

$$n_{I_j}(t_1^0, \ldots, t_k^0) \preccurlyeq (t_j \succcurlyeq t_j^0); \quad j = \overline{1,k}. \tag{2}$$

2. Относительные нормальные индексы малых отображений в ЛВП (ν-индексы)

Определение 2. Пусть отображение $\varphi : E \to F$ определено в некоторой окрестности нуля в E. Будем говорить, что $\varphi(h) = o(h)$, если

$$\forall\, s \in S\, \exists\, t \in T : (\|\varphi(h)\|^s / \|h\|_t) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{3}$$

Обозначим через $\nu_\varphi(s)$ множество всех $t \in T$, удовлетворяющих условию (3). Многозначное отображение $s \mapsto \nu_\varphi(s)$ назовем *относительным нормальным индексом* (или *ν-индексом*) отображения φ.

Замечание 10. Нетрудно видеть, что условие (3) равносильно определению малого отображения топологических векторных пространств по Хайерсу-Ленгу (см. [13]): если U — окрестность нуля в E, V — окрестность нуля в F, то $\varphi(h) = o(h)$ тогда, когда

$$\forall\, V\, \exists\, U \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, (h \in U,\, |\lambda| < \delta) \Rightarrow \left(\frac{\varphi(\lambda h)}{\lambda} \in \varepsilon V\right); \tag{4}$$

(достаточно рассмотреть $V = V^s = \{y \in F|\, \|y\|^s < 1\}$ и $U = U_t = \{x \in E|\, \|x\|_t < 1\}$, где $t \in \nu_\varphi(s)$). Однако метод нормальных индексов существенно упрощает в локально выпуклом случае работу с малыми отображениями.

Аналогично n-индексам, ν-индексы также являются отображениями $S \to \mathrm{ray}(T)$. Примеры вычисления ν-индексов рассмотрены в [6]; мы приведем здесь лишь один важный пример.

Предложение 9. Если $B \in (E_1, E_2; F)$, то $B(h_1, h_2) = o((h_1, h_2))$. При этом

$$\nu_B(s) = \{(t_1, t_2)|\, \|B\|_{t_1 t_2}^s := \sup_{\|h_1\|_{t_1} \le 1, \|h_2\|_{t_2} \le 1} \|B(h_1, h_2)\|^s < \infty\}. \tag{5}$$

Определенное формулой (5) отображение называется также *бинормальным индексом* B и обозначается n_B^2 (см. [7]).

Отметим основные свойства малых отображений и относительных нормальных индексов (см. [6]).

Предложение 10. Любой ν-индекс является возрастающим отображением $S \to \mathrm{ray}(T)$. Кроме того:

1) если $c \in \mathbb{K}$, $c \ne 0$, то $\nu_{c\cdot\varphi}(s) = \nu_\varphi(s)$;

2) если $\varphi_i = o(h)$, $i = \overline{1,n}$, то $\nu_{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i}(s) \preccurlyeq \bigvee_{i=1}^{n} \nu_{\varphi_i}(s)$;

3) если $\varphi(h) = o(h)$, то $\lim\limits_{\lambda\to 0} (\varphi(\lambda h)/\lambda) = 0$;

4) если $\varphi_j : E \to F^j$, $j = \overline{1,m}$, то $\nu_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}(s_1, \ldots, s_m) = \bigvee_{j=1}^{m} \nu_{\varphi_j}(s_j)$;

5) если $\varphi_i : E_i \to F$, $i = \overline{1,k}$, то $\nu_{\bigoplus\limits_{i=1}^{k} \varphi_i}(s) = \prod\limits_{i=1}^{k} \nu_{\varphi_k}(s)$;

6) если $\varphi_1 : E \to F$, $A_1 \in (E; F)$, $\varphi_2 : F \to G$, $\varphi_1(h) = o(h)$, $\varphi_2(k) = o(k)$, то $(\varphi_2 \circ (\varphi_1 + A_1))(h) = o(h)$, и

$$\nu_{\varphi_2 \circ (\varphi_1 + A_1)}(r) \preccurlyeq (\nu_{\varphi_1} \vee n_{A_1}) \circ \nu_{\varphi_2}(r); \tag{6}$$

7) если $\varphi : E \to F$, $\varphi(h) = o(h)$, $A_2 \in (F; G)$, то $(A_2 \circ \varphi)(h) = o(h)$, и

$$\nu_{A_2 \circ \varphi}(r) \preccurlyeq (\nu_\varphi \circ n_{A_2})(r);$$

8) если $\varphi : E_1 \times E_2 \to F$, $\varphi(h_1, h_2) = o((h_1, h_2))$, то $\varphi_1(h_1) := \varphi(h_1, 0) = o(h_1)$, $\varphi_2(h_2) := \varphi(0, h_2) = o(h_2)$, и

$$\nu_{\varphi_1}(s) \times \nu_{\varphi_2}(s) \preccurlyeq \nu_\varphi(s).$$

Заметим, что последнее неравенство следует из (2) и (6).

3. Нормальное дифференцирование в ЛВП (элементарная теория)

Определение 3. Будем говорить, что отображение $f : E \to F$, определенное в окрестности точки $x \in E$, *(нормально) дифференцируемо* в точке x, если $\Delta f(x, h) = A_x h + \varphi_x(h)$, где $A_x \in (E; F)$, $\varphi_x(h) = o(h)$. Оператор A_x назовем *(нормальной) производной* f в точке x и обозначим обычным символом $f'(x)$. Под *n-индексом* и *ν-индексом* f в точке x будем понимать соответствующие индексы главной части и остаточного члена Δf: $n_f(x) := n_{f'(x)}$; $\quad \nu_f(x) := \nu_{\varphi_x}$.

Замечание 11. Очевидно, если E — банахово пространство, то $\varphi_x(h) = o(\|h\|)$ и мы приходим к определению Фреше. В этом случае *n-индекс* и *ν-индекс* f постоянны. Отметим также, что выбор определяющих систем преднорм в E и F не влияет на нормальную дифференцируемость; изменяется лишь $n_f(x)$ и $\nu_f(x)$. Удобно рассматривать максимальные определяющие системы попарно неэквивалентных преднорм.

В случае произвольных ЛВП E и F, как вытекает из замечания 10, определение нормальной дифференцируемости равносильно определению Хайерса-Ленга ([13]): $\Delta f(x, h) = A_x h + \varphi_x(h)$, где φ_x удовлетворяет условию (4). Однако метод нормальных индексов дает существенную дополнительную информацию о поведении линейной части и малого члена и приводит ниже к новой форме теоремы о среднем в ЛВП (теор. 1) и к новому результату о почленном дифференцировании в ЛВП (теор. 2) и некоторым другим новым результатам.

Следующие утверждения очевидно следуют из определения 3 и свойств нормальных индексов 8(1–2) и 10(1–3).

Предложение 11. Если f нормально дифференцируемо в точке $x \in E$, то f непрерывно в точке x.

Предложение 12. Если $f_i : E \to F$ дифференцируемы в точке $x \in E$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ $(i = \overline{1,n})$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ также дифференцируемо в точке x, причем:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right)'(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i'(x); \quad n_{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i}(x) \preccurlyeq \bigvee_{i=1}^{n} n_{f_i}(x); \quad \nu_{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i}(x) \preccurlyeq \bigvee_{i=1}^{n} \nu_{f_i}(x).$$

Предложение 13. Если f дифференцируемо в точке x, то для любого $h \in E$ существует производная по направлению $\sigma f(x, h) = \lim\limits_{\lambda \to +0} (\Delta f(x, \lambda h)/\lambda)$, и $\sigma f(x, h) = f'(x)h$.

Замечание 12. Таким образом, алгоритм вычисления нормальной производной следующий: 1) вычислить $\sigma f(x,h)$; 2) проверить линейность $\sigma f(x,h)$ по h и вычислить n-индекс; 3) проверить малость $\Delta f(x,h) - \sigma f(x,h)$ и вычислить ν-индекс.

Проиллюстрируем это на простом примере. Пусть $E = F = C_{loc}(\mathbb{R})$ (с преднормами $\|x\|_t = \sup\limits_{|\tau|\le t}|x(\tau)|,\ t \ge 0$), $f(x)(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n(t)$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$. Тогда $\sigma f(x,h) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} h$, откуда $\|\sigma f(x,h)\|_t \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} n|c_n| \cdot \|x\|_t^{n-1} \cdot \|h\|_t$, и, следовательно, $n_{\sigma f(x,\,\cdot\,)}(t) \preccurlyeq [t;+\infty)$ при любом $x \in E$. Далее, $\Delta f(x,h) - \sigma f(x,h) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n \cdot \sum\limits_{k=2}^{n} C_n^k x^{n-k} h^k$, откуда $\|\Delta f(x,h) - \sigma f(x,h)\|_t \le \sum\limits_{n=2}^{\infty} |c_n| \cdot (\|x\|_t + 1)^n \cdot \|h\|_t^2$ при $\|h\|_t \le 1$, и, следовательно, $\nu_f(x)(t) \preccurlyeq [t;+\infty)$.

Предложение 14. Если $f : E \to F$ дифференцируемо в точке $x \in E$, $g : F \to G$ дифференцируемо в точке $y = f(x) \in F$, то $g \circ f : E \to G$ дифференцируемо в точке x; при этом

$$(g \circ f)'(x) = g'(y) \circ f'(x); \quad n_{g\circ f}(x) \preccurlyeq n_f(x) \circ n_g(y); \tag{7}$$

$$\nu_{g\circ f}(x) \preccurlyeq (\nu_f(x) \circ n_g(y)) \vee ((n_f(x) \vee \nu_f(x)) \circ \nu_g(y)). \tag{8}$$

Доказательство. Действительно, стандартная выкладка дает

$$\Delta(g \circ f)(x,h) = g'(y) \circ f'(x)h + [g'(y) \cdot \varphi_x(h) + \varphi^y(f'(x)h + \varphi_x(h))], \tag{9}$$

где φ_x и φ^y — соответствующие малые члены приращений f и g. Отсюда, применяя 8(5) к главной части (9), получаем (7), а применяя 10(2) и 10(6–7) к малой части (9), получаем (8). $\square$

Предложение 15. Если $B \in (F^1, F^2; G)$, то B дифференцируемо в любой точке $(y_1, y_2) \in F_1 \times F_2$; при этом $B'(y_1,y_2)(k_1,k_2) = B(y_1,k_2) + B(k_1,y_2)$;

$$n_B(y_1,y_2) = n_{B(\,\cdot\,,y_2)}(y_1) \times n_{B(y_1,\,\cdot\,)}(y_2); \tag{10}$$

$$\nu_B(y_1,y_2) = n_B^2(y_1,y_2). \tag{11}$$

Доказательство. Действительно, т.к.

$$\Delta B((y_1,y_2),(k_1,k_2)) = [B(k_1,y_2) + B(y_1,k_2)] + B(k_1,k_2), \tag{12}$$

то применяя 8(4) к главной части (12), получаем (10), а применяя 9 к малой части (12), получаем (11). $\square$

Предложение 16. Отображение $(f_1, f_2) : E \to F^1 \times F^2$ дифференцируемо тогда и только тогда, когда дифференцируемы f_1 и f_2; при этом

$$(f_1,f_2)'(x) = (f_1'(x), f_2'(x)); \quad n_{(f_1,f_2)}(x) = n_{f_1}(x) \vee n_{f_2}(x); \tag{13}$$

$$\nu_{(f_1,f_2)}(x) = \nu_{f_1}(x) \vee \nu_{f_2}(x). \tag{14}$$

Доказательство. Действительно, если $\Delta f_i(x,h) = f_i'(x)h + \varphi_i(h)$, то

$$\Delta(f_1,f_2)(x,h) = (f_1'(x), f_2'(x))h + (\varphi_1,\varphi_2)(h), \tag{15}$$

и применяя 8(5) к главной части (15), получаем (13), а применяя 10(4) к малой части (15), получаем (14). Обратный вывод аналогичен. $\square$

Следствие 1. *Если* $(f_1, f_2) : E \to F^1 \times F^2$ *дифференцируемо в точке* $x \in E$, $B \in (F_1, F_2; G)$, *то* $B(f_1, f_2) : E \to G$ *дифференцируемо в точке* x*; при этом:*

$$B(f_1, f_2)'(x)h = B(f_1'(x)h, f_2(x)) + B(f_1(x), f_2'(x)h);$$

$$n_{B(f_1,f_2)}(x) \preccurlyeq [n_{f_1}(x) \vee n_{f_2}(x)] \circ n_B(f_1(x), f_2(x));$$

$$\nu_{B(f_1,f_2)}(x) \preccurlyeq ([\nu_{f_1}(x) \vee \nu_{f_2}(x)] \circ n_B(f_1(x), f_2(x))) \vee \\ \vee (n_{f_1}(x) \vee n_{f_2}(x) \vee \nu_{f_1}(x) \vee \nu_{f_2}(x)) \circ n_B^2(f_1(x), f_2(x)).$$

Предложение 17. Если $f : E_1 \times E_2 \to F$ дифференцируемо в точке $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, то существуют $(\partial f/\partial x_1)(x_1, x_2)$ и $(\partial f/\partial x_2)(x_1, x_2)$; при этом

$$f'(x_1, x_2)(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)h_2; \tag{16}$$

$$n_f(x_1, x_2) = n_{f(\,\cdot\,,x_2)}(x_1) \times n_{f(x_1,\,\cdot\,)}(x_2); \tag{17}$$

$$\nu_{f(\,\cdot\,,x_2)}(x_1) \times \nu_{f(x_1,\,\cdot\,)}(x_2) \preccurlyeq \nu_f(x_1, x_2). \tag{18}$$

Доказательство. Существование частных производных и равенство (16) доказываются стандартным образом. Поскольку при этом

$$f'(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \oplus \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2); \quad \varphi_{\mathbf{x_1},x_2} = \varphi_{x_1,x_2} \circ I_1; \quad \varphi_{x_1,\mathbf{x_2}} = \varphi_{x_1,x_2} \circ I_2;$$

где φ_{x_1,x_2}; $\varphi_{\mathbf{x_1},x_2}$ и $\varphi_{x_1,\mathbf{x_2}}$ — соответственно малые части приращений $f(\cdot,\cdot)$, $f(x_1,\,\cdot\,)$ и $f(\,\cdot\,, x_2)$; I_j $(j = 1, 2)$ — канонические инъекции $E_j \to E_1 \times E_2$, то равенства (17) и (18) следуют соответственно из 8(4) и 10(8). ☐

Следствие 2. *Если* $f = (f_1, \ldots, f_m) : E_1 \times \ldots \times E_n \to F^1 \times \ldots \times F^m$ *дифференцируемо в точке* $(x_1, \ldots, x_n)$, *то* $f'(x)$ *задается операторной матрицей Якоби* $(\partial f_i/\partial x_j)$, $i = \overline{1, m}$*;* $j = \overline{1, n}$. *При этом:*

$$n_f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{i=1}^{m} \left(n_{f(\cdot,x_2,\ldots,x_n)}(x_1) \times \ldots \times n_{f(x_1,\ldots,x_{n-1},\cdot)}(x_n)\right);$$

$$\bigvee_{i=1}^{m} \left(\nu_{f(\cdot,x_2,\ldots,x_n)}(x_1) \times \ldots \times \nu_{f(x_1,\ldots,x_{n-1},\cdot)}(x_n)\right) \preccurlyeq \nu_f(x_1, \ldots, x_n).$$

В заключение этого пункта отметим, что, используя оценки конорм в предложении 8, легко получить соответствующие оценки конорм производных в предложениях 11–2.

4. Теорема о среднем для нормально дифференцируемых отображений

Напомним сначала классическую теорему о конечных приращениях для отображений отрезка в ЛВП (см., например, [3]).

Предложение 18. Пусть F — вещественное ЛВП, B — замкнутое выпуклое подмножество F, D — конечное или счетное подмножество $[0; 1]$, $g : [0; 1] \to \mathbb{R}$, $f : [0; 1] \to F$. Если f и g непрерывны на $[0; 1]$ и дифференцируемы на $[0; 1]\backslash D$, причем $f'(t) \in g'(t) \cdot B$ и $g'(t) \geq 0$ при $t \in [0; 1]\backslash D$, то $f(1) - f(0) \in [g(1) - g(0)] \cdot B$.

Перейдем теперь к отображениям из ЛВП в ЛВП.

Предложение 19. Пусть E и F — вещественные ЛВП, B — замкнутое выпуклое подмножество F, $[a; b] \subset E$, D^* — конечное или счетное подмножество $[a; b]$, $D = \{t|\,(1 - t)a + tb \in D^*\}$, $g : [0; 1] \to \mathbb{R}$, $f : [a; b] \to F$.

Если f непрерывно на $[a;b]$ и нормально дифференцируемо на $[a;b]\backslash D^*$, g непрерывно на $[0;1]$ и дифференцируемо на $[0;1]\backslash D$, причем $f'((1-t)a+tb)\cdot(b-a)\in g'(t)\cdot B$ и $g'(t)\geq 0$ при $t\in[0;1]\backslash D$, то:

$$f(b)-f(a)\in[g(1)-g(0)]\cdot B. \tag{19}$$

Доказательство. Достаточно применить предложение 18 к функции $\widetilde{f}(t)=f((1-t)a+tb)$, $0\leq t\leq 1$, дифференцируемой на $[0;1]\backslash D$ в силу предложения 14. $\square$

Следствие 3 (теорема о среднем). *В условиях предложения 19 для f,*

$$f(b)-f(a)\in\overline{\mathrm{conv}}\left[f'([a;b]\backslash D^*)\cdot(b-a)\right]. \tag{20}$$

С точки зрения нормальных индексов, наиболее полезной, по-видимому, является следующая форма теоремы о среднем.

Теорема 1 (нормальная форма теоремы о среднем). *Пусть, в условиях предложения 19 для f, $n_f(x)\preccurlyeq n$ при $x\in[a;b]\backslash D^*$, где n — некоторый нормальный индекс. Тогда для всех $s\in S$ и $t\in n(s)$:*

$$\|f(b)-f(a)\|^s\leq\sup_{x\in[a;b]\backslash D^*}\|f'(x)\|_t^s\cdot\|b-a\|_t. \tag{21}$$

Доказательство. Из неравенства (1) следует, что при $\bar{x}\in[a;b]\backslash D^*$, $s\in S$ и $t\in n(s)$:

$$\|f'(\bar{x})\cdot(b-a)\|^s\leq\sup_{x\in[a;b]\backslash D^*}\|f'(x)\|_t^s\cdot\|b-a\|_t.$$

Поэтому

$$\overline{\mathrm{conv}}\left[f'([a;b]\backslash D^*)\cdot(b-a)\right]\subset B, \tag{22}$$

где $B=\{y\in F|\ \|y\|^s\leq\sup\limits_{x\in[a;b]\backslash D^*}\|f'(x)\|_t^s\cdot\|b-a\|_t$ при $s\in S,\, t\in n(s)\}$ — замкнутое выпуклое множество. Следовательно, из (20) и (22) получаем $f(b)-f(a)\in B$, что равносильно (21). $\square$

Отметим, что (см. ниже п.5) в случае непрерывной дифференцируемости f условие $n_f(x)\preccurlyeq n$ выполняется.

5. Приложения теоремы о среднем и шкалы пространств

Предварительные замечания 1. Изучение производного отображения $f':E\to(E;F)$ требует определения сходимости в $(E;F)$. Однако в небанаховом случае, как известно, [9], никакая отделимая линейная топология в $(E;F)$ не обеспечивает непрерывность отображений вычисления $(A,x)\mapsto Ax$ и композиции $(A_1,A_2)\mapsto A_2\circ A_1$. Существуют различные подходы к этой проблеме ([2]–[4]). Предлагаемый ниже подход состоит в подчинении различных типов сходимости в $(E;F)$ различным нормальным индексам, что приводит к разложению $(E;F)$ в индуктивную шкалу ЛВП. Приведем необходимые сведения об индуктивных шкалах (см. также [10]).

Определение 4. Система ЛВП $\overrightarrow{X}=\{X_i\}_{i\in I}$, индуктивно упорядоченная по непрерывному вложению: $(i_1\preccurlyeq i_2)\Rightarrow(X_{i_1}\underset{\rightarrow}{\subseteq}X_{i_2})$, называется *индуктивной шкалой ЛВП.* Операции над шкалами определяются покоординатно; например, если $\overrightarrow{Y}=\{Y_i\}_{i\in I}$, то $\overrightarrow{X}\times\overrightarrow{Y}=\{X_i\times Y_i\}_{i\in I}$. Шкалы $\overrightarrow{X}$ и $\overrightarrow{Y}$ изометрически изоморфны, если изометрически изоморфны соответствующие пространства шкал: $X_i\cong Y_i$, $i\in I$. $A\in(E;\overrightarrow{X})$, если $A\in(E;X_i)$ при некотором $i\in I$. Вообще, сходимость в шкале есть сходимость в каком-либо из пространств шкалы: отображение $\varphi:E\to\overrightarrow{X}$ непрерывно в точке $x_0\in E$, если $(x\to x_0)\Rightarrow(\varphi(x)\to\varphi(x_0)$ в некотором $X_i)$; φ равномерно непрерывно на множестве $D\subset E$, если φ равномерно непрерывно как отображение D в некоторое X_i.

Определение 5. Пусть $\mathcal{N} = \mathcal{N}(E, F)$ — множество всех нормальных индексов в $(E; F)$. Для каждого $n \in \mathcal{N}$ положим

$$(E; F)_n = \{A \in (E; F) |\, n_A \preccurlyeq n\}.$$

Снабдим каждое пространство $(E; F)_n$ проективной топологией τ_n относительно топологий с определяющими системами преднорм $\{\| \cdot \|_t^s\}_{t \in n(s)}$, $s \in S$. Систему ЛВП

$$\overrightarrow{(E; F)} := \{((E; F)_n, \tau_n)\}_{n \in \mathcal{N}} \tag{23}$$

назовем *нормальным разложением* пространства $\overrightarrow{(E; F)}$.

Предложение 20 ([6])**.** Система (23) образует индуктивную шкалу ЛВП.

Замечание 13. Пусть Φ_n — фильтры окрестностей нуля в топологиях τ_n, $n \in \mathcal{N}$. Система $\{\Phi_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ порождает линейную псевдотопологию в $(E; F)$, которую нетрудно продолжить на пространство всех отображений из E в F. Это именно та топология, относительно которой данный метод дифференцирования является псевдотопологическим в смысле Ламадрида-Смолянова (см. [13]).

Отметим ряд свойств нормальных разложений.

Предложение 21 ([11])**.** Отображения вычисления $\overrightarrow{(E; F)} \times E \to F$, $(A, x) \mapsto Ax$, и композиции $\overrightarrow{(E; F)} \times \overrightarrow{(F; G)} \to \overrightarrow{(E; G)}$, $(A_1, A_2) \mapsto A_2 \circ A_1$, непрерывны по совокупности переменных.

Предложение 22 ([11])**.** Имеют место изометрические изоморфизмы:

$$\overrightarrow{\left(\bigoplus_{i=1}^{k} E_i; F\right)} \cong \prod_{i=1}^{k} \overrightarrow{(E_i; F)}; \quad \overrightarrow{(E; \prod_{j=1}^{m} F^j)} \cong \prod_{j=1}^{m} \overrightarrow{(E; F^j)}. \tag{24}$$

Эти свойства позволяют систематически применять теорему о среднем 1 к нормально дифференцируемым на множестве отображениям.

Теорема 2. *Пусть U — открытое выпуклое подмножество E, F — полное ЛВП, $\{f_k : U \to F\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность нормально дифференцируемых на U отображений, причем:*

1) для некоторой точки $x_0 \in U$ последовательность $\{f_k(x_0)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится;

2) последовательность производных $f_k' : U \to \overrightarrow{(E; F)}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно на U (к некоторому g).

Тогда $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится на U к некоторому $f : U \to F$; отображение f нормально дифференцируемо на U, и $f'(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_k'(x)$.

Доказательство. Применяя теорему 1, получаем

$$\|(f_l(x) - f_m(x)) - (f_l(x_0) - f_m(x_0))\|^s \le \sup_{y \in U} \|f_l'(x) - f_m'(y)\|_t^s \cdot \|x - x_0\|_t, \tag{25}$$

где $s \in S$, $t \in n^1(s)$, $f_k' \rightrightarrows$ в $(E; F)_{n^1}$. В силу равномерной сходимости, правая часть (25) стремится к нулю при $m, l \to \infty$, если $\|x - x_0\|_t \le C$. Поскольку $\|f_l(x_0) - f_m(x_0)\|^s \to 0$ при $m, l \to \infty$, то из (25) следует $\|f_l(x) - f_m(x)\|^s \to 0$ при $m, l \to \infty$ и $\|x - x_0\|_t \le C$, $t \in n^1(s)$. Отсюда, по критерию Коши, вытекает сходимость $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ в каждой точке $x \in U$ к некоторому предельному отображению f.

Далее, фиксируя $x \in U$, имеем:

$$\|f(x+h) - f(x) - g(x)h\|^s \le \|(f(x+h) - f(x)) - (f_k(x+h) - f_k(x))\|^s + \\ + \|f_k(x+h) - f_k(x) - f_k'(x)h\|^s + \|f_k'(x)h - g(x)h\|^s. \tag{26}$$

Для первого слагаемого справа в (26), переходя к пределу в (25) при $l \to \infty$ и заменяя $m \mapsto k$, $x_0 \mapsto x$, $x \mapsto x+h$, получаем:

$$(\|(f(x+h)-f(x))-(f_k(x+h)-f_k(x))\|^s/\|h\|_t) \le \sup_{y\in U}\|g(x)-f_k'(x)\|_t^s < \varepsilon \tag{27}$$

при $t \in n^1(s)$ и достаточно больших k.

Для третьего слагаемого из равномерной сходимости $f_k' \rightrightarrows g$ и неравенства (21) аналогично следует для $t \in n^1(s)$ и достаточно больших k:

$$(\|f_k'(x)h - g(x)h\|^s/\|h\|_t) \le \sup_{y\in U}\|g(x)-f_k'(x)\|_t^s < \varepsilon. \tag{28}$$

Наконец, фиксируя k, из определения нормальной дифференцируемости имеем:

$$(\|f_k(x+h)-f_k(x)-f_k'(x)h\|^s/\|h\|_t) < \varepsilon \tag{29}$$

при $t \in n_k(s)$, где $n_k = n_{f_k}(x)$ и $\|h\|_t < \delta$. В итоге, при $t \in (n^1 \vee n_k)(s)$ и $\|h\|_t < \delta$ из (27)–(29) получаем: $(\|f(x+h)-f(x)-g(x)h\|^s/\|h\|_t) < 3\varepsilon$, т.е. $f(x+h)-f(x)-g(x)h = o(h)$, что означает нормальную дифференцируемость f (с индексом $n_f \preccurlyeq n^1 \vee n_k$) и равенство $f'(x) = g(x)$. □

Отметим, что условия почленного дифференцирования для отображений в индуктивные шкалы ЛВП рассмотрены в [12].

Теорема 3. *Если $f : E \to F$ непрерывно дифференцируемо в точке $x_0 \in E$, $g : F \to G$ непрерывно дифференцируемо в точке $y_0 = f(x_0) \in F$, то $g \circ f : E \to G$ также непрерывно дифференцируемо в точке x_0.*

Доказательство. Действительно, согласно 14, в окрестности x_0 производную $(g\circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ можно рассматривать как композицию отображения $x \mapsto (g'(f(x)), f'(x))$, $E \to \overrightarrow{(E;F)} \times \overrightarrow{(F;G)}$, непрерывного в точке x_0, и отображения композиции $(A_1, A_2) \mapsto A_2 \circ A_1$, непрерывного на $\overrightarrow{(E;F)} \times \overrightarrow{(F;G)}$ в силу 21. □

Теорема 4. *Если $f : E_1 \times E_2 \to F$ имеет непрерывные в точке (x_1, x_2) частные производные $\partial f/\partial x_1$ и $\partial f/\partial x_2$, то f дифференцируемо в этой точке.*

Доказательство. Пусть $g(\xi_1) = f(\xi_1, x_1+h_2) - (\partial f/\partial x_1)(x_1,x_2)(\xi_1 - x_1)$. Тогда $g'(\xi_1) = (\partial f/\partial x_1)(\xi_1, x_2+h_2) - (\partial f/\partial x_1)(x_1,x_2)$. Так как $(\partial f/\partial x_1)$ непрерывна в точке (x_1,x_2), то для некоторого $n_1 \in \mathcal{N}(E;F)$: $(\partial f/\partial x_1)(x_1+h_1, x_2+h_2) \to (\partial f/\partial x_1)(x_1,x_2)$ в $(E;F)_{n_1}$, что позволяет применить теорему о среднем 1:

$$\begin{aligned}\|f(x_1+h_1,x_2+h_2) - f(x_1,x_2+h_2) - (\partial f/\partial x_1)(x_1,x_2)h_1\|^s = \|g(x_1+h_1)-g(x_1)\|^s \le\\ \le \sup_{\xi_1\in[x_1;x_1+h_1]}\|(\partial f/\partial x_1)(\xi_1,x_2+h_2) - (\partial f/\partial x_1)(x_1,x_2)\|_t^s \cdot \|h_1\|_t,\end{aligned}$$

при $t \in n_1(s)$, откуда

$$f(x_1+h_1,x_2+h_2) - f(x_1,x_2+h_2) - (\partial f/\partial x_1)(x_1,x_2)h_1 = o_1(h_1). \tag{30}$$

Аналогично проверяется, что

$$f(x_1,x_2+h_2) - f(x_1,x_2) - (\partial f/\partial x_2)(x_1,x_2)h_2 = o_2(h_2). \tag{31}$$

Суммируя (30) и (31) получаем, в силу 10(2), утверждение теоремы. □

Следствие 4. *Отображение $f : E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i \to \prod_{j=1}^{m} F^j$ непрерывно нормально дифференцируемо тогда и только тогда, когда все частные производные $\partial_j f/\partial x_i : E \to \overrightarrow{(E_i;F_j)}$ непрерывны.*

Определение 6. Будем говорить, что отображение $f : E \to F$ *строго нормально дифференцируемо* в точке $x \in E$, если f нормально дифференцируемо в точке x, и при $t \in \nu_f(x)(s)$, $s \in S$:

$$(\|f(x_2) - f(x_1) - f'(x)(x_2 - x_1)\|^s / \|x_2 - x_1\|_t) \to 0 \tag{32}$$

при $x_1 \to x$, $x_2 \to x$.

Теорема 5. *Если $f : E \to F$ нормально дифференцируемо в окрестности точки $x \in E$ и $f' : E \to \overrightarrow{(E;F)}$ непрерывно в точке x, то f строго нормально дифференцируемо в точке x.*

Доказательство. Пусть $g(h) = f(x+h) - f(x) - f'(x)h$, тогда $g'(h) = f'(x+h) - f'(x)$. Т.к. f' непрерывно в точке x, то $g'(h) \to 0$ в $\overrightarrow{(E;F)}$ при $h \to 0$, т.е. $g'(h) \to 0$ в некотором $(E;F)_n$, $n \in \mathcal{N}(E,F)$. Применяя теорему 1, получаем для $s \in S$, $t \in n(s)$:

$$\|f(x_2) - f(x_1) - f'(x)(x_2 - x_1)\|^s = \|g(x_2 - x) - g(x_1 - x)\|^s \leq \\ \leq \sup_{h \in [x_1 - x; x_2 - x]} \|g'(h)\|_t^s \cdot \|x_2 - x_1\|_t, \tag{33}$$

и т.к. первый множитель справа в (33) стремится к нулю при $x_1 \to x$, $x_2 \to x$, то из (33) следует (32).

□

Список литературы

[1] *А. Картан*, Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. Мир, Москва (1971).

[2] *H.H. Keller*, Differential calculus in locally convex spaces. Lecture Notes in Math. (1974).

[3] *О.Г. Смолянов*, Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения. Изд-во МГУ, Москва (1979).

[4] *В.А. Балабанов*, Некоторые вопросы нелинейного функционального анализа и их приложения. Мецниереба, Тбилиси (1982).

[5] *М.Ф. Сухинин*, Избранные главы нелинейного анализа. Изд-во Росс. ун-та дружбы народов, Москва (1992).

[6] *И.В. Орлов*, Нормальные индексы линейных и нелинейных отображений в локально выпуклых пространствах и шкалах пространств. — Spectral and Evolution Problems, v. 11. TNU Publ., Simferopol (2001), p. 18–29.

[7] *I.В. Орлов*, Канонічний ізоморфізм лінійних і білінійних операторів у локально опуклих просторах. — Доповіді НАН України (в печати).

[8] *I.V. Orlov*, Normal functional indices and normal duality. — Methods of Functional Analysis and Topology (в печати).

[9] *G. Köthe*, Topologishe lineare Räume. Springer Verlag, Berlin (1960).

[10] *Л.Р. Волевич, С.Г. Гиндикин*, Обобщенные функции и уравнения в свертках. Наука, Москва (1994).

[11] *И.В. Орлов*, Нормальные разложения операторных пространств над ЛВП. — Функциональный анализ и его приложения (в печати).

[12] *I.V. Orlov*, A termwise differentiation in the inductive scales of the locally convex spaces. — Operator Theory: Adv. & Appl., v. 118. Birkhäuser, Basel (2000), p. 321–333.

[13] *В.И. Авербух, О.Г. Смолянов*, Дополнения к книге: *А. Фрёлихер, В. Бухер*, Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы. Мир, Москва (1970).

AMS Subject Classification: Primary 26E15 ,26E20; Secondary 58C20

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского Украина, 95007, г. Симферополь, ул. Ялтинская, 4

E-mail: old@tnu.crimea.ua

Новая оценка приближения решений уравнения Штурма–Лиувилля с аналитическим потенциалом частичными суммами асимптотических рядов

И. В. Садовничая
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Россия

На отрезке $-a \leqslant x \leqslant a$, $a > 0$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y'' - q(x)y = \lambda^2 y, \qquad \lambda > 0, \tag{1}$$

с потенциалом q, аналитическим в некоторой окрестности отрезка $[-a, a]$.

Хорошо известно (см. [1,2]), что решения уравнения (1) $y_0(x,\lambda)$ и $y_1(x,\lambda)$, удовлетворяющие начальным условиям

$$y_0(0,\lambda) = 1, \quad y_0'(0,\lambda) = 0, \quad y_1(0,\lambda) = 0, \quad y_1'(0,\lambda) = \lambda i, \tag{2}$$

разлагаются в формальные ряды, которые являются асимптотическими при $\lambda \to +\infty$:

$$y_j(x,\lambda) \sim \frac{1}{2}\biggl(e^{i\lambda x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{k,j}(x)}{(-2i\lambda)^k} + (-1)^j e^{-i\lambda x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{k,j}(x)}{(2i\lambda)^k}\biggr), \quad j = 0, 1. \tag{3}$$

Коэффициенты рядов (3) вычисляются по следующим рекуррентным формулам:

$$B_{0,0}(x) \equiv B_{0,1}(x) \equiv 1; \quad B_{n+1,j}(x) = B'_{n,j}(x) + (-1)^{n+j}B'_{n,j}(0) + \int\limits_0^x q(t)B_{n,j}(t)\,dt. \tag{4}$$

Ряды (3) являются асимптотическими для функций $y_j(x,\lambda)$ в том смысле, что при любых $n \in \mathbb{N}$ справедлива равномерная по $x \in [-a,a]$ асимптотика

$$y_j(q,x,\lambda) = S_{n,j}(q,x,\lambda) + O_{q,n}(\lambda^{-n-1}), \quad (\lambda \to +\infty) \tag{5}$$

с постоянной в символе O, зависящей только от потенциала q и номера n. Через $S_{n,j}(q,x,\lambda)$ здесь обозначена n-я частичная сумма асимптотического ряда (3):

$$S_{n,j}(q,x,\lambda) = \frac{1}{2}\biggl(e^{i\lambda x}\sum_{k=0}^{n}\frac{B_{k,j}(x)}{(-2i\lambda)^k} + (-1)^j e^{-i\lambda x}\sum_{k=0}^{n}\frac{B_{k,j}(x)}{(2i\lambda)^k}\biggr). \tag{6}$$

Возникает вопрос о возможности приближенного вычисления значений $y_j(q,x,\lambda)$ при $\lambda \geqslant 1$, $x \in [-a,a]$ с помощью асимптотических рядов (3).

В работе [3] В. А. Садовничим и А. Ю. Поповым для потенциалов, аналитических в круге $|z| < R$, $R > a$ и удовлетворяющих условию $q(0) = 0$, а также для потенциалов, аналитических в некоторой ρ-окрестности отрезка $[-a,a]$, получены оценки для погрешности наилучшего приближения фундаментальной системы решений уравнения (1), удовлетворяющей начальным условиям (2), суммами (6), экспоненциально убывающие с ростом λ.

Цель настоящей работы — улучшить оценку, приведенную в статье [3] для потенциалов, аналитических в $\mathcal{O}(\rho,[-a,a])$ — ρ-окрестности отрезка $[-a,a]$, замыкание которой представляет собой объединение двух полукругов $\{|z-a| \leqslant \rho,\ \operatorname{Re} z \geqslant a\}$, $\{|z+a| \leqslant \rho,\ \operatorname{Re} z \leqslant -a\}$ и прямоугольника $\{|\operatorname{Re} z| \leqslant a,\ |\operatorname{Im} z| \leqslant \rho\}$. Существуют два аргумента в пользу необходимости рассматривать потенциалы, аналитические именно в такой окрестности, а не только потенциалы, аналитические в круге. Первое – потенциал может иметь полюса на мнимой оси, находящиеся довольно близко к нулю (например, $q(x) = \dfrac{1}{x^2+a^2}$). Второе – потенциал, аналитический в круге, может быстро расти на мнимой оси (например, $q(x) = \cos ax$, $q(x) = \exp(-bx^2)$, $b > 0$). В этом случае его норма в рассматриваемой окрестности будет существенно меньше, чем его норма в круге, что позволит улучшить оценки.

Пусть $M_0 = \max\left\{\int\limits_0^a |q(t)|\,dt,\ \int\limits_{-a}^0 |q(t)|\,dt\right\}$; через $\varphi_{n,j}(q,x,\lambda)$ обозначим невязку при приближении решения y_j суммой $S_{n,j}$: $\varphi_{n,j}(q,x,\lambda) = y_j(q,x,\lambda) - S_{n,j}(q,x,\lambda)$. Основной результат статьи заключается в следующем.

Теорема 1. *Пусть функция $q(z)$ аналитична в $\mathcal{O}(\rho,[-a,a])$ и следующая норма конечна*

$$\max_{\alpha\in[-a,a]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|q_{n,\alpha}|\rho^{n+1}}{n+1} = M_1 < +\infty, \tag{7}$$

где $q_{n,\alpha} = \dfrac{q^{(n)}(\alpha)}{n!}$. Для $\lambda > 0$ положим $N = N(\lambda) = [2\rho\lambda] - 1$. Тогда при $N > 1$ имеем

$$\sup_{\eta\geqslant\lambda}\max_{j=0,1}\max_{x\in[-a,a]} |\varphi_{N,j}(q,x,\eta)| \leqslant \frac{2e}{3}\sqrt{2\pi}aM(2\lambda\rho+2)^{3.5}\exp(M_0/\lambda + M\rho e - 2\rho\lambda), \tag{8}$$

где $M = M_1 + M_0$.

Ключом к доказательству теоремы 1 является теорема об оценках коэффициентов асимптотических рядов (3).

Задача об оценках коэффициентов асимптотических рядов по спектральному параметру для решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, по–видимому, впервые рассматривалась А. О. Кравицким и В. Б. Лидским в [4]. *Для уравнения*

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x,z)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x,z)\frac{dy}{dx} + p_n(x,z)y = 0,$$

где $x\in[0,1]$, а $p_\alpha(x,z)$ являются полиномами комплексного параметра z

$$p_\alpha(x,z) = \sum_{\beta=0}^{\alpha} p_{\alpha,\beta}(x)z^\beta, \quad 0\leqslant\alpha\leqslant n,$$

(в случае уравнения второго порядка это соответствует тому, что $q(x)$ является полиномом) ими было показано, что

$$\max_{j=0,1}\max_{|x|\in[0,1]} |B_{n,j}(x)| \leqslant C^n n^{\gamma n}, \quad 0<\gamma<1. \tag{9}$$

А. С. Печенцов в [5] *распространил результаты работы* [4] *на случай потенциалов – произвольных целых функций конечного экспоненцального типа. Х. М. Мкоян в* [6] *получил оценки коэффициентов $B_{k,j}$ для потенциалов из классов Жеврея, которые состоят из функций $q\in C^\infty[-a,a]$, имеющих следующие мажоранты максимумов n–х производных:*

$$\max_{|x|\leqslant a} |q^{(n)}(x)| \leqslant c_0 B^n (n!)^\alpha, \quad \alpha\geqslant 1.$$

Для частного случая $\alpha = 1$ функции из рассматриваемого класса аналитичны в $1/B$ окрестности отрезка $[-a,a]$ и оценка Мкояна при $\alpha = 1$ выглядит так:

$$\max_{|x|\leqslant a} |B_{n,j}(q,x)| \leqslant c_1 C^n n!, \tag{10}$$

где c_1, C – некоторые положительные постоянные.

Теорема 2. *Для коэффициентов асимптотического ряда (3) и их производных справедливы следующие оценки:*

$$\max_{j=0,1}\max_{|x|\leqslant a} |B_{n,j}(q,x)| < \frac{1}{6}M(n+2)!\rho^{1-n}\exp(M\rho e), \tag{11}$$

$$\max_{j=0,1}\max_{|x|\leqslant a}|B'_{n,j}(q,x)| < \frac{1}{6}Mn(n+2)!\rho^{-n}\exp(M\rho e). \qquad (12)$$

Полученная оценка является почти неулучшаемой при растущем n на классе потенциалов с заданным ограничением на норму (7). В работе [7] для $q(x) = -\ln(1-\frac{x}{a+\rho})$ (легко проверяется, что $\max\limits_{\alpha\in[-a,a]}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{|q_{k,\alpha}|\rho^{k+1}}{k+1} = \rho(1-\ln\frac{\rho}{a+\rho}) < \infty$) была получена оценка снизу

$$B_{n,j}(q,a) > q^{(n-2)}(a) - q^{(n-2)}(0) = (n-3)!\left(\frac{1}{\rho^{n-2}} - \frac{1}{(a+\rho)^{n-2}}\right) \sim \rho^{2-n}(n-3)! \quad (n\to\infty).$$

Таким образом, зазор между оценками $\max\limits_{|x|\leqslant a}|B_{n,j}(q,x)|$ сверху и снизу на рассматриваемом классе потенциалов при $n\to\infty$ составляет величину порядка n^5, которая очень мала в сравнении с главным членом оценки, растущим как $(n+2)!\rho^{-n}$.

Теорема 2 и разобранный пример показывают, что наименьшей постоянной C в неравенствах типа (9) и (10) является $1/\rho$. Важно также то, что получена явная зависимость c_1 от потенциала q.

Доказательство приведенных результатов опубликовано в работе [8].

Список литературы

[1] Тамаркин Я. Д. “О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений” Петроград, 1917.

[2] Bigrkgoff G. D. Trans. Amer. Math. Soc. 1908, vol. 9, pp. 219–231.

[3] Садовничий В. А., Попов А. Ю. Дифференциальные уравнения, 1999, т. 35, N 4, стр. 498–506.

[4] Кравицкий А. О., Лидский В. Б. Сиб. мат. журн., 1971, т. 12, N 4, стр. 748–759.

[5] Печенцов А. С. Труды сем. им. И. Г. Петровского, 1981, вып. 7, стр. 190–198.

[6] Мкоян Х. М. Сборник материалов IX конференции Ленинаканского филиала ЕрПИ, часть 2, физико–математические науки, 1974, стр. 35–44.

[7] Садовничий В. А., Попов А. Ю. Дифференциальные уравнения, 1999, т. 35, N 2, стр. 280–284, N 3, стр. 403–410.

[8] Садовничая И. В. Новая оценка приближения решений уравнения Штурма–Лиувилля с аналитическим потенциалом частичными суммами асимптотических рядов. препринт.

О РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ, ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. П. Хромов [4]

Саратовский госуниверситет им. Н.Г.Чернышевского, Саратов, Россия

Keywords: Интегральный оператор, условия регулярности, ряд Фурье

В статье приводится обзор результатов по равносходимости разложений по собственным функциям дифференциальных, интегро-дифференциальных, интегральных операторов и разложений в тригонометрический ряд Фурье, полученных методом контурного интегрирования Коши-Пуанкаре и выполненных в основном в Саратовском университете.

[4]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 00-01-00075, программы "Ведущие научные школы", проект № 00-15-96123, программы Минобразования "Университеты России", проект N 990189

Впервые теорема равносходимости разложений по собственным функциям и разложений в обычные тригонометрические ряды Фурье была установлена в работах В.А.Стеклова [1], Е.В.Гобсона [2] и А.Хаара [3] для оператора Штурма-Лиувилля. Затем, Я.Д.Тамаркин и М.Н.Стоун [5] распространили этот результат на произвольный дифференциальный оператор:

$$l[y]=y^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-2}p_k(x)y^{(k)},\quad p_k(x)\in L[0,1] \tag{1}$$

с произвольными краевыми условиями:

$$U_j(y)=\sum_{k=0}^{n-1}[a_{jk}y^{(k)}(0)+b_{jk}y^{(k)}(1)]=0\quad (j=1,\dots,n), \tag{2}$$

удовлетворяющими условию регулярности Биркгофа ([6], с.66-67), которые заключаются в отличии от нуля некоторых определителей, составленных из коэффициентов при старших производных в $U_j(y)$ (после приведения их к нормированному виду ([6], с.65-66)). Дадим формулировку этого результата.

Теорема 1. *Для любой функции $f(x)\in L[0,1]$ имеет место*

$$\lim_{r\to 0}\|S_r(f,x)-\sigma_r(f,x)\|_{C[\delta,1-\delta]}=0, \tag{3}$$

где δ – любое число из $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $S_r(f,x)$ – частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным фукнкциям (с.п.ф.) оператора (1)-(2) для тех собственных значений, для которых $|\lambda_k|<r^n$, $\sigma_r(f,r)$ – частичная сумма тригонометрического ряда Фурье для тех k, для которых $k\pi<r$.

Условия регулярности снять, вообще говоря, нельзя [7].

Этот результат породил и по настоящее время интенсивно развивающееся направление. Достаточно отметить многочисленные работы В.А.Ильина (основополагающие статьи [8]-[10]), разработавшему метод лиувиллевского типа получения теорем равносходимости, когда дифференциальный оператор не привязывается к граничным условиям, а лишь используется дополнительная информация о поведении собственных значений и собственных функций и этот метод приводит часто к результатам окончательного характера, и исследования А.М.Седлецкого (см., например, [11]) об операторе дифференцирования с размазанными граничными условиями.

1. С точки зрения интегральных операторов теорема 1 дает равносходимость спектральных разложений для операторов вида:

$$Af=\int_0^1 A(x,t)f(t)dt, \tag{4}$$

когда $A(x,t)$ является функцией Грина дифференциальных операторов. Для интегральных операторов общего вида вопрос о равносходимости исследовался впервые, повидимому, автором ([12],[13]). Мы будем предполагать, что ядро $A(x,t)$ удовлетворяет следующим требованиям:

а) $A_{x^s t^j}(x,t)=\frac{\partial^{s+j}}{\partial x^s\partial t^j}A(x,t)$ $(s,j=0,\dots,n)$ непрерывны при $t\le x$ и $t\ge x$,

б) A^{-1} существует,

в) $\Delta A_{x^s}(x,t)_{|t=x}=A_{x^s}(x,t)_{|t=x-0}-A_{x^s}(x,t)_{|t=x+0}=\delta_{s,n-1}$ $(s=0,\dots,n,$ δ_{sk} – символ Кронекера).

Проанализируем эти требования. Условие а), как показывают примеры, ослабить нельзя. Условие б) необходимо для справедливости (3). Условию в) удовлетворяют ядра $A(x,t)$, являющиеся функциями Грина оператора (1)-(2), и относительно его важности сформулируем следующий результат.

Теорема 2. *([13]). Пусть $S_r(f,x)$ – частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора (4) и для любой $f(x) \in L[0,1]$ выполняются соотношения:*

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\frac{1}{r^s}\frac{d^s}{dx^s}(S_r(f,x)-\sigma_r(f,x))\right\|_{C[\delta,1-\delta]}=0,\quad (s=0,1).$$

Тогда существует интегральный оператор $Bf = \int\limits_0^1 B(x,t)f(t)dt$ с теми же с.п.ф., что и у оператора (4), ядро $B(x,t)$ которого непрерывно по x и t из $[0,1]$, непрерывно диффференцируемо по x из $(0,1)$ и $x \neq t$ и выполняется в) *при $x \in (0,1)$, $s=0,1$ и $n=2$.*

Теорема 3. *([13]). Если выполняются условия* а),б),в), *то*

$$A^{-1}y=(E+N)(y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny), \tag{5}$$

$$U_j(y)=(y,\varphi_j)\quad (j=1,\ldots,n), \tag{6}$$

где E – единичный оператор, N – интегральный оператор $Nf = \int\limits_0^1 N(x,t)f(t)dt$ с непрерывным при $t \le x$ и $t \ge x$ ядром $N(x,t)$ (на линии $t=x$ возможен разрыв первого рода), $a_1,\ldots,a_n$ – константы, $U_j(y)$ те же, что и в (2), $(y,\varphi_j) = \int\limits_0^1 y(x)\varphi_j(x)dx$ и $\varphi_j(x) \in C[0,1]$.

Теорема 3 сводит задачу разложения по с.п.ф. интегрального оператора (4) к этой задаче для интегро-дифференциального оператора (5)-(6). В предположении, что $U_j(y)$ $(j=1,\ldots,n)$ регулярны, (5) можно привести к виду, когда $a_1=\cdots=a_{n-1}=0$, т.е., $A^{-1}y$ имеет вид:

$$A^{-1}y=(E+N)(y^{(n)}+\alpha y). \tag{7}$$

Теорема 4. *([13]). Пусть выполняются требования:*
1) *$N(x,t)$ непрерывна в $[0,1]\times[0,1]$ и $N'_t(x,t)$ непрерывна при $t \le x$ и $t \ge x$,*
2) *линейные формы $U_j(y)$ $(j=1,\ldots,n)$ в (2) регулярны,*
3) *$N(x,0)$ и $N(x,1)$ – непрерывные функции ограниченной вариации.*
Тогда для оператора (6)-(7) справедливо (3).

Для оператора (4) теорема 4 приводит к следующему результату.

Теорема 5. *([13]). Предположим, что:*
1) *интегральный оператор A удовлетворяет условиям а), б), в),*
2) *$U_j(y)$ $(j=1,\ldots,n)$ регулярны,*
3) *$\underset{0}{\overset{1}{V}}\underset{x}{ar}\, A_{x^n}(x,t)$ ограничена по t.*
Тогда для оператора (4) справедливо (3).

На примерах показано ([13]), что ослабить условия теорем 4 и 5 нельзя.

Недостатком теоремы 5 является трудно проверяемое условие 2). Укажем случай, когда его можно убрать.

Теорема 6. *([?]). Если оператор (4) удовлетворяет условиям 1), 3) теоремы 5 и еще $A(x,t)=\overline{A(t,x)}$, то для него справедливо (3).*

При получении этого факта важную роль играет

Теорема 7. *([?]). Пусть L – дифференциальный оператор*

$$Ly=y^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-1}p_k(x)y^{(k)},\quad p_k(x)\in C^k[0,1]$$

с нормированными краевыми условиями: $U_j(y) = 0$ $(j = 1,\dots,n)$. *Пусть* $V_j(y) = 0$ $(j = 1,\dots,n)$ *нормированные краевые условия сопряженного оператора* L^*. *Если части* $U_j(y)$ *и* $V_j(y)$, *содержащие старшие производные, совпадают, то* $U_j(y)$ $(j = 1,\dots,n)$ *регулярны.*

Эта теорема дает положительный ответ на обобщенную гипотезу Камке. Гипотеза Камке состояла в утверждении регулярности самосопряженных краевых условий. Ее положительное решение дано С.Салафом [14] и А.М.Минкиным [15].

В работе [16] Б.В.Пальцев исследовал интегральные операторы (4), когда $A(x,t) = A(x-t)$ и $A(x)$ является преобразованием Фурье рациональной функции, т.е.,

$$A(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} \exp(-ixz)dz,$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ – полиномы степеней p и q $(p < q)$ со старшими кэффициентами, равными 1. Были введены условия, аналогичные условиям регулярности, найдены асимптотики характеристических чисел, собственных функций, исследовалась сходимость спектральных разложений в $L_p[0,1]$. Л.Г.Назаровым [17] было показано, что операторы Б.В.Пальцева являются частным случаем операторов, рассмотренных выше, и условия регулярности Б.В.Пальцева переходят в условия регулярности Биркгофа и тем самым теорема равносходимости переносится и на такие операторы. Выделим еще частный случай оператора Б.В.Пальцева, когда теорема равносходимости формулируется особенно просто.

Теорема 8. *([13]). Обозначими через* q^+ (q^-) *число корней многочлена* $Q(z)$ *в верхней (нижней) полуплоскости. Тогда, если* $q - p \geq \max\{q^+, q^-\}$, *многочлен* $P(t)\overline{Q}(t)$ $(t \in (-\infty,\infty))$ *имеет вещественные коэффициенты, то для оператора* $A_1 f = \int\limits_0^1 A_1(x-t)f(t)dt$, *где* $A_1(x) = \frac{(-1)^n}{2\pi}A(x)\exp\vartheta x$, *где* $\vartheta = \frac{i}{n}(a-b)$, $n = q-p$, a (b) *– коэффициент при* z^{p-1} (z^{q-1}) *многочлена* $P(z)$ $(Q(z))$, *то справедливо* (3).

Начиная с 1998 года (см. [18]), стали исследоваться интегральные операторы, ядра которых имеют скачки $(n-1)$-ой производной не только на линии $t = x$, но и $t = 1-x$. Мы их рассматриваем в виде:

$$\begin{aligned} Af =&\alpha_1 \int\limits_0^x A_1(x,t)f(t)\,dt + \alpha_2 \int\limits_x^1 A_2(x,t)f(t)\,dt + \\ &+ \alpha_3 \int\limits_0^{1-x} A_3(1-x,t)f(t)\,dt + \alpha_4 \int\limits_{1-x}^1 A_4(1-x,t)f(t)\,dt, \end{aligned} \tag{8}$$

где α_i – константы и

$$\frac{\partial^s}{\partial x^s} A_j(x,t)_{|t=x} = \delta_{s,n-1} \quad (s = 0,\dots,n). \tag{9}$$

Теорема 9. *Пусть* $\delta = (\alpha_1-\alpha_2)^2 - (\alpha_3-\alpha_4)^2 \neq 0$ *и* A^{-1} *существует. Тогда*

$$A^{-1}y = (E+N)P(y^{(n)}(x) + \alpha y(x))$$

с краевыми условиями (6). *Здесь* α *– комплексное число и* $Pf = \delta^{-1}[(\alpha_1-\alpha_2)f(x) + (\alpha_3-\alpha_4)f(1-x)]$.

При $n = 1$ эта теорема получена в [18] и при произвольном n Е.В.Назаровой [19] и тем самым открывается возможность получения теоремы типа теоремы 4.

Отметим следующий важный случай оператора (8):

$$Af = \alpha \int\limits_0^x A(x,t)f(t)dt + \int\limits_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)dt, \quad \alpha^2 \neq 1. \tag{10}$$

Теорема 10. *Если ядро $A(x,t)$ в (10) n раз непрерывно дифференцируемо по x, один раз по t и выполняется (9), то для всякой $f(x) \in L[0,1]$ имеет место соотношение:*

$$\lim_{r\to\infty} \left\| S_r(f,x) - \frac{1}{2}\sigma_{r|\alpha+1|}(f+g,x) - \frac{1}{2}\sigma_{r|\alpha-1|}(f-g,x) \right\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0,$$

где $g(x) = f(1-x)$.

Этот результат получен недавно автором совместно с В.В.Корневым.

2. Остановимся теперь на дифференциальных и интегро-дифференциальных операторах с размазанными краевыми условиями.

А.М.Седлецкий [20] исследовал равносходимость для оператора дифференцирования:

$$l[y] = y', \quad -1 \le x \le 1, \tag{11}$$

с весьма трудным для исследования граничным условием "размазанного"типа со степенной особенностью на концах:

$$U(y) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{k(t)y(t)}{(1-|t|)^\alpha} = 0 \quad (0 < \alpha < 1).$$

Теорема 11. *([20]) Если $\overset{1}{\underset{-1}{V}} ar\, k(t) < \infty$, $k(1-0)\cdot k(-1+0) \neq 0$, то для любой $f(x) \in L[-1,1]$*

$$\lim_{r\to\infty} \|(1-|x|)(S_r(f,x) - \sigma_r(f,x))\|_{C[-1,1]} = 0.$$

С.Н.Кабанов [21] исследовал оператор (11) с краевым условием предельно общего вида:

$$ay(-1) + \int\limits_{-1}^{1} y'(t)h(t)dt = 0.$$

Теорема 12. *([21]). Предположим, что $h(t) \in L^q[-1,1]$, функции $M_1h(t), M_1\tilde{h}(t)$, где $M_1h(t) = \int\limits_t^1 \frac{\partial(\tau-t)^{\xi+\alpha-1}}{\partial\xi\Gamma(\xi+\alpha)}_{|\xi=0} h(\tau)d\tau$, $\tilde{h}(t) = h(-t)$, являются функциями ограниченной вариации и $M_1h(1)\cdot M_1\tilde{h}(1) \neq 0$. Тогда для любой $f(x) \in L^p[-1,1]$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$*

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - \sigma_r(f,x)\|_{C[-1+\delta,1-\delta]} = 0. \tag{12}$$

О.И.Амвросова [22] для оператора n-кратного дифференцирования: $l[y] = y^{(n)}$ с размазанными граничными условиями:

$$U_j(y) = \int\limits_{-1}^{1} \varphi_j(t)y(t)dt + \int\limits_{-1}^{1} \frac{k_j(t)}{(1-|t|)^{\alpha_j}} y^{(p_j)}(t)dt = 0 \quad (j = 1,\dots,n),$$

$$n-1 \ge p_1 \ge \dots \ge p_n \ge 0, \quad 0 < \alpha_\nu < 1, \quad \overset{1}{\underset{-1}{V}} ar\, k_\nu(t) < \infty, \quad \overset{1}{\underset{-1}{V}} ar\, \varphi_\nu(t) < \infty$$

выделила класс регулярных краевых условий и для него получила следующий результат.

Теорема 13. *([22]). Если $f(x) \in L[-1,1]$, то справедливо (12). Если же $f(x) \in L_p[-1,1]$, $p > 1$, $\alpha_\nu > \frac{1}{q}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то*

$$\lim_{r\to\infty} \|(1-|x|)^\gamma [S_r(f,x) - \sigma_r(f,x)]\|_{C[-1,1]} = 0$$

для любых $\gamma > \frac{1}{p}$.

Предельно общие граничные условия для оператора $l[y] = y^{(n)}$ рассмотрел С.И.Кабанов [23] (к сожалению из-за громоздкости этот результат не приводим).

Наконец, О.И.Амвросовой [24] рассмотрен еще оператор:

$$l[y] = D^\alpha y = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(t)dt, \quad 0 < \alpha < 1, \quad x \in [-1,1],$$

с граничным условием:

$$U(y) = \int_{-1}^{1} \frac{k(t)y(t))}{(1-|t|)^{\beta+1}} dt = 0,$$

когда $\overset{1}{\underset{-1}{V}} ar\, k(t) < \infty$, $0 < \beta + 1 \le \alpha < 1$, $k(0-0) \ne k\,(0+0)$, $k(-1+0)\cdot k(1-0) \ne 0$.

Теорема 14. *([24]). Пусть $f(x) \in L[-1,1]$, $D^\beta f(x)$ абсолютно непрерывна на $[-1,1]$. Тогда*

$$\lim_{r\to\infty} \|(1-|x|)|x|^{1+\gamma}(S_r(f,x) - \sigma_r(f,x))\|_{C[-1,1]} = 0,$$

где γ любое положительное число.

Отметим интересную работу А.М.Седлецкого [25], в которой исследована равномерная сходимость разложений по с.п.ф. оператора дифференцирования с граничным условием:

$$U(y) = \int_{-1}^{1} y(t)d\sigma(t) = 0,$$

где $d\sigma(t) = \frac{b(1-|t|)}{(1-|t|)^\alpha} k(t)dt$ и $b(t)$ – произвольная слабо колеблющаяся функция. Этот случай значительно более трудный, чем случай степенной особенности, т.е., когда $b(t) \equiv 1$. Тем самым открывается перспектива получения теорем равносходимости и для такого вида особенностей в граничных условиях.

В заключение приведем следующий результат.

Теорема 15. *([26]). Пусть ядро $M(x,t)$ вольтеррова оператора $Mf = \int_0^x M(x,t)f(t)dt$ имеет вид:*

$$M(x,t) = \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + M_1(x,t),$$

где α нецелое, $\alpha > 2$ и $M_1(x,t)$ удовлетворяет условиям:

1) $\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial t^j} M_1(x,t) \quad (i = 0,\dots,n+2;\ j = 0,1;\ n-1 < \alpha < n)$ *непрерывны при* $0 \le t \le x \le 1$,
2) $\frac{\partial^i}{\partial x^i} M_1(x,t)_{|t=x} = 0 \quad (i = 0,1,\dots,n)$.

Тогда для ядра резольвенты $M_\lambda f = (E - \lambda M)^{-1} Mf = \int_0^x M(x,t,\lambda)f(t)dt$ имеет место асимптотическая формула:

$$M(x,t,\lambda) = \sum_{k=1}^{k_0} y_k(x,\rho) z_k(t,\rho) + O(\rho^{1-\alpha}),$$

где

$$y_k(x,\rho) = (1 + O(\rho^{-1}))\exp\rho_k x + O(1),$$
$$z_k(t,\rho) = O(\rho^{1-\alpha}\exp(-\rho_k t)),$$

$\rho = \lambda^{\frac{1}{\alpha}}\ \big(\arg\rho \in \big[0, 2\pi/\alpha)\big),\quad \rho_k = \rho\omega_k,\quad \omega_k = \varepsilon^{l_k},\quad \varepsilon = \exp\frac{2\pi i}{\alpha}$ *и* l_k *выбраны так, чтобы*

$$Re\,\rho_1 \geq \cdots \geq Re\,\rho_{k_0} > 0 \geq Re\,\rho_{k_0+1} \geq \cdots \geq Re\,\rho_n.$$

Для целого α этот результат был установлен автором ранее [27]. Теорема 15 дала толчок многим исследованиям (см. [28]).

Теорема 15 интересна тем, что может быть использована для исследования разложений по собственным функциям операторов вида: $A = M + T$, где T – интегральный оператор с более гладким ядром.

Список литературы

[1] В. А. Стеклов, *Sur les expressions asymptotiques de certaines functions définies par des équations différentielles linéairs du deuxième ordre, et leur applications an problème du développement d'une function arbitraire en series procédant suivant des dites functions* // Сообщ. матем. об-ва (2), Харьков, 1907-1909, **10**, № 2-6, с. 97-199 (Французский).

[2] E. W. Hobson, On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by a series of normal functions // Proc. Land. Math. Soc. (2), 1908, **6**, pp. 349-395 (Английский).

[3] A. Haar, Zur Theorie des ortogonalen Funktionen systeme // I Math. Ann., 1910, **69**, pp. 331-371; II Math. Ann., 1911, **71**, pp. 38-53 (Английский).

[4] Я. Д. Тамаркин, *О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений*, Петроград, 1917 (Русский).

[5] M. M. Stone, A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc., 1926, **28**, № 4, pp. 695-761 (Английский).

[6] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, М., Наука, 1969, 528 с. (Русский).

[7] А. П. Хромов, Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов в конечном интервале // ДАН СССР, 1962, **146**, № 6, с. 1294-1297 (Русский).

[8] В. А. Ильин, О равномерной равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье // ДАН СССР, 1975, **223**, № 3, с. 548-551 (Русский).

[9] В. А. Ильин, Необходимые и достаточные условия базисности подсистемы собственных функций // ДАН СССР, 1976, **227**, с. 796-799 (Русский).

[10] В. А. Ильин, О приближении функций биортогональным рядом по собственным и присоединенным функциям дифференциальных операторов // Сб. "Теория приближения функций", 1977, с. 206-213 (Русский).

[11] А. М. Седлецкий, Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси // Усп. матем. наук, 1982, **37**, вып. 5 (227), с. 51-95 (Русский).

[12] А. П. Хромов, Интегральные операторы с ядрами типа функции Грина // Деп., 1972, № 4841-72 (Русский).

[13] А. П. Хромов, Теоремы равносходимости интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Матем. об., 1981, **114 (156)**, № 3, с. 358-450 (Русский).

[14] S. Salaff, Regular boundary conditions for ordinary differential operators // Trans. Amer. Math. Soc., 1968, **134**, № 2, pp. 355-373 (Английский).

[15] А. М. Минкин, Регулярность самосопряженных краевых условий// Матем. заметки, 1977, **22**, № 6, с. 835-846. (Русский)

[16] Б. В. Пальцев, Разложение по собственным функциям интегральных операторов свертки на конечном интервале с ядрами, преобразования Фурье которых рациональны. "Слабо"несамосопряженные регулярные ядра // Изв. АН СССР, сер. Матем., 1972, **36**, с. 591-634 (Русский).

[17] Л. Г. Назаров, Разложение по собственным функциям одного класса интегральных операторов // Деп., 1976, No 1236-76 (Русский).

[18] А. П. Хромов, Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Матем. заметки, 1998, **64**, вып. 6, с. 932-942 (Русский).

[19] Е. В. Назарова, Задача точного обращения некоторого класса интегральных операторов с разрывными ядрами. Тезисы докл. 10-ой Саратовской зимней школы 27 января-2февраля 2000 г., Саратов, 2000, с. 96-97 (Русский).

[20] А. М. Седлецкий, О равносходимости и равносуммируемости негармонических разложений Фурье с обычными тригонометрическими рядами // Матем. заметки, 1975, **18**, № 1, с. 9-17 (Русский).
[21] С. Н. Кабанов, Теорема равносходимости для оператора дифференцирования с краевым условием общего вида // Сб. "Теория функций и приближений", Тр. 4-ой Саратовской зимней школы, 1990, Саратов, 1990, ч. 2, с. 108-110 (Русский).
[22] О. И. Амвросова, Асимптотика собственных значений и теоремы равносходимости для операторов со степенными особенностями в краевых условиях // Функц. анализ, Межвуз. науч. сб., вып. 21, Ульяновск, 1983, с. 3-11 (Русский).
[23] С. Н. Кабанов, Теорема равносходимости для оператора дифференцирования n-го порядка, с краевыми условиями, порожденными линейными функционалами // Матем. и ее приложения, Межвуз. науч. сб., Саратов, 1988, с. 4-6 (Русский).
[24] О. И. Амвросова, Об одной краевой задаче со степенными особенностями в краевых условиях // Исслед. по современным проблемам математики, Саратов, 1984, с. 31-37 (Русский).
[25] А. М. Седлецкий, Равномерная сходимость негармонических рядов Фурье // Труды матем. ин-та им. В.А.Стеклова РАН, 1991, **2000**, с. 327-337 (Русский).
[26] А. П. Хромов, Об одном применении оператора дробного дифференцирования // Сб. "Дифференциальные уравнения и вычисл. математики", вып. 6, ч. 1, Саратов, 1976, с. 3-22 (Русский).
[27] А. П. Хромов, Конечномерные возмущения вольтерровых операторов (автореферент докторской диссертации) // Матем. заметки, **16**, № 4, 1974, с. 669-680 (Русский).
[28] А. П. Хромов, Асимптотика резольвент интегральных вольтерровых операторов // Труды матем. ин-та им. В.А.Стеклова РАН, 1995, **211**, с. 419-442 (Русский).

А. Хромов, 410040, Саратов, ул.Тверская, д.29, кв.25

E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Evolution of solitons

Khapaev M. M.
Moscow, Russia

In the report we study questions of the interactions of the flow of an incompressible fluid with surfaces of bodies having visco-elastic properties, and also the possibility of reaction on the inhomogeneity of the flow by a well-defined change of shape of their surface. We solve the optimization problem of determining the shape of a surface which realizes optimum damping with respect to speed of response of isolated inhomogeneities of the fluid flow. We also consider the motion of a shallow layer of fluid over a surface with filtering layer on bottom.

We describe the property of surface by function

$$f = \theta \left(\eta - K \int_0^t \Gamma(t-\tau)\eta \, d\tau \right) - \kappa\eta(t, x - x_0, y),$$

where $\theta = G^{-1}$ is a small dimensionless parameter characterizing of elastic properties of the model, K is the coefficient of viscosity, $\Gamma(t-\tau)$ is the relaxation kernel, and $\kappa > 0$ is a dimensionless parameter characterizing the amplitude of resistance.

After transformation, which used in theory of shallow fluid we have perturbed equation KdV

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = c_0 \left(u_x - K \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau) u_x \, d\tau \right) - c_0 \kappa u_x(t, x - x_0),$$

where c_0 is constant proportional of sound velocity.

Unperturbed KdV equation has a solution of the form

$$\overline{u} = 3\alpha^2 \mathrm{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \alpha (x - \alpha^2 t) \right]$$

and the integral

$$V_0 = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 \, dx.$$

Assuming $\alpha = \alpha(t)$ we now differentiate the integral $V_0 = V_0(u)$ on the basis of the complete equation $V_0 = V_0(t)$ and $\overline{u} \in L_1(-\infty, \infty)$.

We obtain an equation for $\alpha(t)$

$$\begin{aligned} 3\gamma_0 \frac{d}{dt} \alpha(t) = \frac{Kc_0}{2G} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \alpha(t)(x - \alpha^2 t) \right] \int\limits_0^t \Gamma(t-\tau) \alpha^3(\tau) \times \\ \times \tanh \left[\frac{1}{2} \alpha(t)(x - \alpha^2(\tau)\tau) \right] \mathrm{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \alpha(\tau)(x - \alpha^2(\tau)\tau) \right] \, d\tau dx + \\ + \frac{1}{2} c_0 k \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha^3(t) \mathrm{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \alpha (x - \alpha^2 t) \right] \times \\ \times \mathrm{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \alpha (x - x_0 - \alpha^2 t) \right] \tanh \left[\frac{1}{2} \alpha (x - x_0 - \alpha^2 t) \right] \, dx. \end{aligned}$$

Assuming now $\theta \ll k$, we consider the equation, where the outstripping resistance $u_x(t, x-x_0)$ is the main factor; $\gamma_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4(\xi)\, d\xi = 4/3$;

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = -\nu u_x(t, x-x_0), \quad \nu = \frac{c_0\kappa}{2}.$$

Theorem. *This equation has an asymptotic solution of the form*

$$u = 3\alpha^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2}\alpha(x - \alpha^2 t)\right],$$

where $\alpha = \alpha(t)$ satisfies equation

$$\dot{\alpha} = 4\nu p \alpha^2 (3(p^2-1) - (p^2+4p+1)\ln p)/(p-1)^4,$$

where $p = e^{x_0\alpha}$.

We shall consider equation for $\alpha(t)$. If $0 < \alpha \ll 1$ expanding the right side of this equation in power of $\alpha(t)$ and separating out the leading term, we obtain

$$\dot{\alpha} = -\frac{2}{15}\nu x_0 \alpha^3 + o(\alpha^3).$$

We denote by $t(x_0)$ the time after which the solution — like solution dies out from initial amplitude $3\alpha_0^2$ to $(3/4)\alpha_0^2$, i.e. when the solution $\alpha = \alpha(t)$ dies out from an initial value $\alpha(0) = \alpha_0$ to $(1/2)\alpha_0$. The function $t(x_0)$ has a minimum $t_{min} = t_{min}(x_0^{min})$, $x_0^{min} = \varphi_0\alpha_0^{-1}$, where φ_0 is a constant.

The expression obtained for $x_0^{min}(\alpha_0)$ in the case $x_0 =$ const implies that the outstripping resistance must be situated during the propagation of the wave at a distance from the point of maximal amplitude equal to the value of the coordinate x_0, at which the amplitude of the solution at time $t = 0$ decreases $\gamma - 1$ times, $0 < \gamma < 1$. We note that by this method it is possible to solve the problem of optimizing the outstripping speed of response with respect to shape.

The case of shallow water and under the presence of a filtering layer for $z < -h$. Then under the hypothesis of incompressibility and with filtering coefficient k_0 we obtain the equation for integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2(t,x)\, dx$.

$$0,5 \int_{-\infty}^{\infty} u^2\, dx = K \int_{-\infty}^{\infty} uR\, dx,$$

where R is a perturbation in KdV equation connected with filtration. So, for $\alpha(t)$ we obtain the following equation

$$\dot{\alpha}(t) = -\gamma_1(t)\alpha, \quad \gamma_1(t) > 0.$$

Thus, the filtering layer (or the layer with similar properties) has the property of extinguishing the perturbation.

Thus, the outstripping resistance of the surface of flow, organized as a consequence of a special deformation of this surface of the body. It has been established that similar properties are possessed by the skin of dolphins and cetaceans generally due to the highly organized innervation of the tissues and the highly developed circulatory and muscular systems. All possible inhomodeneities are here suppressed including those of turbulence character, the hydrodynamic resistance is reduced in several times, and the flow thus becomes almost laminar even for high flow speed.

These physical reqularities may become a basis for the construction under artificial conditions of surfaces and bodies possessing a capacity for effective suppression of perturbations and reduction hydrodynamic resistance.

This result have published partially in the paper "On suppression of soliton-like solutions of shallow-water equations due to outstripping resistance", Soviet Math. Dokl. (1988), **37**, No. 3, 777–783 by K. V. Mal'kov and M. M. Khapaev.

SINGULAR CAUCHY PROBLEMS AND PROBLEMS WITHOUT INITIAL DATA FOR NONLINEAR SYSTEMS OF FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS

N. B. Konyukhova
Dorodnicyn Computing Centre of RAS,
Moscow, Russia

Keywords: Functional-differential equations, nonsummable singularities, singular initial problems, existence and uniqueness theorems

This paper deals with a system of nonlinear functional-differential equations (FDEs) with a nonsummable singularity at infinity. We consider a singular Cauchy problem with the initial data at infinity or the problems without initial data, e.g., with the requirement of the solution boundedness. We formulate the existence and uniqueness theorems being more common than obtained in [1], [2], [3], [4].

1. Notation: $I_T = [T, \infty)$, $T \geq T_0$, T_0 is fixed; $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$, $|\cdot|$ is a norm in $\mathbf{K}^n$ or associated matrix norm in the linear space $\mathbf{L}(\mathbf{K}^n)$ of $n \times n-$matrices; $\Omega_n(a) = \{x : x \in \mathbf{K}^n, |x| \leq a\}$, where either $0 < a = a_0$ is fixed or $0 < a$ is arbitrary; $C_n(I_T)$ is the Banach space of bounded continuous functions $\xi(t)$, $\xi : I_T \to \mathbf{K}^n$, with the norm $|\xi|_C = |\xi|_{C_n(I_T)} = \sup\limits_{t \in I_T} |\xi(t)|$; $S_n(a) = \{\xi(t) : \xi \in C_n(I_T),\ |\xi|_C \leq a\ (a > 0)\}$; $L_n^\infty(I_T)$ is the Banach space of essentially bounded Lebesgue-measurable functions $\xi(t)$, $\xi : I_T \to \mathbf{K}^n$, with the norm $|\xi|_\infty = |\xi|_{L_n^\infty(I_T)} = \inf\limits_{\mu(N)=0} \sup\limits_{I_T \setminus N} |\xi(t)| = \mathrm{vraisup}_{t \in I_T} |\xi(t)|$, where μ is the Lebesgue measure; $AC_n^{loc}(I_T)$ is the class of locally absolutely continuous functions $\xi(t)$, $\xi : I_T \to \mathbf{K}^n$; $L_n^{loc}(I_T)$ is the class of locally summable functions $\xi(t)$, $\xi : I_T \to \mathbf{K}^n$.

2. Subsets of x−Lipschitz functions

Let G_n be a region in $\mathbf{K}^n$ or all the space and let $\mathrm{Lip}_n = \mathrm{Lip}_n(I_{T_0} \times G_n)$ be the class of functions $f(t, x)$, $f : I_{T_0} \times G_n \to \mathbf{K}^n$, such that $f(\cdot, x)$ is continuous $\forall x \in G_n$ and in any fixed $\Omega_n(a) \subseteq G_n$ $(a > 0)$ $f(t, \cdot)$ satisfies the Lipschitz condition uniformly with respect to $t \in I_{T_0}$ with a constant $L_f = L_f(a) > 0$. We decompose these functions on four subsets: $\mathrm{Lip}_n = \mathrm{Lip}_{n,\delta_\varepsilon}(\varepsilon) \cup \mathrm{Lip}_{n,a_0} \cup \mathrm{Lip}_n(a) \cup \tilde{\mathrm{Lip}}_n$. Here the following classes are distinguished:

1) $\mathrm{Lip}_{n,\delta_\varepsilon}(\varepsilon) = \{f(t, x) : f \in \mathrm{Lip}_n(I_{T_0} \times G_n)$ and $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon,\ T_\varepsilon,\ \delta_\varepsilon > 0,\ \Omega_n(\delta_\varepsilon) \subseteq G_n$, $T_\varepsilon \geq T_0$, such that in the region $I_{T_\varepsilon} \times \Omega_n(\delta_\varepsilon)$ we can choose $L_f = L_f(\delta_\varepsilon) = \varepsilon\}$;

2) $\mathrm{Lip}_{n,a_0} = \{f(t, x) : f \in \mathrm{Lip}_n(I_{T_0} \times \Omega_n(a_0)),\ 0 < a_0$ is fixed, with $L_f = L_f(a_0) > 0\}$;

3) $\mathrm{Lip}_n(a) = \{f(t, x) : f \in \mathrm{Lip}_n(I_{T_0} \times \mathbf{K}^n)$ and $\sup\limits_{a>0} L_f(a) = \infty$ for any choice of $L_f(a) > 0\}$;

4) $\tilde{\mathrm{Lip}}_n = \{f(t, x) : f \in \mathrm{Lip}_n(I_{T_0} \times \mathbf{K}^n)$ and $\forall a > 0$ there exist $L_f(a) > 0$ such that $\tilde{L}_f = \sup\limits_{a>0} L_f(a) < \infty\}$.

It is obvious that, in general, the intersection of the subset $\mathrm{Lip}_{n,\delta_\varepsilon}(\varepsilon)$ with the subset Lip_{n,a_0} (in the same way with the subset $\mathrm{Lip}_n(a)$ or subset $\tilde{\mathrm{Lip}}_n$) is nonempty.

3. Statement of the problems and preliminary remarks

We consider a system of n nonlinear FDEs on a semi-infinite interval in the form:

$$x' = A(t)x + M(t)(FNx)(t) + g(t) \quad \text{a.e. on } I_T. \tag{1}$$

Here, in general, the left end of I_T, $T \geq T_0$, is mobile and defined in the theorems; $x : I_T \to \mathbf{K}^n$, $g : I_{T_0} \to \mathbf{K}^n$; $A, M : I_{T_0} \to \mathbf{L}(\mathbf{K}^n)$, the entries of $A(t)$, $M(t)$, $g(t)$ are locally summable functions, i.e., belonging to the class $L_1^{loc}(I_{T_0})$; N is a local Nemytskii operator, $N : C_n(I_{T_0}) \to C_n(I_{T_0})$, such that

$$(Nx)(t) = (N_f x)(t) \equiv f(t, x(t)), \quad f \in \mathrm{Lip}_n, \quad f(t, 0) \equiv 0; \tag{2}$$

$F : C_n(I_T) \to L_n^\infty(I_T)$, $(FNx)(t) = (F \circ f(\cdot, x(\cdot))(t)$, where a mapping F, generally speaking, nonlinear, nonlocal and depending on a choice of T, satisfies conditions [4]:

$$F(0) = 0, \qquad |F(\xi) - F(\tilde{\xi})|_\infty \leq |\xi - \tilde{\xi}|_C \qquad \forall \xi,\ \tilde{\xi} \in C_n(I_T). \tag{3}$$

We look for the bounded solutions of the equation (1) belonging to the class $AC_n^{loc}(I_T)$. More exactly, we consider the following problems.

Problem 1. It is required to define $x(t)$, $x \in AC_n^{loc}(I_T)$, satisfying equation (1) and restriction

$$\sup_{t \in I_T} |x(t)| \leq \omega, \quad \omega > 0, \tag{4}$$

where ω is a certain finite, in general, mobile and depending on T magnitude determined in the theorems (the first problem without initial data).

Problem 2. It is required to define $x(t)$, $x \in AC_n^{loc}(I_T)$, satisfying equation (1) and the boundedness condition:

$$\sup_{t \in I_T} |x(t)| < \infty \tag{5}$$

(the second problem without initial data).

Problem 3. It is required to define $x(t)$, $x \in AC_n^{loc}(I_T)$, satisfying equation (1) and limiting condition at infinity

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \tag{6}$$

(singular Cauchy problem with the initial data at infinity).

3.1. Special classes of the mapping F

The following partial classes of the mapping F are practically important.

Assumption 1. The mapping F, $F : C_n(I_{\tilde{T}}) \to L_n^\infty(I_{\tilde{T}})$ $(\tilde{T} \geq T_0)$, is a singular Volterra operator (SVO), i.e., $\forall T \geq \tilde{T}$ and $\forall \xi_1, \xi_2 \in C_n(I_{\tilde{T}})$ from an equality $\xi_1(t) = \xi_2(t)$ on I_T follows

$$(F\xi_1)(t) = (F\xi_2)(t) \quad \text{a.e. on } I_T.$$

Assumption 2. The mapping F, $F : C_n(I_{T_0}) \to L_n^\infty(I_{T_0})$, is a local Nemytskii operator, i.e.,

$$(F\xi)(t) \equiv (N_\varphi \xi)(t) \equiv \varphi(t, \xi(t)),$$

where $\xi \in C_n(I_{T_0})$, $\varphi : C_n(I_{T_0}) \to L_n^\infty(I_{T_0})$.

Remark 3. For the theory of FDEs defined on a finite interval and containing (non-)Volterra operators, see, e.g., [5].

Remark 4. If Assumption 2 is satisfied, then (1) is a system of generalized ordinary differential equations (ODEs); if F is an embedding $C_n(I_{T_0})$ into $L_n^\infty(I_{T_0})$, i.e., $F(\xi) \equiv \xi\ \forall \xi \in C_n(I_{T_0})$, and the entries of $A(t)$, $M(t)$, $g(t)$ are piecewise continuous functions on I_{T_0}, then (1) is simply a system of ODEs. If $(F\xi)(t) = \xi(h(t))$, $h : I_T \to I_T$, then (1) is a system of differential-delay equations; if F is an integral operator, then (1) is a system of integral-differential equations, etc.

3.2. On a singularity at infinity and the Caratheodory-type conditions

We want to adapt the contraction mapping principle to the operator equation

$$x(t) = (V(x))(t), \quad t \geq T, \tag{7}$$

where $V : C_n(I_T) \to C_n(I_T)$, and functional-integral equation (7) should be equivalent to Problem 1, either Problem 2 or Problem 3 respectively. The operator V construction, in particular, depends on a singular point type at infinity.

Definition. We say that the equation (1) has a summable singularity at infinity if, and only if, the inequalities

$$I_A = \int_{T_0}^{\infty} |A(t)|dt < \infty, \qquad I_M = \int_{T_0}^{\infty} |M(t)|dt < \infty, \tag{8}$$

$$I_g = \int_{T_0}^{\infty} |g(t)|dt < \infty \tag{9}$$

are valid, otherwise a singularity at infinity is said to be a nonsummable one.

If the relations (8), (9) are fulfilled, then we define

$$(V(x))(t) = -\int_{t}^{\infty} [A(s)x(s) + M(s)(FNx)(s) + g(s)]ds, \quad t \geq T_0,$$

and it is easily to reformulate the Caratheodory-type theorems for the indicated problems to the equation (1) (for the Caratheodory-type theorems to generalized ODEs, see, e.g., [6]).

Remark 5. In general, here and in what follows the integration is in the Lebesgue sense. For the equation (1), if it is possible to use the improper integrals in the Riemann sense, then we suppose that

$$\tilde{I}_g = \Big|\int_{T_0}^{\infty} g(t)dt\Big| < \infty, \tag{10}$$

where the integral standing under the modulus can be convergent conditionally. Then the relations (8), (10) correspond to the Kudryavtsev-type conditions for ODEs [7].

The goal of this paper is to consider Problems 1, 2, 3 to the equation (1) with a nonsummable singularity at infinity. As it has been demonstrated by Chechik on the example for ODE (see [8]), the Caratheodory-type conditions, i.e., the restrictions to a growth of given functions with respect to t, generally speaking, cannot provide an existence and uniqueness of a solution to singular Cauchy problem with the initial data at a nonsummable singularity. For singular Cauchy problems to nonlinear systems of ODEs with the initial data at a regular (irregular) singular point, see, e.g., [9].

4. The existence and uniqueness theorems

Let $\Phi_A(t)$ be a fundamental matrix for a system

$$x' = A(t)x \quad \text{ a.e. on } I_{T_0}. \tag{11}$$

We denote by $U_A(t,s)$ the Cauchy matrix, $U_A(t,s) = \Phi_A(t)\Phi_A^{-1}(s)$, and introduce the auxiliary quantities

$$J_M(t) = \int_{t}^{\infty} |U_A(t,s)M(s)|ds, \quad J_g(t) = \int_{t}^{\infty} |U_A(t,s)g(s)|ds, \quad t \geq T_0, \tag{12}$$

$$\hat{J}_M(T) = \sup_{t \in I_T} J_M(t), \quad \hat{J}_g(T) = \sup_{t \in I_T} J_g(t), \quad T \geq T_0, \tag{13}$$

and suppose that

$$\hat{J}_M(T_0) < \infty, \qquad \hat{J}_g(T_0) < \infty. \tag{14}$$

Remark 6. For the equation (1), if we can use the improper integrals in the Riemann sense, then we introduce the magnitude $J_g(t)$ by the formula $J_g(t) = |\int\limits_t^\infty U_A(t,s)g(s)ds|, \; t \geq T_0$, where the integral standing under the modulus can be convergent conditionally (compare with Remark 5).

For $f(t,x)$, let the requirements (2) be valid and let $q, \omega, \tilde{T}$, $0 < q < 1$, $\omega > 0$, $\tilde{T} \geq T_0$, and the values (12), (13) be such that the relations

$$\hat{J}_M(\tilde{T}) = \sup_{t \in I_{\tilde{T}}} J_M(t) \leq q/L_f, \tag{15}$$

$$\hat{J}_g(\tilde{T}) = \sup_{t \in I_{\tilde{T}}} J_g(t) \leq \omega(1-q) \tag{16}$$

hold where L_f is the Lipschitz constant and, in addition, let a choice of $\omega, \; \tilde{T}, \; L_f$ be subjected to the following conditions:

(i) if $f \in \mathrm{Lip}_{n,\delta_\varepsilon}(\varepsilon)$, then we put $L_f = \varepsilon$, $\omega = \delta_\varepsilon$, $\tilde{T} = T_\varepsilon$, and the relation (15) holds for a suitable choice of $\varepsilon > 0$; if the inequality (16) is not valid for $\omega = \delta_\varepsilon$, $\tilde{T} = T_\varepsilon$, then we suppose that

$$\lim_{t \to \infty} J_g(t) = 0, \tag{17}$$

so that the relation (16) holds for a suitable choice of $\tilde{T} > T_\varepsilon$;

(ii) if $f \in \mathrm{Lip}_{n,a_0} \setminus \mathrm{Lip}_{n,\delta_\varepsilon}(\varepsilon)$, then we put $L_f = L_f(a_0)$ and fix $q, \omega, \tilde{T}, \; 0 < q < 1, \; 0 < \omega \leq a_0, \; \tilde{T} \geq T_0$; if for these values the inequality (15) is not valid, then we assume that

$$\lim_{t \to \infty} J_M(t) = 0, \tag{18}$$

so that (15) can be satisfied due to a suitable choice of $\tilde{T}$; in addition, if (16) is not valid, then we assume that (17) is fulfilled to choose a new $\tilde{T} \in I_{T0}$;

(iii) if $f \in \mathrm{Lip}_n(a) \cup \tilde{\mathrm{Lip}}_n$, then we fix $q : 0 < q < 1$, and ω :

$$\omega \geq \omega_q = \hat{J}_g(T_0)/(1-q), \tag{19}$$

and put $L_f = L_f(\omega)$ or $L_f = \tilde{L}_f$ respectively; due to (19) the relation (16) holds $\forall \tilde{T} \geq T_0$, but if for fixed $L_f, \tilde{T}$ the inequality (15) is not satisfied, then we introduce the requirement (18) to choose a new $\tilde{T} \in I_{T0}$.

Let the indicated requirements be fulfilled. Let us choose $T \geq \tilde{T}$ and take in $C_n(I_T)$ a closed ball by the radius ω: $S_n(\omega) = \{x(t) : x \in C_n(I_T), \; |x|_C \leq \omega\}$. On this ball, we consider the mapping V, V: $C_n(I_T) \to C_n(I_T)$, defined as follows

$$(V(x))(t) = -\int\limits_t^\infty U_A(t,s)[M(s)(FNx)(s) + g(s)]ds, \quad t \geq T. \tag{20}$$

Theorem 1. *Let $A(t), M(t), f(t,x), g(t)$ be such that the requirements* (2) *and* (14) *are fulfilled and let for a chosen $q, 0 < q < 1$, the values ω and T be defined as above.*

Then for any mapping F satisfying conditions (3) *there exists a unique fixed point $\hat{x}$, $\hat{x} \in S_n(\omega)$, of the mapping V; it can be specified as the limit*

$$\hat{x} = \lim_{k \to \infty} V^k(x_0) \tag{21}$$

for any starting point x_0, $|x_0|_C \leq \omega$, moreover, for the rate of convergence we have the estimate

$$|V^k(x_0) - \hat{x}|_C \leq [q^k/(1-q)]|V(x_0) - x_0|_C,$$

and the following estimate holds:

$$|\hat{x}|_C \leq \hat{J}_g(T)/(1-q), \tag{22}$$

and, in addition, if Assumption 1 is valid, i.e., F is SVO, then (22) *holds $\forall T \geq \tilde{T}$, that, in particular, implies a realization of limiting condition* (6) *if* (17) *is valid. Besides a global convergence of successive approximations to $\hat{x}$, i.e., $\forall x_0 \in C_n(I_T)$, occurs in the following two cases: 1) $f \in \tilde{\mathrm{Lip}}_n$; 2) $f \in \mathrm{Lip}_n(a)$, F is SVO, i.e., Assumption 1 is valid, and limiting condition* (18) *is fulfilled; in this case a choice of T depends on a value of x_0 determining in turn a choice of ω, $\omega \geq |x_0|_C$, and $L_f = L_f(\omega) > 0$.*

Corollary. *Let the hypothesis of Theorem 1 be satisfied. Then the constructed function $\hat{x}(t)$, $\hat{x} \in AC_n^{loc}(I_T)$, is a solution of Problem 1; is F is SVO and limiting condition* (17) *is satisfied, then $\hat{x}$ is a solution of Problem 3; if Assumsion 2 is valid, i.e., F is a local Nemytskii operator, then : if $f \in \tilde{\mathrm{Lip}}_n$ then $\hat{x}$ exists in the large (for all $t \in [T_0, \infty)$) while if $f \in \mathrm{Lip}_n(a)$ then $\hat{x}$ is uniquely extendible to the left as long as it remains bounded (at least to $\tilde{T}_0 \geq T_0$ such that $\hat{J}_M(\tilde{T}_0) \leq q_0/L_f(\omega_{q_0})$ where $q_0 : q_0/L_f(\omega_{q_0}) = \sup\limits_{0<q<1}\{q/L_f(\omega_q)\}$).*

Theorem 2. *Let all nontrivial solutions to the equation* (11) *be unbounded as $t \to \infty$ and let otherwise the hypothesis of Theorem 1 be satisfied.*

Then: 1) for any mapping F satisfying conditions (3)*, Problem 1 is equivalent, on the function class $AC_n^{loc}(I_T)$, to the operator equation* (7) *where V is defined by* (20) *so that Problem 1 has a unique solution $\hat{x}$ defined by Theorem 1; 2) if Assumption 1 is valid, i.e., F is SVO, then previous statement holds $\forall T \geq \tilde{T}$, and, in addition, if the limiting condition* (17) *is satisfied, then $\hat{x}$ is a unique solution of Problem 3 (as a singular Cauchy problem); 3) if $f \in \tilde{\mathrm{Lip}}_n$ ($f \in \mathrm{Lip}_n(a)$, F is SVO and* (18) *is true) then $\hat{x}$ is a unique solution of Problem 2, i.e., it is a unique bounded solution to the equation* (1).

Theorem 3. *Let no solution of the equation* (11) *be tending to zero as $t \to \infty$ other than $x(t) \equiv 0$ and let the limiting condition* (17) *be valid; let otherwise the hypothesis of Theorem 1 be satisfied.*

Then for any mapping F satisfying conditions (3) *and Assumption 1, Problem 3 is equivalent to functional-integral equation* (7) *where V is defined by* (20)*, so that Problem 3 has a unique solution $\hat{x}$ defined by Theorem 1.*

Remark 7. For [4], the existence and uniqueness theorem to a singular Cauchy problem is a particular case of Theorem 3. If $A(t) \equiv 0$, then Theorem 3 turns into the Caratheodory- or Kudryavtsev-type theorem respectively.

5. Model example with a linear non-Volterra operator

Let us consider an example generalizing one suggested by referee E.I. Bravyi (see [3]). We consider FDE

$$x' = ax/t + bx(1)/t + d/t^3, \quad 1 \leq t < \infty, \tag{23}$$

where a, b, d are parameters, $a + b \neq 0$. The general solution of the equation (23) is given as follows: $x(t) = ct^a - d/[t^2(a+2)] - b[c(a+2) - d]/[(a+b)(a+2)]$ $(a \neq 0 \wedge a \neq -2)$, $x(t) = c + b(c - d/2)\ln t - d/(2t^2)$ $(a = 0)$, $x(t) = c/t^2 + (d/t^2)\ln t + cb/(2-b)$ $(a = -2)$, where c is an arbitrary constant. For $a \geq 0$, there exists a unique solution bounded as $t \to \infty$:

$$x(t) = d[b/(a+b) - 1/t^2]/(a+2), \quad a \geq 0. \tag{24}$$

In our notation we obtain $n = 1$, $A(t) = a/t$, $M(t) = b/t$, $g(t) = d/t^3$, $f(t, x) \equiv x$, $f \in \tilde{\mathrm{Lip}}_1$, $(FNx)(t) \equiv (Fx)(t) \equiv x(1)$, $L_f = 1$. For $a > 0$, we define $J_M(t) = |b| \int\limits_t^\infty (t^a/s^{a+1})ds \equiv |b|/a$, $J_g(t) = |d| \int\limits_t^\infty (t^a/s^{a+3})ds \equiv |d|/[t^2(a + 2)]$. Accoding to the theorems of Section 4, we fix q, $0 < q < 1$, and suppose that

$$\hat{J}_M(1) = |b|/a \leq q, \quad \hat{J}_g(1) = |d|/(a+2) \leq \omega(1-q). \tag{25}$$

To satisfy (25) for $\hat{J}_g(1)$, we take $\omega \geq \omega_q = |d|/[(a+2)(1-q)]$. In $S_1(\omega)$ we consider the equation

$$x(t) = -\int\limits_t^\infty (t/s)^a[bx(1)_/s + d/s^3]ds, \quad t \geq 1, \tag{26}$$

which has an exact solution, namely, from (26) we have $x(1) = -bx(1)/a - d/(a + 2)$, so that once more from (26) we obtain

$$x(t) = -\int\limits_t^\infty (t/s)^a\{d/s^3 - abd/[s(a+2)(a+b)]\}ds \equiv d[b/(a+b) - 1/t^2]/(a+2), \tag{27}$$

that is the same as (24). For the exact formula (24), we have the estimate $|x(t)| \leq |d| \max\{a, |b|\}/[|a+b|(a+2)]$, and, accoding to the theorems of Section 4, we obtain the estimate $|\hat{x}(t)| \leq |d|/[(a + 2)(1 - q)]$, if only $|b|/a \leq q$. It is easily to check it for the exact solution.

It should be noted that: 1) although $J_g(t) \to 0$ as $t \to \infty$, $x(t)$ does not tend to zero as $t \to \infty$, but it is not a contradiction because F is not a Volterra operator; 2) for $a = 0$, we cannot use our theorems because $J_M(1) = |b| \int\limits_1^\infty (1/s)ds = \infty$.

For a history of matter, other examples and applications, see, e.g., [1], [2], [3], [4], [9].

This work was supported by RFBR, poject N 02-01-00050.

References

[1] Konyukhova N.B. *Existence and uniqueness of solutions of singular Cauchy problems for systems of nonlinear functional differential equations* // Soviet Math. Dokl. — 1988. — No. 1 (36). — P. 126-128. MR 88h:34047; ZM 652.34004.

[2] Konyukhova N.B. *Singular Cauchy problems for systems of ordinary differential and functional-differential equations* file://Soobsch. po Prikl. Mat. VC AN SSSR. Moscow, 1988. — 66 p. (in Russian). MR 90e:34123; ZM 717.34069.

[3] Konyukhova N.B. *Singular Cauchy problems for some systems of nonlinear functional-differential equations* file://Diff. Eq. — 1995. — No. 8 (31). — P. 1286-1293. MR 97i:34093; ZM 863.34074.

[4] Russel D.L. *Numerical solution of singular initial value problems* file://SIAM J. Numer. Analys. — 1970. — No. 3 (7). — P. 399-417.

[5] Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatulina L.F. *Introduction to the theory of functional-differential equations*// Moscow: "Nauka", 1991.— 278 p. (in Russian).

[6] Coddington E.A., Levinson N. *Theory of Ordinary Differential Equations*// New York — Toronto — London: McGraw-Hill Book Co., Inc. — 1955.

[7] Kudryavtsev L.D *Stabilization problems for ordinary differential equations* // Diff. Uravn. — 1993. — No. 12 (29). — P. 2056-2078 (in Russian).

[8] Chechik V.A. *The investigation to systems of ordinary differential equations with a singularity* // Trudy Moskov. Matem. Obsch. — 1959. — Vol. 8. — P. 155-197 (in Russian).

[9] Konyukhova N.B. *Singular Cauchy problems for systems of ordinary differential equations* // USSR Comput. Maths Math. Phys. — 1983. — No. 3 (23). — P. 72-82. MR 85h:34005; ZM 529.34003.

N. Konyukhova, Dorodnicyn Computing Centre, Russian Academy of Sciences, Vavilov str., 40, Moscow 119991, Russia

E-mail: nadja@ccas.ru

ON DIMENSION OF A SYSTEM OF DIFFERENTIAL OPERATORS WITHOUT MIXED DERIVATIVES

V. V. Limansky and D. V. Limansky
Donetsk National University, Ukraine

The example of a system of maximal linearly independent differential polynomials consisting of "pure"derivatives and having the space of subordinated operators of intermediate dimension is given.

Keywords: Dirichlet boundary-value problem, harmonic function, Stone-Weierstrass theorem

1. Introduction

In this paper we study conditions for a differential polynomial $Q(D)$ to be subordinate to a system of other ones $\{P_j(D)\}_1^N$ in the spaces $L_p(\Omega)$. In other words, we consider the problem of description of the linear spaces $L_\Omega(P_1,\ldots,P_N)$, depending, in general, on Ω and $p\in[1;\infty]$, of differential operators $Q(D)$, satisfying the estimate

$$\|Q(D)f\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C\left[\sum\nolimits_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_{L_p} + \|f\|_{L_p}\right], \quad \forall f\in C^\infty(\overline{\Omega}) \tag{1}$$

with some constant C independent of $f\in C^\infty(\overline{\Omega})$. Here $D=(D_1,\ldots,D_n)$, $\quad D_j=\partial/\partial x_j$.

The above problem was completely solved by Hörmander in the case $N=1$ (and $p=2$) [1] (see also [2], [3]). For $N>1$ the spaces $L(P_1,\ldots,P_N)$ were described in some cases. More precisely, the coercivity criterion, i.e. a criterion for the maximal possible dimension of the spaces $L(P_1,\ldots,P_N)$ for $1<p<\infty$, has been obtained by K.T.Smith [5] and O.V.Besov [6] (see also [4]). Further, the spaces $L(P_1,\ldots,P_N)$ were described by V.P.Il'in for a number of domains Ω ($\subset\mathbb{R}^n$) in the case of differential monomials $P_j(D)$ (see [4], p. 13). And, finally, two classes of operators $\{P_j(D)\}_1^N$ for which the dimension of the space $L(P_1,\ldots,P_N)$ is minimal possible, i.e. $\dim L(P_1,\ldots,P_N)=N+1$, were indicated by M.M.Malamud in [7].

For further considerations we need the following result from [7].

Theorem 1. [7] *Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ and let $\{P_j(D)\}_1^N$ be differential operators with constant coefficients. If*

a) their symbols $\{P_j(\xi)\}_1^N$ are algebraically independent;

b) the generic fiber of the mapping

$$P=(P_1,\ldots,P_N):\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^N$$

is irreducible (i.e. the algebraic manifolds

$$P^{-1}(\alpha)=V_\alpha=V(P_1-\alpha_1,\ldots,P_N-\alpha_N)=\{x\in\mathbb{C}^n: P_1(x)-\alpha_1=\ldots=P_N(x)-\alpha_N=0\}$$

are irreducible for almost all $\alpha\in\mathbb{C}^N$), then estimate (1) *is equivalent to the equality*

$$Q(D)=\lambda_0+\sum\nolimits_{j=1}^N \lambda_j P_j(D) \tag{2}$$

with some $\lambda_j\in\mathbb{C},\ 0\leqslant j\leqslant N$, i.e. to the equality $\dim L(P_1,\ldots,P_N)=N+1$.

As a corollary of this result, it was shown in [7] that for linearly independent operators

$$P_j(D)=\sum\nolimits_{k=1}^n a_{jk}D_k^{l_k}, \quad l_k>0, \quad 1\leqslant k\leqslant n; \quad 1\leqslant j\leqslant N=n-1, \tag{3}$$

whose linear span contains no differential monomials $D_k^{l_k}$, $k\leqslant n$, the equality $\dim L(P_1,\ldots,P_N)=N+1$ is true.

In [7] M. M. Malamud formulated the following conjecture. Does the equality $\dim L(P_1,\dots,P_N) = N+1$ hold true for a system of linearly independent operators

$$P_j(D) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} a_{jk} D_k^{l_{jk}}, \quad l_{jk} > 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n; \quad 1 \leqslant j \leqslant N = n-1 \tag{4}$$

with an arbitrary matrix of degrees (l_{jk}) if $\operatorname{span}\{P_j(D)\}_1^N$ contains no polynomials in one variable? In [7] the validity of this hypothesis was established in two cases:

1) a matrix of coefficients (a_{jk}) is triangular, i. e. $a_{jk} = 0$ for $j > k$;

2) a matrix of exponents (l_{jk}) is of the following form: $l_{jk} = l_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant N$.

In the case $N = 2$ the conjecture was set in [10]. The condition of algebraic nature (Theorem 1) under which the equality $\dim L(P_1,\dots,P_N) = N+1$ holds true, was formulated and proved in [9]. Using this statement we have confirmed the hypothesis of M. M. Malamud for $N = 2$ in more general formulation. Some particular cases of the hypothesis have been established in [8] for $N = 3$.

If $N > 2$, the conjecture was proved in a modified form.

Theorem 2. [11] *Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ and let $\{P_j(D)\}_1^N$ be differential polynomials without mixed derivatives:*

$$P_i(D) = \sum\nolimits_{j=1}^{n} P_{ij}(D_j), \quad P_{ij} \in \mathbb{C}[z_k], \quad P_{ij} \neq const, \quad n > N. \tag{5}$$

Suppose also that:

a) their symbols $\{P_j(\xi)\}_1^N$ are linearly independent;

b) $\operatorname{span}\{P_j(D)\}_1^N$ does not contain k linearly independent polynomials in k variables for each $k \leqslant N-1$.

Then estimate (1) *is equivalent to equality* (2) *with some $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant j \leqslant N$, i.e. to the equality* $\dim L(P_1,\dots,P_N) = N+1$.

In this communication we present the following result.

Theorem 3. *Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^4$ defined below, and let $\{P_j(D)\}_1^4$ be the following differential polynomials in $L_2(\Omega)$:*

$$P_1(D) := \sum\nolimits_1^4 D_i^4, \quad P_2(D) := D_1^2 - D_2^2, \quad P_3(D) := D_1^3 - D_2^3, \quad P_4(D) := D_1 - D_2. \tag{6}$$

Then $P_4 \in L(P_1,P_2,P_3)$, i.e., $\dim L(P_1,P_2,P_3) > 4$.

Remark. It is obvious that $P_4 \notin \operatorname{span}(P_1,P_2,P_3)$, so $\dim L(P_1,P_2,P_3) > 4$. Thus, Theorem 3 shows that M.M.Malamud's conjecture from [7] is not true.

Proving this Theorem is the main purpose of this work.

2. Sketch of the proof of Theorem 3

2.1. **Change of domain.** Changing the variables

$$x_1' = \sqrt{3}(x_1 - x_2), \quad x_2' = x_1 + x_2, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = x_4, \tag{7}$$

we obtain a new form of operators $\{P_j(D)\}_2^4$:

$$P_2(D') = 4\sqrt{3}D_1'D_2', \quad P_3(D') = 6\sqrt{3}D_1'({D_1'}^2 + {D_2'}^2) := 6\sqrt{3}D_1'\Delta', \quad P_4(D') = 2\sqrt{3}D_1'.$$

Here D' denotes the operator D in the coordinates x_i'. The change of variables (7) takes the domain Ω to the cube $\Omega' := (0;\pi)^4$. Hence the including $P_4 \in L_\Omega(P_2,P_3)$ is equivalent to the including

$$D_1 \in L(D_1D_2, D_1\Delta) \tag{8}$$

in the space $L_2(\Omega)$, where $\Omega = (0;\pi)^4$. (The dashes over all symbols are omitted).

2.2. **Converse assumption.** Suppose that (8) is not true. This means the existing of functions $f_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$ such that

$$f_n \to 0, \quad D_1 D_2 f_n \to 0, \quad D_1 \Delta f_n \to 0 \text{ as } n \to \infty; \quad \|D_1 f_n\| = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Here and in the sequel we mean the convergence and norms with respect to L_2 – topology (if the contrary is not mentioned).

2.3. **Reduction to real-valued functions f_n.** From the equality $\|D_1 f_n\| = 1$ we obtain that either $\|D_1 \operatorname{Re} f_{n_k}\| > \alpha$ or $\|D_1 \operatorname{Im} f_{n_k}\| > \alpha$ for some $\alpha > 0$ and some subsequence $\{n_k\}$. Then, substituting f_n for $\frac{\operatorname{Re} f_n}{\|D_1 \operatorname{Re} f_n\|}$ or $\frac{\operatorname{Im} f_n}{\|D_1 \operatorname{Im} f_n\|}$ respectively we can assume that the relations (9) are satisfied with real-valued functions $\{f_n\}_1^\infty$.

2.4. **Reduction to harmonic functions $D_1 f_n$.** Consider the following boundary-value problem in Ω:

$$\Delta u_n = D_1 \Delta f_n, \tag{10}$$

$$u_n \,|_{\Gamma \times K} = 0\ , \tag{11}$$

where $K := [0;\pi]^2$ (with respect to x_3 and x_4), $\Gamma := \partial K$ and $\Delta := \sum_{i=1}^4 D_i^2$. Let u_n be a solution of the problem (10) - (11). Taking into account the apriori estimate

$$\|u_n\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant C \|D_1 \Delta f_n\|_{L_2(\Omega)}$$

for the Dirichlet boundary-value problem (10) - (11), we obtain from (9) that $u_n \to 0$, $D_1 u_n \to 0$, $D_2 u_n \to 0$.

Put $w_n = w_n(x_1, \dots, x_4) := \int_0^{x_1} u_n(t, x_2, x_3, x_4)\, dt$. Then the inequality $\left|\int_0^{x_1} u_n \, dt\right| \leqslant \sqrt{x_1}\|u_n\|$ implies that $w_n \to 0$. Hence we conclude that all relations (9) remain valid with f_n replaced by $\frac{f_n - w_n}{\|D_1(f_n - w_n)\|}$. Moreover, rewriting (10) in the form $\Delta(D_1(f_n - w_n)) = 0$ we arrive at the following relations:

$$f_n \to 0, \quad D_1 D_2 f_n \to 0 \text{ as } n \to \infty; \quad D_1 \Delta f_n = 0, \quad \|D_1 f_n\| = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

In other words, we can assume $D_1 f_n$ to be harmonic functions in Ω.

2.5. **Decomposition of $D_1 f_n$ in the sum of two functions.** $D_1 f_n = h_n + g_n$, where $g_n = \int_0^{x_2} D_1 D_2 f_n(x_1, t, x_3, x_4)\, dt$, and h_n does not depend on x_2. Additionally,

$$g_n \to 0, \quad g_n \,|_{x_2 = \pi} \to 0 \text{ as } n \to \infty; \quad g_n \,|_{x_2 = 0} = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.6. **Reduction to even and odd cases.** Applying decompositions of the form

$$\varphi(x_1, \dots, x_4) = \frac{\varphi(x_1, \dots, x_4) + \varphi(x_1, \pi - x_2, x_3, x_4)}{2} + \frac{\varphi(x_1, \dots, x_4) - \varphi(x_1, \pi - x_2, x_3, x_4)}{2},$$

we can assume that

$$f_n \left|_{x_2 = x_2'} = f_n \right|_{x_2 = \pi - x_2'}, \quad g_n \left|_{x_2 = x_2'} = g_n \right|_{x_2 = \pi - x_2'}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$
$$g_n \to 0, \quad g_n \,|_{x_2 = 0} = g_n \,|_{x_2 = \pi} \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

Applying decompositions of the form

$$\varphi(x_1, \dots, x_4) = \frac{\varphi(x_1, \dots, x_4) + \varphi(\pi - x_1, x_2, x_3, x_4)}{2} + \frac{\varphi(x_1, \dots, x_4) - \varphi(\pi - x_1, x_2, x_3, x_4)}{2},$$

we can reduce our conditions to two cases:

1. Odd case:

$$f_n \left|_{x_1 = x_1'} = -f_n \right|_{x_1 = \pi - x_1'}, \ g_n \left|_{x_1 = x_1'} = g_n \right|_{x_1 = \pi - x_1'}, \ h_n \left|_{x_1 = x_1'} = h_n \right|_{x_1 = \pi - x_1'}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

2. Even case:

$$f_n \left|_{x_1 = x_1'} = f_n \right|_{x_1 = \pi - x_1'}, \ g_n \left|_{x_1 = x_1'} = -g_n \right|_{x_1 = \pi - x_1'}, \ h_n \left|_{x_1 = x_1'} = -h_n \right|_{x_1 = \pi - x_1'}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

2.7. **Approximation of h_n with trigonometric polynomials.** First we consider the odd case (13). Let $\|g_n\| < \varepsilon$, $\|g_n|_{x_2=0}\| < \varepsilon$. Then $D_1 f_n = \theta h_n + (h_n - \theta h_n) + g_n$. Here we define a function θ such that

$$\theta = \theta(x_1) := \begin{cases} 0, & x_1 \in (-\infty; 0] \cup [\pi; +\infty); \\ 1, & x_1 \in [\alpha; \pi - \alpha], \end{cases}$$

and

$$0 \leqslant \theta(x_1) \leqslant 1, \quad \theta(x_1) \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \alpha = \frac{\varepsilon^2}{2C^2\pi^3}, \quad |h_n| < C, \quad \|(h_n - \theta h_n) + g_n\| < 2\varepsilon.$$

By Stone – Weierstrass theorem, $\left|\theta h_n(x_1, x_3, x_4) - \sum_{s=1}^N a_s(x_3, x_4) \sin s x_1\right| < \frac{\varepsilon}{\pi^2}$. It follows that

$$D_1 f_n = \sum\nolimits_{s=1}^N a_s \sin s x_1 + p_n, \quad \|p_n\| < 3\varepsilon.$$

2.8. **Estimate for the Fourier coefficients.** Since $a_s = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\sum_1^N a_k \sin k x_1\right) \sin s x_1\, dx_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (D_1 f_n - p_n) \sin s x_1\, dx_1 = -\frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi p_n \sin s x_1\, dx_1 + \int_0^\pi s f_n \sin s x_1\, dx_1\right)$, we have

$$\|a_s\| \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}}\varepsilon\sqrt{9 + s^2}.$$

Consequently, $D_1 f_n = \sum_{k=T+1}^N a_k \sin k x_1 + q_n, \quad \|q_n\| \leqslant R_1(T)\varepsilon$. (Here T is some constant that will be choosen later).

2.9. **Solution of the Dirichlet problem.** Using functions of the type θ and Stone – Weierstrass theorem once more, we represent the restriction of $D_1 f_n$ to $\Gamma \times K$ as a sum of three functions $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, where $\gamma_1 := \sum_{T+1}^N a_k \sin k x_1$, $\gamma_2 := \sum_1^M b_l \sin l x_2$, and γ_3 satisfies $\|\gamma_3\| < R_2(T)\varepsilon$. Therefore,

$$D_1 f_n = \sum\nolimits_{k=T+1}^N a_k \sin k x_1 \frac{\operatorname{ch} k(x_2 - \pi/2)}{\operatorname{ch}(k\pi/2)} + \sum\nolimits_{l=1}^M b_l \sin l x_2 \frac{\operatorname{ch} l(x_1 - \pi/2)}{\operatorname{ch}(l\pi/2)} + \sigma_n(x),$$

where $\|\sigma_n(x)\| < R_3(T)\varepsilon$. It follows that

$$\varphi_n + \psi_n + \mu_n = 0,$$

where

$$\varphi_n := \sum_{k=T+1}^N a_k \sin k x_1 \left(\frac{\operatorname{ch} k(x_2 - \pi/2)}{\operatorname{ch}(k\pi/2)} - 1\right), \ \psi_n := \sum_{l=1}^M b_l \sin l x_2 \frac{\operatorname{ch} l(x_1 - \pi/2)}{\operatorname{ch}(l\pi/2)},$$

$$\|\mu_n\| < R_4(T)\varepsilon.$$

2.10. **Estimates for $\|\varphi_n\|$, $\|\psi_n\|$ and (φ_n, ψ_n). Choice of T.** After some computations we obtain

$$\|\varphi_n\|^2 = \sum\nolimits_{k=T+1}^N \alpha_k \|a_k\|^2, \quad \|\psi_n\|^2 = \sum\nolimits_{l=1}^M \beta_l \|b_l\|^2, \quad (\varphi_n, \psi_n) = \sum\nolimits_{k=T+1}^N \sum\nolimits_{l=1}^M \gamma_{kl}(a_k, b_l),$$

and $\frac{\gamma_{kl}^2}{\alpha_k \beta_l} < \frac{16k^6}{l(k^2+l^2)^4}$. Cauchy – Schwarz – Bunyakovskii inequality gives

$$|(\varphi_n, \psi_n)| \leqslant \sqrt{\sum\nolimits_{k,l} \frac{\gamma_{kl}^2}{\alpha_k \beta_l}} \|\varphi_n\|\, \|\psi_n\|. \tag{15}$$

The series $\sum_{k,l} \frac{16k^6}{l(k^2+l^2)^4}$ is convergent. Hence we can choose T such that

$$\sum\nolimits_{k=T+1}^N \sum\nolimits_{l=1}^M \frac{\gamma_{kl}^2}{\alpha_k \beta_l} < \frac{1}{4}. \tag{16}$$

2.11. **Contradiction with the assumption.** Using (15) and (16), we get $|(\varphi_n, \psi_n)| < \frac{1}{2}\|\varphi_n\|\,\|\psi_n\|$. It follows that $\|\varphi_n + \psi_n\| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\|\varphi_n\|$ and $\frac{1}{\sqrt{2}}\|\varphi_n\| \leqslant \|\varphi_n + \psi_n\| = \|\mu_n\| < R_4(T)\varepsilon$, i.e., $\|\varphi_n\| < \sqrt{2}R_4(T)\varepsilon$. Further, we denote

$$\tau_n := \sum\nolimits_{k=T+1}^{N} a_k \sin kx_1 \frac{\operatorname{ch} k(x_2 - \pi/2)}{\operatorname{ch}(k\pi/2)}, \quad \kappa_n := \sum\nolimits_{k=T+1}^{N} a_k \sin kx_1.$$

It can be shown that $\|\tau_n\| \leqslant 0,8\|\kappa_n\|$ and, hence, $\|\varphi_n\| \geqslant \|\tau_n\| - \|\kappa_n\| \geqslant 0,2\|\tau_n\|$, $\|\tau_n\| < 5\sqrt{2}R_4(T)\varepsilon$; $\|\kappa_n\| = \|\varphi_n - \tau_n\| \leqslant \|\varphi_n\| + \|\tau_n\| < R_5(T)\varepsilon$. But $D_1 f_n = \kappa_n + q_n$. We have that

$$1 = \|D_1 f_n\| \leqslant R_5(T)\varepsilon + R_1(T)\varepsilon \to 0 \;\text{ as }\; n \to \infty. \tag{17}$$

The relation (17) gives a contradiction.

The even case (14) is considered similarly.

Theorem 3 is proved.

Abstract. The example of a system of maximal linearly independent differential polynomials consisting of "pure"derivatives and having the space of subordinated operators of intermediate dimension is given.

References

[1] Lars Hörmander, *On the theory of general partial differential operators.* Acta Math. 94(1955), 161-248.

[2] Lars Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators.* Vol.II, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[3] Yu.M. Berezanskiĭ, *Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators*, "Naukova Dumka", Kiev, 1965; English transl., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.

[4] O.V. Besov, V.P. Il'in, and S.M. Nikol'skiĭ, *Integral representations of functions and imbedding theorems*, "Nauka", Moscow, 1996.

[5] K.T. Smith, *Inequalities for formally positive integro-differential forms* // Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 368-370.

[6] O.V. Besov, *On coercivity in nonisotropic Sobolev spaces* // Math. Sb. **73 (115)** (1967), 585-599, English transl. in Math. USSR Sb. **2** (1967).

[7] M.M. Malamud, *Estimates for systems of minimal and maximal differential operators in $L_p(\Omega)$* // Trans. Moscow Math. Soc. **56** (1995), 206-261.

[8] D.V. Limansky, *On subordinated conditions for systems of differential operators in the spaces $L_p(\Omega)$. The case of three operators* // Works of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics. Vol.4 — Donetsk, 1999. - pp. 100-106 (Russian).

[9] V.V. Limansky, D.V. Limansky, *On estimates for a system of maximal differential operators* // Methods of Functional Analysis and Topology. Vol.4 (1998), N^{o}3, pp.45-57.

[10] V.V. Limansky, D.V. Limansky, *On estimates for one maximal differential operator to be subordinated to a system of two others* // Reports of National Academy of Sciences of Ukraine. N^{o}12, 1998. - pp.24-28 (Russian).

[11] D.V. Limansky, *On estimates for a system of differential polynomials without mixed derivatives* // Spectral and Evolution Problems: Proceedings of the Eleventh Crimean Autumn Mathematical School-Simposium (KROMSH-XI). Vol. 11. Simferopol, 2001. – P. 117-120.

V. V. Limansky and D. V. Limansky, Math. Dept., Donetsk National University, Universitetskaya 24, Donetsk 83055, Ukraine

E-mail: `lim@univ.donetsk.ua`

On partial coercive monotone type problems

Solonoukha O. V.,
Kiev, NTUU “KPI", Ukraine

For some noncoercive in classical sense problems it is sufficiently to localize such problem on some convex closed set with a nonempty interiority with the "acute angle"conditions on a boundary. This set may be not a ball. Using last results of set-valued analysis we propose a new "Equilibrium theorem". As applications we consider a localization method for some partial differential problems. As examples the problems with weighted p-Laplacians are analyzed.
Key words: Equilibrium theorem, "acute angle"condition, coercivity, partial coercivity, generalized pseudomonotone operator, partial subdifferential, radially semicontinuous operator of semibounded variation
AMS 35R35, 35R70

1. Introduction

The studying of the majority of the monotone type problems is based on Leray-Schauder theorem. Thus, we have to localize the problem of such a type on some bounded set. Usually we use the so-called property of coercivity (values of operator tend to infinity sufficiently quickly as the argument tends to ∞). The surjectivity of mappings was proved for many classes of generalized pseudomonotone operators with this property (see works by H.Bresis, F.Browder, P.Hess, J.-L.Lions, I.V.Skrypnik, V.S.Mel'nik, V.Barbu, A.G.Kartsatos etc.) We propose condition on some convex closed set where the problem's solution exists (outside of this set the behavoir of operator values is not considered). This condition is the "acute angletype.

In previous works by autor the idea of perturbation was used. But for perturbed method we need the construction of compensating operator and some estimates.

2. Equilibrium theorem and existence of solutions for inclusions

First we consider the equilibrium theorem in finite–dimensional euklid space F. Let $Conv(F)$ be a totality of all nonempty convex closed sets from the space F, 2^F be a totality of all sets, A be a set–valued operator, $\mathrm{Dom}(A)$ be a set where the value of operator is not an empty set, $\overline{\mathrm{co}}Z$ be a convex clozure of Z. Let us define the upper support function for A by the formula $[A(y),\xi]_+ = \sup\limits_{d\in A(y)} \langle d,\xi\rangle$.

Definition 1. The mapping $A : Y \to 2^F$ is called *strong* if $\mathrm{Dom}(A) = F$.

Definition 2. The mapping $A : F \to 2^F$ is *upper semicontinuous* if for any $\varepsilon > 0$ and $y \in \mathrm{Dom}(A)$ there exists $\delta > 0$ such that $A(z) \subset A(y) + B_\varepsilon(0)$ $\forall z \in B_\delta(y)$, $B_\varepsilon(0)$ is a ball of center 0 and radius ε.

Theorem 1. ("Equilibrium theorem") *Let F be a finite-dimensional space, $D \subset F$ be a convex and closed set with nonempty interior, ∂D be a boundary, $y_0 \in \mathrm{int}D$, $A : \overline{D} \to 2^F$ be a strong upper semicontinuous map, and "acute angle's condition"holds:*

$$[A(y), y - y_0]_+ \geq 0 \qquad \forall y \in \partial D \tag{1}$$

Then there exists $x \in \overline{D}$ such that $0 \in \overline{\mathrm{co}}A(x)$.

Prof of Equilibrium theorem. Without loss of generality we consider $y_0 = 0$ (else we can substitute y for $y - y_0$). Also we suppose that $A : F \to Conv(F)$ (then $\overline{\mathrm{co}}A = A$ (see [6])).

Let us consider set-valued map $G : F \to 2^{\partial D}$ which is defined by formulas

$$G(y) = \begin{cases} \partial D, & \text{as } y = 0, \\ hy, \quad \text{where } h = \sup\{h > 0 : \ hy \in \partial D\}, & \text{as } y \neq 0. \end{cases}$$

G is strong, moreover, $G_{|y\neq 0}$ is single-valued: $0 \in \mathrm{int}D$, thus, $\|hy\|_F \geq \varepsilon \forall hy \in \partial D$ and $0 < \varepsilon^{-1}\|y\|_F \leq h \leq \varepsilon\|y\|_F^{-1} < \infty$ for $y \neq 0$. If $y_n \to 0$, then for bounded set $\{w_n \in G(y_n)\} \subset \partial D$ there exists a convergent subsequence $w_m \to w \in \partial D = G(0)$. If $y_n \to y \neq 0$, then there exists a subsequence $\{y_k\} \cap \{0\} = \emptyset$, $w_k = h_k y_k$, and $0 < h_k < \infty$ is bounded. We can choose convergent subsequences: $y_m \to y \neq 0$, $h_m \to h \neq 0$. But then $w_m = h_m y_m \to w = hy$. Moreover, $\sup\limits_{d\in G}[A(d(y)), y]_+ = 0$ as $y = 0$, $\sup\limits_{d\in G}[A(d(y)), y]_+ \geq h[A(z), z]_+$, as $y \neq 0$ where $hz = y$, $z \in \partial D$. With cone $P = \{0\}$ the mapping A satisfies conditions of Theorem 2 [8], i.e. $\exists x \in \overline{D}$ such that $0 \in A(x)$.$\blacksquare$

Now we can consider infinity–dimensional case.

Let X be a reflexive Banach space, X^* be its topological dual, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ be the dual pairing on $X \times X^*$, $Conv(X^*)$ be the totality of all nonempty convex closed sets from the space X^*, $A : X \to Conv(X^*)$ be a strong convex-closed-set-valued mapping. By graph(A) we denote the graph of operator A: graph$(A) = \{(y, w) \in Dom(A) \times X^* : w \in A(y)\}$. Now the upper support function and upper norm for A are defined by the formulas

$$[A(y), \xi]_+ = \sup_{d\in A(y)} \langle d, \xi\rangle, \qquad \|A(y)\|_+ = \sup_{d\in A(y)} \|d\|_{X^*}.$$

Taking into account that the support function defines an operator to within a convex closure of values (see Lemma 1 [6]), this theory holds for any set-valued operator.

Definition 3. A mapping $A : X \to Conv(X^*)$ is said to be *generalized pseudomonotone* if for arbitrary $\{(y_n, w_n)\} \subset graph(A)$ such that $y_n \to y$ weakly in X, $w_n \to w$ weakly in X^* and $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \langle w_n, y_n - y\rangle \leq 0$, we have $w \in A(y)$ and $\langle w_n, y_n\rangle \to \langle w, y\rangle$.

Definition 4. A mapping $A : X \to Conv(X^*)$ *has the property* $(\mathfrak{M})$ if for arbitrary $\{(y_n, w_n)\} \subset graph(A)$ such that $y_n \to y$ weakly in X, $w_n \to w$ weakly in X^* and $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \langle w_n, y_n - y\rangle \leq 0$, we have $w \in A(y)$.

Definition 5. A mapping $A : X \to Conv(X^*)$ is said to be *monotone* if for any $\{(y_n, w_n)\} \subset graph(A)$ $(n = 1, 2)$ we have that $\langle w_1 - w_2, y_1 - y_2\rangle \geq 0$. A monotone mapping is *maximal monotone* if its graph is not subset of some other monotone operator's graph.

Definition 6. A mapping $A : X \to Conv(X^*)$ is said to be *bounded* if an image of bounded set is bounded too. A mapping A is said to be *locally bounded (s–weakly locally bounded)* if for any $z \in X$ there exists $\varepsilon > 0$ such that $\sup\limits_{\zeta\in B_\varepsilon(z)\cap \mathrm{Dom}A} \|A(\zeta)\|_+ \leq N$ (if for any $y_n \to y$ weakly in X there exists the subsequence $\{y_{n_k}\}$ such that $\|A(y_{n_k})\|_+ \leq N$).

Using "Equilibrium theorem"1 we can modify Theorem [10] and Theorem 5 [8]. Note that the proposed theorem is different from Theorem [10] and Theorem 5 [8] since we use different "acute angle's condition": earlier this condition was formulated on ball, we consider this condition on some convex closed set with nonempty interior. Theorem 1 shows that this modification is natural. But for convenience of readers we propose the sketch of proof.

Theorem 2. *Let X be a reflexive Banach space, $A : X \to Conv(X^*)$ be a locally bounded on each finite–dimensional F mapping which has the property $(\mathfrak{M})$. Moreover, there exists some convex closed set $D_r \subset X$ with nonempty interior ($y_0 \in \mathrm{int}D_r$) and with boundary ∂D_r such that for $f \in X^*$ the following estimate holds:*

$$[A(y) - f, y - y_0]_+ \geq 0 \qquad \forall y \in \partial D_r. \tag{2}$$

Then the solution set of inclusion

$$A(y) \ni f, \qquad y \in \overline{D_r}$$

is nonempty and compact.

Sketch. We consider $f = 0$, $y_0 = 0$. In general case we can move the coordinate system: $\widetilde{A}(\widetilde{y}) = A(\widetilde{y}) - f$, $\widetilde{y} = y - y_0$.

Let $F(X)$ be a totality of finite-dimensional subspaces $F \subset X$. For arbitrary $F \in F(X)$ we introduce $I_F : F \to X$ ($\|I_F y_F\|_X = \|y_F\|_F \, \forall y_F \in F$), $I_F^* : X^* \to F^*$ is a dual operator, $D_{rF} = D_r \cap F$, $A_F = A_{|F} : F \to 2^{X^*}$. And we introduce the auxiliaries operators

$$I_F^* A_F(y) = \bigcup_{d \in A_F} \Big\{ \sum_{\{h_i\}} \langle d(y), h_i \rangle h_i \Big\} \qquad \forall y \in D_{rF} \equiv D_r \cap F,$$

where $\{h_i\}$ is the basis of F. Since A is locally bounded on F and has the property $(\mathfrak{M})$, then $I_F^* A_F$ is upper semicontinuous (Lemma 1[9]). Hence, by "Equilibrium theorem"1 for each $F \in F(X)$ there exists $y_F \in D_{rF}$ such that $0 \in I_F^* A_F(y_F)$. We can construct the system with the finite intersection property $\{\overline{G}^w_{F_0}\}$, where $\overline{G}^w_{F_0}$ is the weak closure of $G_{F_0} = \bigcup\limits_{F \supset F_0} \Big\{ y_F \in D_{rF} : 0 \in I_F^* A_F(y_F) \Big\}$. Since X is reflexive, then $\exists\, y \in \bigcap\limits_{F \in F(X)} \{\overline{G}^w_F\}$. We obtain $0 \in A_F(y_F)$, $y_F \to y$ weakly in X, and $\overline{\lim} \langle 0, y_F - y \rangle = 0$. Thus, by property $(\mathfrak{M})$ $0 \in A(y)$. □

3. Existence of solutions for variational inequalities

In this section we propose a new sufficient conditions when a variational inequality has at last one solution. With respect to result of [9, 11, 10] we loosen a coercivity and intensify a boundness.

Denote by $N_K(y)$, $N^1_K(y$ the normal cone of the set $K \subset X$ at the point $y \in X$ and the frustum of this cone:

$$N_K(y) := \big\{ g \in X^* : \langle \xi, g \rangle_X \le 0 \quad \forall \xi \in \bigcup_{h > 0} \frac{1}{h}(K - y) \big\},$$

$$N^1_K(y) := \big\{ g \in N_K(y) : \|g\|_{X^*} \le 1 \big\}.$$

As it is well known, $N_K : X \to 2^{X^*}$ is maximal monotone operator for any closed convex set K (see [3]), i.e. it is monotone and closed in weak-strong topology of $X^* \times X$ or $X \times X^*$ (see [1]).

Lemma 1. *The mapping $\lambda N^1_K : K \to Conv(X^*)$ is bounded and generalized pseudomonotone for any $\lambda > 0$.*

Доказательство. It is sufficiently to prove for $\lambda = 1$. This map is bounded by construction.

Let $K \ni y_n \to y$ weakly in X, $N^1_K(y_n) \ni w_n \to w$ weakly in X^*, and $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \langle w_n, y_n - y \rangle \le 0$. Since $w_n \in N_K(y_n)$ and N_K is maximal monotone, then $w \in N_K(y)$ and $\langle w_n, y_n \rangle \to \langle w, y \rangle$. But $\|w_n\|_{X^*} \le 1$, i.e. $\|w\|_{X^*} \le 1$ too. Consequently, $w \in N^1_K(y)$. □

Lemma 2. *Let $A : X \to Conv(X^*)$ has bounded values. Then for any fixed convex closed set $K \subset X$ the element $y \in K$ is the solution of variational inequality*

$$[A(y), v - y]_+ \ge \langle f, v - y \rangle \qquad \forall v \in K \tag{3}$$

iff there exist $(y, \lambda) \in K \times (0, \infty)$ such that

$$A(y) + \lambda N^1_K(y) \ni f. \tag{4}$$

Доказательство. Let $y \in K$ be a solution of variational inequality. Then there exists $w \in A(y)$ such that $\langle w, v - y \rangle \ge \langle f, v - y \rangle \quad \forall v \in K$ (Lemma 4 [9]). Let us assume $d = f - w$. Then, $d \in N_K(y)$ and $\|d\|_{X^*} \le \|f\|_{X^*} + \|w\|_{X^*} \le \|f\|_{X^*} + \|A(y)\|_+ \le \lambda$, i.e. $d \in \lambda N^1_K(y)$. We get the inclusion (4): $f = d + w \in Ly + A(y) + \lambda N^1_K(y)$.

Let $y \in K$ be a solution of inclusion (4). Multiplying by $v - y$, we get

$$\langle f, v - y \rangle = [A(y) + \lambda N^1_K(y), v - y]_+ \le [A(y), v - y]_+ \, \forall v \in K.$$

□

Thus, we can consider variational inequalities as well as inclusions.

Theorem 3. *Let X be reflexive Banach space; $A : K \to Conv(X^*)$ be a bounded, generalized pseudomonotone operator; $K \subset X$ be a closed convex set. Moreover, one of following conditions holds: A satisfies "acute angle's condition"(1) on some convex closed set D_r where $y_0 \in \mathrm{int}(K \cap D_r)$ or K is bounded. Then the set of solutions for variational inequality (3) is nonempty and weakly compact in $D_r \cap K$.*

Доказательство. It suffices to show that the inclusion (4) is solvable.

By the definition $0 \in N_K(\xi)$ for any $\xi \in K$, $0 \in N_K^1(\xi)$ for any $\xi \in K$, and $[N_K^1(y), y-y_0]_+ = \|y-y_0\|_X > 0$ as $y \in \partial K$. Since

$$[A(y) - f + \lambda N_K^1(y), y - y_0]_+ = [A(y) - f, y - y_0]_+ + \\ +\lambda[N_K^1(y), y - y_0]_+ \geq \big(-\|A(y)\|_+ - \|f\|_{X^*} + \lambda\big)\|y - y_0\|_X,$$

then for arbitrary bounded set K it is sufficiently to take $\lambda = \sup_{y\in K} \|A(y)\|_+ + \|f\|_{X^*}$. And we obtain the estimate on ∂K. If K is not bounded, we use "acute angle's condition": there exists $D_r > 0$ such that $[A(y)-f, y-y_0]_+ \geq 0$ as $\|y\|_X \geq R$. Then we take $\lambda = \sup_{y\in K\cap D_r} \|A(y)\|_+ + \|f\|_{X^*}$. Thus, $[A(y) + \lambda N_K^1(y) - f, y - y_0]_+ \geq 0$ as $y \in \partial(K \cap D_r)$. Moreover, the mapping $A + \lambda N_K^1$ is bounded and has the property $(\mathfrak{M})$ as a generalized pseudomonotone mapping (see Proposition 2[11]). By Theorem 2 there exists $\hat{y}$ such that $f \in \overline{A(\hat{y})} + \lambda N_K^1(\hat{y})$.

Let $y_n \to y$ weakly in X, y_n satisfy (4). Since $\varlimsup_{n\to\infty} \langle f, y_n - y\rangle \leq 0$, using the property $(\mathfrak{M})$ we have that $f \in A(y) + \lambda N_K^1(y)$. Thus, the set of solutions is weakly compact. □

Definition 7. A mapping $A : X \to Conv(X^*)$ is said to be *"+coercive on* K if there exist $y_0 \in K$ and $c : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ such that

$$[A(y), y - y_0]_+ \geq c(\|y\|_X)\|y - y_0\|_X, \quad c(\gamma) \to \infty \text{ as } \gamma \to \infty.$$

Definition 8. A mapping A is said to be *partially "+coercive on* K if there exist a subspace $Y \subset X$ ($\mathrm{dim}Y \geq 1$), some element $y_0 \in \mathrm{int}K$ and functions $c, \widetilde{c} : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ such that $c(\gamma) \to \infty$ as $\gamma \to \infty$, $\widetilde{c}$ is proper, i.e. $\widetilde{c} \not\equiv +\infty$, and

$$[A(y), y - y_0]_+ \geq c(\|\mathrm{pr}_Y y\|_X)\|\mathrm{pr}_Y(y - y_0)\|_X - \widetilde{c}(\|\mathrm{pr}_{X\setminus Y} y\|_X))\|\mathrm{pr}_{X\setminus Y}(y - y_0)\|_X.$$

Lemma 3. *If $A : K \to Conv(X^*)$ is partially "+coercive on K, then for any $f \in X^*$ there exists set D_r such that*

$$[A(y) - f, y - y_0]_+ \geq 0 \qquad \forall y \in \partial D_r.$$

Доказательство. We choose $D_r = \{y \in B_R(y_0) : \|\mathrm{pr}_Y y\|_X = r_1, \|\mathrm{pr}_{X\setminus Y} y\|_X) = r_2\}$ where

$$r_1(c(r_1) - \|f\|_{X^*}) \geq r_2(\widetilde{c}(r_2) + \|f\|_{X^*}).$$

Since $c(\gamma) \to \infty$ as $\gamma \to \infty$ for sufficient large R this bounded convex set exists. Then on this set the "acute angle's condition"(1) hold. □

Corollary 1. *Let X be reflexive Banach space; $A : K \to Conv(X^*)$ be a bounded, generalized pseudomonotone operator; $K \subset X$ be a closed convex set. Moreover, one of following conditions holds: A is partially "+coercive on K. Then there exist D_r such that set of solutions for variational inequality (3) is nonempty on $D_r \cap K$ and weakly compact.*

4. Application to free boundary partial differential problems

Let $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ be a locally Lipschitz open bounded set with the regular boundary $\partial\Omega$, ν be an external normal by $\partial\Omega$, $Dy = (\frac{\partial y}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial y}{\partial x_n})$. We consider the boundary problem

$$-\sum_{1\leq i\leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, y, Dy) = f \qquad \text{a.e. on}\,\Omega, \tag{5}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A} = \sum_{1\le i\le n} a_i(x,y,Dy)\,\cos(x_i,\nu)$$

$$y\ge 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu_A}\ge 0, \quad y\frac{\partial y}{\partial \nu_A}=0 \qquad \text{a.e. on } \partial\Omega, \tag{6}$$

where $f\in L_q(\Omega)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p\in(n,\infty)$. We use also r and r' such that $\frac{1}{r}+\frac{1}{p}=1$, $\frac{1}{r'}+\frac{3}{p}=1$.

Let a_i satisfy the following conditions

I) (Caratheodori cond.): $a_i(\cdot,y,\xi)$ are measurable for a.a. $y\in\mathbf{R}^1$, $\xi\in\mathbf{R}^n$ and $a_i(x,\cdot,\cdot)$ are continuos at a.a. $x\in\Omega$; moreover, at a.a. $x\in\Omega$ and for all $y\in\mathbf{R}$, $\xi\in\mathbf{R}^n$ there exists nondecreasing and continuous function $\alpha:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ such that

$$|a_i(x,y,\xi)|\le\alpha(|y|)\big(\sum_{j=1}^n|\xi_j|^{p-1}+h(x)\big),\ h\in L_q(\Omega).$$

II) for $x\in\Omega$, $y\in\mathbf{R}$, $\xi,\eta\in\mathbf{R}^n$ such that $\xi\ne\eta$

$$\sum_{i=1}^n\big(a_i(t,x,y,\xi)-a_i(t,x,y,\eta)\big)(\xi_i-\eta_i)>0.$$

III) partial coercivity condition:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x,\xi_0,\xi)\xi_i\ge c_0\sum_{i\in I_1}|\xi_i|^p-\widetilde{c_0}\sum_{i\in I_2}|\xi_i|^p-g(x),$$

where $c_0,\widetilde{c_0}>0$, $I_1\cup I_2=\{0,1,2,\cdots,n\}$, $I_1\ne\emptyset$; $g\in L_1(\Omega)$.

Using condition I) and boundary conditions we obtain the variational inequality

$$\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega a_i(x,y,Dy)\frac{\partial(\xi-y)}{\partial x_i}\,dx\ \ge\int\limits_\Omega f(\xi-y)\,dx$$
$$\forall\xi\in W_p^{+,1}(\Omega)=\{y\in W_p^1(\Omega):y_{|\partial\Omega}\ge 0\}.$$

By Lemmas 2.3 and 2.6 [4] corresponding operator is bounded, continuous and generalized pseudomonotone. By property III) we have the partial coercivity of this problem and we can localize oun problem. Thus, problem (5)–(6) has at least one generalized solution $y\in W_p^{+,1}(\Omega)$.

5. Weak solvability of nondivergent problems

Let as early $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ be a locally Lipschitz open bounded set with the regular boundary $\partial\Omega$. We consider the boundary problem

$$-\sum_{1\le i\le n}a_i(x,y)\,\frac{\partial}{\partial x_i}b_i(x,y,Dy)=f \qquad \text{a.e. on } \Omega, \tag{7}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A}=\sum_{1\le i\le n}a_i(x,y)\,b_i(x,y,Dy)\,\cos(x_i,\nu)$$

$$y\ge 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu_A}\ge 0, \quad y\frac{\partial y}{\partial \nu_A}=0 \qquad \text{a.e. on } \partial\Omega, \tag{8}$$

where $f\in L_q(\Omega)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p\in(n,\infty)$. And let $\frac{1}{r_1+r_2}+\frac{1}{p}=1$, $\frac{1}{r_1'+r_2'}+\frac{3}{p}=1$.

Let a_i,b_i satisfy the following conditions

a1) (Caratheodori cond.): $a_i(\cdot,y),b_i(\cdot,y,\xi)$ are measurable for a.a. $y\in\mathbf{R}^1$, $\xi\in\mathbf{R}^n$ and $a_i(x,\cdot)$, $b_i(x,\cdot,\cdot)$ are continuos at a.a. $x\in\Omega$;

b1) at a.a. $x\in\Omega$ and for all $y\in\mathbf{R}$, $\xi\in\mathbf{R}^n$

$$|a_i(x,y)|\le\alpha_i^{1a}(x)+\alpha_i^{2a}(x)|y| \quad\text{or}\quad |a_i(x,y)|\le\alpha_i^{1a}(x)+C^a|y|^{p-1-r_2}$$

$$|b_i(x,\xi_0,\xi)| \le \alpha_i^{1b}(x) + \sum_{0\le j\le n} \alpha_{ij}^{2b}(x)|\xi_j|$$

$$\text{or} \quad |b_i(x,\xi_0,\xi)| \le \alpha_i^{1b}(x) + \sum_{0\le j\le n} C_{ij}^b|\xi_j|^{p-1-r_1}$$

where $\alpha_i^{1a} \in L_{r_1}(\Omega)$, $\alpha_i^{2a} \in L_{r_1'}(\Omega)$, $\alpha_i^{1b} \in L_{r_2}(\Omega)$, $\alpha_{ij}^{2b} \in L_{r_2'}(\Omega)$, $C^a > 0$, $C_{ij}^b > 0$;

c1) if at point $x \in \Omega$ the partial derivatives $\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,y)$ exist then

$$|\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,y)| \le \beta_i^1(x) + \beta_i^2(x)|y| \ \text{ or } \ |\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,y)| \le \beta_i^1(x) + C'|y|^{p-2-r_2}$$

where $\beta_i^1 \in L_{r_1}(\Omega)$, $\beta_i^2 \in L_{r_1'}(\Omega)$, $C' > 0$, and $\left|y\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,y)\right| \le a_i(x,y)\left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|$;

d1) $a_i(\cdot,y)$ and $a_i(x,\cdot)$ are locally Lipschitz, in particular, $\forall y$ there exists $K(\cdot,y) \in L_{r_1}(\Omega)$ such that

$$|a_i(x,y) - a_i(x,z)| \le K(x,y)|y-z| \qquad \forall z \in B_\varepsilon(x,y)(y), \tag{9}$$

where $B_\varepsilon(\cdot,\cdot)(y)$ is an ε-neighburhood of y;

e1) $a_i(x,y) \ge \widetilde{a}_i > 0$ at a.a. $x \in \Omega$ and for all $y \in \mathbf{R}^1$, and $\exists\lambda_{0i} > 0$ such that $a_i(x,(1+\lambda)y) \ge (1+\lambda)a_i(x,y)$ as $\lambda \in [0;\lambda_{0i}]$;

f1) $\sum\limits_{1\le i\le n} b_i(x,y,\xi_1,\cdots,\xi_n)\xi_i \ge c_0\sum\limits_{i\in I_1}|\xi_i|^p - \widetilde{c}_0\sum\limits_{i\in I_2}|\xi_i|^p - \varkappa$, where $c_0, \widetilde{c}_0, \varkappa > 0$, $I_1 \cup I_2 = \{0,1,2,\cdots,n\}$, $I_1 \ne \emptyset$.

Denote

$$a_{ij}^0(x,y;\delta x_j) = \limsup_{z\to x,\lambda\to+0} \frac{a_i(z+\lambda\delta x_j,y) - a_i(z,y)}{\lambda},$$

$$a_{iy}^0(x,y;h) = \limsup_{\zeta\to y,\lambda\to+0} \frac{a_i(x,\zeta+\lambda h) - a_i(x,\zeta)}{\lambda},$$

then we can construct the integral form (in [12] this construction is more detail)

$$\begin{aligned}[A(y),\xi-y]_+ = \sum_{1\le i\le n}\int_\Omega a_i(x,y)b_i(x,y,Dy)\frac{\partial(\xi-y)}{\partial x_i}dx + \\ + \sum_{1\le i\le n}\int_\Omega a_{iy}^0(x,y;\xi-y)\frac{\partial y}{\partial x_i}\,b_i(x,y,Dy)\,dx + \\ + \sum_{1\le i\le n}\int_\Omega b_i(x,y,Dy)\,(\xi-y)a_{ix}^0(x,y;dx) \ge \\ \ge \int_\Omega f(\xi-y)dx \qquad \forall\xi \in W_p^{+,1}(\Omega),\end{aligned} \tag{10}$$

where $W_p^{+,1}(\Omega) = \{z \in W_p^1(\Omega) : z_{|\partial\Omega} \ge 0\}$.

Definition. $y \in W_p^{+,1}(\Omega)$ is called **the weak solution of (7)–(8)** if y satisfies the variational inequality (10).

Analogeously to Theorem 2[12] we prove that $A : W_p^1(\Omega) \to Conv(W_q^{-1}(\Omega))$ is bounded and generalized pseudomonotone. Moreover, using condition f1) we obtain that A is partialy "+coercive. (7)–(8) has a weak solution.

Список литературы

[1] Barbu V. *Analysis and control of non-linear infinite dimensional systems.*, Acad. Press, Inc., 1995.

[2] Browder F.E., Hess P., *Nonlinear Mappings of Monotone Type in Banach Spaces*, J. Func. Anal., V.11, N 2 (1972), pp. 251-294.

[3] Clarce F., *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Willey & Sons, Inc., 1983.

[4] Laptev G.I., *First boundary-value problem for quasilinear elliptic equation with double degeneration*, Differential equation, v.30, No 6 (1994), pp.1057-1068. (in Russian).

[5] Lions J.-L., *Quelques Methodes de Resolution de Problemes aux Limities Non Lineaires*, Paris: Dunod, 1969.

[6] Mel'nik V.S., Solonoukha O.V., *On the Stationary Variational Inequalities with the Multivalued Operators*, Kibernetika i Systemnyi Analiz, Vol. 3 (1997), p. 74–89(in Russian). *English translation*: Cybernetics and System Analysis, Vol.33, N 3, May–June (1997), p. 366–378

[7] Mel'nik V.S., Zgurovskii M.Z., *Nonlinear Analysis and control of infinite dimensional systems*, "Naukova dumka", Kiev, 1999, in Russian.

[8] V.S.Mel'nik and Zgurovskii M.Z., *Ki Fan's inequality and operator inclusions in Banach spaces*, Kibernetika i Systemnyi Analiz, 2002, N2 (in Russian).

[9] Solonoukha O.V., *On the Stationary Variational Inequalities with the Generalized Pseudomonotone Operators*, Methods of Functional Analysis and Topology, Vol. 3, N 4 (1997), pp.81-95.

[10] Solonoukha O.V., *On Solvability of the Variational Inequalities with "+Coercive Multyvalued Mappings*, Nonlinear Boundary Value Problems, Vol. 9 (1999), p.126–129.

[11] Solonukha O.V., *On Solvability of Monotone Type Problems with Non-Coercive Set-Valued Operators*, Methods of Functional Analysis and Topology, Vol. 6, N1 (2000), p.66–72.

[12] Solonukha O.V., *On Existence of Solution for One Partial Differential System*, Ukr.Math.Journal, 2002, N 7 (in Russian).

O. V. Solonoukha, Ph.D., National Technical University of Ukraine "Kiev Polytechnic Institute", Chair of Mathematical Modeling of Economical Systems, prospect Peremogy, 37, Kiev, 03056, Ukraine

E-mail: `olessias@zeos.net, olesya@mses.ntu-kpi.kiev.ua`

Section 2

EVOLUTION AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Subsection 2.2

Boundary Value Problems

Предельно монотонные операторы и приложения

Г. И. Лаптев
Тульский государственный университет
Тула, Россия

В рамках теории монотонных операторов вводится новый класс операторов, названных предельно монотонными. Изучаются связи этого класса с известными: псевдомонотонными, операторами с (S_+)-свойством и (M)-свойством. В терминах нового класса характеризуются псевдомонотонные операторы. Указываются условия, при которых псевдомонотонные по Брезису операторы совпадают с псевдомонотонными по Скрыпнику. Изучаются уравнения с предельно монотонными операторами и предлагаются достаточные условия разрешимости таких уравнений.

Keywords: монотонные операторы, псевдомонотонные операторы, уравнения с монотонными операторами

1. Классификация операторов, близких к монотонным

Пусть X, X^* — вещественные банаховы пространства, сопряженные относительно двойственности (f, u), где $f \in X^*$, $u \in X$. Оператор $A : X \to X^*$, определенный на всем пространстве X и принимающий значения в X^*, называется монотонным, если для всех элементов $u, v \in X$ выполняется соотношение $(Au - Av, u - v) \geq 0$. Теория монотонных операторов стала создаваться в шестидесятые годы двадцатого столетия трудами многих математиков. Эта теория получила значительное развитие благодаря приложениям к широким классам квазилинейных уравнений и систем с частными производными высокого порядка. Определенные итоги подведены во многих монографиях и обзорах, из которых упомянем только книги Ж.-Л. Лионса [1], И.В. Скрыпника [2], а также обзорные работы Ю.А. Дубинского [3, 4]. Метод монотонности продолжает активно развиваться, и его теория регулярно отражается в научной литературе (см., например, книги [5, 6, 7] и работы автора [8, 9, 10, 11, 12] и ссылки там).

Желая расширить круг приложений, многие авторы вводили разнообразные классы операторов, близких к монотонным. К настоящему времени насчитывается более десяти подобных классов. Приведем одну группу определений.

Definition 1. Пусть X — вещественное сепарабельное банахово пространство с сопряженным X^*. Оператор $A : X \to X^*$ называется:

(1a) *равномерно монотонным*, если для всех $u, v \in X$
$$(Au - Av, u - v) \geq \rho(\|u - v\|),$$
где $\rho(s)$ — непрерывная, возрастающая функция, определенная на $[0, \infty)$, причем $\rho(0) = 0$;

(1b) *монотонным*, если для всех $u, v \in X$
$$(Au - Av, u - v) \geq 0;$$

(1c) *оператором с полуограниченной вариацией*, если для всех $u, v \in X$
$$(Au - Av, u - v) \geq -c(\|u - v\|'),$$
где $\|\cdot\|'$ — норма, компактная по сравнению с нормой $\|\cdot\|$ в X, функция $c(s)$ непрерывна на $[0, \infty)$, причем $s^{-1}c(s) \to 0$ при $s \to +0$;

(1d) *предельно монотонным*, если для каждой слабо сходящейся в X последовательности $u_n \rightharpoonup u$ $(n \to \infty)$ справедливо соотношение при $n \to \infty$
$$\liminf(Au_n, u_n - u) \geq 0.$$

Классы операторов со свойствами (1a), (1b) и (1c) хорошо известны [1, 2, 3, 4] и активно изучаются. Класс операторов со свойством (1d) выделяется, видимо, впервые. Соотношения между введенными классами указываются в следующем утверждении.

Theorem 1. *Справедливы импликации*

$$(1a) \to (1b) \to (1c) \to (1d),$$

где предполагается, что если оператор $A : X \to X^*$ обладает свойством, указанным у начала стрелки, то он обладает также свойством, стоящим у конца той же стрелки.

Остановимся подробнее на некоторых характерных свойствах предельно монотонных операторов. Одно из таких свойств достаточно очевидно и формулируется в следующем утверждении.

Theorem 2. *Пусть пространства X, X^* фиксированы, и пусть заданы предельно монотонные операторы $A_1, \ldots, A_m$, действующие из X в X^*. Тогда для любого набора вещественных положительных чисел $c_1, \ldots, c_m$ оператор*

$$A = c_1A_1 + \cdots + c_mA_m$$

является предельно монотонным.

Следующее свойство предельно монотонных операторов связано с галеркинскими приближениями. Пусть задан некоторый оператор $A : X \to X^*$. Рассмотрим уравнение $Au = f$, где $f \in X^*$. Предполагая пространство X сепарабельным, выделим в нем счетную систему линейно независимых элементов $e_1, e_2, \ldots,$ конечные линейные комбинации которых образуют плотное в X множество. Для каждого натурального $n = 1, 2, \ldots$ ищем элемент $u_n = \sum_{k=1}^{n} c_{nk}e_k$, удовлетворяющий конечной системе алгебраических уравнений

$$(Au_n, e_m) = (f, e_m) \qquad (m = \overline{1, n}). \tag{1}$$

Допустим, что система (1) имеет решение u_n для каждого $n = 1, 2, \ldots,$ и пусть последовательность u_n слабо сходится в $X : u_n \rightharpoonup u$ $(n \to \infty)$. Это не гарантирует в общем случае регулярности последовательности Au_n, и даже если последовательность Au_n слабо сходится в X^*: $Au_n \rightharpoonup g$ $(n \to \infty)$, то элемент g не обязан совпадать с правой частью уравнения $Au = f$. На этом фоне выделяются предельно монотонные операторы, как это вытекает из следующего утверждения.

Theorem 3. *Пусть в приведенном выше построении галеркинских приближений для уравнения $Au = f$ справедливы сходимости при $n \to \infty$:*

$$u_n \rightharpoonup u \quad (\text{в } X), \qquad Au_n \rightharpoonup g \quad (\text{в } X^*).$$

Если оператор $A : X \to X^*$ является предельно монотонным, то $g = f$, т.е. $Au_n \rightharpoonup f$ $(n \to \infty)$ в X^*.

Доказательство. Фиксируем номер N и элемент $v = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k$. Для всех $n \geq N$ из системы (1) следуют равенства

$$(Au_n, u_n - v) = (f, u_n - v), \qquad n \geq N. \tag{2}$$

Так как $u_n \rightharpoonup u$ $(n \to \infty)$ в X, то из (2) получаем

$$\lim_{n\to\infty}(Au_n, u_n - v) = (f, u - v). \tag{3}$$

Используем очевидное тождество

$$(Au_n, u_n - v) = (Au_n, u_n - u) + (Au_n, u - v). \tag{4}$$

По условию $Au_n \rightharpoonup g$ $(n \to \infty)$ в X^*, и потому из (4) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}(Au_n, u_n - v) = \lim_{n\to\infty}(Au_n, u_n - u) + (g, u - v). \tag{5}$$

Так как оператор A по условию предельно монотонен, то

$$\lim_{n\to\infty}(Au_n, u_n - u) \geq 0. \tag{6}$$

Объединяя соотношения (3), (5) и (6), приходим к неравенству

$$(g, u - v) \leq (f, u - v),$$

из которого с очевидностью следует, что $g = f$, так как множество элементов $v = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k$ плотно в X. Это доказывает теорему. □

Как уже отмечалось, семейство операторов, близких к монотонным, довольно многочисленно. Приведем еще одну группу определений, объединяемых тем, что в них выражение $(Au_n, u_n - u)$ оценивается сверху.

Definition 2. Пусть X — вещественное сепарабельное банахово пространство с сопряженным X^*, и пусть задан оператор $A : X \to X^*$, а также слабо сходящаяся в X последовательность u_n, для которой при $n \to \infty$ выполнены соотношения:

$$u_n \rightharpoonup u \quad (\text{в } X), \qquad \limsup(Au_n, u_n - u) \leq 0. \tag{7}$$

При этих условиях оператор A называется:

(2a) *оператором, обладающим* (S_+)*-свойством*, если из (7) вытекает, что $u_n \to u$ $(n \to \infty)$, т.е. последовательность u_n сходится сильно в X;

(2b) *псевдомонотонным по Скрыпнику*, если из (7) вытекает, что при $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} &(2\text{b}_1) \quad \lim(Au_n, u_n - u) = 0, \\ &(2\text{b}_2) \quad Au_n \rightharpoonup Au \quad (\text{в } X^*); \end{aligned}$$

(2c) *псевдомонотонным по Брезису*, если из (7) вытекает, что при $n \to \infty$ для любого элемента $v \in X$

$$\liminf(Au_n, u_n - v) \geq (Au, u - v);$$

(2d) *условно слабо непрерывным* (т.е. слабо непрерывным на специальных последовательностях), если из (7) вытекает, что $Au_n \rightharpoonup Au$ $(n \to \infty)$ в X^*.

Классы операторов со свойствами (2a), (2b) и (2c) хорошо известны [1, 2]. Класс операторов со свойством (2d) выделен, видимо, впервые, хотя очевидно, что такое свойство удобно для перехода к пределу в галеркинских приближениях. Отметим еще, что псевдомонотонность по Скрыпнику из определения (2b) внешне существенно отличается от определения псведомонотонности по Брезису. На этом фоне значительный интерес представляет следующее утверждение.

Theorem 4. *Пусть X — вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, и пусть оператор $A : X \to X^*$ ограничен. Такой оператор псевдомонотонен по Скрыпнику тогда и только тогда, когда он псевдомонотонен по Брезису, т.е. справедливы импликации:* (2b) $\rightleftarrows$ (2c).

Взаимосвязи представленных в определении 2 классов операторов довольно сложны, если не налагать дополнительных условий. Ситуация меняется, если предположить, что пространство X рефлексивно и оператор $A : X \to X^*$ ограничен и деминепрерывен. В этих условиях справедливо следующее утверждение.

Theorem 5. *Пусть X — вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, и пусть оператор $A : X \to X^*$ ограничен и деминепрерывен. Тогда справедливы следующие импликации:*

$$(2\text{a}) \to (2\text{b}) \rightleftarrows (2\text{c}) \to (2\text{d}).$$

Прежде чем связать операторы из определений 1 и 2, напомним еще одно определение.

Definition 3 ([1, замечание 2.1, §2 гл. 2; с. 184])**.** Оператор $A : X \to X^*$ обладает (M)-свойством, если из соотношений при $n \to \infty$:

$$u_n \rightharpoonup u \quad (\text{в } X); \qquad Au_n \rightharpoonup f \quad (\text{в } X^*); \qquad \limsup(Au_n, u_n) \leq (f, u) \tag{8}$$

вытекает равенство $f = Au$.

Сделаем следующее замечание. Ограничимся для наглядности линейными непрерывными операторами в гильбертовом пространстве H, считая, что $H^* = H$. Можно сказать, что каждый такой оператор определен на всем пространстве H и принимает значения в сопряженном пространстве H^*. В частности к нему можно применить определение монотонности $(Au - Av, u - v) \geq 0$, что в силу линейности оператора равносильно соотношению $(Aw, w) \geq 0$, $w \in H$. Итак, если линейный оператор является монотонным, то он обязан быть неотрицательным. В противовес сказанному (M)-свойством обладают все линейные ограниченные операторы, действующие в гильбертовом пространстве. Действительно, пусть задан такой оператор $A : H \to H^*$. И пусть выполнены условия (8). Так как оператор A линеен и ограничен, то он слабо непрерывен, и потому $Au_n \rightharpoonup Au$ $(n \to \infty)$. Одновременно по условию (8) $Au_n \rightharpoonup f$ $(n \to \infty)$. Следовательно, $f = Au$, т.е. выполнено равенство, определяющее (M)-свойство, даже без использования последнего условия в (8). Итак, в гильбертовом пространстве (M)-свойством обладают все линейные ограниченные операторы, включая, например, отрицательные операторы. Приведенное рассуждение показывает, что операторы с (M)-свойством далеко отошли от монотонных операторов.

Определения 1–3 задают девять классов операторов, близких к монотонным. В теоремах 1 и 5 установлены связи между классами операторов внутри каждого из определений 1 и 2. Перекрестные соотношения между классами операторов из разных определений приводятся в следующем утверждении, где символом (M) обозначено (M)-свойство из определения 3.

Theorem 6. *Пусть X — вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, и пусть оператор $A : X \to X^*$ ограничен и деминепрерывен. Тогда справедлива следующая диаграмма импликаций:*

$$(1a)\begin{array}{c}\to\ (1b)\to(1c)\ \to\\ \to\qquad (2a)\qquad \to\end{array}(2b)\rightleftarrows(2c)\begin{array}{l}\to\ (1d)\\ \to\ (2d)\rightleftarrows(M).\end{array}$$

Здесь предполагается, что если оператор A обладает свойством, указанным у начала стрелки, то он обладает также свойством, стоящим у ее конца.

Согласно теореме 4 псевдомонотонные операторы по Скрыпнику и Брезису совпадают, если пространство X рефлексивно и оператор A ограничен. В частности, при указанных условиях можно говорить просто о псевдомонотонных операторах. Из диаграммы теоремы 6 следует, что каждый псевдомонотонный оператор является как предельно монотонным, так и условно слабо непрерывным. В следующем утверждении предлагается достаточно ясная характеристика псевдомонотонных операторов.

Theorem 7. *Пусть X — вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, и пусть оператор $A : X \to X^*$ ограничен и деминепрерывен. Такой оператор псевдомонотонен (эквивалентно по Скрыпнику или Брезису) тогда и только тогда, когда он является предельно монотонным и условно слабо непрерывным, т.е. справедливы импликации:*

$$(2b) \rightleftarrows (2c) \rightleftarrows \{(1d) \ \text{и} \ (2d)\}.$$

При условиях теоремы 7 свойства (2d) и (M) эквивалентны согласно диаграмме из теоремы 6. Поэтому теорему 7 можно высказать в такой форме.

Theorem 8. *При условиях теоремы 6 оператор $A : X \to X^*$ псевдомонотонен тогда и только тогда, когда он является предельно монотонным и обладает (M)-свойством, т.е. справедливы импликации:*

$$(2b) \rightleftarrows (2c) \rightleftarrows \{(1d) \ и \ (M)\}.$$

Хорошо известно [1, замечание 2.12, §2 гл. 2; с.201], что при условиях ограниченности и деминепрерывности сумма псевдомонотонного по Брезису оператора A и монотонного оператора B приводит к псевдомонотонному оператору $A+B$. В следующем утверждении доказывается, что псевдомонотонные операторы более устойчивы относительно сложения, именно, можно складывать два псевдомонотонных оператора, оставаясь в том же классе.

Theorem 9. *Пусть X — вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, и пусть операторы $A : X \to X^*$ и $B : X \to X^*$ ограничены, деминепрерывны и псевдомонотонны (эквивалентно по Скрыпнику или Брезису). Тогда оператор $(A+B) : X \to X^*$ ограничен, деминепрерывен и псевдомонотонен.*

Доказательство. Оператор $A + B$ ограничен и деминепрерывен как сумма двух операторов с теми же свойствами. Остается проверить его псевдомонотонность. Из двух эквивалентных определений используем определение псевдомонотонности по Скрыпнику, т.е. свойство (2b) определения 2. Пусть задана последовательность $u_n \in X$, для которой выполнены соотношения при $n \to \infty$:

$$u_n \rightharpoonup u \quad (\text{в } X); \qquad \limsup((A+B)u_n, u_n - u) \le 0, \tag{9}$$

или подробнее

$$\limsup[(Au_n, u_n - u) + (Bu_n, u_n - u)] \le 0. \tag{10}$$

Так как операторы A и B псевдомонотонны, то по теореме 7 каждый из них является предельно монотонным, т.е. справедливы соотношения при $n \to \infty$:

$$\liminf(Au_n, u_n - u) \ge 0; \qquad \liminf(Bu_n, u_n - u) \ge 0. \tag{11}$$

Из сравнения (10) и (11) следует, что при $n \to \infty$ определены пределы:

$$\lim(Au_n, u_n - u) = 0; \qquad \lim(Bu_n, u_n - u) = 0. \tag{12}$$

Действительно, допустим, что хотя бы одно из соотношений (12) неверно. Для определенности считаем, что $\limsup(Bu_n, u_n - u) = a \ne 0$. Из (11) следует, что $a > 0$. Выберем подпоследовательность $u_{n(1)}$, на которой достигается верхний предел, так что при $n(1) \to \infty$

$$\lim(Bu_{n(1)}, u_{n(1)} - u) = a > 0.$$

По свойствам верхнего предела из (10) следует, что при $n(1) \to \infty$

$$\limsup(Au_{n(1)}, u_{n(1)} - u) + a \le 0.$$

Так как $a > 0$, то $\limsup(Au_{n(1)}, u_{n(1)} - u) < 0$. По условию оператор A псевдомонотонен по Скрыпнику, и потому из соотношений при $n(1) \to \infty$

$$u_{n(1)} \rightharpoonup u; \qquad \limsup(Au_{n(1)}, u_{n(1)} - u) < 0 \tag{13}$$

следует, что определен предел при $n(1) \to \infty$

$$\lim(Au_{n(1)}, u_{n(1)} - u) = 0,$$

а это соотношение противоречит (13). Итак, равенства (12) справедливы. Их достаточно, чтобы утверждать в соответствии с определением 2, что $Au_n \rightharpoonup Au$, $Bu_n \rightharpoonup Bu$ при $n \to \infty$. Отсюда и из (12) с очевидностью следуют соотношения:

$$(A+B)u_n \rightharpoonup (A+B)u; \qquad \lim_{n\to\infty}((A+B)u_n, u_n - u) = 0,$$

которые получены из (9) и показывают, что оператор $(A+B)$ является псевдомонотонным по Скрыпнику, что и утверждалось. □

Укажем еще одно свойство, инвариантное относительно возмущений предельно монотонными операторами. Доказывается оно по аналогии с предыдущим утверждением.

Theorem 10. *Пусть X — вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, и пусть операторы $A : X \to X^*$ и $B : X \to X^*$ ограничены и деминепрерывны, причем, оператор A обладает (S_+)-свойством, а оператор B является предельно монотонным. Тогда оператор $A + B : X \to X^*$ является ограниченным деминепрерывным и обладает (S_+)-свойством.*

2. Разрешимость уравнений с предельно монотонными операторами

Если оператор $A : X \to X^*$ является ограниченным деминепрерывным и равномерно монотонным с функцией $\rho(s)$, для которой выполнено условие $s^{-1}\rho(s) \to \infty$ при $s \to \infty$, то этого достаточно, чтобы утверждать, что уравнение $Au = f$ имеет и притом единственное решение $u \in X$ для каждого элемента $f \in X^*$. Все остальные классы операторов, введенные в разделе 1, требуют дополнительных условий для разрешимости уравнения $Au = f$. Наиболее известно условие коэрцитивности, которое имеет вид

$$(Au, u) \geq \gamma(\|u\|)\|u\|, \tag{14}$$

где функция $\gamma(r) \to \infty$ при $r \to \infty$. Основная теорема о коэрцитивных операторах утверждает следующее [1, замечание 2.1, §2 гл. 2; с. 184]. Пусть X — вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, и пусть оператор $A : X \to X^*$ является ограниченным деминепрерывным коэрцитивным и обладает (M)-свойством. Тогда уравнение $Au = f$ имеет решение $u \in X$ для каждого элемента $f \in X^*$. Единственность решения не гарантируется. Обращаясь к диаграмме из теоремы 6, убеждаемся, что в сформулированном утверждении (M)-свойство оператора A можно заменить на одно из следующих: монотонность, полуограниченность вариации, (S_+)-свойство, псевдомонотонность (по Скрыпнику или по Брезису). Заменить (M)-свойство на предельную монотонность также возможно, но при дополнительном условии, которое определяется далее.

Definition 4. Оператор $A : X \to X^*$ называется усиленно замкнутым, если из условий $u_n \rightharpoonup u$ в X, $Au_n \to f$ $(n \to \infty)$ в X^* следует, что $Au = f$.

Theorem 11. *Пусть X — вещественное сепарабельное равномерно выпуклое банахово пространство со строго выпуклым сопряженным X^*, и пусть оператор $A : X \to X^*$ ограничен деминепрерывен коэрцитивен усиленно замкнут и является предельно монотонным. Тогда уравнение $Au = f$ имеет решение $u \in X$ для каждого элемента $f \in X^*$.*

Доказательство. Введем дуальный оператор $J : X \to X^*$, удовлетворяющий условиям

$$(Ju, u) = \|Ju\| \cdot \|u\|, \qquad \|Ju\| = \|u\|. \tag{15}$$

Условия на пространства X, X^* таковы, что оператор J определен однозначно, является ограниченным деминепрерывным монотонным и коэрцитивным. Убедимся, что предположение о равномерной выпуклости пространства X дает возможность утверждать, что оператор J обладает (S_+)-свойством. Действительно, пусть выполнены условия при $n \to \infty$:

$$u_n \rightharpoonup u \quad (\text{в } X), \qquad \limsup(Ju_n, u_n - u) \leq 0.$$

Так как $(Ju, u_n - u) \to 0$ при $n \to \infty$, то по свойствам верхнего предела можно записать:

$$\limsup(Ju_n - Ju, u_n - u) \leq 0. \tag{16}$$

Хорошо известно [5, замечание 1.4c), §1 гл. III; с. 81], что оператор J удовлетворяет следующему неравенству для любых $u, v \in X$:

$$(Ju - Jv, u - v) \geq (\|u\| - \|v\|)^2.$$

В частности, для введенной выше последовательности $u_n \rightharpoonup u$ имеем:

$$(\|u_n\| - \|u\|)^2 \leq (Ju_n - Ju, u_n - u).$$

Соединив это неравенство с (16), получаем

$$\limsup(\|u_n\| - \|u\|)^2 \leq 0,$$

откуда следует, что $\|u_n\| \to \|u\|$ при $n \to \infty$. Так как $u_n \rightharpoonup u$ в X и пространство X равномерно выпукло, то $u_n \to u$ в X. Это и означает, что оператор J обладает (S_+)-свойством. Очевидно, что оператор εJ также обладает (S_+)-свойством для всякого $\varepsilon > 0$. Так как оператор A по условию предельно монотонен, то по теореме 10 предыдущего раздела сумма $\varepsilon J + A$ определяет оператор, обладающий (S_+)-свойством. Из диаграммы теоремы 6 вытекает, что оператор $A + \varepsilon J$ обладает (M)-свойством. Очевидно также, что оператор $A + \varepsilon J$ ограничен деминепрерывен и коэрцитивен как сумма операторов с теми же свойствами. Этого достаточно, чтобы утверждать, что уравнение $(A + \varepsilon J)u^\varepsilon = f$ имеет решение $u^\varepsilon \in X$ для всех $\varepsilon > 0$ и любого $f \in X^*$. Представленное уравнение умножим на u^ε:

$$(Au^\varepsilon, u^\varepsilon) + \varepsilon(Ju^\varepsilon, u^\varepsilon) = (f, u^\varepsilon).$$

Отсюда следует, с учетом равенств (15), что

$$\frac{(Au^\varepsilon, u^\varepsilon)}{\|u^\varepsilon\|} \leq \frac{(Au^\varepsilon, u^\varepsilon)}{\|u^\varepsilon\|} + \varepsilon\|u^\varepsilon\| \leq \|f\|.$$

Так как оператор A коэрцитивен, то найдется постоянная C такая, что $\|u^\varepsilon\| \leq C$ независимо от $\varepsilon > 0$. В силу ограниченности оператора J найдется постоянная C_1 такая, что $\|Ju^\varepsilon\| \leq C_1$ независимо от $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что $\varepsilon Ju^\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а также

$$Au^\varepsilon = f - \varepsilon Ju^\varepsilon \to f \qquad (\varepsilon \to 0).$$

Пространство X равномерно выпукло и потому рефлексивно, значит, из ограниченного множества $\{u^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ можно выбрать слабо сходящуюся последовательность $u^{\varepsilon_k} \rightharpoonup u$ при $\varepsilon_k \to 0$. Для выбранной последовательности выполняются следующие соотношения при $\varepsilon_k \to 0$:

$$u^{\varepsilon_k} \rightharpoonup u \quad (\text{в } X), \qquad Au^{\varepsilon_k} \to f \quad (\text{в } X^*).$$

Так как оператор A по условию усиленно замкнут, то $Au = f$, что завершает доказательство теоремы. □

Кроме коэрцитивности известны и другие условия, достаточные для разрешимости уравнения $Au = f$. Приведем одно из них.

Definition 5. Оператор $A : X \to X^*$ назовем ослабленно коэрцитивным, если

$$\|Au\| + \frac{(Au, u)}{\|u\|} \to \infty \qquad (\|u\| \to \infty).$$

Известно [2, теорема 7.2, §7 гл. 2; с. 79], что условия ослабленной коэрцитивности достаточно для разрешимости уравнения $Au = f$, если оператор A обладает (S_+)-свойством. В следующем утверждении класс операторов с (S_+)-свойством расширяется до класса предельно монотонных операторов. Доказывается это утверждение по аналогии с теоремой 11, хотя и требует более специальных построений.

Theorem 12. *Пусть X — вещественное сепарабельное равномерно выпуклое банахово пространство со строго выпуклым сопряженным X^*, и пусть оператор $A : X \to X^*$ ограничен деминепрерывен ослабленно коэрцитивен и является предельно монотонным и усиленно замкнутым. Тогда уравнение $Au = f$ имеет решение $u \in X$ для любого элемента $f \in X^*$.*

Напомним еще одно утверждение, принадлежащее С.И. Похожаеву [13] и детально изложенное в монографии [2, следствие 5.1, §5 гл. 1; с. 31]. Пусть X — вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, и пусть оператор $A : X \to X^*$ ограничен деминепрерывен обладает (S_+)-свойством, является нечетным и удовлетворяет условию возрастания: $\|Au\| \to \infty$ при $\|u\| \to \infty$. Тогда уравнение $Au = f$ имеет решение $u \in X$ для всякого элемента $f \in X^*$. Убедимся, что класс операторов можно расширить до класса предельно монотонных, дополнив требования на оператор A усиленной замкнутостью.

Theorem 13. *Пусть X — вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство со строго выпуклым сопряженным, и пусть оператор $A : X \to X^*$ ограничен деминепрерывен нечетен усиленно замкнут, является предельно монотонным и удовлетворяет условию возрастания: $\|Au\| \to \infty$ при $\|u\| \to \infty$. Тогда уравнение $Au = f$ имеет решение $u \in X$ для каждого элемента $f \in X^*$.*

Доказательство. По оператору A введем числовую функцию

$$\varphi(r) = \inf_{\|u\|=r} \|Au\|.$$

Очевидно, что $\varphi(r)$ определена для всех $r \geq 0$ и является неотрицательной. Из условия теоремы следует, что $\varphi(r) \to \infty$ при $r \to \infty$. Построим непрерывную строго монотонно возрастающую функцию $\Phi(r)$, удовлетворяющую условиям: $\Phi(0) = 0$, $\Phi(r) \to \infty$ при $r \to \infty$, $\Phi(r) \leq \varphi(r)$ для достаточно больших r. Условия на пространства X и X^* дают возможность ввести отображение двойственности $J : X \to X^*$ относительно функции Φ. Это отображение обладает следующими свойствами: оно однозначно определено, является ограниченным деминепрерывным монотонным коэрцитивным и удовлетворяет равенствам

$$(Ju, u) = \|Ju\| \cdot \|u\|, \qquad \|Ju\| = \Phi(\|u\|).$$

Для каждого числа $\varepsilon > 0$ введем оператор $A_\varepsilon = A + \varepsilon J$. Он действует из X в X^*, ограничен и деминепрерывен как сумма операторов с теми же свойствами. Убедимся, что он является нечетным. Для этого достаточно доказать, что нечетным является оператор двойственности J. Напомним его определение [1, предложение 2.3, §2 гл. 2; с. 187]. Пусть $S = \{u \in X\colon \|u\| = 1\}$. Для каждого элемента $u \in S$ строим функционал $f \in X^*$ со свойствами:

$$(f, u) = 1, \qquad \|f\| = 1.$$

Такой функционал определен для любого банахова пространства, а условие строгой выпуклости пространства X^* обеспечивает единственность такого функционала. На луче λu, $\lambda > 0$, оператор J определяется равенством $J(\lambda u) = \Phi(\lambda) f$. Если ввести элементы $v = -u$, $g = -f$, то очевидно, что $(g, v) = (f, u) = 1$ и $\|g\| = \|f\| = 1$. Следовательно, $J(\lambda v) = \Phi(\lambda) g$, т.е. $J(-\lambda u) = -\Phi(\lambda) f = -J(\lambda u)$, что и доказывает нечетность оператора двойственности. Отсюда следует, что оператор $A_\varepsilon = A + \varepsilon J$ также является нечетным. Кроме того, он обладает (S_+)-свойством как сумма оператора A с (S_+)-свойством и монотонного оператора εJ (теорема 10 раздела 1). Нетрудно видеть также, что оператор $A + \varepsilon J$ удовлетворяет условию возрастания: $\|(A + \varepsilon J)u\| \to \infty$ для $\|u\| \to \infty$, если $0 < \varepsilon < 1/2$. Представленных свойств оператора A_ε достаточно, чтобы применить теорему Похожаева, которая утверждает, что уравнение $A_\varepsilon u^\varepsilon = f$ имеет решение $u^\varepsilon \in X$ для каждого элемента $f \in X^*$ и любого $\varepsilon \in (0, 1/2]$.

Запишем уравнение $A_\varepsilon u^\varepsilon = f$ как тождество $Au^\varepsilon = f - \varepsilon J u^\varepsilon$, из которого следует, что

$$\|Au^\varepsilon\| \le \|f\| + \varepsilon \|Ju^\varepsilon\|. \tag{17}$$

Согласно построению функций φ и Φ существует число R_0 такое, что если $\|u^\varepsilon\| \ge R_0$, то справедливы неравенства $\Phi(\|u^\varepsilon\|) \le \varphi(\|u^\varepsilon\|)$ и $\varphi(\|u^\varepsilon\|) \le \|Au^\varepsilon\|$. Используя также равенства $\|Ju^\varepsilon\| = \Phi(\|u^\varepsilon\|)$ и подставляя все приведенные соотношения в (17), приходим к оценке

$$\Phi(\|u^\varepsilon\|) \le \|f\| + \varepsilon \Phi(\|u^\varepsilon\|), \qquad \|u^\varepsilon\| \ge R_0,$$

из которой следует, что для всех $\varepsilon \in (0, 1/2]$ существует константа C такая, что $\|u^\varepsilon\| \le C$. Далее можно применить рассуждения из доказательства теоремы 11, которые приводят к существованию элемента $u \in X$, удовлетворяющего равенству $Au = f$, что и доказывает утверждение. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 01-01-00884 и 99-01-00045.

Список литературы

[1] Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* М.: Мир. — 1972. — 588 с.

[2] Скрыпник И. В. *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач.* М.: Наука. — 1990. — 448 с.

[3] Дубинский Ю. А. *Нелинейные эллиптические и параболические уравнения* //Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ. — 1976. — Т. 9. — С. 5–130.

[4] Дубинский Ю. А. *Нелинейные параболические уравнения высокого порядка* //Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ. — 1990. — Т. 37. — С. 89–166.

[5] Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М.: Наука. — 1978. — 336 с.

[6] Showalter R. E. *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations.* Providence: AMS. — 1997. — 278 p.

[7] Мельник В. С., Згуровский М. З. *Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами.* Киев: Наукова думка. — 1999. — 575 с.

[8] Лаптев Г. И. *Об одной регуляризации слабо нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с неявным вырождением* //Мат. заметки. — 1994. — Т. 55. — С. 84–95.

[9] Лаптев Г. И. *Первая краевая задача для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка с двойным вырождением* //Дифференц. уравнения. — 1994. — Т. 30. — С. 1057–1069.

[10] Лаптев Г. И. *Слабые решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью* //Мат. сб. — 1997. — Т. 188. — С. 83–112.

[11] Лаптев Г. И. *Разрешимость квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойным вырождением* //Сибирский мат. журнал. — 1997. — Т. 38. — С. 1335–1355.

[12] Лаптев Г. И. *Эволюционные уравнения с монотонным оператором и функциональной нелинейностью при производной по времени* //Мат. сб. — 2000. — Т. 191. — С. 43–64.

[13] Похожаев С. И. *О разрешимости нелинейных уравнений с нечетными операторами* //Функцион. анализ и его прил. — 1967. — Т. 1. — С. 66–73.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Н.Е.Товмасян
Государственный Инженерный Университет Армении,
Ереван, Армения

Ключевые слова: уравнение, решение, функция, производная, интеграл.

Здесь указываются эффективные методы решения задачи Римана-Гильберта для одного класса неправильно эллиптических уравнений.

1. Пусть D- $(m+1)$- связная область в комплексной плоскости с границей $\Gamma = \bigcup_{j=0}^{m} \Gamma_j$, где $\Gamma_0, ..., \Gamma_m$- простые, замкнутые , непересекающиеся , достаточно гладкие контуры, причем Γ_0 охватывает остальные контуры $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$. Пусть $\bar{D} = D \bigcup \Gamma$. Рассмотрим эллиптическое уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \frac{\partial^n u}{\partial y^k \partial x^{n-k}} = 0, (x, y) \in D, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\mathrm{Re} \frac{\partial^k u(x, y)}{\partial N^k} = f_k(x, y), (x, y) \in \Gamma, k = 0, ..., n-1, \tag{2}$$

где $A_k (k = 0, ..., n)$ - комплексные постоянные $(A_n \neq 0)$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial N}$ - производная $u(x, y)$ по направлению внутренней нормали к Γ в точке $(x, y) \in \Gamma$, $f_k(x, y) (k = 0, ..., n-1)$ - заданные на Γ достаточно гладкие действительные функции.

Задача (1)-(2) при $f_k = 0 (k = 0, ..., n-1)$ называется однородной. Решение задачи (1)-(2) ищется в классе $C^n(D) \bigcup C^{n-1,\alpha}(\bar{D})$.

Предполагается, что корни $\lambda_1, ..., \lambda_n$ характеристического уравнения

$$A_0 + A_1 \lambda + ... + A_n \lambda^n = 0 \tag{3}$$

удовлетворяют условию

$$\mathrm{Im} \lambda_j > 0, j = 1, ..., n. \tag{4}$$

Условие (4) означает, что уравнение (1) неправильно эллиптическое.

Задача (1)-(2) в односвязных областях исследована в [1], а в многосвязных областях - в [2] В этих работах задача (1)-(2) сведена к сингулярному интегральному уравнению нормального типа и получена формула индекса κ этой задачи ($\kappa = (1-m)n^2$).

В данной работе указывается другой подход к решению задачи (1)-(2), который позволяет уточнить и улучшить результаты работ [1]-[2]. Здесь однородная задача (1)-(2) сводится к системе алгебраических уравнений , а условия разрешимости и частное решение соответ-ствующей неоднородной задачи выписываются при помощи решения некоторого однозначно разрешимого интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Пусть k_0 - число линейно независимых решений однородной задачи (1)-(2), а k_0' - число линейно независимых условий разрешимости соответствующей неоднородной задачи. Здесь и далее линейная независимость понимается над полем действительных чисел. Числа k_0 и k_0' называются дефектными числами задачи (1)-(2), а $\kappa = k_0 - k_0'$ - индексом этой задачи. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Дефектные числа задачи (1)-(2) определяются формулами

$$k_0 = n^2, k_0' = mn^2. \tag{5}$$

Теорема 2. Общее решение однородной задачи (1)-(2) определяется формулой

$$u(x,y) = iu_0(x,y), \tag{6}$$

где $u_0(x,y)$ - произвольное действительное решение уравнения (1) в классе полиномов не выше $2n-2$, i - мнимая единица.

Теоремы 1 и 2 при $n = 2$ доказаны в [3]. В общем случае эти теоремы доказываются аналогично, поэтому их доказательства опускаем.

2. Исходя из теоремы 2 построим полную систему линейно независимых решений однородной задачи (1)-(2) в явном виде. Согласно формуле (6) решение однородной задачи (1)-(2) можно искать в виде

$$u(x,y) = iP_{n-1}(x,y) + i\sum_{l=n}^{2n-2}\sum_{j=0}^{l} a_{lj}x^j y^{l-j}, \tag{7}$$

где $P_{n-1}(x,y)$ - произвольный полином порядка не выше $n-1$ с действительными коэффициентами относительно действительных переменных x и y , а a_{lj} - действительные постоянные.

Подставляя $u(x,y)$ из (7) в уравнение (1) и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях $x^p y^q (p+q \leq n-2)$ получим

$$\sum_{j=0}^{l} A_{lmj}a_{lj} = 0, m = 1, ..., l-n+1; l = n, ..., 2n-2, \tag{8}$$

где A_{lmj} - некоторые вполне определенные комплексные постоянные, зависящие только от коэффициентов уравнения (1).

Систему уравнений (8) еще можно записать в виде

$$\sum_{j=0}^{l} B_{lmj}a_{lj} = 0, m = 1, ..., 2(l-n+1); l = n, ..., 2n-2, \tag{9}$$

где

$$B_{lmj} = \mathrm{Re}A_{lmj}, m = 1, ..., l-n+1,$$
$$B_{lmj} = \mathrm{Im}A_{lmj}, m = l-n+2, ..., 2(l-n+1),$$

Подставляя общее решение системы (9) при $l = n, ..., 2n-2$ в (7), получим общее решение однородной задачи (1)-(2). Из (7) и (9) следует, что число k_0 линейно независимых решений однородной задачи (1)-(2) определяется формулой

$$k_0 = \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{l=n}^{2n-2}(l+1-r_l), \tag{10}$$

где r_l - ранг основной матрицы системы (9) при фиксированном l . Ясно, что

$$0 \leq r_l \leq 2(l-n+1). \tag{11}$$

С другой стороны, $k_0 = n^2$. Из (11) следует, что имеет место равенство (10) при $k_0 = n^2$ тогда и только тогда, когда $r_l = 2(l-n+1), l = n, ..., 2n-2$. Это означает, что все уравнения в (9) при фиксированном l, $(l = n, ..., 2n-2)$, линейно независимы. Это обстоятельство существенно облегчает решение системы (9). Следовательно, решение однородной задачи (1)-(2) сводится к решению алгебраической системы (9) при
$l = n, ..., 2n-2$. Так как однородная задаяа уже решена, то для полного решения задачи (1)-(2) достаточно найти условия разрешимости этой задачи и некоторое ее частное решение. Мы покажем, что эти вопросы сводятся к решению некоторого однозначно разрешимого интегрального уравнения Фредгольма. Здесь мы ограничимся случаем, когда корни характеристического уравнения (3) - простые.

3. Предварительно рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$LL^*v(x,y)=0,(x,y)\in D, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^k v(x,y)}{\partial N^k}=f_k(x,y),(x,y)\in\Gamma, \tag{13}$$

где

$$L\equiv\sum_{k=0}^{n}A_k\frac{\partial^n}{\partial y^k\partial x^{n-k}}, L^*\equiv\sum_{k=0}^{n}\bar{A}_k\frac{\partial^n}{\partial y^k\partial x^{n-k}},$$

$v(x,y)$ - действительное решение, $f_0(x,y),...,f_{n-1}(x,y)$ - правая часть (2), $\bar{A}_k$ - комп- лексно сопряженное с A_k.

Уравнение (12) является правильно эллиптическим уравнением с действительными коэф-

фициентами. Поэтому задача (12)-(13) однозначно разрешима [4]. Пусть γ_j - некоторая линия внутри области D (без самопересечения) с концами на Γ_0 и $\Gamma_j (j=1,...,n)$. Предполагается, что линии $\gamma_1,...,\gamma_m$ не имеют общих точек. Пусть D_0 - область D без линий $\gamma_1,...,\gamma_m$. Область D_0 - односвязная. Пусть, далее, $(x_1,y_1),...,(x_m,y_m)$ - фиксированные точки внутри контуров $\Gamma_1,...,\Gamma_m$ соответственно.

Обозначим через $D_{\lambda_j}(j=1,...,n)$ образ области D при отображении $\zeta=x+\lambda_j y$. Имеет место следующая

Теорема 3. Если корни $\lambda_1,...,\lambda_n$ характеристического уравнения (3) простые, то решение задачи (12)-(13) определяется формулой $v(x,y)=\mathrm{Re}u_1(x,y)$, где

$$u_1(x,y):=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x+\lambda_j y)+$$

$$+\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=0}^{2n-2}\sum_{j=1}^{n}c_{lkj}(x-x_l+\lambda_j(y-y_l))^k\ln(x-x_l+\lambda_j(y-y_l)), \tag{14}$$

где $(x,y)\in D$, $\varphi_j(z)$ - некоторые аналитические функции соответственно в $D_{\lambda_j},(j=1,...,n)$, а c_{lkj} - некоторые комплексные постоянные, причем функции $\varphi_j(x+\lambda_j y)$, $(j=1,...,n)$ и постоянные c_{lkj} выражаются через решения некоторого однозначно разрешимого уравнения Фредгольма. В формуле (14) $\ln(x-x_l+\lambda_j(y-y_l))$ обозначается некоторая непрерывная ветвь этой функции в области D_0.

Теорема 3 при $n=2$ доказана в [3]. При $n\geq 2$ она доказывается аналогично, поэтому ее доказательство также опускаем.

4. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 4. Для того, чтобы задача (1)-(2) имела решение, необходимо и достаточно выполне-ние условий

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n}c_{lkj}\lambda_j^p=0,p=0,...,k;k=0,...,n-2;l=1,...,m, \tag{15}$$

$$\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{n}c_{lkj}\lambda_j^p=0,p=k+1,...,2n-1;k=n-1,...,2n-2;l=1,...,m. \tag{16}$$

Теорема 5. Если выполнены условия (15) и (16), то частное решение задачи (1)-(2) опрделяется формулой

$$u(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x+\lambda_j y)+$$

$$+\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n} c_{lkj}(x-x_l+\lambda_j(y-y_l))^k \ln(x-x_l+\lambda_j(y-y_l)), \tag{17}$$

где $\varphi_j(x+\lambda_j y)(j=1,...,n)$ и $c_{lkj}(k=0,...,2n-2; j=1,...,n; l=1,...,m)$ те же величины, что и в (14).

Доказательство теорем 4 и 5. Пусть задача (1)-(2) имеет решение $u_0(x,y)$.
Тогда $Lu_0(x,y)=0, L^*\overline{u_0(x,y)}=0$ и $\mathrm{Re}u_0(x,y)$ удовлетворяет условиям (13). Поэтому $\mathrm{Re}u_0(x,y)$ является решением задачи (12)-(13). Из единственности решения задачи (12)-(13) и теоремы 3 следует, что

$$\mathrm{Re}u_1(x,y)=\mathrm{Re}u_0(x,y),(x,y)\in D, \tag{18}$$

где $u_1(x,y)$ - функция определенная в (14). Из (18) имеем

$$\mathrm{Re}(u_1(x,y)-u_0(x,y))=0,(x,y)\in D.$$

Функция $u_1(x,y)-u_0(x,y)$ является чисто мнимым решением уравнения (1) в области D_0. Выше мы показали, что такое решение является полиномом порядка не выше $2n-2$ от x и y. Следовательно,

$$u_1(x,y)=u_0(x,y)+P_{2n-2}(x,y), \tag{19}$$

где $P_{2n-2}(x,y)$ - некоторый полином порядка не выше $2n-2$. Так как $u_0(x,y)$ бесконечно дифференцируема в области D , то из (19) следует, что функция $u_1(x,y)$ также бесконечно дифференцируема в области D. Из вида функции $u_1(x,y)$ следует, что она бесконечно дифференцируема в области D тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{n} c_{lkj}\lambda_j^q=0; q=0,...,k; k=0,...,2n-2; l=1,...,m. \tag{20}$$

Из (20) при $k=0,...,n-2$ получаем условия (15). Из (20) при $k=n-1,...,2n-2$ следует

$$c_{lkj}=0, j=1,...,n; l=1,...,m; k=n-1,...,2n-2. \tag{21}$$

Из (21) имеем условия (16). Таким образом, условия (15)-(16) необходимы для разрешимости задачи (1)-(2).

Пусть имеют место условия (15)-(16). Так как функция $v(x,y)=Reu_1(x,y)$ является решением задачи (12)-(13), то она бесконечно дифференцируема в области D. С другой стороны эта функция бесконечно дифференцируема в области D тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{n} c_{lkj}\lambda_j^q=0, q=0,...,k; k=0,...,2n-2; l=1,...,m. \tag{22}$$

Из (15) и (22) при $k=0,...,n-2$ имеем

$$\sum_{j=1}^{n} c_{lkj}\lambda_j^q=0, q=0,...,k; k=0,...,n-2; l=1,...,m. \tag{23}$$

Из (16) и (22) при $k=n-1,...,2n-2$ получим равенства (21). Следовательно

$$v(x,y)=\mathrm{Re}u(x,y), \tag{24}$$

где $u(x,y)$ определяется формулой (17). Из условия (23) следует, что $u(x,y)$ - бесконечно дифференцируемое решение уравнения (1) в области D. Так как $v(x,y)$ удовлетворяет граничному условию (13) и $v(x,y)=\mathrm{Re}u(x,y)$, то $u(x,y)$ удовлетворяет граничному условию (2).

Таким образом, условия (15) и (16) необходимы и достаточны для разрешимости задачи (1)-(2) и ее частное решение определяется формулой (17). Теоремы 4 и 5 доказаны.

Замечание 1. Так как число условий (15)-(16) равно mn^2 и k'_0 также равно mn^2 , то условия (15)-(16) линейно независимы.

В случае, когда D круг или внутренность эллипса, то указывается более эффективный метод решения задачи (1)-(2).

Литература

[1]. N.E.Tovmasyan, Non-regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields. "World Scientific", Singapore, 1998,p.235.

[2]. П.А.Солдатов, Методы теории функций в краевых задачах на плоскости, Известия АН СССР, Серия математика, т.55, Ë5, 1991, p.p. 1070-1100.

[3]. N.E.Tovmasyan and V.S.Zakarian, Dirichlet and Riemann-Hilbert Problems for Elliptic Equations in Multiply Connected domains, Izvestia Nationalnoi Akademii Nauk Armenii. Matematika, Vol.35, Ë6, 2000. p.p.1-17.

[4]. Krzysztof Maurin. Metody Przestrzeni Hilberta, Panstwowl Wydawnictwo naukowe, Warsawa 1959, p.570.

Товмасян Н. Е. , Департамент Математики Государственного Инженерного Университета Армении, Теряна 105, 375009 Ереван, Армения

E-mail: hterzian@seua.am

On the Index Formula for Some Nonlocal Elliptic Boundary Value Problems

P. L. Gurevich
Moscow State Aviation Institute,
Moscow, Russia

We consider nonlocal elliptic boundary value problems in bounded 2-dimensional domains. In this abstract we describe the case when support of nonlocal terms intersects with boundary of domain. This leads to appearence of power singularities for solutions of nonlocal problems near some points of boundary. Therefore it is natural to consider such problems in weighted Sobolev spaces (see [1, 2]*). The aim of this abstract is to establish a connection between the Fredholm indices of nonlocal problems considered in spaces with different weight indicies.*

Keywords: nonlocal problem, Freholm operator, index of Fredholm operator

Let $G \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded domain with the boundary $\partial G = \bar{S}^- \cup \bar{S}^+$, where S^- and S^+ are open smooth curves. The intersection $\bar{S}^- \cap \bar{S}^+$ consists of two points g_1 and g_2.

Let ω be a nondegenerate smooth map of some neighbourhood $\mathcal{O}$ of the curve S^- onto the set $\omega(\mathcal{O})$ such that $\omega(S^-) \subset G$. In this abstract we assume that $\omega(g_i) = g_i$ $(i = 1,\ 2)$.

Suppose that there exists a nondegenerate smooth coordinate transformation $y \mapsto y' = y'(g_i)$ mapping some neighbourhood $\mathcal{V}(g_i)$ of the point g_i onto a neighbourhood of zero $\mathcal{V}(0)$ such that

a) the image of the set $G \cap \mathcal{V}(g_i)$ is the intersection of the angle $K_i = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ r > 0,\ |\varphi| < b_i\}$ with the neighbourhood $\mathcal{V}(0)$ and the image of the set $S^\pm \cap \mathcal{V}(x_0)$ is the intersection of angle's side $\gamma_i^\pm = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ r > 0,\ \varphi = \pm b_i\}$ with the neighbourhood $\mathcal{V}(0)$ (here $r,\ \varphi$ are polar coordinates in $\mathbb{R}^2$);

b) if $y \in \mathcal{V}(g_i)$, then in new coordinates the map $\omega(y)$ is given by $y' \mapsto \mathcal{G}_i y'$, where $\mathcal{G}_i$ is the map $(\varphi,\ r) \mapsto (\varphi + b_i,\ \chi_i r)$, $\chi_i > 0$.

Let us consider the following nonlocal problem:

$$-\triangle u = f_0(y) \quad (y \in G), \tag{1}$$

$$\begin{gathered} u(y)|_{S^-} + \alpha u(\omega(y))|_{S^-} = f_1(y) \quad (y \in S^-), \\ u(y)|_{S^+} = f_2(y) \quad (y \in S^+), \end{gathered} \tag{2}$$

where $\alpha \in \mathbb{R}$. For simplicity we assume that the boundary condition defined on the curve S^+ does not contain any nonlocal terms.

The principal peculiarity of such problems is the following — the support of nonlocal terms intersects with the boundary of domain: $\overline{\omega(S^-)} \cap \partial G = \{g_1,\ g_2\}$. This leads to appearance of power singularities for solutions in a neighbourhood of the points g_i even for infinitely smooth domain's boundary and an infinitely differentiable right hand side $(f_0,\ f_1,\ f_2)$. Therefore such problems should be considered in some special weighted spaces.

Denote by $H^l_a(G)$ the completion of the set $C_0^\infty(\bar{G}\backslash\{g_1,\ g_2\})$ with respect to the norm

$$\|u\|_{H^l_a(G)} = \Big(\sum_{|\beta|\le l} \int_G \rho^{2(a-l+|\beta|)}|D^\beta u|^2\Big)^{1/2}.$$

Here $l \ge 0$ is an integer; $a \in \mathbb{R}$; $\rho = \rho(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{g_1,\ g_2\})$ in some neighbourhood of the set $\{g_1,\ g_2\}$ is equivalent to the distance between the set $\{g_1,\ g_2\}$ and the point $y \in G$, $\rho(y) \ge c > 0$ outside of this neighbourhood. Denote by $H_a^{l-1/2}(S)$ the space of traces on a smooth curve $S \subset \bar{G}$ with the norm

$$\|\psi\|_{H_a^{l-1/2}(S)} = \inf \|u\|_{H^l_a(G)} \ (u \in H^l_a(G) :\ u|_S = \psi).$$

It was V.A. Kondrat'ev [3] who first considered the weighted spaces $H^l_a(G)$ and $H_a^{l-1/2}(S)$. Constructive descriptions of the trace spaces $H_a^{l-1/2}(S)$ can be also found in [4, §1].

Introduce the bounded operator $\mathcal{L}_a : H^2_a(G) \to H^0_a(G) \times H^{3/2}_a(S^-) \times H^{3/2}_a(S^+)$ given by

$$\mathcal{L}_a u = (-\triangle u(y),\ u(y)|_{S^-} + \alpha u(\omega(y))|_{S^-},\ u(y)|_{S^+}). \tag{3}$$

The operator $\mathcal{L}_a$ corresponds to nonlocal problem (1), (2).

Our aim is to establish when the operator $\mathcal{L}_a$ is Fredholm and what is a connection between the Fredholm indices of the operator $\mathcal{L}_a$ considered in the weighted spaces with different weight indicies a. In order to answer the formulated questions we write the model problems in the angles K_i, $i = 1,\ 2$ (see [2]). For this purpose we suppose that $\operatorname{supp} u \subset \mathcal{V}(g_i) \cap \bar{G}$. Denote $U(y') = u(y(y'))$ and replace y' by y. Then problem (1), (2) can be written as follows:

$$\sum_{k,\,j=1}^{2} p_{ikj}(y)U_{y_k y_j}(y) + \sum_{k=1}^{2} p_{ik}(y)U_{y_k}(y) + p_i(y)U(y) = f_0(y) \quad (y \in K_i),$$

$$\begin{gathered} U(y)|_{\gamma_i^-} + \alpha U(\mathcal{G}_i y)|_{\gamma_i^-} = f_1(y) \quad (y \in \gamma_i^-), \\ U(y)|_{\gamma_i^+} = f_2(y) \quad (y \in \gamma_i^+), \end{gathered}$$

where $p_{ikj},\ p_{ik},\ p_i$ are infinitely differentiable functions.

Suppose for simplicity that

$$p_{ikk}(0) = -1, \quad p_{ikj}(0) = 0 \ (k \ne j). \tag{4}$$

If we now freeze the coefficients at the senior terms at zero and remove the junior terms, then taking into account (4) we get the following model problem in the angle K_i :

$$-\triangle U = f_0(y) \quad (y \in K_i), \tag{5}$$

$$\begin{gathered} U(y)|_{\gamma_i^-} + \alpha U(\mathcal{G}_i y)|_{\gamma_i^-} = f_1(y) \quad (y \in \gamma_i^-), \\ U(y)|_{\gamma_i^+} = f_2(y) \quad (y \in \gamma_i^+), \end{gathered} \tag{6}$$

If we now put $(f_0,\ f_1,\ f_2) = 0$ in (5), (6), write the function U and the Laplace operator $\triangle$ in polar coordinates $(r,\ \varphi)$, put $r = e^{-t}$ and do the Fourier transform with respect to t, then we obtain the following auxiliary problem with parameter λ:

$$\tilde{U}_{\varphi\varphi} - \lambda^2\tilde{U} = 0 \quad (|\varphi| < b_i), \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \tilde{U}(\varphi)|_{\varphi=-b_i} + \alpha e^{i\lambda \ln \chi_i}\tilde{U}(\varphi + b_i)|_{\varphi=-b_i} = 0, \\ \tilde{U}(\varphi)|_{\varphi=b_i} = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

In [5], it is proved that problem (7), (8) has a discrete spectrum and any strip $\{\lambda \in \mathbb{C} : A_1 < \operatorname{Im}\lambda < A_2\}$ contains no more than a finite number of eigenvalues. The following result was obtained by A.L. Skubachevskii (see [5, 2]).

Theorem 1. *Let condition (4) hold. Then the operator $\mathcal{L}_a$ is Fredholm if and only if the line $\operatorname{Im}\lambda = a - 1$ contains no eigenvalues of auxiliary problems (7), (8) for $i = 1,\ 2$.*

Now let us consider the operator $\mathcal{L}_{a'} : H^2_{a'}(G) \to H^0_{a'}(G) \times H^{3/2}_{a'}(S^-) \times H^{3/2}_{a'}(S^+)$ given by (3). Here a' is, for determinancy, less than a. So the operators $\mathcal{L}_{a'}$ and $\mathcal{L}_a$ correspond to the same nonlocal problem (1), (2), but act in different weighted spaces. If the lines $\operatorname{Im}\lambda = a' - 1$ and $\operatorname{Im}\lambda = a - 1$ contain no eigenvalues of auxiliary problems (7), (8), $i = 1,\ 2$, then according to Theorem 1 the operators $\mathcal{L}_{a'}$ and $\mathcal{L}_a$ are both Fredholm.

In order to formulate our main result we denote by λ_{in} $(n = 1,\ \dots,\ N_i)$ all the eigenvalues of auxiliary problem (7), (8) $(i = 1,\ 2)$ located between the lines $\operatorname{Im}\lambda = a' - 1$ and $\operatorname{Im}\lambda = a - 1$. Let λ_{in} has an algebraic multiplicity $\varkappa_{in}$ (see corresponding definitions in [6]).

Theorem 2. *Let condition (4) hold. Then*

$$\operatorname{ind}\mathcal{L}_a = \operatorname{ind}\mathcal{L}_{a'} + \sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{N_i}\varkappa_{in}.$$

>From Theorem 2, it follows in particular that $\operatorname{ind}\mathcal{L}_{a'} = \operatorname{ind}\mathcal{L}_a$ if and only if there are no eigenvalues of auxiliary problems (7), (8), $i = 1,\ 2$, between the lines $\operatorname{Im}\lambda = a' - 1$ and $\operatorname{Im}\lambda = a - 1$.

Remark 8. In this abstract we considered just a model case. In fact, all the results are obtained for arbitrary elliptic differential operators of order $2m$ and general boundary conditions with a finite number of nonlocal terms.

References

[1] Skubachevskii A.L. *Mat. Sb.* 1986. V. 129(171). P. 279-302. English transl. in *Math. USSR-Sb.* 1987. V. 57.
[2] Skubachevskii A.L. *Differentsial'nye Uravneniya.* 1991. V. 27, N 1. P. 128-139. English translation in *Differential equations.* 1991. V. 27.
[3] Kondrat'ev V.A. *Trudy Moskov. Mat. Obshch.* 1967. V. 16. P. 209-292. English translation in *Trans. Moscow Math. Soc.* 1967. V. 16.
[4] Maz'ya V.G. and Plamenevskii B.A. *Trudy Moskov. Mat. Obshch.* 1978. V. 37. P. 49-93. English translation in *Trans. Moscow Math. Soc.* 1980. V. 37, N 1.
[5] Skubachevskii A.L. *Differentsial'nye Uravneniya.* 1990. V. 26, N 1. P. 120-131. English translation in *Differential equations.* 1990. V. 26.
[6] Krein S.G., Trofimov V.P. *Funk. analiz i ego prilozheniya.* 1969. V. 3, N 4. P. 85-86. [In Russian]

P. L. Gurevich Moscow State Aviation Institute, Moscow, Russia

Theorem of completeness for a Dirac type operator with generalized λ-depending boundary conditions

S. Hassi, L. L. Oridoroga
Donetsk State University,
Ukraine

A completeness theorem is proved involving a system of integro-differential equations with some λ-depending boundary conditions.

1. It is well known [5] that the system of eigenfunctions and associate functions (SEAF) of the Sturm – Liouville problem

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \tag{1}$$

$$y'(0) - h_0 y(0) = y'(1) - h_1 y(1) = 0, \tag{2}$$

is complete in $L_2[0,1]$ for arbitrary complex valued potential $q \in L_1[0,1]$ and $h_0, h_1 \in \mathbb{C}$. A similar result is also known for arbitrary nondegenerate boundary conditions (see [5]).

A completeness result for a boundary value problem of arbitrary order differential equations

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-2} q_j(x) y = \lambda^n y, \tag{3}$$

subject to spliting boundary conditions, has been announced by M.V. Keldysh [1] and it was first proved by A.A. Shkalikov [9].

In [4] the above mentioned results from [5] have been generalized to the case of first order systems with arbitrary boundary conditions (not depending on a spectral parameter).

In [10] and [11] the completeness results for the problem (1), (2) have been generalized to the case of nonlinear λ-depending boundary conditions of the form

$$\begin{cases} P_{11}(\lambda)y(0) + P_{12}(\lambda)y'(0) = 0 \\ P_{21}(\lambda)y^2(\frac{1}{2}) + P_{22}(\lambda)y(\frac{1}{2})y'(\frac{1}{2}) + P_{23}(\lambda){y'}^2(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

and of the form

$$\begin{cases} P_{10}(\lambda)y^2(0) + P_{11}(\lambda){y'}^2(0) + P_{12}(\lambda)y^2(\frac{1}{3}) + P_{13}(\lambda){y'}^2(\frac{1}{3}) \\ \quad + P_{14}(\lambda)y(0)y'(0) + P_{15}(\lambda)y(0)y(\frac{1}{3}) + P_{16}(\lambda)y(0)y'(\frac{1}{3}) \\ \quad + P_{17}(\lambda)y'(0)y(\frac{1}{3}) + P_{18}(\lambda)y'(0)y'(\frac{1}{3}) + P_{19}(\lambda)y(\frac{1}{3})y'(\frac{1}{3}) = 0, \\ \\ P_{20}(\lambda)y^2(0) + P_{21}(\lambda){y'}^2(0) + P_{22}(\lambda)y^2(\frac{1}{3}) + P_{23}(\lambda){y'}^2(\frac{1}{3}) \\ \quad + P_{24}(\lambda)y(0)y'(0) + P_{25}(\lambda)y(0)y(\frac{1}{3}) + P_{26}(\lambda)y(0)y'(\frac{1}{3}) \\ \quad + P_{27}(\lambda)y'(0)y(\frac{1}{3}) + P_{28}(\lambda)y'(0)y'(\frac{1}{3}) + P_{29}(\lambda)y(\frac{1}{3})y'(\frac{1}{3}) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Moreover, in [7] and [8] analogous results were obtained for a system with a pair of spliting λ-depending boundary conditions similar to the conditions (4) and (5).

In the present paper the completeness result is generalized to the case of first order systems consisting of two integro-differential equations with arbitrary linear or quadratic λ-depending boundary conditions. More precisely, let $B = \mathrm{diag}(a^{-1}, b^{-1})$ be a 2×2 diagonal matrix with $a < 0 < b$. Consider in $L_2[0,1] \oplus L_2[0,1]$ a boundary value problem for the first order system of ordinary integro-differential equations of the form

$$\frac{1}{i} By' + Q(x)y + \int_0^x M(x,t)y(t)\,dt = \lambda y. \tag{6}$$

Here

$$Q(x,t)=\begin{pmatrix}0 & q_1\\ q_2 & 0\end{pmatrix},\quad M(x,t)=\begin{pmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{pmatrix},\quad y(x)=\begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix},$$

where it is assumed that $q_j\in L_1[0,1]$ and $M_{ij}\in L_\infty(\Omega)$, $\Omega=\{0\le t\le x\le 1\}$, $i,j=1,2$. Two types of λ-depending boundary conditions will be treated. Namely:

(i) arbitrary linear conditions of the form

$$\begin{cases}P_{11}(\lambda)y_1(0)+P_{12}(\lambda)y_2(0)+P_{13}(\lambda)y_1(1)+P_{14}(\lambda)y_2(1)=0\\ P_{21}(\lambda)y_1(0)+P_{22}(\lambda)y_2(0)+P_{23}(\lambda)y_1(1)+P_{24}(\lambda)y_2(1)=0\end{cases}\tag{7}$$

or:

(ii) arbitrary quadratic conditions of the form

$$\begin{cases}P_{10}(\lambda)y_1^2(0)+P_{11}(\lambda)y_2^2(0)+P_{12}(\lambda)y_1^2(\tfrac12)+P_{13}(\lambda)y_2^2(\tfrac12)\\ \quad+P_{14}(\lambda)y_1(0)y_2(0)+P_{15}(\lambda)y_1(0)y_1(\tfrac12)+P_{16}(\lambda)y_1(0)y_2(\tfrac12)\\ \quad+P_{17}(\lambda)y_2(0)y_1(\tfrac12)+P_{18}(\lambda)y_2(0)y_2(\tfrac12)+P_{19}(\lambda)y_1(\tfrac12)y_2(\tfrac12)=0\\ \\ P_{20}(\lambda)y_1^2(0)+P_{21}(\lambda)y_2^2(0)+P_{22}(\lambda)y_1^2(\tfrac12)+P_{23}(\lambda)y_2^2(\tfrac12)\\ \quad+P_{24}(\lambda)y_1(0)y_2(0)+P_{25}(\lambda)y_1(0)y_1(\tfrac12)+P_{26}(\lambda)y_1(0)y_2(\tfrac12)\\ \quad+P_{27}(\lambda)y_2(0)y_1(\tfrac12)+P_{28}(\lambda)y_2(0)y_2(\tfrac12)+P_{29}(\lambda)y_1(\tfrac12)y_2(\tfrac12)=0\end{cases}\tag{8}$$

where $P_{ij}(\lambda)$ are polynomials.

Below some sufficient conditions for the completeness of the SEAF of the problems (6), (7) and (6), (8) in $L^2[0,1]\oplus L^2[0,1]$ are established. A starting point is to estimate the growth of the solution of the Cauchy problem for the system (6) with special initial conditions. Indeed, let

$$\overrightarrow{\varphi}_0(x;\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_{01}(x;\lambda)\\ \varphi_{02}(x;\lambda)\end{pmatrix}\quad\text{and}\quad \overrightarrow{\psi}_0(x;\lambda)=\begin{pmatrix}\psi_{01}(x;\lambda)\\ \psi_{02}(x;\lambda)\end{pmatrix}\tag{9}$$

be the solutions of the Cauchy problem for the system (6) with the initial conditions

$$\varphi_{01}(0;\lambda)=\psi_{02}(0;\lambda)=1\quad\text{and}\quad\varphi_{02}(0;\lambda)=\psi_{01}(0;\lambda)=0,\tag{10}$$

respectively. The next lemma gives some estimates for the growth of $\overrightarrow{\varphi_i}(x;\lambda)$ and $\overrightarrow{\psi_i}(x;\lambda)$, $i=1,2$.

Lemma 1. *The functions $\overrightarrow{\varphi}_i(x;\lambda)$ and $\overrightarrow{\psi}_i(x;\lambda)$, $i=0,1$, satisfy the estimates*

$$\begin{aligned}&\varphi_{01}(x;\lambda)=(1+O(\tfrac{1}{\Im\lambda}))\exp(a\lambda ix),\quad \varphi_{02}(x;\lambda)=O(\tfrac{1}{\Im\lambda})\exp(a\lambda ix);\\ &\psi_{01}(x;\lambda)=O(\tfrac{1}{\Im\lambda})\exp(a\lambda ix),\quad \psi_{02}(x;\lambda)=O(\tfrac{1}{\Im\lambda})\exp(a\lambda ix);\end{aligned}\tag{11}$$

when $\lambda\in\mathbb{C}^+$, and the estimates

$$\begin{aligned}&\varphi_{01}(x;\lambda)=O(\tfrac{1}{\Im\lambda})\exp(b\lambda ix),\quad \varphi_{02}(x;\lambda)=O(\tfrac{1}{\Im\lambda})\exp(b\lambda ix);\\ &\psi_{01}(x;\lambda)=O(\tfrac{1}{\Im\lambda})\exp(b\lambda ix),\quad \psi_{02}(x;\lambda)=(1+O(\tfrac{1}{\Im\lambda}))\exp(b\lambda ix);\end{aligned}\tag{12}$$

when $\lambda\in\mathbb{C}^-$.

The proof is based on the existence of a triangular trasformation operator for the equation (6) constructed in [3].

The completeness result can now be stated as follows.

Theorem 1. *Let P_{ij} (i=1,2 ; j=1,2,3,4) be polynomials, let the rank of the polynomial matrix*

$$P(\lambda)=\begin{pmatrix}P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda) & P_{13}(\lambda) & P_{14}(\lambda)\\ P_{21}(\lambda) & P_{22}(\lambda) & P_{23}(\lambda) & P_{24}(\lambda)\end{pmatrix}\tag{13}$$

be equal to 2 for all $\lambda \in \mathbb{C}$*, and let*

$$\deg J_{14} = \deg J_{32} \geq \max\{\deg J_{13}, \deg J_{42}, M\}, \tag{14}$$

where $M = \max\{\, \deg P_{ij} :\ i \in \{1,2\};\ j \in \{1,2,3,4\}\,\}$ *and*

$$J_{ij} = \det \begin{pmatrix} P_{1i} & P_{1j} \\ P_{2i} & P_{2j} \end{pmatrix}, \quad i, j = \{1,2,3,4\}. \tag{15}$$

Then the SEAF of the problem (6), (7) *is complete in* $L^2[0,1] \oplus L^2[0,1]$.

Moreover, let the set Φ*, which consists of* $N := \deg J_{14} - M$ *eigenfunctions and associate functions, satisfy the following condition:*

If Φ *contains either an eigenfunction or an associate function corresponding to an eigenvalue* λ_k*, then it also contains all the associate functions of higher order corresponding to the same eigenvalue.*

Then the SEAF of the problem (6), (7) *without the set* Φ *is also complete in the space* $L^2[0,1] \oplus L^2[0,1]$.

Proof. First observe that λ is an eigenvalue if and only if the so-called the characteristic function $\chi(\lambda)$ of the problem (6), (7) satisfies

$$\chi(\lambda) := \det \begin{pmatrix} Q_{11}(\lambda) & Q_{12}(\lambda) \\ Q_{21}(\lambda) & Q_{22}(\lambda) \end{pmatrix} = 0. \tag{16}$$

Here

$$\begin{aligned} Q_{11}(\lambda) &= P_{11}(\lambda) + P_{13}(\lambda)\varphi_{01}(1;\lambda) + P_{14}(\lambda)\varphi_{02}(1;\lambda), \\ Q_{12}(\lambda) &= P_{12}(\lambda) + P_{13}(\lambda)\psi_{01}(1;\lambda) + P_{14}(\lambda)\psi_{02}(1;\lambda), \\ Q_{21}(\lambda) &= P_{21}(\lambda) + P_{23}(\lambda)\varphi_{01}(1;\lambda) + P_{24}(\lambda)\varphi_{02}(1;\lambda), \\ Q_{22}(\lambda) &= P_{22}(\lambda) + P_{23}(\lambda)\psi_{01}(1;\lambda) + P_{24}(\lambda)\psi_{02}(1;\lambda). \end{aligned} \tag{17}$$

If in addition λ_0 is a root of $\chi(\lambda)$ of the order p, then the operator determined by (6), (7) has precisely p eigenfunctions and associate functions corresponding to λ_0. Introduce the functions

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\omega_1}(x;\lambda) = {} & (P_{12}(\lambda) + (P_{13}(\lambda)\psi_{01}(1;\lambda) + (P_{14}(\lambda)\psi_{02}(1;\lambda))\varphi_0(x;\lambda) \\ & - (P_{11}(\lambda) + (P_{13}(\lambda)\varphi_{01}(1;\lambda) + (P_{14}(\lambda)\varphi_{02}(1;\lambda))\psi_0(x;\lambda) \end{aligned} \tag{18}$$

and

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\omega_2}(x;\lambda) = {} & (P_{22}(\lambda) + (P_{23}(\lambda)\psi_{01}(1;\lambda) + (P_{24}(\lambda)\psi_{02}(1;\lambda))\varphi_0(x;\lambda) \\ & - (P_{21}(\lambda) + (P_{23}(\lambda)\varphi_{01}(1;\lambda) + (P_{24}(\lambda)\varphi_{02}(1;\lambda))\psi_0(x;\lambda). \end{aligned} \tag{19}$$

Then for all λ the function $\overrightarrow{\omega_j}(x;\lambda)$ is a solution of the first equation in (7). If λ_0 is a root of $\chi(\lambda)$ of order p then $\overrightarrow{\omega_j}(x;\lambda_0)$ is a solution of the second equation in (7) too. Moreover, since the function

$$P_{21}\omega_{j1}(0,\lambda) + P_{22}\omega_{j2}(0,\lambda) + P_{23}\omega_{j1}(1,\lambda) + P_{24}\omega_{j2}(1,\lambda) \tag{20}$$

is equal to $-\chi(\lambda)$, all nonzero functions

$$\frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\omega_j(x;\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_0}, \qquad \text{where } 1 \leq k < p, \quad j = 1,2, \tag{21}$$

are eigenfunctions and associate functions corresponding to the eigenvalue λ_0.

Now suppose that the SEAF of the problem (6), (7) without the set Φ is not complete in the space $L^2[0,1] \oplus L^2[0,1]$. Then there exists a nonzero vector function $\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))^\top$, which is orthogonal to the SEAF of the problem (6), (7) (possibly, excluding functions from the set Φ). Define

$$\widetilde{F_j}(\lambda) := \left\langle \overrightarrow{\omega}_j(x;\lambda), \overrightarrow{f}(x) \right\rangle = \int_0^1 (\omega_{j1}(x;\lambda)\overline{f_1(x)} + \omega_{j2}(x;\lambda)\overline{f_2(x)})\, dx. \tag{22}$$

Clearly, $\widetilde{F_j}(\lambda)$ is an entire function. If λ_s is an eigenvalue of multiplicity p and the set Φ contains neither an eigenfunction nor an associate function corresponding to λ_s, then λ_s is a root of $\widetilde{F_j}(\lambda)$, $j = 1, 2$, of order p. If Φ contains k eigenfunctions or associate functions corresponding to the eigenvalue λ_s, then λ_s is a root of $\widetilde{F_j}(\lambda)$, $j = 1, 2$, of order greater than or equal to $p - k$.

Denote by Λ the set of all eigenvalues of the problem (6), (7), such that the corresponding eigenfunctions (or associate functions) belong to the set Φ. For each $\lambda_s \in \Lambda$ denote by p_s the number of eigenfunctions and associate functions in Φ corresponding to λ_s. Define

$$\Pi(\lambda) = \prod_{\lambda_s \in \Lambda} (\lambda - \lambda_s)^{p_s}. \tag{23}$$

Let λ_k be an eigenvalue of problem (6), (7) of multiplicity p. Then λ_k is a zero of the product $\Pi(\lambda)\widetilde{F_j}(\lambda)$ of order p. Consequently, the functions

$$F_j(\lambda) = \frac{\Pi(\lambda)\widetilde{F_j}(\lambda)}{\chi(\lambda)} \tag{24}$$

are entire.

Next an estimate for these functions will be derived.

One can rewrite $\chi(\lambda)$ as follows

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) &= J_{12} + J_{13}\psi_{01}(1;\lambda) + J_{14}\psi_{02}(1;\lambda) + J_{32}\varphi_{01}(1;\lambda) \\ &\quad + J_{42}\varphi_{02}(1;\lambda) + J_{34} \det \begin{pmatrix} \varphi_{01}(1;\lambda) & \psi_{01}(1;\lambda) \\ \varphi_{02}(1;\lambda) & \psi_{02}(1;\lambda) \end{pmatrix} \\ &= J_{12} + J_{13}\psi_{01}(1;\lambda) + J_{14}\psi_{02}(1;\lambda) + J_{32}\varphi_{01}(1;\lambda) \\ &\quad + J_{42}\varphi_{02}(1;\lambda) + J_{34}\left(1 + O\left(\tfrac{1}{\Im\lambda}\right)\right) \exp((a+b)\lambda i).\end{aligned} \tag{25}$$

Then one obtains from (11), (12), and the assumption (14) the following estimates for $\chi(\lambda)$:

$$\chi(\lambda) = (1 + O(\tfrac{1}{\Im\lambda}))J_{32}\exp(a\lambda i), \quad \lambda \in \mathbb{C}^+; \tag{26}$$

$$\chi(\lambda) = (1 + O(\tfrac{1}{\Im\lambda}))J_{14}\exp(b\lambda i), \quad \lambda \in \mathbb{C}^-. \tag{27}$$

The definition of $\overrightarrow{\omega}_j(x;\lambda)$ (cf. (18) and (19)) shows that

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\omega}_j(x;\lambda) &= -P_{j1}(\lambda)\psi_0(x;\lambda) + P_{j2}(\lambda)\varphi_0(x;\lambda) \\ &\quad + \left(1 + O\left(\tfrac{1}{\Im\lambda}\right)\right)\exp((a+b)\lambda i)(-P_{j3}(\lambda)\psi_1(x;\lambda) + P_{j4}(\lambda)\varphi_1(x;\lambda)).\end{aligned} \tag{28}$$

If $\lambda \in \mathbb{C}^+$, then (28) and the estimate (11) imply

$$\begin{aligned}\omega_{jk}(x;\lambda) &= (O(P_{j1}(\lambda) + O(P_{j2}(\lambda)))\exp(a\lambda i x) \\ &\quad + (O(P_{j3}(\lambda) + O(P_{j4}(\lambda)))\exp(a\lambda i)\exp(b\lambda i x).\end{aligned} \tag{29}$$

It follows from

$$\int_0^1 |f_k(x)\exp(a\lambda i x)|\, dx = O\left(\frac{\exp(a\lambda i)}{\sqrt{|\Im\lambda|}}\right), \quad \int_0^1 |f_k(x)\exp(b\lambda i x)|\, dx = O\left(\frac{1}{\sqrt{|\Im\lambda|}}\right),$$

that there exists a constant $c_1 > 0$, such that, for $\Im\lambda > c_1$,

$$\widetilde{F}_j(\lambda) = O\left(\max|P_{jk}|(\lambda)\frac{\exp(a\lambda i)}{\sqrt{|\Im\lambda|}}\right) = O\left(\frac{\lambda^M \exp(a\lambda i)}{\sqrt{|\Im\lambda|}}\right). \tag{30}$$

Similarly, there exists a constant $c_2 < 0$, such that, for $\Im\lambda < c_2$,

$$\widetilde{F}_j(\lambda) = O\left(\frac{\lambda^M \exp(a\lambda i)}{\sqrt{|\Im\lambda|}}\right). \tag{31}$$

>From (26), (27), (30), and (31) one obtains finally the estimate

$$F_j(\lambda) = O\left(\frac{1}{\sqrt{|\Im\lambda|}}\right), \quad |\Im\lambda| > c. \tag{32}$$

According to Phragmen–Lindelöf theorem for a strip $F_j(\lambda) \equiv 0$. Consequently, $\widetilde{F}_j(\lambda) \equiv 0$, i.e. $\vec{f}(x)$ is orthogonal to $\vec{\omega}_1(x;\lambda)$ and $\vec{\omega}_2(x;\lambda)$ for all λ. However, the functions $\vec{\omega}_1(x;\lambda)$ and $\vec{\omega}_2(x;\lambda)$ for all λ form a fundamental system of solutions of the equation (6) if λ is not an eigenvalue. Since the set of eigenvalues coincides with the set of all roots of $\chi(\lambda)$, this set is discrete. This implies that $\vec{f}(x)$ is orthogonal to all solutions of the equation (6), so that $\vec{f}(x) \equiv 0$.

Therefore, there is no nontrivial function $\vec{f}(x)$ orthogonal to the SEAF of the problem (6)–(7) (maybe without the set Φ). □

Theorem 2. *Let P_{ij} (i=1,2 ; j=0,1,...,9) be polynomials, let the rank of the matrix*

$$\begin{pmatrix} P_{10}(\lambda) & P_{11}(\lambda) & \dots & P_{19}(\lambda) \\ P_{20}(\lambda) & P_{21}(\lambda) & \dots & P_{29}(\lambda) \end{pmatrix} \tag{33}$$

be equal to 2 for all $\lambda \in \mathbb{C}$, and let

$$\deg J_{03} = \deg J_{12} = M, \tag{34}$$

where

$$J_{ij} = \det\begin{pmatrix} P_{1i} & P_{1j} \\ P_{2i} & P_{2j} \end{pmatrix}, \quad i,j = 0,1,\dots,9, \tag{35}$$

and $M = \max\{\deg P_{ij} : i \in \{1,2\};\ j \in \{0,1,\dots,9\}\}$. *Then the SEAF of problem* (6), (8) *is complete in* $L^2[0,1] \oplus L^2[0,1]$.

Moreover, let the set Φ, which consists of M eigenfunctions and associate functions, satisfy the following condition:

If Φ contains either an eigenfunction or an associate function corresponding to an eigenvalue λ_k, then it also contains all the associate functions of higher order corresponding to the same eigenvalue.

Then the SEAF of problem (6), (8) *without the set Φ is also complete in the space* $L^2[0,1] \oplus L^2[0,1]$.

The proof of this theorem is similar to the proof of Theorem 1.

References

[1] *Keldysh, M.V.* // Doklady of AN USSR. — 1951 — vol. 77, N 1, p. 11–14
[2] *Levitan, B.M., Sargsjan, I.S.* Introduction to the Spectral Theory — Moscow — "Nauka— 1970 — 671pp.
[3] *Malamud, M.M.* Problems of the Uniqueness in the Inverse Problems for the System of Differential Equations in Bounded Interval // Trans. Moscow Math. Soc. — 1999 — vol. 60, p. 199–258.
[4] *Malamud, M.M., Oridoroga, L.L.* Theorems of the Completeness for the Systems of Ordinary Differential Equations // Functional Analysis and Applications — 2000 — vol. 34, N 3, p. 88–90.
[5] *Marchenko, V.A.* Sturm – Liouville Operators and their Applications — Kyiv — "Naukowa dumka— 1977 — 332pp.

[6] *Najmark, M.A.* Linear Differential Operators — Moscow — "Nauka— 1968 — 526 pp.

[7] *Oridoroga, L.L.* Boundary-Value Problems for the Second-Order Dirac-Type Systems with Boundary Conditions Depending on a Spectral Parameter // Dopovidi of NAN Ukraine — 2001 — N 3, p. 34–39.

[8] *Oridoroga, L.L.* Boundary Value Problems for 2×2 Dirac Type Systems with Spectral Parameter in Boundary Conditions // Methods of Functional Analysis and Topologi — 2001 — vol. 7, N 1, p. 82–87.

[9] *Shkalikov, A. A.* The completeness of eigenfunctions and associated functions of an ordinary differential operator with irregular-spliting boundary conditions // Functional Analysis and Applications — 1976 — vol. 10, N 4, p. 69–80.

[10] *Tarapowa, E.I.* Boundary-Value Problem of Sturm – Liouville Equations with Nonlinear Boundary Conditions. I // Theory of Functions, Functional Analysis and Applications — 1979 — 31, p. 157–160.

[11] *Tarapowa, E.I.* Boundary-Value Problem of Sturm – Liouville Equations with Nonlinear Boundary Conditions. II // Theory of Functions, Functional Analysis and Applications — 1979 — 33, p. 82–87.

E-mail: `Sha@UWasa.Fi, oridoroga@skif.net`

A priori Estimates and Blow-up of Solutions to Nonlinear Partial Differential Inequalities

G. G. Laptev
Steklov Mathematical Institute
Moscow, Russia

Using the test-function method developed by Mitidieri and Pohozaev we obtain global a priori estimates and prove blow-up results for semilinear higher–order evolution inequalities in exterior domain.

Keywords: nonexistence, blow-up, partial differential inequalities

1. Introduction

This paper is devoted to nonexistence of global solutions to some evolution equations and inequalities. The number of publications on nonexistence for evolution problems is so great that we cannot cite all of them. For parabolic problems let us only mention the classical book by Samarskii, Galaktionov, Kurdyumov & Mikhailov [16], the survey by Levine [10] and the more recent one by Deng & Levine [2]. The main results for hyperbolic problems can be found in the survey by John [4] and the papers by Del Santo, Georgiev & Mitidieri [1] and by Veron & Pohozaev [17].

Finally we refer the interested readers to the celebrated monograph by Mitidieri and Pohozaev [12], where the test-function method is systematically applied to quasilinear elliptic (see also [5, 6, 3, 7]), parabolic (see also [9, 18]) and hyperbolic (see also [17, 8]) partial differential inequalities and systems of such inequalities.

2. Main result

Let $R > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Let us introduce the domain $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus B_R$ (where $N \geq 3$ and $B_R = \{|x| \leq R\}$) and consider the problem

$$\begin{cases} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} - \Delta u \geq |u|^q, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) \geq 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \\ \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x,0) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Definition 1. Let $u(x,t) \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ and the locally integrable traces $\frac{\partial^i u}{\partial t^i}(x,0)$, $i = 1,\dots,k-1$, are well defined. The function $u(x,t)$ is called a weak solution to problem (1) if, for any nonnegative test-function $\varphi(x,t) \in W^{2,k}_\infty(\Omega \times (0,\infty))$ with compact support, such that $\varphi|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0$, the integral inequality

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dxdt + \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega u \left((-1)^k \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k} - \Delta\varphi \right) dxdt \geq \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega |u|^q \varphi\, dxdt$$
$$+ \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \int\limits_\Omega \frac{\partial^{k-1-i} u}{\partial t^{k-1-i}}(x,0) \frac{\partial^i \varphi}{\partial t^i}(x,0)\, dx + \int\limits_\Omega \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\varphi(x,0)\, dx \quad (2)$$

holds.

Theorem 1. *For*

$$1 < q \leq q_k^* = \frac{N + 2/k}{N - 2 + 2/k}$$

problem (1) *has no nontrivial global solution.*

This theorem includes, among others, the sharp results for parabolic ($k = 1$, Fujita–Hayakawa's critical exponent $q_1^* = 1 + \frac{2}{N}$, see also [14]) and hyperbolic ($k = 2$, Kato's critical exponent $q_2^* = \frac{N+1}{N-1}$, see also [17]) problems. It is interesting, that formally passing to the limit as $k \to \infty$ in Theorem 1 we arrive at the sharp elliptic critical exponent $q_\infty^* = \frac{N}{N-2}$ (see, for example, [5, 11, 12, 7] and the references therein).

3. Auxiliary estimates

In this section we obtain some estimates depending on the parameter ρ, $\rho \to \infty$. These estimates play fundamental role in the test function method.

Let us consider the "standard cut-off function" $\zeta(y) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ with the following properties:

$$0 \leq \zeta(y) \leq 1, \qquad \zeta(y) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{if } y \geq 2. \end{cases}$$

For the function

$$\eta(y) = (\zeta(y))^{kp_0}$$

with some positive p_0 and $k \in \mathbb{N}$ by direct calculation one can obtain the estimates (for $1 < p \leq p_0$)

$$|\eta'(y)|^p = (kp_0)^p \zeta^{kp_0(p-1)} \zeta^{kp_0 - p} |\zeta'|^p \leq c_\eta \eta^{p-1}(y),$$
$$|\eta''(y)|^p \leq (kp_0)^p \zeta^{kp_0(p-1)} \zeta^{kp_0-2p} ((kp_0 - 1)|\zeta'|^2 + \zeta|\zeta''|)^p \leq c_\eta \eta^{p-1}(y), \quad \dots$$
$$|\eta^{(k)}(y)|^p \leq c_\eta \eta^{p-1}(y)$$

with a positive constant c_η.

Now let us introduce the change of variables $y = t/\rho^\theta$, with $\theta > 0$, $\rho > 2R$. For the function $\eta(t/\rho^\theta)$ we have

$$\operatorname{supp} \left| \eta\left(\frac{t}{\rho^\theta} \right) \right| = \{t < 2\rho^\theta\}, \qquad \operatorname{supp} \left| \frac{d^k \eta(t/\rho^\theta)}{dt^k} \right| = \{\rho^\theta < t < 2\rho^\theta\},$$

and

$$\int\limits_{\operatorname{supp}|\frac{d^k\eta(t/\rho^\theta)}{dt^k}|} \frac{|\frac{d^k \eta(t/\rho^\theta)}{dt^k}|^p}{\eta^{p-1}(t/\rho^\theta)}\, dt \leq c_\eta \rho^{-\theta(kp-1)}. \quad (3)$$

The parameter θ will be chosen later.

For the variable x, $|x| = r \geq R$, we introduce the functions $\eta(r/\rho)$,

$$\xi(x) \equiv \xi(r) = \frac{1}{R^s} - \frac{1}{r^s}, \tag{4}$$

and

$$\psi_\rho(x) \equiv \psi_\rho(r) = \left(\frac{1}{R^s} - \frac{1}{r^s}\right) \eta\left(\frac{r}{\rho}\right). \tag{5}$$

Here we will put $s = N - 2$. It is evidently, that $\psi_\rho = 0$ and $\frac{\partial \psi_\rho}{\partial r} \geq 0$ as $r = R$.

For the derivatives of the function $\psi_\rho(r)$ (as $r > 2R$) we have:

$$\left|\frac{\partial \psi_\rho}{\partial r}\right|^p \leq \left|\frac{s}{r^{s+1}}\eta\left(\frac{r}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{R^s} - \frac{1}{r^s}\right)\eta'\left(\frac{r}{\rho}\right)\frac{1}{\rho}\right|^p \leq c\eta^{p-1}\left(\frac{r}{\rho}\right)\frac{1}{R^{ps}r^p}\left(1 + \frac{r^p}{\rho^p}\right),$$

$$\left|\frac{\partial^2 \psi_\rho}{\partial r^2}\right|^p \leq \left|-\frac{s(s+1)}{r^{s+2}}\eta\left(\frac{r}{\rho}\right) + \frac{2s}{r^{s+1}\rho}\eta'\left(\frac{r}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{R^s} - \frac{1}{r^s}\right)\frac{1}{\rho^2}\eta''\left(\frac{r}{\rho}\right)\right|^p$$
$$\leq c\eta^{p-1}\left(\frac{r}{\rho}\right)\frac{1}{R^{sp}r^{2p}}\left(1 + \frac{r^p}{\rho^p} + \frac{r^{2p}}{\rho^{2p}}\right),$$

here c does not depend on r and ρ. Using these estimates we arrive at the inequality for the Laplace operator:

$$|\Delta\psi_\rho(x)|^p = \left|\frac{\partial^2\psi_\rho}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r}\frac{\partial \psi_\rho}{\partial r}\right|^p \leq c\left|\frac{\partial^2\psi_\rho}{\partial r^2}\right|^p + c\frac{1}{r^p}\left|\frac{\partial\psi_\rho}{\partial r}\right|^p$$
$$\leq c\eta^{p-1}\left(\frac{r}{\rho}\right)\frac{1}{R^{sp}r^{2p}}\left(1 + \frac{r^p}{\rho^p} + \frac{r^{2p}}{\rho^{2p}}\right) \leq c\psi_\rho^{p-1}(x)\frac{1}{r^{2p}}\left(1 + \frac{r^p}{\rho^p} + \frac{r^{2p}}{\rho^{2p}}\right). \tag{6}$$

Now we take $s = N - 2$. Due to $\Delta\left(\frac{1}{r^{N-2}}\right) = 0$ for $r \neq 0$ we have $\Delta\psi_\rho = 0$ for $r < \rho$ and $\operatorname{supp}|\Delta\psi_\rho| = \{\rho < r < 2\rho\}$. On the set $\operatorname{supp}|\Delta\psi_\rho|$ the estimate $1 + \frac{r^p}{\rho^p} + \frac{r^{2p}}{\rho^{2p}} \leq c$ holds, where c does not depend on r and ρ. Therefore, it follows from (6) (for $\rho < r < 2\rho$) that

$$|\Delta\psi_\rho(x)|^p \leq c\psi_\rho^{p-1}(x)\frac{1}{\rho^{2p}};$$

and we get

$$\int\limits_{\operatorname{supp}|\Delta\psi_\rho|} \frac{|\Delta\psi_\rho(x)|^p}{\psi_\rho^{p-1}(x)}\,dx \leq c\int\limits_\rho^{2\rho}\frac{\psi_\rho^{p-1}(x)}{\psi_\rho^{p-1}(x)}\frac{r^{N-1}}{\rho^{2p}}\,dr \leq c_\psi\rho^{-2p+N}. \tag{7}$$

Finally, for the general test-function

$$\varphi_\rho(x,t) = \eta\left(\frac{t}{\rho^\theta}\right)\psi_\rho(x) \tag{8}$$

we obtain the inequality

$$\int\limits_{\operatorname{supp}|\Delta\varphi_\rho|}\frac{|\Delta\varphi_\rho(x,t)|^p}{\varphi_\rho^{p-1}(x,t)}\,dx\,dt \leq \int\limits_0^{2\rho^\theta}\eta(t/\rho^\theta)\,dt\int\limits_{\operatorname{supp}|\Delta\psi_\rho|}\frac{|\Delta\psi_\rho|^p}{\psi_\rho^{p-1}}\,dx \leq c_\varphi\rho^{\theta-2p+N}. \tag{9}$$

Analogously, using (3), we obtain:

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\left|\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k}\right|}\left|\frac{\partial^k\varphi_\rho(x,t)}{\partial t^k}\right|^p\frac{1}{\varphi_\rho^{p-1}(x,t)}\,dx\,dt$$

$$\leq \int\limits_{\operatorname{supp}\left|\frac{d^k\eta(t/\rho^\theta)}{dt^k}\right|} \left|\frac{d^k\eta(t/\rho^\theta)}{dt^k}\right|^p \frac{1}{\eta^{p-1}(t/\rho^\theta)}\,dt \int\limits_{R<|x|<2\rho} \psi_\rho(x)\,dx$$

$$\leq c_\eta \rho^{-\theta(kp-1)} c \int\limits_R^{2\rho} r^{N-1}\,dr \leq c_\varphi \rho^{N-\theta(kp-1)}. \quad (10)$$

For $\theta = 2/k$ the powers in these estimates are equal:

$$N - \theta(kp-1) = \theta - 2p + N \equiv -2p + N + 2/k.$$

Finally, we have

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\left|(-1)^k \frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta\varphi_\rho\right|} \frac{\left|(-1)^k \frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta\varphi_\rho\right|^p}{\varphi_\rho^{p-1}}\,dxdt \leq c_0 \rho^{-2p+N+2/k}. \quad (11)$$

4. Proof of Theorem 1

Let $u(x,t)$ be a global nontrivial solution of problem (1). From Definition 1 with the test function $\varphi(x,t) = \varphi_\rho(x,t)$, defined by (8) with $p = q' > 1$ and $\theta = 2/k$, using the equalities $\frac{\partial^i\varphi_\rho}{\partial t^i}(x,0) \equiv 0$, $i = 1,\dots,k-1$, we obtain

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\varphi_\rho(x,0)\,dx + \int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega |u|^q\varphi_\rho\,dxdt \leq -\int\limits_0^\infty\int\limits_{\partial B_R} u\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial r}\,dxdt + \int\limits_{\operatorname{supp}|A\varphi_\rho|} uA\varphi_\rho\,dxdt, \quad (12)$$

where

$$A\varphi_\rho = (-1)^k\frac{\partial^k\varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta\varphi_\rho.$$

As it was mentioned above $\frac{\partial\psi_\rho}{\partial r}|_{r=R} \geq 0$, so that $\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial r}|_{r=R} \geq 0$ and the first integral in the right hand side is nonpositive due to our assumption $u|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} \geq 0$.

As for the last integral in (12), using the Hölder inequality, we find that

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\varphi_\rho(x,0)\,dx + \int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega |u|^q\varphi_\rho\,dxdt$$

$$= \int\limits_\Omega \frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}(x,0)\varphi_\rho(x,0)\,dx + \int\limits_{\operatorname{supp}|A\varphi_\rho|} |u|^q\varphi_\rho\,dxdt + \int\limits_{\varphi_\rho(x,t)=\xi(x)} |u|^q\xi\,dxdt$$

$$\leq \int\limits_{\operatorname{supp}|A\varphi_\rho|} |u|\cdot|A\varphi_\rho|\,dxdt \leq \left(\int\limits_{\operatorname{supp}|A\varphi_\rho|} |u|^q\varphi_\rho\,dxdt\right)^{1/q} \left(\int\limits_{\operatorname{supp}|A\varphi_\rho|} \frac{|A\varphi_\rho|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}}\,dxdt\right)^{1/q'}. \quad (13)$$

Now, using the estimate (11) (with $p = q'$) for the last integral in the right-hand side, we have

$$\int\limits_{\varphi_\rho(x,t)=\xi(x)} |u|^q\xi(x)\,dxdt \leq \int\limits_{\operatorname{supp}|A\varphi_\rho|} \frac{|A\varphi_\rho|^{q'}}{\varphi^{q'-1}}\,dxdt \leq c_0\rho^{-2q'+N+2/k}. \quad (14)$$

Now we pass to the limit as $\rho\to\infty$. In the case

$$-2q' + N + 2/k \leq 0 \quad (15)$$

this implies

$$\int_0^\infty \int_\Omega |u|^q \xi \, dxdt \le c_0.$$

Then by the inequality $\varphi_\rho \le \xi$ and taking into account the general properties of Lebesgue integral we have

$$\int_{\operatorname{supp}|A\varphi_\rho|} |u|^q \varphi_\rho \, dxdt \le \int_{\operatorname{supp}|A\varphi_\rho|} |u|^q \xi \, dxdt = \varepsilon(\rho) \to 0$$

as $\rho \to \infty$.

Then from the inequality (13) we finally get

$$\int_{\varphi_\rho(x,t)=\xi(x)} |u|^q \xi \, dxdt \le \varepsilon^{1/q}(\rho) c_0^{1/q'} \to 0$$

as $\rho \to \infty$, and $\int_0^\infty \int_\Omega |u|^q \xi \, dxdt = 0$, that is, the solution $u(x,t)$ must be trivial under condition (15), which is equivalent to the condition of Theorem 1. □

5. Acknowledgments

The author is grateful to Stanislav Pohozaev for setting up the problem and Vasil Kurta for helpful discussion of the results.

The author was supported in part by INTAS #00-136, Russian Leading Scientific Schools #00-15-96047 and RFBR Grant #01-01-00884.

References

[1] Del Santo D., Georgiev V., Mitidieri E., *Global existence of the solutions and formation of singularities for a class of hyperbolic systems*, In: *"Geometric Optics and Related Topics"* (Eds. F. Colombini & N. Lerner), Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 32, 117-140. Birkhäuser, Boston, 1997.

[2] Deng K., Levine H. A., *The role of critical exponent in blow-up theorems: the sequel*, J. Math. Anal. Appl. **243** (2000), 85–126.

[3] Galakhov E., Some nonexistence results for quasilinear elliptic problems, J. Math. Anal. Appl. 252 (2000) 256–277.

[4] John F., *Nonlinear wave equations, formation of singularities*, University Lecture Ser. **2** (1990), Amer. Math. Soc.

[5] Kurta V. V., *On the nonexistence of positive solutions to semilinear elliptic equations*, Proc. Steklov Inst. Math. **227** (1999), 162–169.

[6] Kartsatos A., Kurta V. V. *On nonexistence of entire solutions to quasilinear equations*, Dokl. Russ. Acad. Sci. **371** (2000), 591–593.

[7] Laptev G. G., *Nonexistence of global positive solutions for systems of semilinear elliptic inequalities in cone*, Russian Acad. Sci. Izv. Math. **64** (2000), 108–124.

[8] Laptev G. G., *On nonexistence for a class of singular semilinear differential inequalities*, Proc. Steklov Inst. Math. **232** (2001), 223–235.

[9] Laptev G. G., *Nonexistence of solutions to semilinear parabolic inequalities in cones*, Mat. Sb. (2001), to appear.

[10] Levine H. A., *The role of critical exponents in blow-up theorems*, SIAM Rev. **32** (1990), 262–288.

[11] Mitidieri E., Pohozaev S. I., *Nonexistence of positive solutions for quasilinear elliptic problems on* $\mathbb{R}^N$, Proc. Steklov Inst. Math. **227** (1999), 192–222.

[12] Mitidieri E., Pohozaev S. I., *A priori Estimates and Nonexistence of Solutions to Nonlinear Partial Differential Equations and Inequalities*, Proc. Steklov Inst. Math. **234** (2001).

[13] Mitidieri E., Pohozaev S. I., *Nonexistence of weak solutions for some degenerate elliptic and parabolic problems on* $\mathbb{R}^n$*,* J. Evolution Equations **1** (2001), 189-Ц220.

[14] Mochizuki K., Suzuki R., *Critical exponent and critical blow up for quasi-liner parabolic equations*, Israel J. Math. **98** (1997), 141–156.

[15] Pohozaev S. I., Tesei A., *Blow-up of nonnegative solutions to quasilinear parabolic inequalities*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. **11** (2000), 99–109.

[16] Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P., *Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations*, Nauka, Moscow, 1987 (in Russian). English translation: Walter de Gruyter, Berlin/New York, 1995.

[17] Veron L., Pohozaev S. I., *Blow-up results for nonlinear hyperbolic inequalities*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). **29** (2000), 393–420.

[18] Zhang Q., *Blow-up results for nonlinear parabolic equations on manifolds*, Duke Math. J. **97** (1999), 515–539.

G. G. Laptev Steklov Mathematical Institute Moscow, Russia

General elliptic boundary value problems with small parameter

L. R. Volevich[5]
Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow,Russia

This paper gives a survey on the concept of ellipticity with small parameter for general elliptic boundary value problems with operator and boundary conditions depending polynomially on a small parameter. We combine the methods of the theory of general elliptic boundary value problems with the Vishik–Lyusternik method of exponential boundary layer. The main result includes necessary and sufficient conditions for the existence of an a priori estimate of the problem uniform with respect to the parameter. These conditions are formulated in terms of interior and boundary symbols of the problem with parameter introduced in this paper.

Keywords: Elliptic boundary value problem, small parameter, boundary layer, Newton polygon.

1. Introduction

On a manifold M with smooth boundary ∂M the equation is considered

$$A(x,D,\varepsilon)u(x)=f(x)\quad x\in M, \tag{1}$$

where

$$\begin{aligned}A(x,D,\varepsilon) &:= \varepsilon^{2m-2\mu}A_{2m}(x,D)\\ &+\varepsilon^{2m-2\mu-1}A_{2m-1}(x,D)+\cdots+A_{2\mu}(x,D).\end{aligned} \tag{2}$$

Here $A_{2m-j},\quad j=0,\dots,2m-2\mu$ is operator of order $2m-j$ with principal part A^0_{2m-j}.

The boundary conditions are of the form

$$B_j(x',D,\varepsilon)u(x')=g_j(x'),\quad x'\in\partial M,\quad j=1,\dots,m, \tag{3}$$

where

$$\begin{aligned}B_j(x',D,\varepsilon) &:= \varepsilon^{b_j-\beta_j}B_{b_j}(x',D)\\ &+\varepsilon^{b_j-\beta_j-1}B_{b_j-1}(x',D)+\cdots+B_{\beta_j}(x',D),\end{aligned} \tag{4}$$

and $B_{b_j-k},\quad k=0,\dots,b_j-\beta_j$ is an operator of order b_j-k with principal part $B^0_{b_j-k}$. We shall suppose that for a fixed $\varepsilon>0$ the problem (1), (3) is a standard elliptic problem (i. e. the operator $A_{2m}(x,D)$ is elliptic and operators $\{B_{b_j}(x',D), j=1,\dots,m\}$ are connected with $A_{2m}(x,D)$ by the standard Shapiro–Lopatinskii condition).

[5]Supported by Russian Foundation of Basic Research, grant 00-01-00387

If we replace operators A_{2m-j} by A^0_{2m-j} in (2) and, respectively, B_{b_j-k} by $B^0_{b_j-k}$, we obtain the principal parts $A^0(x,D,\varepsilon)$ and $B^0_j(x,D,\varepsilon)$ of operators (2), (4). If we assign ε the weight -1 and ξ the weight 1, then the symbols of these operators become homogeneous functions:

$$A(x,\rho\xi,\rho^{-1}\varepsilon)=\rho^{2\mu}A(x,\xi,\varepsilon),\quad B_j(x,\rho\xi,\rho^{-1}\varepsilon)=\rho^{\beta_j}B_j(x,\xi,\varepsilon). \tag{5}$$

The main problem is to discribe necessary and sufficient conditions on symbols of operator in (1) and boundary operators in (3), which guarantee

(A) A priori estimate of the problem uniform with respect to $\varepsilon\searrow 0$.

(B) Existence of formal asymptotic solution (FAS) of (1), (3).

(C) Justification of FAS (in other words, when FAS is the expansion of the real solutions in powers of the small parameter).

We shall start from (B) and in informal way present the Vishik– Lyusternik method, which will suggest the conditions on inner and boundary symbols of the problem. Then we shall mainly study (A).

Although problems of type (1), (3) for high-order elliptic equations with small parameter in higher derivatives arise in mathematical physics (mainly in fluid dynamics and elasticity) the profound theory of such problems begun from the remarkable paper of Vishik-Lyusternik [11], where the basic idea of exponential boundary layer was developped and so-called the Vishik–Lyusternik method was introduced. The main achievement of this method is the possibility to calculate corrections near the boundary by solving ODE problems in the direction normal to the boundary.

This approach with great success was used in applications. There is a lot of applied papers, where the boundary layer method of Vishik– Lyusternik is used to write down the asymptotics for concrete boundary value problems.

As for purely mathematical papers devoted to this problem, there are not many of them. The so-called general elliptic theory in mid fiftieth (when the paper of Vishik–Lyusternik was written) was not so popular as it became a decade later. Vishik and Lyusternik restricted themselves to the Dirichlet problem for strongly elliptic equations. The generalization of their results to general boundary value problems was discussed by Frank in series of papers starting from [9] and Nazarov [10] and later. The presentation below has common points with these works.

The goal of my lecture is to selebrate Vishik's anniversary by presenting the small parameter theory as a part of general elliptic theory.

2. Formal asymptotic solution of the problem (1), (3)

The traditional localization of elliptic problems makes possible to "glue"the FAS on M from local FAS on $\mathbb{R}^n$ and on $\mathbb{R}^n_+$.

2.1. Formal asymptotic solution on $\mathbb{R}^n$.

The construction is absolutely traditional. We seek FAS in the form

$$U(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(x). \tag{6}$$

Substituting (6) in equation (1) and equating the terms with the same power of ε we obtain recurrent relations

$$A_{2\mu}u_0=f,\quad A_{2\mu}u_1=-A_{2\mu+1}u_0, \tag{7}$$

and for an arbitrary $k>1$ we obtain

$$A_{2\mu}u_k=-A_{2\mu+1}u_{k-1}-\cdots-A_{2m}u_{k-2m+2\mu}, \tag{8}$$

where we formally set $u_{k-l}=0$ for $l>k$.

Equations (7), (8) show that our recurrent system can be solved if the operator, say,

$$A_{2\mu}(x, D) : H^r(M) \to H^{r-2\mu}(M) \tag{9}$$

has a bounded inverse for some r. It means that $A_{2\mu}(x, D)$ is elliptic and, in principal, some additional conditions on the lower terms of $A_{2\mu}$ are satisfied.

To justify FAS we need some (weak) estimate from below of the operator $A(x, D, \varepsilon)$ providing unicity in $\mathbb{R}^n$.

Note, that if the right-hand side f belongs to a space $H^s(M)$ the series (6) according to (7), (8) belongs, in general, to $H^{-\infty}(M)$. However, if $f \in C^\infty$, then according to the hypoellipticity of the elliptic operator $A_{2\mu}(x, D)$ the FAS (6) also belongs to $A_{2\mu}(x, D)$.

2.2. Formal asymptotic solution in the half-space. Boundary layer method. We shall consider the problem (1), (3) in the half-space

$$\mathbb{R}^n_+ := \{x = (x', x_n), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad x_n \geq 0\}.$$

We shall use the indexing of boundary operators (3) such that

$$\beta_1 \leq \beta_2 \leq \cdots \leq \beta_m.$$

In addition, we make a very important assumption:

$$\beta_\mu < \beta_{\mu+1}. \tag{10}$$

We seek the solution of the problem (1), (3) in the form

$$U(x, \varepsilon) + V(x', \frac{x_n}{\varepsilon}, \varepsilon), \tag{11}$$

where the first term is the so-called exterior expansion (6) and the second term is the interior expansion (boundary layer) of the form

$$V(x', \frac{x_n}{\varepsilon}, \varepsilon) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l_0+l} v_l(x', \frac{x_n}{\varepsilon}). \tag{12}$$

The integer l_0 will be indicated below.

For the exterior expansion we obtain equations (7), (8), which we rewrite in the form

$$A_{2\mu}(x, D)u_k(x) = \mathcal{F}(x, u_0, \ldots, u_{k-1}). \tag{13}$$

These equations will be supplimented with μ boundary conditions

$$B_{\beta_j}(x', D)u_k(x', 0) = \mathcal{G}_j(x', u_0, \ldots, u_{k-1}), \quad j = 1, \ldots, \mu. \tag{14}$$

It is natural to suppose that equation (13) and boundary conditions (14) are connected by means of the Shapiro–Lopatinskii condition.

The interior expansion we shall search as solution of the equation

$$A(x, D, \varepsilon)V(x', \frac{x_n}{\varepsilon}, \varepsilon) = 0,$$

In this equation we change variable x_n by $t = x_n/\varepsilon$. After the change the equation can be rewritten in the form

$$\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l_0+l-2m}(A(\varepsilon t, x', \varepsilon D', D_n)v_l)(x', t) = 0.$$

Expanding $A(\varepsilon t, x', \varepsilon D', D_n)$ in powers of ε and equating the terms corresponding to the same power of ε we obtain ordinary differential equations with respect to t (parametrized by $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$)

$$A(0, x', 0, D_n, 1))v_l(x', t) = \mathcal{F}'(x', t, v_0, \ldots, v_{l-1}). \tag{15}$$

These equations will be supplimented by $m - \mu$ boundary conditions

$$B_j(x', 0, D_n, 1)v_l(x', 0) = \mathcal{G}'_j(x', v_0, \ldots, v_{l-1}), \quad j = \mu + 1, \ldots, m. \tag{16}$$

It is natural to suppose that ODE problem (15), (16) is uniquelly solvable.

Now we see that the construction of FAS is reduced to the definition of the right-hand sides in (14), (16). In this process the important role plays the choice of the parameter l_0:

$$l_0 = \beta_\mu + 1.$$

First of all note that

$$B_j(x', D, \varepsilon)U(x, \varepsilon)|_{x_n=0} = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l [(B_{\beta_j}(x', D)u_l)(x', 0) + \sum_{s=1}^{b_j-\beta_j} \varepsilon^s (B_{\beta_j+s}(x', D)u_{l-s})(x', 0)] \quad (17)$$

and

$$B_j(x', D, \varepsilon)V(x', \frac{x_n}{\varepsilon}, \varepsilon)|_{x_n=0} = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l+1+\beta_\mu-\beta_j} [(B_j(x', 0, D_n, 1)v_l(x', 0)$$

$$+ \sum_{s=1} \varepsilon^s B_{js}(x', D)v_{l-s}(x', 0)]. \quad (18)$$

Now we substitute expressions (17) and (18) in the boundary conditions. For $j \le \mu$ the second sum is $O(\varepsilon)$ and the first sum gives the relations

$$B_{\beta_j}(x', D)u_0(x', 0) = g_j(x'), \quad j = 1, \dots, \mu. \quad (19)$$

To deal with the boundary conditions with $j > \mu$ we suppose, that

$$\beta_j = \beta_\mu + 1, \quad j = \mu + 1, \dots, \nu$$

,

$$\beta_j > \beta_\mu + 1, \quad j = \nu + 1, \dots, m.$$

. The sum (17) is $O(1)$ and (18) for $j \le \nu$ is also $O(1)$ and gives

$$B_j(x', 0, D_n, 1)v_0(x', 0) = g_j - B_{\beta_j}(D)u_0, \quad j = \mu + 1, \dots, \nu. \quad (20)$$

For $j > \nu$ expression (18) contains negative powers of ε. Equating to zero the coefficient of the greatest negative power we obtain

$$B_j(x', 0, D_n, 1)v_0(x', 0) = 0, \quad j = \nu + 1, \dots, m. \quad (21)$$

This process can be recurrently repeated.

3. Small parameter-elliptic boundary value problems

Fix a point $x^0 \in M$ and consider the interior symbol

$$A(\xi, \varepsilon) = A^0(x^0, \xi, \varepsilon) \quad (22)$$

at this point. If $x^0 \in \partial M$ we define the symbols

$$B_j(\xi, \varepsilon) = B_j^0(x^0, \xi, \varepsilon), \quad j = 1, \dots, m. \quad (23)$$

We introduce a local coordinate system $x = (x', t)$ such that ∂M is given by the equation $\{t = 0\}$, In the traditional theory of elliptic problems the ODE problem on the half-line $\mathbb{R}_+ = \{t > 0\}$

$$A(\xi', D_t, \varepsilon)v(t) = 0 \quad t > 0, \quad (24)$$

$$B_j(\xi', D_t, \varepsilon)v(t)|_{t=0} = \phi_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (25)$$

$$v(t) \to 0 \quad t \to +\infty$$

is called the boundary symbol of the problem (1), (3), here ξ' is the variable dual to x'. The invertibility of this symbol for $\xi' \ne 0$ is the Shapiro–Lopatinskii condition. In the case of problems with small parameter the analogs of ellipticity condition for (22) and the Shapiro–Lopatinskii condition for (24) are much more complicated.

3.1. Condition on the interior symbol. Symbol $A(\xi,\varepsilon)$ is called *small parameter-elliptic* if

$$|A(\xi,\varepsilon)| \geq C|\xi|^{2\mu}(1+\varepsilon|\xi|)^{2m-2\mu}. \tag{26}$$

This condition comes from the paper of Vishik–Lyusternik. It is not difficult to show that inequality (26) is equivalent to the following conditions:

(i) $A^0_{2m}(\xi)$ is elliptic, i. e. $A^0_{2m}(\xi) \neq 0, \quad \xi' \neq 0$;
(ii) $A^0_{2\mu}(\xi)$ is elliptic; i. e. $A^0_{2\mu}(\xi) \neq 0, \quad \xi' \neq 0$;
(iii) $A(\xi',\varepsilon) \neq 0, \quad |\xi'| > 0, \quad \varepsilon \geq 0$.

As another equivalent definition of the small parameter-ellipticity we can take the estimate from above for $G(x,\xi,\varepsilon) := A^{-1}(x,\xi,\varepsilon)$:

$$|G(x,\xi,\varepsilon)| \leq C|\xi|^{-2\mu}(1+\varepsilon|\xi|)^{-2m+2\mu}$$

.

3.2. Small parameter-ellipticity and (weak) parameter-ellipticity with large parameter

We set $\lambda = 1/\varepsilon$ and denote by $\tilde{A}(x,D,\lambda)$ and $\tilde{B}_j(x,D,\lambda)$ operators (2), (4) multiplied by $\lambda^{2m-2\mu}$, and, respectively, by $\lambda^{b_j-\beta_j}$. Replacing in (1), (3) operators A and B_j by $\tilde{A}$ and, respectively, by $\tilde{B}_j$ we obtain a problem with a "large"parameter. The theory of it is parallel to the theory of (1), (3). The principal symbol of $\tilde{A}$ at the point x^0 is of the form

$$\tilde{A}(\xi,\lambda) = A^0_{2m}(\xi) + \lambda A^0_{2m-1}(\xi) + \cdots + \lambda^{2m-2\mu}A^0_{2\mu}(\xi).$$

For this symbol the small parameter–ellipticity condition leads to the inequality

$$|\tilde{A}(\xi,\lambda)| > \mathrm{const}|\xi|^{2\mu}(|\lambda|+|\xi|)^{2m-2\mu}. \tag{27}$$

In the papers of Denk-Mennicken-Volevich [2], [3] it is called *weak parameter– ellipticity condition.* This condition is a generalization of the Agmon– Agranovich–Vishik parameter-ellipticity condition corresponding to the case $\mu = 0$. The theory of weak parameter-elliptic problems is based on the boundary layer method.

Note that the weak parameter–ellipticity condition also arise when one studies parabolic operators which are not resolved with respect to the highest time derivative. In this case the inequality must be satisfied for λ belonging to a lower half-plane of the complex plane. This analogy shows that the boundary layer method can be also used in such problems.

3.3. Newton's polygon and parameter-ellipticity conditions

Inequality (26) is connected with the Newton polygon of the symbol $\tilde{A}$ and makes it possible to use in the context some ideas of the Newton polygon method.

Consider the polynomial

$$A(\xi,\lambda) = \sum_{\alpha,k} a_\alpha \xi^\alpha \lambda^k. \tag{28}$$

Let $N(A)$ be the convex hull in $\mathbb{R}^2$ of

$$\{(|\alpha|,k) : a_{\alpha k} \neq 0,\ (0,0), (|\alpha|,0), (0,k)\}.$$

The polygon $N(A)$ is called Newton's polygon of symbol (28). In the case of polynomial $\tilde{A}(\xi,\lambda)$ satisfying (27) (note, that this estimate is two-sided) the Newton polygon of $\tilde{A}$ is a trapezoid and has the shape indicated in Figure 1

Inequality (26) can be rewritten in the form

$$|\tilde{A}(\xi,\lambda)| \geq C \sum_{(i,k)\in N(\tilde{A})\cap\mathbb{Z}^2} |\xi|^i|\lambda|^k$$

3.4. Roots of small parameter-elliptic symbols

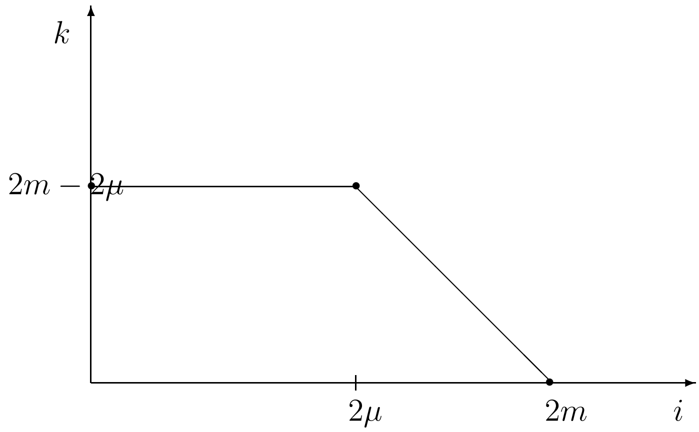

Fig. 1. The Newton polygon.

In the study of the boundary value problems (1), (3) an important role play the zeros of the algebraic equation

$$A(\xi', \tau, \varepsilon) = 0, \tag{29}$$

belonging to the half-plane $\mathbb{C}_+$ of the complex plane. It will be convinient to rewrite equation (29) in the equivalent form

$$\tilde{A}(\xi', \tau, 1/\varepsilon) = 0, \tag{30}$$

and denote its zeros as $\tau_j(\xi', 1/\varepsilon)$, $j = 1, \ldots, 2m$, they depend continuously on $(\xi', 1/\varepsilon)$. Let $m^\pm(\xi', 1/\varepsilon)$ be the number of zeros belonging to $\mathbb{C}_\pm$. According to (26) or (27) equations (29), (30) have no real zeros τ, so $m^\pm(\xi', 1/\varepsilon)$ is independent of $(\xi', 1/\varepsilon)$, and is denoted by $m^\pm$. From the continuity of zeros as $\varepsilon \to \infty$ follow that $m^\pm$ coincide with the the corresponding numbers for the equation $P^0_{2m}(\xi', \tau) = 0$.

Denote by $\mu^\pm$ the number of roots of $P^0_{2\mu}(\xi', \tau) = 0$ belonging to $\mathbb{C}_\pm$.

Following Vishik and Lyusternik introduce the polynomial

$$Q(\tau) := \tau^{-2\mu} A(0, \tau, 1).$$

If we pose $\xi' = 0, \varepsilon = 1$ in (26) and divide both sides of the inequality by by $\tau^{2\mu}$ we obtain

$$Q(\tau) > C(1 + |\tau|)^{2m-2\mu}.$$

Therefore $Q(\tau)$ has no real zeros. Denote by $q^\pm$ the number of roots of $Q(\tau) = 0$ belonging to $\mathbb{C}_\pm$.

Proposition. Following relations take place

$$m^+ = \mu^+ + q^+, \quad m^- = \mu^- + q^-. \tag{31}$$

The idea of the proof is following. As was established by Vishik and Lyusternik (for details see [2]) zeros of (29) can be splitted in two groups:

$$\{\tau_j(\xi', 1/\varepsilon), \quad j = 1, \ldots, 2\mu\} \bigcup \{\tau_j(\xi', 1/\varepsilon), \quad j = 2\mu + 1, \ldots, 2m\}. \tag{32}$$

The first set in (32) consists of the roots (with regard to multiplicities) uniformly bounded for small ε and as $\varepsilon \to 0$ it tends to the set

$$\{\tau^0_j(\xi'), \quad P_{2\mu}(\xi', \tau^0_j(\xi') = 0, \quad j = 1, \ldots, 2\mu\}.$$

More exactly, for a fixed ξ', small $\delta > 0$, and $\varepsilon < \varepsilon(\delta, \xi')$ in the disk of radius δ surrounding a root $\tau^0_j(\xi')$ of the multiplicity p_j there are exactly p_j roots $\tau_j(\xi', 1/\varepsilon)$. The roots in the second set (32) are $O(1/\varepsilon)$ for $\varepsilon \to 0$ and

$$\varepsilon \tau_j(\xi', \varepsilon) \to \nu_j, \quad j = 2\mu + 1, \ldots, 2m,$$

where ν_j are the roots of $Q(\tau) = 0$. More exactly, for a fixed ξ', small $\delta > 0$, and $\varepsilon < \varepsilon(\delta, \xi')$ in the disk of radius δ surrounding a root ν_j of the multiplicity q_j there are exactly q_j roots $\varepsilon\tau_j(\xi', 1/\varepsilon$. Since polynomials $A(\xi, \varepsilon)$, $A^0_{2m}(\xi, \varepsilon)$, $A^0_{2\mu}(\xi, \varepsilon)$ and $Q(\tau)$ have no real roots, we come to relations (31).

3.5. Properly small parameter-elliptic symbols The small parameter-elliptic polynomial $A(\xi, \varepsilon)$ is called *properly small parameter-elliptic*, if

$$m^+ = \mu^- = m, \quad \mu^+ = \mu^- = \mu \tag{33}$$

Note that relations (33) are satisfied automatically in the case $n > 2$, and only in the case $n = 2$ it is an additional condition.

Comparing (31) and (33) we obtain that in the case of properly small parameter-elliptic polynomial

$$q^+ = q^- = m - \mu. \tag{34}$$

It is the so-called condition of regular degeneration of Lyusternik and Vishik.

Remark. The existence of the two groups of roots with different behaviour with respect to the parameter is the main difference of small parameter ellipticity (or weak parameter ellipticity) from the standard ellipticity or parameter–ellipticity. Namely, one of this group leads to the boundary layer type solutions.

3.6. Conditions on the boundary symbol

Now we can formulate the analog of the Shapiro–Lopatinskii condition for the small parameter–elliptic operators.

Condition I. For every $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ and $\varepsilon \in [0, \infty)$ the ordinary differential equation on the half-line

$$A(\xi', D_t, \varepsilon)v(t) = 0 \quad t > 0, \tag{35}$$

$$B_j(\xi', D_t, \varepsilon)v(t)|_{t=0} = \phi_j, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{36}$$

$$v(t) \to 0 \quad t \to +\infty$$

has a unique solution for arbitrary $(\phi_1, \ldots, \phi_m) \in \mathbb{C}^m$.

Condition II. For every $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ the ordinary differential equation on the half-line

$$A_{2\mu}(\xi', D_t)v(t) = 0 \quad t > 0, \tag{37}$$

$$B_{\beta_j}(\xi', D_t)v(t)|_{t=0} = \phi_j, \quad j = 1, \ldots, \mu, \tag{38}$$

$$v(t) \to 0 \quad t \to +\infty$$

has a unique solution for arbitrary $(\phi_1, \ldots, \phi_\mu) \in \mathbb{C}^\mu$.

Condition III. The ordinary differential equation on the half-line

$$A(0, D_t, 1)v(t) = 0 \quad t > 0, \tag{39}$$

$$B_j(0, D_t, 1)v(t)|_{t=0} = \phi_j, \quad j = \mu + 1, \ldots, m, \tag{40}$$

$$v(t) \to 0 \quad t \to +\infty$$

has a unique solution for arbitrary $(\phi_{\mu+1}, \ldots, \phi_m) \in \mathbb{C}^{m-\mu}$.

Denote by $v_j(t, \xi', \varepsilon)$, $\quad j = 1, \ldots, m$ the fundamental system of solutions of the problem (35), (36), i. e.

$$A(\xi', D_t, \varepsilon)v_j(t) = 0 \quad t > 0, \tag{41}$$

$$B_k(\xi', D_t, \varepsilon)v_j(t)|_{t=0} = \delta_{kj}, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{42}$$

and

$$v_j(t) \to 0 \quad t \to +\infty$$

The existence of such solutions follows from Condition I. Since the solutions of (35), (36) decay exponentially as $t \to \infty$, we obtain

$$\int_0^{+\infty} |D_t^l v_j(t, \xi', \varepsilon)|^2 dt) := h_{lj}^2(\xi', \varepsilon) < \infty. \tag{43}$$

In the traditional cases (ellipticity or parameter– ellipticity) the right hand side can be easily obtained from the homogeneity. In our case it is a rather difficult task leading to cumbersome expressions.

Main Lemma. Let $v_j(t)$, $j = 1, \ldots, m$ are solutions of (41), (42). Then integrals (43) converge for $l = 0, 1, \ldots$ and the right-hand sides $h_{lj}(\xi', \varepsilon)$ are not greater than constant times

$$|\xi'|^{l-\beta_j-1/2}(1 + \varepsilon|\xi'|)^{\beta_j - b_j}, \quad j \le \mu, l \le \beta_{\mu+1};$$
$$\varepsilon^{\beta_{\mu+1}-l+1/2}|\xi'|^{\beta_{\mu+1}-\beta_j}(1 + \varepsilon|\xi'|)^{l-\beta_{\mu+1}+\beta_j-b_j-1/2}, \quad j \le \mu, l > \beta_{\mu+1};$$
$$\varepsilon^{\beta_j - b_\mu}|\xi'|^{l-\beta_\mu-1/2}(1 + \varepsilon|\xi'|)^{b_\mu - b_j}, \quad j > \mu, l \le b_\mu;$$
$$\varepsilon^{\beta_j-l+1/2}(1 + \varepsilon|\xi'|)^{l-b_j-1/2}, \quad j > \mu, l > b_\mu.$$

The rough idea of the proof of the Lemma is following. As in the case of FAS we seek the solution of (41), (42) in the form

$$v_j(t, \xi', \varepsilon) = U_j(t, \xi', \varepsilon) + V_j(\frac{t}{\varepsilon}, \xi', \varepsilon), \tag{44}$$

where

$$U_j(t, \xi', \varepsilon) = \sum_{p=1}^{\mu} \phi_{pj}(\xi', \varepsilon) \exp(i\tau_p^+(\xi', \varepsilon)t)$$

and

$$V_j(\frac{t}{\varepsilon}, \xi', \varepsilon) = \sum_{p=\mu+1}^{m} \phi_{pj}(\xi', \varepsilon) \exp(i(\varepsilon\tau_p^+(\xi', \varepsilon))t/\varepsilon).$$

The function U_j is a solution of some perturbation of problem (37), (38) in condition II, and V_j is a solution of some perturbation of the problem (39), (40) in condition III. The perturbation argument leads to special form of the unknown coefficients ϕ_{pj}.

3.7. Weakly parameter–elliptic problems with small parameter.

Replacing $1/\varepsilon$ by λ and $A, B_1, \ldots, B_m$ by $\tilde{A}, \tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_m$ we obtain a problem with large parameter, see [2]–[6]. In this case conditions (I), (II), (III) can be trivially rewritten.

Consider the corresponding system of fundamental solutions of the ODE problen on the half-line

$$\tilde{A}(\xi', D_t, \lambda)\tilde{v}_j(t) = 0 \quad t > 0, \tag{45}$$
$$\tilde{B}_k(\xi', D_t, \lambda)\tilde{v}_j(t)|_{t=0} = \delta_{kj}, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{46}$$

and

$$\tilde{v}_j(t) \to 0 \quad t \to +\infty.$$

It folllows from the unicity of solutions of the ODE problems under consideration, that

$$\tilde{v}_j(t, \xi', \lambda) = \lambda^{\beta_j - b_j} v_j(t, \xi', 1/\lambda),$$

and according to the Main Lemma the integrals

$$(\int_0^{+\infty} |D_t^l \tilde{v}_j(t, \xi', \lambda)|^2 dt))^{1/2}$$

are not greater than constant times

$$|\xi'|^{l-\beta_j-1/2}(|\lambda| + |\xi'|)^{\beta_j - b_j}, \quad j \le \mu, l \le \beta_{\mu+1};$$

$$|\xi'|^{\beta_{\mu+1}-\beta_j}(|\lambda|+|\xi'|)^{l-\beta_{\mu+1}+\beta_j-b_j-1/2}, \quad j\le\mu, l>\beta_{\mu+1};$$
$$|\xi'|^{l-\beta_\mu-1/2}(|\lambda|+|\xi'|)^{b_\mu-b_j}, \quad j>\mu, l\le b_\mu;$$
$$(|\lambda|+|\xi'|)^{l-b_j-1/2}, \quad j>\mu, l>b_\mu.$$

In the case of boundary operators independent of λ (i. e. $b_j=\beta_j, j=1,\dots,m$) we come to the results of [3].

4. A priori estimates for small parameter–elliptic problems.

All the estimates are based on the Main Lemma and follow the plan of [3]-[6]. This technique also allows to construct left and right parametrices and (under additional conditions on the lower terms) to construct the inverse operator.

4.1 A priori estimates on a manifold without boundary.

The small parameter–ellipticity condition sugggests the choice of the functional space $H^{r,s}(M)$. In the case $M=\mathbb{R}^n$ this space is defined as the space of $u\in H^{-\infty}$ with the norm

$$||u||_{r,s} := ||(1+|D|^2)^{s/2}(1+|\varepsilon D|^2)^{(r-s)/2} \tag{47}$$

uniformly bounded for $\varepsilon\le\varepsilon_0$. The standard localization technique permits to define these spaces on a smooth manifold M.

Theorem. For a symbol $A(x,\xi,\varepsilon)$ with smooth coefficients following conditions are equivalent

(I) $A(x^0,\xi,\varepsilon)$ for each $x^0\in M$ satisfy the small parameter–ellipticity condition.

(II) For arbitrary real r,s and large enough R the estimate

$$||u,M||_{r,s}\le C(||A(x,D,\varepsilon)u||_{r-2m,s-2\mu}+||u,M||_{(-R)}) \tag{48}$$

holds with constant independent of ε.

4.2. A priori estimate in $\mathbb{R}^n_+$.

Denote by $H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+)$ the space of restrictions to $\mathbb{R}^n_+$ of the elements from $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$. We shall consider only the case of *positive integer* r and $r\ge s$.

In the case $r>1/2$ the elements $u(x)\in H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+)$ have traces $u(x',0)$ belonging to the space $H^{r-1/2,s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ with norm (see [2]– [3]).

$$||g,\mathbb{R}^{n-1}||_{r-1/2,s-1/2} := ||\Xi_{r-1/2,s-1/2}(D',\varepsilon)g,\mathbb{R}^{n-1}||,$$

where

$$\Xi_{r-1/2,s-1/2}(\xi',\varepsilon)=\begin{cases}(1+|\xi'|)^{s-\frac12}(1+\varepsilon|\xi'|)^{r-s}, & s>1/2,\\ \varepsilon^{\frac12-s}(1+\varepsilon|\xi'|)^{r-\frac12}, & s\le 1/2\end{cases} \tag{49}$$

It is also useful to note that according to the form of operators (2), (4)

$$A(D,\varepsilon)H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+)\subset H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n_+),$$

$$B_j(D,\varepsilon)H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+)\subset H^{r-b_j,s-\beta_j}(\mathbb{R}^n_+), \quad j=1,\dots,m.$$

We now can put in correspondence to our problem the continuous operator

$$\{A(D,\varepsilon),B_1(D,\varepsilon),\dots,B_m(D,\varepsilon)\}: H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+)$$

$$\to H^{r-2m,s-2\mu}(\mathbb{R}^n_+)\times\prod_{j=1}^m H^{r-b_j-1/2,s-\beta_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}), \tag{50}$$

whose norm is uniformly bounded with respect to ε.

Main Theorem. Suppose that the symbol $A(\xi,\varepsilon)$ is properly small parameter–elliptic and inequality $\beta_\mu<\beta_{\mu+1}$ holds. Then following conditions are equivalent.

(A) Conditions (I), (II), (III) for the boundary symbol.

(B) Condition (I) and estimates of the Main Lemma for fundamental system of solutions (37), (38).

(C) For natural $r > b_m + 1/2$ and s satisfying

$$\beta_\mu + 1/2 \le s < \beta_{\mu+1} + 1/2$$

the estimate

$$||u, \mathbb{R}^n_+||_{r,s} \le C(||A(D,\varepsilon)u, \mathbb{R}^n_+||_{r-2m,s-2\mu} + ||u, \mathbb{R}^n_+|| + \sum_{j=1}^{m} ||u, \mathbb{R}^{n-1}||_{r-b_j-1/2, s-\beta_j-1/2}) \tag{51}$$

holds with the constant independent of ε.

The main analytical part of the proof of the theorem is the estimate of the solution in $\mathbb{R}^n_+$ of the homogeneous problem

$$A(D,\varepsilon)v(x) = 0 \quad x_n > 0, \tag{52}$$

$$B_k(D,\varepsilon)v(x)|_{x_n=0} = g_k(x'), \quad k = 1, \dots, m, \tag{53}$$

which directly follows from the Main Lemma. The reduction of the nonhomogeneous case to homogeneous is following the standard lines.

Now consider the special case of the Dirichlet problem:

$$B_j(D,\varepsilon) = (D_n)^{j-1}, \quad b_j = \beta_j = j - 1.$$

In this case $r > m - 1/2$ and $\mu - 1/2 \le s < \mu - 1/2$, so we can take $s = \mu$. The estimate (51) takes form

$$||u, \mathbb{R}^n_+||_{r,\mu} \le C(||A(D,\varepsilon)u, \mathbb{R}^n_+||_{r-2m,-\mu} + ||u, \mathbb{R}^n_+|| + \sum_{j=1}^{\mu} ||(1 + |D'|)^{\mu-j-1/2}(1 + \varepsilon|D'|)^{r-\mu}(D_n)^{j-1}u(.,0), \mathbb{R}^{n-1}|| + \sum_{j=\mu+1}^{m} \varepsilon^{j-\mu-1/2}||(1 + \varepsilon|D'|)^{r-j-1/2}(D_n)^{j-1}u(.,0), \mathbb{R}^{n-1}||).$$

Список литературы

[1] Agranovich, M. S., Vishik, M. I.: Elliptic problems with parameter and parabolic problems of general form (Russian). *Uspekhi Mat. Nauk* **19** (1964), No. 3, 53-161. English transl. in *Russian Math. Surv.* **19** (1964), No. 3, 53-157.

[2] Denk, R., Mennicken, R., Volevich, L.: Boundary value problems for a class of elliptic operator pencils. *Integral Equations Operator Theory* **38** (2000), 410–436

[3] Denk, R., Mennicken, R., Volevich, L.: On elliptic operator pencils with general boundary conditions. *Integral Equations Operator Theory* **39** (2001), 15-40.

[4] Denk, R., Volevich, L.: On a class of elliptic operator pencils. In N. D. Kopachevskii et al. (eds.): Spectral and Evolutional Problems **9** (1999), 104–112.

[5] Denk, R., Volevich, L.: A priori estimate for a singularly perturbed mixed order boundary value problem. *Russian J. Math. Phys.* **7** (2000), 288-318.

[6] Denk, R., Volevich, L.: The Newton Polygon Approach for Boundary Value Problems with General Boundary Conditions. In N. D. Kopachevskii et al. (eds.): Spectral and Evolutional Problems **10** (2000), 115-121.

[7] Denk, R., Volevich, L.: Boundary Value Problems for Elliptic Mixed Order Systems with Parameter In N. D. Kopachevskii et al. (eds.): Spectral and Evolutional Problems **1** (2001), 188-200.

[8] Denk, R., Volevich, L.: Parameter-elliptic boundary value problems connected with the Newton polygon. *Differential and Integral Equations* **15** no 3 (2002, 289-326.

[9] Frank, L.: Coercive singular perturbations. I. A priori estimates. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **119** (1979), 41-113.

[10] Nazarov, S. A.: The Vishik–Lyusternik method for elliptic boundary value problems in regions with conic points. I. The problem in a cone (Russian). *Sibirsk. Mat.* **22** (1981), No. 4, 142-163.

[11] Vishik, M. I., Lyusternik, L. A.: Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter (Russian). *Uspehi Mat. Nauk (N.S.)* **12** (1957), No. 5 (77), 3-122. English transl. in *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) **20** (1962), 239-364.

Leonid Volevich, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Acad. Sci., Miusskaya sqr. 4, 125047 Moscow, Russia

E-mail: volevich@spp.keldysh.ru

Section 3

OPTIMIZATION, CONTROL, GAMES AND ECONOMIC BEHAVIOR

Оценки ошибок алгоритмов распознавания

С.И. Гуров

В работе предложены новые подходы к построению точечных оценок алгоритмов классификации, применимых к случаю малого числа прецедентов.

Введение

При разработке систем распознавания для заказчика важно не только получить алгоритм, реализующий требуемое разделение классов, но и знать, как часто данный алгоритм будет ошибаться при классификации вновь предъявляемых объектов. Ясно, что указанная оценка напрямую определяет качество решения поставленной задачи. На практике же дать такую обоснованную оценку часто оказывается затруднительным.

Несмотря на указанную важность, методы оценки надежности выбранного решающего правила развиты значительно слабее, чем теория построения распознающих алгоритмов. Проблема усугубляется ещё и тем, что при решении практических задач распознавания образов часто приходиться довольствоваться малым числом имеющихся в наличии прецедентов. В этом случае типичной является ситуация, когда либо параметры формул оценки ошибок распознавания находятся вне границ применимости метода, либо полученные оценки оказываются сильно заниженными или завышенными и интуитивно неприемлимыми для заказчика, как, например, нулевая точечная оценка ошибки при корректном алгоритме распознавания.

Вышесказанное свидетельствует о необходимости предложить новые подходы к построению оценок алгоритмов распознавания, способных охватить важный случай малого числа прецедентов. В настоящей работе рассмотрены только точечные оценки ошибок алгоритмов классификации. Подходы к получению интервальных оценок намечены в [5]; им будет посвящена отдельная работа.

1. Основные понятия и определения

Под *пространством образов* $\mathcal{X}$ будем понимать произвольный непустой компакт [6]. Элементы $\mathcal{X}$ называются *образами*. Множество $\mathcal{X}$ полагается разбитым на конечное число $s \geq 2$ попарно непересекающихся областей $\{\mathcal{X}_t\}$, $t = \overline{1,s}$, называемых *классами*. Существенным является то, что информация о разбиении $\mathcal{X}$ на классы ограничивается знанием о принадлежности к тому или иному классу конечного числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$ элементов $\mathcal{X}$. Такие образы с известной классификацией называют *прецедентами*, а их совокупность — *обучающей выборкой* (или *последовательностью*) $\overline{x}_m$ (длины или объёма m). Обозначив через $\mathcal{Y}$ множество символов классов $\{K_1, \ldots, K_s\}$ можно сказать, что существует функция $f^* : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, о которой известен лишь набор ее значений $\{f^*(x_i)\}_{i=1}^m = \overline{f}^*(\overline{x}_m)$ в точках $\overline{x}_m$. Функция f^* называется *истинным классификатором.*

Классификатором или *решающим правилом* (р.п.) называется любая функция $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ (рассматривается, следовательно, задача распознавания с непересекающимися классами в детерминированной постановке). Классификация образа x состоит в вычислении значения $f(x)$. Мы не будем различать функцию f и реализующий ее алгоритм.

При решении задач распознавания образов требуется построить оптимальный в некотором смысле классификатор $f(x)$, а именно такой, чтобы при предъявлении

[6] Обычно также считают, что $\mathcal{X}$ есть подмножество прямого произведения конечного числа n метрических пространств, соответствующих *признакам*, и называют его *признаковым пространством.* Однако это предположение, существенное при построении классификаторов, не будет использоваться нами при оценке надежности построенных решающих правил.

элементов x из $\mathcal{X}$ в процессе классификации на практике равенство

$$f(x) = f^*(x)$$

(правильная классификация), выполнялось "как можно чаще". Количественно оцененная степень уверенности ν в справедливости данного равенства для произвольного $x \in \mathcal{X}$ называется *надежностью классификации*. Задача оценки надежности р.п. и состоит в определении ν.

На практике часто встречается ситуация, когда для оценки надежности р.п. в распоряжении разработчика имеются лишь наборы значений на прецедентах истинного и построенного классификаторов и, возможно, некоторая дополнительная информация о «важности» самих прецедентов. Набор образов с известной классификацией, использующийся для оценки надежности выбранного р.п. называется *экзаменационной последовательностью (выборкой)*. Важность прецедентов, учитывающая их значимость с точки зрения потерь при ошибочной их классификации и/или отражающая частоту встречаемости аналогичных образов на практике описывается, как правило, в виде неотрицательных весов. Вектор весов $\{\gamma_i = \gamma(x_i)\}_{i=1}^m = \overline{\gamma}_m$ прецедентов $\overline{x}_m$ мы будем включать в понятие прецедентной информации вместе с самими прецедентами и указанными наборами значений классификаторов на них.

Часто заказчику необходимо иметь обоснованную оценку надежности полученного алгоритма классификации в условиях наличия лишь данной прецедентной информации и невозможности ни её пополнения, ни организации проверки в ходе практического проведения процесса классификации [7]. В этих случаях оценивать величину ν приходиться лишь по значениям функций $\{f^*(x_i)\}$, $f(x_i)\}$ и весов $\gamma(x_i)$ прецедентов $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Ясно, что такая оценка будет адекватной в той или иной степени, если состав экзаменационной выборки будет отражать характер появления новых предъявляемых для классификации образов при практическом применении алгоритма классификации. Здесь имеется в виду, что образы из одних подобластей $\mathcal{X}$ могут встречаться чаще, чем из других, и состав набора прецедентов должен отражать этот факт.

Указанное предположение о свойствах обучающей и экзаменационной последовательностей назовем *гипотезой представительности* (ГП). Точнее, под ГП мы будем понимать принятие положения о том, что [illegible]
[illegible]
[illegible] $\mathcal{X}$ [illegible]

Гипотеза представительности, принятая в той или иной форме в рамках конкретной задачи, вместе с гипотезой компактности (ГК) [8] является определяющим фактором при оценке надежности построенного решающего правила, на котором основываются все дальнейшие выводы.

Для практического использования данная весьма общая формулировка гипотезы представительности формализуется в точной математической форме. Такая формализация (одновременно с приведенным выше интуитивным критерием оптимальности классификатора) проводится в вероятностных терминах. Для этого предполагают, что $\mathcal{X}$ обладает вероятностной мерой $\mu(\cdot)$, т.е. для любого подмножества X пространства образов существует интеграл

$$\int_X \mu(dx) = P(\mathrm{X}) \geq 0, \qquad P(\mathcal{X}) = 1.$$

---

[7] Например, когда получение нового прецедента связано с проведением дорогостоющего исследования или невозможно принципиально (распознавание и прогнозирование экономических, социальных процессов, в медицине, политике, военном деле и т.д.).

[8] «[illegible] [1].

$P\,(X)$ называется, как известно, функцией распределения вероятностей на $\mathcal{X}$. Вероятность события A будем обозначать $\mathcal{P}\,(A)$ или $\mathcal{P}\,\{A\}$. Для упрощения выкладок полагают и существование функции плотности вероятности $p\,(x)$ на $\mathcal{X}$: $p\,(x) = \mu(dx)/dx$. Далее принимают, что и обучающая выборка, и образы с неизвестной принадлежностью к подмножествам $X_t,\, t = \overline{1, s}$, которые будут в дальнейшем предъявляться для классификации, получены из пространства образов в результате подобных процедур выбора, что обеспечивает их аналогичные статистические свойства.

Таким образом, при отсутствии информации о весах прецедентов (или, что то же, при равенстве всех весов) гипотеза представительности принимается в следующей форме.

Гипотеза 1. На пространстве образов $\mathcal{X}$ задана (может быть неизвестная) функция распределения вероятностей $P(X)$, $X \subseteq \mathcal{X}$, и любой рассматриваемый набор образов $x_1, x_2, \ldots, x_l$ является, если явно не указано иначе, реализацией независимой выборки l случайных величин из генеральной совокупности с распределением $P(X)$.

Ясно, что Гипотеза 1 является условием репрезентативности выборки в математической статистике.

Если $P(x)$ известно, то оценка надежности построенного р.п. не представляет труда (см. ниже формулы (2) и (3)). Далее мы считаем функцию $P(x)$ неизвестной.

Степень удовлетворенности (точнее, неудовлетворенности) исследователя полученным классификатором $f(x)$ выражается значением функционала *среднего риска* $R\,(f)$:

$$R\,(f) = \int\limits_{\mathcal{X}} \left(\sum_{f^*(x)\in\mathcal{Y}} \sum_{f(x)\in\mathcal{Y}} Q\,(f^*(x),\, f(x)\,) \right) p\,(x)\,dx, \tag{1}$$

где $Q : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ($\mathbb{R}_{\geq 0}$ – множество неотрицательных действительных чисел).

Здесь $Q\,(K_i,\, K_j) = c_{ij} \geq 0$ — некоторая выбранная функция потерь или штрафа за отнесение объекта из класса K_i в класс K_j. Часто можно полагать, что

$$c_{ii} = 0,\ c_{ij} = 1,\ i \neq j,\ i, j = \overline{1, s}.$$

Тогда $R\,(f)$ есть вероятность ошибочной классификации при применении р.п. f.

Ясно, что прямое использование зависимости (1) для вычисления среднего риска невозможно в силу неизвестности $f^*(x)$ даже при известном распределении $p\,(x)$. Чтобы обойти данную трудность, при построении классификатора по прецедентам $\overline{x}_m$ используют функционал *эмпирического риска* $R^e_m(f)$:

$$R^e_m\,(f) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} Q\,(\,f^*(x_i),\, f(x_i)\,)\,. \tag{2}$$

Однако такая замена функционалов тут же порождает вопрос о связи минимальных значений эмпирического и среднего рисков. Ответ на этот вопрос дает теория VC равномерной сходимости частот к вероятностям в условиях конечности выборок, предложенная В.Н. Вапником и А.Я. Червоненкисом [3], [4]. К сожалению оказывается, что в рамках VC гарантировать малость $R\,(f_{min})$ при малом $R^e_m\,(f_{min})$, где

$$f_{min} = \arg\min_f \left\{ R^e_m\,(f) \right\}$$

можно лишь при достаточно больших объёмах m обучающей выборки $\overline{x}_m$.

Проблема оценки надежности р.п. была бы снята, если бы удалось определить или хотя бы оценить вероятности

$$p_{ij} = P(X_{ij}) = \int\limits_{X_{ij}} p\,(x)\,dx, \quad i, j = \overline{1, s}\,, \tag{3}$$

где $X_{ij} = \left\{ x \mid x \in \mathcal{X},\, f^*(x) = K_i,\, f(x) = K_j \right\}$. Подобласти $\left\{X_{ij}\right\}_{i,j=1}^{s,\,s}$ — это s^2 областей разбиения пространства объектов $\mathcal{X}$, соответствующих ситуациям, когда x принадлежит классу K_i, а решающее правило относит его к классу K_j. При $i \neq j$ p_{ij} суть вероятности ошибок классификации соответствующего рода.

Теперь можно явно вычислить средний риск

$$R\,(f) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} c_{ij}\, p_{ij}\,. \tag{4}$$

В предположениях $c_{ii} = c_r$, $c_{ij} = c_w$, $(i \neq j)$ можно полагать $\mathcal{X}$ разбитым на две подобласти — правильных X_r и неправильных X_w классификаций и обозначить $\nu = P(X_r)$. Тогда

$$R\,(f) = c_r \nu + c_w (1 - \nu)\,,$$

а при $c_r = 0$, $c_w = 1$ имеем $R\,(f) = 1 - \nu\,.$

Итак, надежность классификации р.п. определяется набором вероятностей $\left\{p_{ij}\right\}_{i,j=1}^{s,\,s}$ или величиной ν (вероятность правильной классификации).

Задача классификации $Z = Z\,(\mathcal{X},\, s,\, m,\, \overline{x}_m,\, \overline{\gamma}_m,\, \overline{f}^*(\overline{x}_m)\,)$ состоит в выборе р.п. f, минимизирующего тот или иной функционал $R^0\,(\cdot)$ (обычно это средний риск) и оценки полученной величины $R^0\,(f)$. Указанные подзадачи будем обозначать Z1 и Z2. Когда позволяет имеющаяся информация (удается восстановить плотности соответствующих распределений), эти подзадачи решаются параллельно и согласовано. На практике же, в силу вышеупомянутых причин, обе подзадачи решают, как правило, приближенно и раздельно (хотя, возможно, и используют результаты Z2 для корректировки или выбора решающих правил Z1).

Заметим, что предложить для решения Z1 решающее правило, основанное на тех или иных идеях, вообще говоря, несложно. Также существует [6], [10] универсальный метод построения *корректных* (точных на прецедентах) алгоритмов классификации. В настоящей работе сначала рассматриваются методы решения подзадачи Z2 задачи Z при выбранном классификаторе f (т.е. подзадача Z1 считается уже решённой).

2. Постановка задачи

Пусть в результате решения подзадачи Z1 задачи распознавания

$$Z = Z\,(\mathcal{X},\, s,\, m,\, \overline{x}_m,\, \overline{\gamma}_m,\, \overline{f}^*(\overline{x}_m)\,)$$

построено р.п. $f(x)$. Предположим пока, что $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_m$ и примем гипотезу представительности в форме «Гипотеза 1». Случай неравных весов прецедентов будет рассмотрен в п. 6.

Далее мы считаем, что пространство образов $\mathcal{X}$ разбито на $v \geq 2$ подобластей $\{X_k\}_{k=1}^{v}$ и обозначаем через m_k количество прецедентов, попавших в область X_k, $k = \overline{1, v}$, $\sum_{k=1}^{v} = m$. В задачах классификации встречаются только следующие случаи значений v (напомним, что $s \geq 2$).

(1) $v = 2$. Здесь X_1 и X_2 суть области правильных и неправильных классификаций.
(2) $v = s^2$. Здесь $\{X_k\}_{k=1}^{v}$ суть переобозначенные области $\left\{X_{ij}\right\}_{i,j=1}^{s,\,s}$ пространства образов, т.е. $X_{ij} = \left\{ x \mid x \in \mathcal{X},\, f^*(x) = K_i,\, f(x) = K_j \right\} = \{X_1,\, X_2,\, \ldots X_v\}$ (см. п. 1).
(3) $v = s^2 + 1$. Здесь к определённым выше областям добавляется область соответствующая случаю отказа от классификации.
(4) $v = s^2 + s$, когда мы хотим специфицировать класс прецедента, на котором произошёл отказ.

Обозначим $p_k = P(X_k) \geq 0$, $k = \overline{1, v}$. Мы будем определять оценки значений данных вероятностей. Ясно, что справедливо условие нормировки

$$\sum_{k=1}^{v} p_k = 1 \tag{5}$$

и при данном v мы имеем $(v-1)$-мерную задачу.

Поскольку случайная величина x распределена в соответствии с $P(\cdot)$, то p_k есть вероятность выполнения соотношения $x \in X_k$. Тогда вероятность $p(m_1, m_2, \ldots, m_v)$ того, что при независимой случайной выборке m элементов из $\mathcal{X}$ в соответствии с распределением $P(\cdot)$ соотношение $x \in X_k$ будет выполняться m_k раз, $k = \overline{1, v}$, $\sum_{i=k}^{v} m_k = m$ имеет $(v-1)$-мерное полиномиальное (мультиномиальное) распределение $M(m; p_1, p_2, \ldots, p_v)$, функция плотности вероятности которого дается формулой

$$p(m_1, \ldots, m_v) = \frac{m!}{m_1!\, m_2! \ldots m_v!}\, p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_v^{m_v};\; p_k \in (0,1),\, k = \overline{1, v}. \tag{6}$$

Отметим, что первые моменты полиномиального распределения суть

$$\mu_k = m p_k,\; k = \overline{1, v-1}$$

а матрица ковариаций —

$$C = (\mu_{ij})_{i,j=1}^{v-1,\, v-1},\; \mu_{ii} = m p_i (1 - p_i),\; \mu_{ij} = -m p_i p_j,\; i \neq j\,. \tag{7}$$

При $v = 2$, $p_1 = p$ имеем биномиальное распределение $Bi(m, p)$ с функцией плотности вероятности

$$p(m_1) = \binom{m}{m_1} p^{m_1} (1-p)^{m - m_1};\; p \in (0,1)$$

для которой

$$\mu = mp,\; \sigma^2 = mp(1-p)\,.$$

Наша задача (параметрического статистического оценивания) состоит в том, чтобы построить точечные оценки неизвестных, но фиксированных величин $p_1, p_2, \ldots, p_v$ по случайным значениям $m_1, m_2, \ldots, m_v$, $\sum_{k=1}^{v} m_k = m$. Построенные оценки должны быть применимы для случая малого числа m прецедентов.

3. Частотный подход

В рамках частотного подхода используются следующие методы получения точечных оценок неизвестных параметров:

- метод максимального правдоподобия;
- метод моментов;
- метрические методы.

Метод максимального правдоподобия (ММП) основан на максимизации *функции правдоподобия* L аргументов $p_1, p_2, \ldots, p_v$. Функции правдоподобия для нашего случая определяется следующим образом. Результат определения количества прецедентов в областях $\{X_k\}_{k=1}^{v}$ представим в виде 0,1-таблицы $T = \{t_{k,i}\}_{k,i=1}^{v,\, m}$, где

$$t_{k,i} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й прецедент принадлежит области } X_k, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ясно, что

$$\sum_{k=1}^{v} t_{k,i} = 1,\; \sum_{i=1}^{m} t_{k,i} = m_k,\; \sum_{k=1}^{v} m_k = m\,.$$

Тогда функция правдоподобия есть

$$L\,(T;\,p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_v) = const\cdot p_1^{t_{1,1}+\ldots+t_{i,m}} p_2^{t_{2,1}+\ldots+t_{2,m}}\,\ldots\,p_v^{t_{v,1}+\ldots+t_{v,m}} = const\cdot p_1^{m_1}\,p_2^{m_2}\,\ldots\,p_v^{m_v}.$$

Теперь, поскольку максимумы L и $\ln L$ совпадают, наша задача состоит в максимзации функции

$$\ln L\,(p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_v) = const + \sum_{k=1}^{v} m_k \ln p_k$$

при условии нормировки (5).

Данная задача на условный экстремум легко решается методом множителей Лагранжа. Составляя функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}\,(p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_v,\lambda) = \ln L\,(p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_v) + \lambda\cdot\{1 - \sum_{k=1}^{v}\,p_k\}$$

и приравнивая $\partial\ln\mathcal{L}/\partial p_i$ и $\partial\ln\mathcal{L}/\partial\lambda$ нулю, получаем СЛАУ порядка $v+1$

$$\begin{cases} \frac{m_k}{p_k} - \lambda = 0\,, \quad k = \overline{1,v}\,, \\ \sum_{k=1}^{v}\,p_k = 1\,, \end{cases}$$

решения которой суть $\lambda = m$, $\widehat{p_k} = m_k/m$, $k = \overline{1,\,v}$.

Таким образом, МП-оценками $\widehat{p_k}$ вероятностей p_k будут относительные частоты m_k/m числа прецедентов m_k в областях X_k, $k = \overline{1,v}$.

Нетрудно видеть, что **метод моментов** даёт такие же оценки, поскольку моменты первого порядка μ_k полиномиального распределения равны mp_k, а соответствующие выборочные — m_k, $k = \overline{1,\,v}$.

Метрические методы основаны на рассмотрении различных мер расхождения меду наблюдёнными величинами $m_1, m_2, \ldots, m_v$ и их математическими ожиданиями $mp_1, mp_2, \ldots, mp_v$. Оценка $\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \ldots, \widehat{p}_v$ определяется как значения вероятностей, минимизурующих эту меру. Для оценивания используются такие меры, как «χ^2», «модифицированный χ^2», «расстояние Хеллингера», «дивергенция Калбэка-Лейбера», «мера расхождения Холдейна» и др. [9]. Изучение их показывает, что к нашей задаче оказывается применим (по крайней мере в своём исходном виде) лишь метод «модифицированный χ^2», который даёт всё ту же оценку в виде относительных частот.

Легко показывается, что математическое ожидание $\mathbf{M}\{\widehat{\overline{p}}\}$ вектора оценок $\{p_k\}_{i=k}^{v}$ есть (с учетом (7) и обозначений $\overline{m} = (m_1,\,m_2\,\ldots\,m_v)^T$ и $\overline{p}^*$ — v-ичный вектор истинных значений вероятностей)

$$\mathbf{M}\{\widehat{\overline{p}}\} = \mathbf{M}\{\overline{m}/m\} = \frac{1}{m}\mathbf{M}\{\overline{m}\} = \frac{m\,\overline{p}^*}{m} = \overline{p}^*\,,$$

и, таким образом, полученная оценка является *несмещённой*. Её дисперсия $\mathbf{D}\{\widehat{\overline{p}}\}$ равна

$$\mathbf{D}\{\widehat{\overline{p}}\} = \mathbf{D}\{\overline{m}/m\} = \frac{1}{m^2}\mathbf{D}\{\overline{m}\} = \frac{m\,\overline{p}^*\,(\mathbf{1}-\overline{p}^*)}{m^2} = \frac{\overline{p}^*(\mathbf{1}-\overline{p}^*)}{m}\,.$$

Здесь $\mathbf{1}$ — v-ичный вектор $(1,\,1,\,\ldots,1)^T$ и имеется ввиду Адамарово (покомпонентное) произведение векторов. Естественно, здесь и далее только $v-1$ компонент векторов будут независимы.

Известно, что это оценка с минимальной значением дисперсии в неравенстве Крамера–Рао. Таким образом полученная оценка имеет минимальную дисперсию в классе несмещённых (*эффективной* в общепринятом смысле). Поскольку $\mathbf{D}\{\widehat{\overline{p}}\}$ сходится по вероятности к 0 при возрастании m, то оценка является состоятельной.

Можно показать [7], что несмещенная оценка для $p_k^*\,(1-p_k^*),\ k=\overline{1,v}$, есть

$$\frac{m}{m-1}\,\frac{m_k}{m}\,\left(1-\frac{m_k}{m}\right)=\frac{m_k\,(m-m_k)}{m\,(m-1)}\,.$$

поэтому несмещённой оценкой $\overline{\mathbf{D}\{\widehat{\overline{p}}\}}$ для дисперсии $\mathbf{D}\{\widehat{\overline{p}}\}$ будет v-ичный вектор с компонентами

$$\frac{m_k\,(m-m_k)}{m^2\,(m-1)},\quad k=\overline{1,v}\,.$$

Для наших целей относительные частоты могут быть приняты в качестве точечных оценок искомых вероятностей лишь в случаях больших m. Это связано с тем, что в условиях малой выборки не выполняется основное условие предельных теорем теории вероятностей — существование большого числа случайных событий

С другой стороны, точеные оценки в виде относитиельных частот в задачах распознавания образов часто становятся неприемлимыми с точки зрения опыта и интуиции. Например, корректное решающее правило мы вынуждены оценивать как 100% безошибочное, что даже при больших объёмах прецедентной информации противоречит здравому смыслу.

Отметим, что в последнем случае полученная оценка должна быть отвергнута и по формальным соображениям: значение $p_k=0$ не принадлежит области изменения параметра $\Theta=(0,1)^v$. Хотя в большинстве статистических моделей оказывается приемлемым рассматривать вместо области Θ ее замыкание $\overline{\Theta}$, но в нашем случае включать в рассмотрение невозможные или достоверные события вида $x\in X_k$ нет никаких оснований.

4. Байесовский подход

Байесовские точечные оценки $\widehat{\overline{p}}_W$ получаются как решения задачи минимизации функционала среднего риска записываемой как

$$\int\limits_{p_1+p_2+\ldots+p_v=1\,\overline{p}_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_v\geq 0} W(\overline{p},\,\overline{q})f(\,\overline{p}\,|\,m_1,m_2,\ldots m_v\,)\,d\overline{p}\;=\;R(\overline{q})\,,$$

$$\widehat{\overline{p}}_W\;=\;\arg\min_{\substack{q_1+q_2+\ldots+q_v=1\\ q_1,\,q_2,\,\ldots,\,q_v\geq 0}}R(\overline{q})\,.$$

Здесь

- $\overline{p}=(p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_v)$, $\overline{q}=(q_1,\,q_2,\,\ldots,\,q_v)$, $\widehat{\overline{p}}_W$ — векторы из $\mathbb{R}^v_{\geq 0}$ для которых справедливо условие нормировки (5); причем последний — вектор оценок вероятностей при данной функции потерь W;
- $W(\overline{p},\,\overline{q})\,:\,(0,1)^v\times(0,1)^v\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ — функция потерь для выбранных значений $\overline{q}$, когда $\overline{p}$ суть истинные значения искомых вероятностей;
- $f(\,\overline{p}\,|\,m_1,m_2,\ldots m_v)$ — апостериорная плотность вероятности вектора $\overline{p}$ при наблюдённых значениях $m_1,m_2,\ldots m_v$ попадания прецедентов в соответствующие области пространства образов.

Практически используют либо квадратичную

$$W(\,\overline{p},\,\overline{q})\;=\parallel\overline{p}-\overline{q}\parallel^2,$$

либо "простую" функцию потерь которая приписывает нулевые потери точке, которая апостериори наиболее вероятна и единичные потери остальным точкам области изменения параметра. Последняя приводит к методу максимизации апостериорной вероятностей, что при использовании принципа неопределённости Лапласа даёт, МП-оценку. Общепринято, что наиболее адекватные результаты получаются при использовании именно квадратичной функции потерь. Тот же результат — математическое ожидание апостериорной плотности вероятности искомого параметра (апостериорное среднее) — получается и при использовании любой другой выпуклой симметричной функции потерь [11].

В нашем случае формула Байеса имеет вид

$$f(\overline{p}\,|\,m_1, m_1 \ldots m_v) = \frac{f(\overline{p})\, f(\,m_1, m_1 \ldots m_v\,|\,\overline{p}\,)}{\int\limits_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_v=1\\ p_1,p_2,\ldots,p_v\geq 0}} f(\overline{p})\, f(\,m_1, m_1 \ldots m_v\,|\,\overline{p}\,)\, d\overline{p}}\,. \tag{8}$$

Здесь

$$f(\,m_1, m_1 \ldots m_v\,|\,\overline{p}\,) = \prod_{k=1}^{v} p_k^{m_k}$$

является функцией правдоподобия и, естественно, выполняется условие нормировки (5).

Как отмечалось в п. 2, искомые вероятности $\overline{p} = \{p_k\}_{k=1}^{v}$ подчиняются полиномиальному распределению (6). В условиях отсутствия информации о весах прецедентов принимаем в качестве распределения $\overline{p}$ равномерное. Равномерное распределение есть распределение Дирихле $Di\,(1,\,1,\,\ldots,\,1;\,1)$. Далее, используя (8) и (6) получаем, что апостериорная плотность вероятностей имеет вид

$$f(\overline{p}\,|\,m_1, m_2 \ldots m_v) = \frac{\Gamma(m+v)}{\Gamma(m_1+1)\Gamma(m_2+1)\ldots\Gamma(m_v+1)} \prod_{k=1}^{v} p_k^{m_k} =$$

$$= \frac{(m+v-1)!}{m_1!\, m_2!\, \ldots m_v!}\, p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots\, p_v^{m_v}\,,$$

$\overline{p} \in (0,1)^v$, т.е. является плотностью $(v-1)$-мерного распределения Дирихле

$$Di\,(m_1+1,\, m_2+1,\, \ldots,\, m_{v-1}+1;\, m_v+1)\,.$$

Для квадратичной функции потерь байесовскими оценками $\widehat{p_i}$ вероятностей $\overline{p_i}$ будут являться компоненты вектора μ_k апостериорного среднего $\overline{\mu} = (\mu_1,\, \mu_2, \ldots \mu_v)^T$, равные [8]

$$\widehat{p_k} = \mu_k = \frac{m_k+1}{m+v}\,, \quad k = \overline{1,v}\,. \tag{9}$$

Как уже указывалось, тот же результат получается и при любой симметричной выпуклой функции потерь.

Используя свойство воспроизводимости по m полиномиального распределения $M(\,m;\,\cdot)$ и свойства распределения Дирихле получим, что компоненты вектора дисперсий оценок (9) суть

$$\mathbf{D}\{\widehat{p}_k\} = \frac{p_k^*(1-p_k^*)\, m}{(m+v)^2}\,,$$

а их несмещенные оценки —

$$\overline{\mathbf{D}\{\widehat{p}_k\}} = \frac{m_k(m-m_k)}{(m-1)(m+v)^2},\ k = \overline{1,v}\,.$$

Рассмотрим важный одномерный подслучай $v = 2$, который соответствует разбиению пространства образов на две подобласти: правильных и неправильных классификаций. Пусть полученное р.п. из имеющихся m прецедентов m_r распознает правильно, а на остальных $m_w = m - m_r$ – ошибается. В соответствии с 9 точечная оценка $\widehat{p}_{W_1} = \widehat{p}_W$ вероятности ошибки распознавания $1-\nu$ есть

$$\widehat{p}_W = \frac{m_w+1}{m+2}\,. \tag{10}$$

Ясно, что полученные оценки являются смещёнными (но несмещеными асимптотически) и оценка состоятельными.

Легко видеть, что несмещенная оценка $\overline{\mathbf{D}\{\widehat{p}_W\}}$ дисперсии полученной оценки (10) равна

$$\overline{\mathbf{D}\{\widehat{p}_W\}} = \frac{m_w\,(m - m_w)}{(m+2)^2(m-1)}\,.$$

Имеем $\mathbf{D}\{\widehat{p}_W\} < \mathbf{D}\{\widehat{p}\}$ и дисперсия оценки $\mathbf{D}\{\widehat{p}_W\}$ в $(m+2)^2/m^2$ раз меньше минимальной граничной по неравенству Крамера-Рао.

Указанное обстоятельство объясняется тем, что полученная байесовская оценка есть оценка смещённая и понизить дисперсию оценки удалось именно за счет выхода класса несмещённых. Ясно, что выигрыш в дисперсии оценки будет особенно существенным при малых выборках.

5. Обсуждение полученных оценок. Оценки по медиане и минимаксные оценки

С общей точки зрения нет никаких оснований, кроме удобства математических свойств (а также традиции практиков), выделять равенство истинному значению именно математического ожидания оценки в качестве критерия несмещённости. Вместо математического ожидания могут также быть выбраны медиана распределения или его мода (т.н. медианная несмещёность или несмещёность по моде. В нашем случае мы столкнулись с ситуацией, когда смещённая оценка имеет дисперсию меньше, чем любая несмещённая, а значит и большую эффективность (оценку с меньшей дисперсией мы считаем более эффективной). Мы считаем это достаточным основанием для того, чтобы отказаться от рассмотрения лишь класса несмещённых оценок.

Во-первых, полученная оценка обладает свойством асимптотической несмещённости, а само смещёние невелико.

Во-вторых, представляется ясным, что для случая малых выборок, именно эффективность является основным критерием качества оценки. Наличие у оценок последнего нерассмотренного основного свойства — состоятельности — имеет ценность всё же в основном при теоретических исследованиях.

Заметим, что, неформально рассуждая, принятие МП-оценки (по моде) будет приводить к ошибкам, вообще говоря, редким, но, возможно, значительным, а байесовская оценка (по математическому ожиданию) повлечет, как правило, ошибки частые, но небольшие. Представляется, что данные оценки в силу указанных свойств являются в своём роде граничными, и исходя из специфики конкретных задач Z в качестве точечной оценки искомой вероятности p^* можно выбрать любое значение между модой и математическим ожиданием полученного $\boldsymbol{B}$-распределения. Можно показать, что, например, его медиана $p_{(\beta)1/2}$ всегда расположена в указанном диапазоне и за оценку вероятности принять именно медиану. Такая оценка будет обладать свойством равновероятной недооценки и переоценки p^*, что может оказаться удобным для некоторых приложений.

Для нашей задачи можно попытаться использовать т.н. W-*минимаксную* оценку $\widetilde{p}$, средние потери которой при некоторой выбранной функции потерь W минимальны по $p^* \in (0,1)$. Если оказывается возможным подобрать априорное распределение, при котором полученная минимаксная оценка оказыватся также равной и соответствующей байесовской, то такое априорное распределение называют *наименее благоприятным*.

Если выбрать функцию потерь квадратичной, то минимаксная оценка параметра p биномиального распределения будет иметь вид [2],

$$\widetilde{p} = \frac{\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}\,\frac{m_1}{m} + \frac{1}{1+\sqrt{m}}\,\frac{1}{2}\,.$$

Представляется, однако, что использование полученной оценки в нашем случае недостаточно оправдано с точки зрения «физики» задачи. Действительно, для вышеуказанной оценки наименее благоприятным распределением оказывается $\boldsymbol{B}$-распределение $Be(\sqrt{m}/2,\, \sqrt{m}/2)$. Неясно, как параметры этого распределения могут быть обоснованы в рамках задачи Z.

6. Байесовские оценки при неравных весах прецедентов

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда прецедентная информация включает в себя вектор весов $\{\gamma_i = \gamma(x_i)\}_{i=m}^{m} = \overline{\gamma}_m$ (где не все компоненты равны) прецедентов $\overline{x}_m$.

Значение γ_i показывает "важность" или частоту встречаемости прецедента x_i. Часто заказчик, готовя исходные данные для решения задачи распознавания и желая дать как можно более полное и компактное описание пространства образов, намеренно или вынужденно [9] предоставляет разработчику список прецедентов более-менее равномерно распределённых по пространству образов, указывая большую или меньшую "типичность" данного прецедента с помощью приписывания ему соответствующего веса. Этот приём может существенно понизить объём предоставляемой прецедентной информации без потери её репрезентативности.

Заметим, что "важность" или "типичность" $\gamma_i \geq 1$ данного прецедента x_i можно трактовать как задание «дополнительных прецедентов» вблизи x_i с аналогичными признаками, и так, что дополнительные прецеденты всегда классифицируются также, как и x_i. Указанные «дополнительные прецеденты» назовем *квазипрецедентами.* Для точного соответствия с информацией, заложенной в весах, их число не обязано быть целым. Действительно, в этом случае та или иная классификация x_i приведет к соответствующему увеличению оценки вероятности p_i, что повысит её вклад в величину среднего риска (4) и отразит, таким образом, значимость данного прецедента. Заметим, что возможность такого представления информации о весах вытекает из гипотезы компактности.

Ясно, однако, что в рассматриваемом случае при остающейся верной гипотезе предствительности, её форма в виде «Гипотеза 1» уже становится недостаточной. Поэтому для обоснования определения надежности выбранного р.п. данную гипотезу нужно дополнить предположениями относительно имеющегося вида прецедентной информации.

Наше основное предположение состоит в том, что веса объектов γ_i через количества квазипрецедентов описывают вероятности появления объектов в окрестностсях x_i с тем же значением истинного классификатора $f^*(x_i)$. Таким образом в случае наличия в прецедентной информации вектора весов прецедентов для формализации ГП мы дополняем Гипотезу 1 нижеследующей Гипотезой 2.

Гипотеза 2. При неравных весах $\gamma_i, \neq\ const$, $i = \overline{1,m}$, набор прецедентов $\{x_i\}_{i=1}^m$ не является реализацией независимой выборки m случайных величин из генеральной совокупности с распределением $P(X)$ на $\mathcal{X}$, однако веса прецедентов $\{\gamma_1,\, \gamma_2,\, \ldots,\, \gamma_m\}$ отражают априорную информацию о распределении $P(x)$.

Поскольку мы трактуем веса как информацию о количестве квазипрецедентов в окрестности x_i, естественно считать, что $\gamma_i, \geq 1,\ i = \overline{1,m}$, (для чего, при необходимости, поделим все веса на $\min \gamma_i$). Точнее, количество дополнительных квазипрецедентов будет описываться величинами $\gamma_i - 1$, т.к. в окрестности x_i уже есть один прецедент — сам x_i. Обозначим $\gamma'_i, = \gamma_i - 1,\ i = \overline{1,m}$.

Естественно считать, что априорный вес μ'_k области X_k аддитивен и пропорционален весам попавших в него квазипрецедентов, т.е.

$$\mu'_k = \sum_{i:\, x_i \in X_k} \gamma'_i,\ k = \overline{1,v}\,.$$

[9]например, из-за отсутствия соответствующих данных

Введём обозначение

$$\sum_{i:\, x_i \in X_k} \gamma_i, = \mu_k \,.$$

Понятно, что

$$\mu'_k = \mu_k - m_k \geq 0, \; k = \overline{1, v} \,, \tag{11}$$

поскольку $m_k = \sum_{i:\, x_i \in X_k} 1$.

В качестве априорного распределения вероятностей на $\{X_k\}_{k=1}^{v}$ примем распределение Дирихле

$$Di \, (\mu'_1 + 1, \, \mu'_2 + 1, \, \ldots, \, \mu'_{v-1} + 1; \, \mu'_v + 1) \,.$$

Представляется, что такая трактовка весов прецедентов достаточно адекватно отражает рассматриваемую ситуацию.

Обозначим

$$M = \sum_{k=1}^{v} \mu_k \,.$$

Используя формулу Байеса (8) и (11) получим апостериорное распределение вектора вероятностей $\overline{p} = \{p_1, \, p_2, \, \ldots, \, p_v\}$, $p_k \in (0,1)$, $k = \overline{1, v}$:

$$f(\,\overline{p}\,|\, m_1, m_2 \ldots m_v) = \frac{\Gamma(m + v + \sum\limits_{k=1}^{v} \mu'_k)}{\prod\limits_{k=1}^{v} \Gamma(m_k + \mu'_k + 1)} \prod_{k=1}^{v} p_k^{m_k + \mu'_k} =$$

$$= \frac{\Gamma(M + v)}{\prod\limits_{k=1}^{v} \Gamma(\mu_k + 1)} \prod_{k=1}^{v} p_k^{\mu_k} = \frac{(M + v - 1)!}{\mu_1! \, \mu_2! \ldots \mu_v!} \, p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \ldots p_v^{\mu_v},$$

которое является плотностью $(v-1)$-мерного распределения Дирихле

$$Di \, (\mu_1 + 1, \, \mu_2 + 1, \, \ldots, \, \mu_{v-1} + 1; \, \mu_v + 1) \,.$$

Байесовской оценкой искомых вероятностей при функции потерь из указанного выше семейства будет вектор апостериорного среднего с компонентами

$$\widehat{p}_k = \frac{\mu_k + 1}{M + v} \,, \quad k = \overline{1, v} \,. \tag{12}$$

Эти значения и предлагается использовать в качестве точечных оценок вероятностей событий $x \in X_k$ в общем случае задачи Z.

Автор глубоко признателен академику РАН Ю.И.Журавлёву за понимание и поддержку.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ N 01-01-00885-а.

Список литературы

[1] **Айзерман М.А., Браверман Э.М., Розоноэр Л.И.** Метод потенциальных функций в теории обучения машин. — М.: Наука, 1970.

[2] **Боровков А.А.** Математическая статистика. — М.: Наука, 1984.

[3] **Вапник В.Н., Червоненкис А.Я.** Теория распознавания образов. Стохастические проблемы обучения. — М.: Наука, 1974.

[4] **Вапник В.Н.** Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. — М.: Наука, 1979.

[5] **Гуров С.И.** Оценки вероятности ошибок классификации при малом числе прецедентов. //Интеллектуализация обработки информации. Международная научная конференция ИОИ'2000. Тез. Докл. (Алушта, 10-14 июня 2000 г.). Симферополь: Крымский научный центр НАН Украины, Таврический национальный университет, 2000. С. 26.

[6] **Журавлев Ю.И.** Корректные алгебры над множеством некорректных (эвристических) алгоритмов. I, II, III. // Кибернетика, I: N 4, 1977, С. 5-17; II: N 6, 1977, С. 21-27; III: N 2, 1978, С. 35-43.

[7] **Кендал М., Стюарт А.** Статистические выводы и связи. /Пер. с англ. — М.: Наука, 1973.
[8] **Патрик Э.** Основы теории распознавания образов /Пер. с англ. Под. ред. Б.Р.Левина. — Сов. радио, 1980.
[9] **Рао С.Р.** Линейные ститистические методы и их применение. /Пер. с англ. — М.: Накуа, 1968.
[10] **Рудаков К.В.** Об алгебраической теории универсальных и локальных ограничений для задач классификации. // Распознавание, классификация, прогноз. Математические методы и их применение. Вып. 1. – М.: Наука, 1989. — С. 176-200.
[11] **Фукунага К.** Введение в статистическую теорию распознавания образов. /Пер. с англ. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.

GUARANTEED IMPUTATIONS IN COOPERATIVE GAMES WITH SIDE PAYMENTS

Zhukovskyi V.I., Opletaeva E.N., Sachkov S.N.
RCITLI

In this review the solution of the cooperative game under uncertainties based on the imputation notion is considered. Bouth "static"and dynamic versions of the game are presented.

1. INTRODUCTION

The study of cooperative games with side payments was initiated by J. von Neumann and O. Morgenstern [1]. Further investigations of cooperative games were developed in some different ways by R. J. Aumann, L.J. Billera, J.C. Harsanyi, S. Hart, T. Ichiishi, G. Kalai, M. Maschler, A. Mas-Colell, H. Moulin, R. Myerson, J.F. Nash, G. Owen, B. Peleg, H. Peters, J. Rosenmueller, A. Roth, H. Scarf, L. Shapley, M. Shubic, D. Schmeidler, W. Thomson. Valuable contribution to development of cooperative games theory was made by Russian scientists O.N. Bondareva, G. N. Dubin, O.R. Menshikova, I.N. Menshikov, V.V. Morosov, N.I. Naumova, S.L. Pechersky, L.A. Petrosjan, A.I. Sobolev, E. Vilkas, V.I. Vilkov, N.N. Vorob'ev, E.B. Yanovskaya, etc. However, these authors did not take into account the perturbations, noises and other types of uncertainties. The only thing known about these uncertainties is the limits of changes and any statistical characteristics are just absent. Such uncertainties arise in many real economic problems. These uncertainties may be changes of the demand for the produced goods, changes of quantity and nomenclature of the supplies, breakage and replacement of an equipment, unexpected appearance of competitors, natural phenomena, etc. How should the players take into account these uncertainties choosing their strategies? As an answer to this question the solution of cooperative game under uncertainties based on the imputation notion is considered in this review (note that we consider bouth "static"and dynamic versions of the game).

To construct the optimal solutions of problems in which the limits of changes are the only thing known about uncertainties we must use some principles of decision making. There is a variety of such principles in the theory of decision making under uncertainty (such as Wald principle (principle of maximin), Savege principle (principle of minimax regret), Hurwitz principle (principle of optimism – pessimism), etc.). However all of the mentioned principles were formulated for *single-criterion* (scalar) problems only. The switch - over to more complicated the *multicriteria problems under uncertainties* requires modifying these principles. In particular, it is necessary to modify the notion of guaranteed solutions appropriately. The multicriteria problems under uncertainties are investigated by F. Ferro [2-5], T. Tanaka [6-10], Z.F. Li and S.Y. Wang [11], S.S. Chang, G.X. Yuan and G.M. Lee [12], R. Raucci [13], G.Y. Chen and S.J. Li [14], K.K. Tan, J. Yu and X.Z. Yuan [15], S.S. Chang, G.M. Lee and B.S. Lee [16], D.S. Shi and C. Ling [17], T.L. Dinh and C. Vargas [18], W.L. Chan and W.T. Lau [19],

O. Blackwell [21], V.I. Zhukovskiy and M.E. Salukvadze [22–24], etc. For these problems two general approaches to decision making, called the analogue of saddle-point and the analogue of maximin, are established and appropriate mathematical methods are developed, especially for dynamic positional problems [22 – 26].

It is natural to pass from the multicriteria problems to the *game problems under uncertainties*. These games are actively studied only in Russia (see [27],[28]). The theoretical basis of *cooperative games with side payments under uncertainties* is being investigated by V.I. Zhukovskiy and his pupils. In this paper the authors try to review the obtained results and outline the ways for futher investigations of cooperative games under uncertainties. To shorten the notation

in the first place, we restrict ourselves to the cooperative games of three players;

secondly, we investigate the guaranteeing imputations only;

in the third place, the proofs of all results mentioned in this paper are omitted (their proofs can be found in [29]).

1.1. Formalization of cooperative three-person game

Let us consider the cooperative three-person game under uncertainty (in the normal form) with "pure"strategies and uncertainties

$$\langle \{1,2,3\}, \{X_i\}_{i=1,2,3}, Y, \{f_i(x,y)\}_{i=1,2,3}\rangle. \tag{1.1}$$

Here 1,2 and 3 are the players numbers. The i-th player chooses and uses his strategy $x_i \in X_i \subseteq \mathbf{R}^{n_i}$. This choice is done with the other players simultaneously as a result of negotiation among the players. Then the situation $x = (x_1, x_2, x_3) \in \in X = \prod_{i=1}^{3} X_i \subseteq \mathbf{R}^n$ $(n = n_1 + n_2 + n_3)$ is composed. Irrespective of players' actions some uncertainty $y \in Y \subseteq \mathbf{R}^m$ is realized in the game (1.1). On the couples $(x, y) \in X \times Y$ the payoff function $f_i(x, y)$ of the i-th player is determined. The value of the function $f_i(x, y)$ on the formed couple (x, y) is the preliminary payoff of the i-th player $(i = 1, 2, 3)$.

Three features of cooperative games with side payments difference them from non-cooperative ones:

at first, interests of every coalition $K \subseteq \{1, 2, 3\}$ are taken into account;

secondly, there is a possibility of unrestricted negotiations among the players. The result of these negotiations is a simultaneous choice and employment of the game situation. We assume the agreements are fulfilled;

in the third place, for each player there exists a possibility (or impossibility) for transmission of a portion of his preliminary payoff to other players. If such redistribution is possible the game (1.1) is called a *cooperative game under uncertainty and with side payments*. If such redistribution is impossible the game (1.1) is called a *cooperative game under uncertainty and without side payments*.

In the case of side payments we shall assume that players' payoffs are measured in the one and the same scale and can be redistributed without loss.

To formalize solutions of the game (1.1) we shall use the notion of imputation (from the theory of cooperative games without uncertainties). Besides, we take into account that the players should allow for emerging of any uncertainty $y \in Y$ unpredictable in advance.

Parallel with the game (1.1) we shall consider a cooperative three-person game under uncertainty and with *informational discrimination of the players*

$$\langle \{1,2,3\}, \{X_i\}_{i=1,2,3}, Y^X, \{f_i(x,y)\}_{i=1,2,3}\rangle. \tag{1.2}$$

In contrast with (1.1), in the game (1.2) the strategical uncertainties $y(\cdot) \in Y^X$ are presented, which are the m-vector-functions $y(x)$ determined on X with values from Y (the set of functions $y(\cdot)$ is designated by Y^X). Usually such uncertainties arise in market models. In this case the uncertainties are the strategies of one more seller-competitor, who has suddenly appeared on the market and therefore he was not included to the set of players in the model (1.2). Forming his strategy (for example, it may be prices of goods) the competitor can get known the strategies of the 1-st, 2-nd and 3-rd players. The sence of informational discrimination of the players is that the players do not know which uncertainty will be realized in the game. Therefore they can suppose the formation of uncertainty happens under any conceivable information. In particular, this uncertainty can be formed using an information about the strategies chosen by the players, i.e. the informational discrimination of the players takes place.

In both the game (1.1) and the game (1.2) the players come to an agreement about the common choice of the situation $x \in X$. Then irrespective of players' actions some uncertainty $y(x) : X \to Y$, $y(\cdot) \in Y^X$ is realized. Note, that in a partial case the "roles"of uncertainties can be performed by $y{\in}Y$, i.e. the case of "pure"uncertainties

$$y(x) = y \in Y, \quad \forall x \in X,$$

is not excluded.

As a result the couple $(x, y(\cdot)) \in X \times Y^X$ is composed. On such couples the payoff function of the i-th player

$$f_i(x, y) = f_i(x, y(x)) \quad (i = 1, 2, 3),$$

is determined, the value of which on the concrete couple is player's *preliminary payoff*. Finally, in the game (1.2) it is possible the redistribution of preliminary payoffs (side payments).

1.2. Auxiliary assertions

Let us assume that in the game (1.1) (or in (1.2)) the situation $x^K \in X$ is fixed. Then we obtain a three-criteria problem

$$\langle Y, f(x^K, y)\rangle, \tag{1.3}$$

where $f(x^K, y) = (f_1(x^K, y), f_2(x^K, y), f_3(x^K, y))$.

The vector $f^S = (f_1^S, f_2^S, f_3^S)$ is called the *Slater guarantee corresponding to the situation* x^K if there exists an uncertainty $y^S \in Y$ such that $f^S = f(x^K, y^S)$ and the system of inequalities

$$f_i(x^K, y) < f_i^S, \quad \forall y \in Y \quad (i = 1, 2, 3),$$

is incompatible. We designate the set of y^S by Y^S. Note, that y^S is a minimal by Slater solution for the problem (1.3).

The vector $f^P = (f_1^P, f_2^P, f_3^P)$ is called the *Pareto guarantee corresponding to the situation* x^K if there exists an uncertainty $y^P \in Y$ such that $f^P = f(x^K, y^P)$ and the system of inequalities

$$f_i(x^K, y) \leq f_i^P, \quad \forall y \in Y \quad (i = 1, 2, 3),$$

is incompatible, besides at least one inequality is strict. The set of y^P uncertainties is designate by Y^P.

We introduce the sets

$$f(x^K, Y) = \bigcup_{y \in Y} f(x^K, y), \quad \mathbf{R}^3_{\geq} = \{f \in \mathbf{R}^3 | f_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3)\},$$

$$\mathbf{R}^3_{\leq} = -\mathbf{R}^3_{\geq}, \quad f^*(x^K, Y) = f(x^K, Y) + \mathbf{R}^3_{\geq}.$$

The vector $f^B \in \mathbf{R}^3$ is called the *Borwein [30] guarantee corresponding to the situation* x^K if there exists $y^B \in Y^P$ such that $f^B = f(x^K, y^B)$ and

$$T(f^*(x^K, Y), f^B) \cap \mathbf{R}^3_{\leq} = \{0_3\},$$

where $T(f^*(x^K, Y), f^B)$ is a tangential cone to the set $f^*(x^K, Y)$ at the point $f^B \in f(x^K, Y)$ and 0_3 is the zero-vector from $\mathbf{R}^3$. We designate the set of y^B by Y^B.

The vector $f^G \in \mathbf{R}^3$ is called the *Geoffrion [31] guarantee corresponding to the situation* x^K if there exists $y^G \in Y^P$ and $\gamma = const > 0$ such that $f^G =$

$= (f_1^G, f_2^G, f_3^G) = f(x^K, y^G)$ and if for $i \in \{1,2,3\}$ and $y \in Y$ the inequality $f_i(x^K, y) < f_i^G$ is satisfied and for some $j \in \{1,2,3\}$ we have $f_j(x^K, y) > f_j^G$ then

$$f_i^G - f_i(x^K, y) \leq \gamma[f_j(x^K, y) - f_j^G].$$

We designate the set of y^G by Y^G.

Finally, the uncertainty $y^L \in Y$ is called *minimal by* L in the problem (1.3) if the vector $f(x^K, y^L)$ is

the Slater guarantee for $L = S$,
the Pareto guarantee for $L = P$,
the Borwein guarantee for $L = B$,
the Geoffrion guarantee for $L = G$.

Note that the minimal by L uncertainty y^L of the problem $\langle Y, f(x^K, y)\rangle$ is the maximal by L for the problem $\langle Y, -f(x^K, y)\rangle$. Then similarly to the mentioned above definitions we can introduce the following notions. For multicriteria problem

$$\langle X, f(x, y^L\rangle \tag{1.4}$$

the situation $x^K \in X$ is called *maximal by* K if x^K is

maximal by Slater for $K = S$,
maximal by Pareto for $K = P$,
maximal by Borwein for $K = B$,
maximal by Geoffrion for $K = G$.

The set of maximal by K situations is designated by X^K $(K = S, P, B, G)$.

It is known [22, p.167; 32, p. 54] that for the problem (1.3)

$$Y^G \subset Y^B \subset Y^P \subset Y^S, \tag{1.5}$$

and for (1.4)

$$X^G \subset X^B \subset X^P \subset X^S. \tag{1.6}$$

1.3. Approaches to formalization of guaranteed imputations

To construct the guaranteed imputations for a cooperative game *with side payments* we shall use the principle of maximin (Wald principle). In the game (1.1) this principle is reduced to the construction of a saddle-point $(x^*, y^*) \in X \times Y$:

$$\sum_{i=1}^{3} f_i(x, y^*) \leq \sum_{i=1}^{3} f_i(x^*, y^*) \leq \sum_{i=1}^{3} f_i(x^*, y), \quad \forall x \in X, y \in Y. \tag{1.7}$$

Then the summary payoff $F^* = \sum\limits_{i=1}^{3} f_i(x^*, y^*)$ must be divided between the players taking into account the condition of individual rationality for each player.

For the game (1.2) this approach is reduced to the determination of a maximin

$$F^* = \max_{x \in X} \min_{y(\cdot) \in Y^X} \sum_{i=1}^{3} f_i(x, y) = \min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{3} f_i(x^*, y) \tag{1.8}$$

with further redistribution of F^* among the players. Moreover the conditions of individual rationality must be fulfilled.

In the case (1.7) (and in (1.8)) whatever uncertainty $y \in Y$ ($y(\cdot) \in Y^X$ respectively) is realized in the game, the players, using the situation x^*, can divide between them the sum $\sum\limits_{i=1}^{3} f_i(x^*, y) \geq F^*$ $(\sum\limits_{i=1}^{3} f_i(x^*, y(x^*)) \geq F^*$ respectively).

Thus, whatever uncertainty is realized, the resultant (redistributed) payoff of each player can not become smaller than the corresponding guaranteed payoff.

1.4 Contents of review The paper consists of two parts. The first part (Section 2) is devoted to the "static"cooperative games under uncertainty and includes two parts, one of which deals with "pure"uncertainties and the other one deals with "informed"uncertainties. In the second part we consider the dynanical version of the game. J.A. Belskikh took part in Section 2 preparation [33].

2. COOPERATIVE GAME UNDER UNCERTAINTY

For the case when the redistribution of the preliminary payoffs is possible the guaranteed imputations are defined for both (1.1) and (1.2) games. The existence of such imputations is established under the ordinary for the game theory restrictions. For linear-quadratic games the coefficient criteria of the guaranteed imputation existence and the explicit form of these imputations are presented.

2.1. Game with "pure"uncertainties

Formalizations and properties The game (1.1) is considered. Let the uncertainty be $y \in Y \subseteq \mathbf{R}^m$ and the coordinated redistribution of payoffs be possible. We recall the vector $f = (f_1, f_2, f_3)$.

Definition 2.1. The couple $(x^*, f^g) \in X \times \mathbf{R}^3$ is called a *guaranteed solution* of cooperative game (1.1) with side payments if there exists a "pure"uncertainty $y^g \in Y$ such that

1^0. the couple $(x^*, y^g) \in X \times Y$ is a saddle-point of antagonistic game

$$\Gamma_a = \langle X, Y, \sum_{i=1}^{3} f_i(x, y) \rangle,$$

i.e.

$$\sum_{i=1}^{3} f_i(x, y^g) \le \sum_{i=1}^{3} f_i(x^*, y^g) \le \sum_{i=1}^{3} f_i(x^*, y), \quad \forall x \in X, y \in Y, \tag{2.1}$$

and

$$\sum_{i=1}^{3} f_i^g = \sum_{i=1}^{3} f_i(x^*, y^g) = F^*(x^*, y^g); \tag{2.2}$$

2^0. the *analogue of condition of individual rationality* takes place, i.e.

$$f_i^g \ge \max_{u_i \in X_i} \min_{(u_j, u_k) \in X_j \times X_k} f_i(u, y^g) = \min_{(u_j, u_k) \in X_j \times X_k} f_i(x_i^0, u_j, u_k, y^g) = f_i^0[y^g] \tag{2.3}$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3; i, j \ne k; i \ne j).$$

The vector $f^g = (f_1^g, f_2^g, f_3^g)$ is called a *guaranteed imputation* in the game (1.1) and x^* is called a situation, realizing this imputation.

The component f_i^g of the vector f^g is the side payment for the i-th player. This payment was taken from the guarantee attainability sum $\sum\limits_{i=1}^{3} f_i(x^*, y^g)$ (for $x = x^*$). If the "pure"uncertainty $y \ne y^g$ is realized then (in view of the right-hand inequality from (2.1)) the players can distribute, using their strategies from the situation x^*, the sum $\sum\limits_{i=1}^{3} f_i(x^*, y) \ge \sum\limits_{i=1}^{3} f_i(x^*, y^g)$ between them. Therefore i-th player's side payment can be equal or greater than f_i^g $(i = 1, 2, 3)$.

The requirement (2.3) means that the i-th player will agree to receive the side payment f_i^g if $f_i^g \ge f_i^0[y^g]$. Really, $f_i^0[y^g]$ can be provided by himself using "his own"maximin strategy x_i^0 (according to (2.3)) irrespectively of other players' actions.

Note, that for the situation x^*, found from (2.1), the requirement (2.3) can not be satisfied. The following example demonstrates this fact.

Example 2.1. Let in (1.1)

$$X_1 = [0,3], X_2 = X_3 = [0,1], f_1(x,y^g) = -x_1, f_2(x,y^g) = 2x_1 + x_2, f_3(x,y^g) = x_3.$$

Then $X = [0,3] \times [0,1]^2$, $f_1^0[y^g] = 0$,

$$\max_{u \in X} \sum_{i=1}^{3} f_i(x,y^g) = \sum_{i=1}^{3} f_i(x_1^*, x_1^*, x_3^*, y^g),$$

where $x_1^* = 3$, $x_2^* = x_3^* = 1$. Hence $f_i(x^*, y^g) = -6 < 0 = f_1^0[y^g]$.

Property 2.1. The vector $f(x^*, y^g)$, found from the right-hand inequality in (2.1), is a Geoffrion guarantee corresponding to the situation x^* for three-criteria problem $\langle Y, f(x^*, y)\rangle$. In view of (1.5) this vector is also Borwein, Pareto and Slater guarantee.

Further the following binary relations will be used: for two vectors $f^{(r)} = (f_1^{(r)}, f_2^{(r)}, f_3^{(r)})$ $(r = 1,2)$

$$f^{(1)} >_S f^{(2)} \Leftrightarrow f_i^{(1)} > f_i^{(2)} (i = 1,2,3); \quad f^{(1)} \not>_S f^{(2)} \Leftrightarrow \rceil (f^{(1)} >_S f^{(2)});$$

$$f^{(1)} = f^{(2)} \Leftrightarrow f_i^{(1)} = f_i^{(2)} (i = 1,2,3); \quad f^{(1)} \neq f^{(2)} \Leftrightarrow \rceil (f^{(1)} = f^{(2)});$$

$$f^{(1)} \geq f^{(2)} \Leftrightarrow f_i^{(1)} \geq f_i^{(2)} (i = 1,2,3); \quad f^{(1)} >_P f^{(2)} \Leftrightarrow (f^{(1)} \geq f^{(2)} \wedge f^{(1)} \neq f^{(2)});$$

$$f^{(1)} \not>_P f^{(2)} \Leftrightarrow \rceil (f^{(1)} >_P f^{(2)}).$$

The set $F \subseteq \mathbf{R}^3$ is called *intrinsically K-stable* if for any $f^{(r)} \in F$ $(r = 1,2)$ we get

$$f^{(1)} \not>_K f^{(2)} \quad (K = P, S).$$

Property 2.2. The set of guaranteed imputations f^g of the game (1.1) is intrinsically K-stable for $K = S, P$.

Property 2.3. The situation $x^* \in X$, satisfying the left-hand inequality in (2.1), is maximal by Geoffrion (and, hence, by Borwein, Pareto, Slater) in three-criteria problem $\langle X, f(x, y^g)\rangle$.

Property 2.4. Definition 2.1 is "complete enough"because it embraces, as the partial cases, the notions of

– saddle point,

– imputation of cooperative game with side payments,

– optimum by Slater, Pareto, Borwein and Geoffrion from the theory of multicriteria problems.

Property 2.5. A guaranteed imputation $f^g = (f_1^g, f_2^g, f_3^g)$ from (3.3) satisfies the condition

$$f_i^g \geq \max_{u_i \in X_i} \min_{(u_j, u_k, z) \in X_j \times X_k \times Y} f_i(u,z)$$

$$(i,j,k = 1,2,3; i,j \neq k; i \neq j).$$

Methods for construction of guaranteed imputation

We introduce two ways for distribution of the sum $F(x^*, y^g)$ (from (2.2)) into side payments $f^g = (f_1^g, f_2^g, f_3^g)$, under which the conditions of individual rationality (2.3) are fulfilled.

Method I. Assume that

$$f_i(x^*, y^g) > 0 \quad (i = 1,2,3). \tag{2.4}$$

Then the side payments are of the form

$$f_i^g = \alpha_i F(x^*, y^g) \quad (i = 1,2,3),$$

where the positive constants α_i $(i = 1,2,3)$ satisfy the following conditions

$$\alpha_j \geq f_j^0[y^g] F^{-1}(x^*, y^g) \quad (j = 1,2),$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1 - f_3^0[y^g] F^{-1}(x^*, y^g), \quad \alpha_3 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2. \tag{2.5}$$

Note, the requirement (2.4) can be ensured (under the condition that $f_i(x,y)$ $(i=1,2,3)$ is continuous on the product of compact sets $X\times Y$) by using the following transformation

$$\bar{f}_i = f_i + \max_{i=1,2,3} \max_{(x,y)\in X\times Y} |f_i(x,y)| + 1 \quad (i=1,2,3).$$

Under this transformation the saddle-point (x^*, y^g) of the game Γ_a does not change.

In a result, we get the following *algorithm* for construction of guaranteed imputation $f^g = (f_1^g, f_2^g, f_3^g)$ in cooperative game (1.1) with side payments

a) according to (2.1) the saddle-point (x^*, y^g) is constructed;

b)$F^* = F(x^*, y^g) = \sum\limits_{i=1}^{3} f_i(x^*, y^g)$ is found;

c) the maximins $f_i^0[y^g]$ $(i=1,2,3)$ are calculated from (2.3);

d) if all values $F(x^*, y^g)$, $f_i^0[y^g]$ $(i=1,2,3)$ are positive then the numbers α_i $(i=1,2,3)$, satisfying the correlations (2.5), are chosen.

Then the guaranteed imputation of the game (1.1) is

$$f^g = (f_1^g, f_2^g, f_3^g) = (\alpha_1 F^*, \alpha_2 F^*, \alpha_3 F^*),$$

and the guaranteed solution is (x^*, f^g);

e) if some of the values $F(x^*, y^g)$, $f_i^0[y^g]$ $(i=1,2,3)$ are negative then after the item c)

– $\sigma = \max\limits_{i=1,2,3} \max\{|f_i(x^*, y^g)|, |f_i^0[y^g]|\}$ is found;

– the numbers α_i $(i=1,2,3)$, satisfying the conditions

$$\begin{cases} \alpha_1 & \geq & \frac{f_1^0[y^g]+\sigma+1}{F(x^*,y^g)+3(\sigma+1)}, \\ \alpha_2 & \geq & \frac{f_2^0[y^g]+\sigma+1}{F(x^*,y^g)+3(\sigma+1)}, \\ \alpha_1+\alpha_2 & \leq & 1 - \frac{f_3^0[y^g]+\sigma+1}{F(x^*,y^g)+3(\sigma+1)}, \\ \alpha_3 & = & 1-(\alpha_1+\alpha_2), \end{cases}$$

are chosen, then the guaranteed imputation $f^g = (f_1^g, f_2^g, f_3^g)$ is of the form

$$f_i^g = \alpha_i F_i(x^*, y^g) + (3\alpha_i - 1)(\sigma+1) \quad (i=1,2,3),$$

and the guaranteed solution is (x^*, f^g).

Method II. Here $F^*(x^*, y^g)$ from (2.2) and $f_i^0[y^g]$ $(i=1,2,3)$ from (2.3) are assumed to be found. Let us consider the following *algorithm* for construction of side payments $f^g = (f_1^g, f_2^g, f_3^g)$.

Case 1: $f_i[y^g] \geq 0$ $(i=1,2,3)$.

a) the player 1 receives a part f_1^g of guaranteed summary payoff $F^*(x^*, y^g)$, where f_1^g may be any number from the interval $[f_1^0[y^g], F^*(x^*, y^g) - (f_2^0[y^g] + f_3^0[y^g])]$;

b) the player 2 receives the side payment f_2^g, where f_2^g is any number from $f_2^0[y^g]$ to $F^*(x^*, y^g) - (f_1^g + f_3^0[y^g])$;

c) the player 3 receives $f_3^g = F^*(x^*, y^g) - f_1^g - f_2^g$;

It is evident the order of players' priority can be changed.

Case 2: there are some negative numbers among $F^*(x^*, y^g)$, $f_i^0[y^g]$ $(i=1,2,3)$. Then, using the substitute

$$\bar{f}_i^0[y^g] = f_i^0[y^g] + \sigma + 1 \quad (i=1,2,3),$$

$$\bar{F}^*(x^*, y^g) = F^*(x^*, y^g) + 3(\sigma+1),$$

we reduce the problem of side payments $\bar{f}^g = (f_1^g, f_2^g, f_3^g)$ construction to the previous case 1.

In a result, every i-th player receives the part of the guaranteed summary payoff $\bar{F}^*$, which equals $\bar{f}_i^g$ except the number $\sigma+1$.

Existence

Lemma 2.1. For the saddle-point (x^*, y^g) (2.1) of the game Γ_a the following inequality takes place

$$F(x^*, y^g) = \sum_{i=1}^{3} f_i(x^*, y^g) \geq \sum_{i=1}^{3} \max_{u_i \in X_i} \min_{(u_j, u_k) \in X_j \times X_k} f_i(u, y^g) \tag{2.6}$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3; i, j \neq k; i \neq j).$$

Remark 2.1. The inequality (2.6) allows the possibility of distribution of the sum $\sum\limits_{i=1}^{3} f_i(x^*, y^g)$ between the players in view of individual rationality condition (2.3). Therefore the existence of guaranteed solution for a cooperative game with side payments is reduced to the existence of a saddle-point (x^*, y^g) in the game Γ_a. Using a well-known theorem of saddle-point existence (from the theory of two-person zero-sum games) we obtain

Assertion 2.1. Let us assume that in cooperative game (1.1) with side payments

1^0. X_i $(i = 1, 2, 3)$ and Y are the convex compact sets;

2^0. payoff functions $f_i(x, y)$ $(i = 1, 2, 3)$ are continuous on $X \times Y$;

3^0. the sum $\sum\limits_{i=1}^{3} f_i(x, y)$ is convex in y for every $x \in X$ and concave in x for every $y \in Y$.

Then in the game (1.1) there exists a guaranteed solution (x^*, f^g).

Remark 2.2. The requirements from Assertion 2.1 can be weakened by passing to mixed or quasi-mixed extension of the game (1.1).

For example, we consider a quasi-mixed extension of the game (1.1) in the form

$$\langle \{1, 2, 3\}, \{\nu_i\}_{i=1,2,3}, Y, \{f_i(\nu, y)\}_{i=1,2,3} \rangle, \tag{2.7}$$

where the player i uses a mixed strategy ν_i, which is associated with a probability measure $\nu_i(dx_i)$ on the compact set X_i $(i = 1, 2, 3)$. Te set of such measures is designated by $\{\nu_i\}$. The mixed situation $\nu(dx)$ is a measure-product of probability measures $\nu_i(dx_i)$, i.e. $\nu(dx) = \nu_1(dx_1)\nu_2(dx_2)\nu_3(dx_3)$. Here the measure-product is understood according to the definitions from [34, p.27] and designations from [35, p.284]. In (2.7) the "pure"uncertainties are $y \in Y$ and the payoff functions are

$$f_i(\nu, y) = \int\limits_X f_i(x, y)\nu(dx) \quad (i = 1, 2, 3).$$

In the game (2.7) we assume the sets X_i $(i = 1, 2, 3)$ and Y are compact and functions $f_i(x, y)$ $(i = 1, 2, 3)$ are continuous on $X \times Y$.

The guaranteed solution for the game (2.7) is formalized by analogy with Definition 2.1.

The couple $(\nu^*, f^g) \in \{\nu\} \times \mathbf{R}^3$ is called *a guaranteed solution for the quasi-mixed extension* (2.7) of the game (1.1) with side payments if there exists an uncertainty $y^g \in Y$ such that

1^0. $\sum\limits_{i=1}^{3} f_i(\nu, y^g) \leq \sum\limits_{i=1}^{3} f_i(\nu^*, y^g) = \sum\limits_{i=1}^{3} f_i^g \leq \sum\limits_{i=1}^{3} f_i(\nu^*, y)$, $\forall \nu \in \{\nu\}, y \in Y$;

2^0. the inequality (2.3) is fulfilled, where u_i is replaced by ν_i.

Assertion 2.2. Let us assume that in cooperative game (1.1) with side payments

1^0. the sets X_i $(i = 1, 2, 3)$ are compact and Y is a convex compact set;

2^0. functions $f_i(x, y)$ $(i = 1, 2, 3)$ are continuous on $X \times Y$;

3^0. the sum $\sum\limits_{i=1}^{3} f_i(x, y)$ is convex in $y \in Y$ for every $x \in X$.

Then there exists a guaranteed solution (ν^*, f^g) for the quasi-mixed extension of the game (1.1).

Linear-quadratic game

Let us consider a linear-quadratic cooperative three-person game with side payments

$$\langle \{1,2,3\}, \{\mathbf{R}_i^n\}_{i=1,2,3}, \mathbf{R}^m, \{f_i(x,y)\}_{i=1,2,3}\rangle. \qquad (2.8)$$

Here the strategy of the i-th player is $x_i \in \mathbf{R}^{n_i}$, the situations are $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^n$ $(n = n_1 + n_2 + n_3)$, the uncertainties are $y \in \mathbf{R}^m$, the payoff function $f_i(x,y)$ of i-th player is of the form

$$f_i(x,y) = \sum_{j=1}^{3} x_j' D_{ij} x_j + y' L_i y + 2x_1' K_i y + 2\sum_{j=1}^{3} d_{ij}' x_j \quad (i = 1,2,3). \qquad (2.9)$$

In (2.9) the constant symmetric matrices D_{ij} and L_i have dimensions $n_j \times n_j$ and $m \times m$ respectively; $n_1 \times m$-matrices K_i and n_j-vectors d_{ij} are constant.

Further we use the following constant matrices and vectors

$$D_i = \sum_{j=1}^{3} D_{ji}, \quad K = \sum_{j=1}^{3} K_j, \quad L = \sum_{j=1}^{3} L_i, \quad M = D_1 - KL^{-1}K',$$
$$B_i = D_{i1} - 2K_i L^{-1} K' + KL^{-1} L_i L^{-1} K', \quad T = L^{-1}K'M^{-1},$$
$$d_i = \sum_{j=1}^{3} d_{ji}, \quad b_i = d_{i1} + K_i T d_1 \quad (i = 1,2,3). \qquad (2.10)$$

Note that for symmetric constant $n \times n$-matrix $B > 0$ $(<, \geq, \leq)$ means a quadratic form $x'Bx$ being positive definite (negative, nonnegative, nonpositive), i.e. $x'Bx > 0$ $(<, \geq, \leq)$ for all $||x|| \neq 0$.

Assertion 2.3. Assume that in the game (2.8), (2.9)

$$D_i < 0, \|d_i\| \neq 0 \quad (i = 1,2,3), L > 0, D_{11} < 0, D_{12} > 0, D_{13} > 0,$$
$$D_{21} > 0, D_{22} < 0, D_{23} > 0, D_{31} > 0, D_{32} > 0, D_{33} < 0,$$
$$-d_1' M^{-1} d_1 - d_2' D_2^{-1} d_2 - d_3' D_3^{-1} d_3 \geq$$
$$\geq \sum_{i=1}^{3} (-b_i' D_{i1}^{-1} b_i - d_{i2}' D_{i2}^{-1} d_{i2} - d_{i3}' D_{i3}^{-1} d_{i3} + d_1' T' L_i T d_1).$$

Then the situation x^*, realizing the guaranteed imputation f^g, is of the form

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (-M^{-1}d_1, -D_2^{-1}d_2, -D_3^{-1}d_3),$$

corresponding uncertainty

$$y^g = Td_1,$$

and the guaranteed imputation $f^g = (f_1^g, f_2^g, f_3^g)$ is determined as follows $(i,j,k = 1,2,3; i,j \neq k; i \neq j)$:

1^0. if $f_i^0[y^g] \geq 0$ $(i = 1,2,3)$ then the side payments are

$$f_i^g \in [f_i^0[y^g], F^* - (f_j^0[y^g] + f_k^0[y^g])],$$
$$f_j^g \in [f_j^0[y^g], F^* - (f_i^g + f_k^0[y^g])],$$
$$f_k^g = F^* - (f_i^g + f_j^g);$$

2^0. if some of $f_i^0[y^g]$ are negative then the side payments are

$$f_i^g = \bar{f}_i^g - \sigma - 1 \quad (i = 1,2,3),$$

where the constants

$$\bar{f}_i^g \in [\bar{f}_i^0[y^g], \bar{F}^* - (\bar{f}_j^0[y^g] + \bar{f}_k^0[y^g])],$$
$$\bar{f}_j^g \in [\bar{f}_j^0[y^g], \bar{F}^* - (\bar{f}_i^g + \bar{f}_k^0[y^g])],$$
$$\bar{f}_k^g = \bar{F}^* - (\bar{f}_i^g + \bar{f}_j^g),$$

$$\sigma = \max_{i=1,2,3} |f_i^0[y^g]|, \quad \bar{f}_i^0[y^g] = f_i^0[y^g] + \sigma + 1, \bar{F}^* = F^* + 3(\sigma + 1);$$

the maximins are

$$f_i^0[y^g] = \max_{u_i \in \mathbf{R}^{n_i}} \min_{(u_j,u_k) \in \mathbf{R}^{n_j+n_k}} f_i(u_i, u_j, u_k, y^g) =$$

$$= -b_i' D_{i1}^{-1} b_i - d_{i2}' D_{i2}^{-1} d_{i2} - d_{i3}' D_{i3}^{-1} d_{i3} + d_1' T' L_i T d_1 \quad (i = 1, 2, 3)$$

and the largest summary guaranteed payoff is

$$F^* = \sum_{i=1}^{3} f_i(x^*, y^g) = \max_{u \in \mathbf{R}^n} \sum_{i=1}^{3} f_i(u, y^g) = -d_1' M^{-1} d_1 - d_2' D_2^{-1} d_2 - d_3' D_3^{-1} d_3. \tag{2.11}$$

2.2. Game with "informed"uncertainties

Formalization and properties

Let us consider a cooperative game (1.2) with side payments, where the uncertainty may be any function $y(x) : X \to Y$, i.e. $y(\cdot) \in Y^X$.

Definition 2.2. The couple (x^*, f^g) is called a *guaranteed solution* of cooperative game (1.2) with side payments if there exists an uncertainty $y^g(\cdot) \in Y^X$ such that the following conditions are satisfied:

1^0. the *analogue of collective rationality condition*

$$F^*(x^*, y^g(x^*)) = \max_{u \in X} \min_{z(\cdot) \in Y^X} \sum_{i=1}^{3} f_i(u, z(u)) = \min_{z \in Y} \sum_{i=1}^{3} f_i(x^*, z) =$$

$$= \max_{u \in X} \sum_{i=1}^{3} f_i(u, y^g(u)) = \sum_{i=1}^{3} f_i(x^*, y^g(x^*)) = \sum_{i=1}^{3} f_i^g; \tag{2.12}$$

2^0. the *analogue of individual rationality condition*

$$f_i^g \geq \max_{u_i \in X_i} \min_{(u_j,u_k) \in X_j \times X_k} f_i(u, y^g(u)) = f_i^0[y^g(\cdot)] \tag{2.13}$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3; i, j \neq k; i \neq j).$$

The vector $f^g = (f_1^g, f_2^g, f_3^g)$ is called a *guaranteed imputation* in the game (1.2), and x^* is called a situation, realizing this imputation.

Remark 2.3. From (2.12) we get, in particular,

$$\min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{3} f_i(x, y) \leq \min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{3} f_i(x^*, y), \quad \forall x \in X. \tag{2.14}$$

This inequality means that

– for every situation $x \in X$ the players (taking into account the influence of uncertainty to the summary payoff) orient themselves towards the realization of the most unfavourable uncertainty, i.e. they orient themselves towards the guaranteed result

$$\min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{3} f_i(x, y);$$

– following the Wald principle (the principle of maximin), the players prefer to use a situation x^*, under which this guaranteed result reaches the largest value.

– in general case, in (2.12) the maximin strategy x^* is not unique. Nevertheless, different maximin situations x^* correspond to one and the same value $\sum_{i=1}^{3} f_i(x^*, y^g(x^*))$; similarly, in the game (1.1) the quantity of saddle-points (x^*, y^g) (from (2.1)) of antagonistic game Γ_a may be even a continuum, but for all of these saddle-points the value of game $\sum_{i=1}^{3} f_i(x^*, y^g)$ is one and the same (the property of equivalence of saddle – points).

We pass to considering the *properties* of guaranteed solution (Definition 2.2).

At first, any guaranteed solution in the game (1.1) (Definition 2.1) is also a guaranteed solution for the game (1.2). The converse assertion does not hold true. Therefore the guaranteed solution of the game (1.1) possesses the properties of the guaranteed solution of the game (1.2) (Definition 2.2).

At second, the guaranteed solution of the game (1.2) possesses the properties 2.1-2.3, 2.5, 2.4 b), c) and as well as 2.4 a) with the word "maximin"instead of "saddle – point".

Existence

Lemma 2.2. For determined in (2.12) uncertainty $y^g(x)$ the following inequality is satisfied

$$\max_{x\in X} \min_{y(\cdot)\in Y^X} \sum_{i=1}^{3} f_i(x, y(x)) \geq \sum_{i=1}^{3} \max_{x_i\in X_i} \min_{(x_j,x_k)\in X_j\times X_k} f_i(x, y^g(x))$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3; i, j \neq k; i \neq j).$$

Remark 2.4. Lemma 2.2 establishes the possibility to distribute the sum $\sum_{i=1}^{3} f_i(x^*, y^g(x^*))$(from (2.12)) between the players in a such way that the individual rationality requirement (2.13) is fulfilled.

To do this we can use the mentioned above methods for construction of guaranteed imputation (with replacement $F^*(x^*, y^g) \rightarrow F^*(x^*, y^g(x^*))$ and $f_i^0[y^g] \rightarrow f_i^0[y^g(\cdot)]$ $(i = 1, 2, 3)$). Thus, the existence of guaranteed solution (Definition 2.2) in the game (1.2) with "informed"uncertainty is reduced to the existence of maximin (2.12).

Theorem 2.1. Assume that

1^0. the sets X_i $(i = 1, 2, 3)$ and Y are compact;

2^0. the payoff functions $f_i(x, y)$ $(i = 1, 2, 3)$ are continuous on $X \times Y$.

Then in cooperative game (1.2) with side payments and "informed"uncertainties the guaranteed solution (x^*, f^g) (Definition 2.2) exists.

Now let us consider a linear-quadratic cooperative game (2.8), (2.9) with side payments, where the "informed"uncertainties are associated with functions $y(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$.

Assertion 2.4. Assume that in the game (2.8), (2.9) (in view of designations (2.10)) the following conditions are fulfilled

$$D_i < 0, \|d_i\| \neq 0 \quad (i = 1, 2, 3), L > 0, B_1 < 0, B_2 > 0, B_3 > 0,$$

$$D_{12} > 0, D_{13} > 0, D_{22} < 0, D_{23} > 0, D_{32} > 0, D_{33} < 0,$$

$$-d_1' M^{-1} d_1 - d_2' D_2^{-1} d_2 - d_3' D_3^{-1} d_3 \geq \sum_{i=1}^{3} (-d_{i1}' B_i^{-1} d_{i1} - d_{i2}' D_{i2}^{-1} d_{i2} - d_{i3}' D_{i3}^{-1} d_{i3}).$$

Then the situation x^*, realizing the imputation f^g is of the form

$$x^* = (-M^{-1} d_1, -D_2^{-1} d_2, -D_3^{-1} d_3),$$

corresponding uncertainty is

$$y^g(x) = -L^{-1} K' x_1,$$

and guaranteed imputation $f^g = (f_1^g, f_2^g, f_3^g)$ is determined according to 1^0 and 2^0 of Assertion 2.3, where *at first*, $f_i^0[y^g]$ is replaced by

$$f_i^0[y^g(\cdot)] = -d'_{i1}B_i^{-1}d_{i1} - d'_{i2}D_{i2}^{-1}d_{i2} - d'_{i3}D_{i3}^{-1}d_{i3} \quad (i = 1,2,3);$$

at second, the value F^* is determined in (2.11).

Conclusion

In the first place we note that we have introduced one of the possible ways for accounting the uncertainties in cooperative games. We assumed, that the limits of changes were the only thing known about those uncertainties and any statistical characteristics were absent. The other approaches are possible. In particular, in [36,37] the method of interval analysis [38] was used for construction of solutions in cooperative games with side payments and under uncertainties. Besides, in this review we have restricted ourselves to the notion of "imputation"and the games of three players because, at first, many solutions of cooperative games can be reduced to the "reasonable"contraction of the imputations set, and at second, the results, set out here, can be applied to the games with more than three players. It is natural to consider C – kernel, N – kernel, $N - M$ – solution, etc. in further. Note, that the approaches used in this paper can be applied to the considering of the mentioned notions of solutions. Besides, the offered here methods for formalizations of guaranteed solutions can be applied to the differential cooperative games under uncertainties. These problems are actual and they are considered in the following sections 3.

3. COOPERATIVE DIFFERENTIAL GAME UNDER UNCERTAINTY

In this section we consider a differential positional cooperative game with side payments. We take into account an effect of uncertainties with known variation boundaries. In formalization of solution to the game we shall use the analogue of the imputation. Existence condition for such solution is established (under the ordinary for the theory of differential games restrictions). For linear-quadratic differential games the coefficient criteria of solution existence and the explicit form of this solution are presented.

3.1 Formalization of the game and guaranteed solution

Let us consider a dynamical controlled system $\mathbf{\Sigma}$, the changing (in time) of which is described by the vector differential equation

$$\dot{x} = f(t, x, u_1, u_2, u_3, z), \quad x[t_*] = x_*. \tag{3.1}$$

Here the phase vector $x \in \mathbf{R}^n$; the time is t, the starting moment of the game is $t_* \geq 0$, the game is finished at the time $\vartheta > t_*$ and moreover the instants t_* and ϑ are fixed; the control of the i-th player is $u_i \in P_i$ where P_i is a compact set from $\mathbf{R}^{k_i}$ ($i \in \mathbf{N} = \{1,2,3\}$); the uncertainty is $z \in Q$ where Q is a compact set from $\mathbf{R}^m$. Let a compact set M be given in the space of game positions (t,x) such that the projection of this set M to the axis t coincides with the given interval $[t_*, \vartheta]$. We assume that all of the system (3.1) trajectories issuing from the possible initial positions (t_*, x_*) and generated by any measurable $u_i(t) \in P_i$ ($i \in \mathbf{N} = \{1,2,3\}$) and $z(t) \in Q$ (for almost all $t \in [t_*, \vartheta]$) do not leave the set M for all $t \in [t_*, \vartheta]$. We use the following designations $u = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{N} \setminus i = \{1, ..., i-1, i+1, ...3\}$, $u_{\mathbf{N}\setminus i} = (u_1, ..., u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_3)$, $P = \prod_{j\in\mathbf{N}} P_j$, $P_{\mathbf{N}\setminus i} = \prod_{j\in\mathbf{N}\setminus i} P_j$. We shall assume the following condition is satisfied.

Condition 3.1. Vector-function $f : M \times P \times Q \to \mathbf{R}^n$ is continuous, Lipschizian with respect to (t,x) and there exists $\gamma = const > 0$ such that

$$||f(t,x,u,z)|| \leq \gamma(1 + ||x||).$$

The strategy U_i of the i-th player is associated with the couple $U_i \div (u_i(t,x,\varepsilon), \beta_i(\varepsilon))$ such that

$$u_i(t,x,\varepsilon) \subseteq P_i, \ \ \forall (t,x) \in M,$$

for the chosen scalar parameter of accuracy $\varepsilon \geq 0$ and function $\beta_i : (0, \infty) \to$ $\to (0, \infty)$. The function $\beta(\varepsilon)$ is continuous, monotone and $\beta_i(\varepsilon) \to 0$ as $\varepsilon \to 0$. The set of strategies of the i-th player is designated by $\mathcal{U}_i$ $(i \in \mathbf{N})$; situations $U = (U_1, U_2, U_3) \in \mathcal{U} = \prod_{i=1}^{3} \mathcal{U}_i$. The uncertainty Z is assousiated with the couple $Z \div (z(t, x, \varepsilon), \beta(\varepsilon))$ such that

$$z(t, x, \varepsilon) \subseteq Q, \ \ \forall (t, x) \in M;$$

here ε, $\beta(\varepsilon)$ are the same as for the strategy U_i. The set of uncertainties is designated by $\mathcal{Z}$.

Let us assume the players choose and use their strategies $U_i \in \mathcal{U}_i$, $U_i \div$ $\div (u_i(t, x, \varepsilon), \beta_i(\varepsilon))$ $(i \in \mathbf{N})$ by mutual consent. Irrespectively of the players' actions some uncertainty $Z \in \mathcal{Z}$, $Z \div (z(t, x, \varepsilon), \beta(\varepsilon))$ is realized.

Then according to [22, p.11-17] we determine the quasimotions $x[\cdot] =$ $= x[t, t_*, x_*, U, Z]$, $t_* \leq t \leq \vartheta$ of the system (3.1) generated by the couple $(U, Z) \in \mathcal{U} \times \mathcal{Z}$ from the initial position (t_*, x_*). And we also determine the quasimotions $x[t, t_*, x_*, U]$, $x[t, t_*, x_*, U_i]$ $(i \in \mathbf{N})$ and $x[t, t_*, x_*, Z]$, $t_* \leq t \leq \vartheta$. The bunches (the sets) of mentioned quasimotions are designated by $\mathcal{X}[t_*, x_*, U, Z]$, $\mathcal{X}[t_*, x_*, U_i]$, $\mathcal{X}[t_*, x_*, U]$, $\mathcal{X}[t_*, x_*, Z]$ respectively.

Lemma 3.1. The bunches of quasimotions$\mathcal{X}[t_*, x_*, U, Z]$, $\mathcal{X}[t_*, x_*, U_i]$, $\mathcal{X}[t_*, x_*, U]$, $\mathcal{X}[t_*, x_*, Z]$ are the nonempty compact sets (in the space $C_n[t_*, \vartheta]$ of continuous on $[t_*, \vartheta]$ n-vector-functions with metric $\max_{t_* \leq t \leq \vartheta} ||x(t)||$) and the following chain of inclusions is valid

$$\begin{aligned} &\mathcal{X}[t_*, x_*, U, Z] \subset \mathcal{X}[t_*, x_*, U] \subset \mathcal{X}[t_*, x_*, U_i] \ \ (i = 1, 2, 3), \\ &\mathcal{X}[t_*, x_*, U, Z] \subset \mathcal{X}[t_*, x_*, Z]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Lemma 3.2. For any $(U, Z) \in \mathcal{U} \times \mathcal{Z}$ and for any possible restrictions of a quasimotion $x[\cdot] \in \mathcal{X}[t_*, x_*, U, Z]$ to the interval $[\tau, \vartheta]$, where $\tau \in (t_*, \vartheta)$, n-vector-function $x[t]$, $t \in [\tau, \vartheta)$ is a quasimotion from the bunch $\mathcal{X}[\tau, x[\tau], U, Z]$. And conversely any quasimotion $x[\cdot] \in \mathcal{X}[\tau, x[\tau], U, Z]$ is a restriction (to $[\tau, \vartheta]$) of some quasimotion $x[\cdot, t_*, x_*, U, Z]$ from the set $\mathcal{X}[t_*, x_*, U, Z]$.

The lemmas were proved in [22, p. 18-22]. Analogous assertions take place for the bunches $\mathcal{X}[t_*, x_*, U_i]$, $\mathcal{X}[t_*, x_*, U]$, $\mathcal{X}[t_*, x_*, Z]$.

Lemma 3.2 is a reason of introduction of the quasimotion instead of habitual motions from [39]. The trouble is that if the habitual motions are used some "pieces"of motions can appear or disappear during the game, i.e. in the course of the time interval $\vartheta - t_*$ (see the examples in [22, p.6-11]). That is why the optimal (in the "game sense") motion chosen at the initial position (t_*, x_*) may cease to be optimal in a further run of the game. Usage of quasimotions enables players to get rid of this negative effect.

Let the game outcome "from the point of view"of the i-th player be characterized by the value of his payoff function $\Phi_i(x[\vartheta])$. We assume of the payoff function to be defined at the "right extremities"$x[\vartheta]$ of all quasimotions of the system (3.1). We assume the following condition is satisfied.

Condition 3.2. The scalar functions $\Phi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, are continuous and measured in one and the same scale.

As a result we have an ordered set

$$\langle \mathbf{N} = \{1, 2, 3\}, \mathbf{\Sigma}, \{\mathcal{U}_i\}_{i=1,2,3}, \mathcal{Z}, \{\Phi_i(x[\vartheta])\}_{i=1,2,3} \rangle. \tag{3.3}$$

This set is a cooperative differential three person game under uncertainty (in noncoalition form).

Under the conditions 3.1 and 3.2 we introduce the following notion (the analogue of Definition 2.1 and 2.2). To this end we use a vector-function $\Phi^d[t] =$ $= (\Phi_1^d[t], \Phi_2^d[t], \Phi_3^d[t])$, $t \in [t_*, \vartheta]$.

Definition 3.1. The couple $(U^d, \Phi^d[\vartheta]) \in \mathcal{U} \times \mathbf{R}^N$ is called a *dynamical appropriate guaranteed solution (DAGS) for the game* (3.3) if there exists an uncertainty $Z^d \in \mathcal{Z}$ such that for any choice of the possible initial position (t_*, x_*), for all $t \in [t_*, \vartheta]$ and for every quasimotion $x^d[\cdot] = \{x[t, t_*, x_*, U^d, Z^d], \quad t_* \le t \le \vartheta\} \in \in \mathcal{X}[t_*, x_*, U^d, Z^d]$ "it's own"vector-function $\Phi^d[t]$ is found such that the following conditions are satisfied

1^0 *"current"condition of "absence of degradation"for the summary payoff*:

$$\max_U \max_{x[\cdot]} \sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x[\vartheta, t, x^d[t], U]) = \min_{x[\cdot]} \sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x[\vartheta, t, x^d[t], U^d]) = \sum_{i=1}^{3} \Phi_i^d[t];$$

2^0 *"current"condition of collective rationality*:

$$\min_Z \max_{x[\cdot]} \sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x[\vartheta, t, x^d[t], Z]) = \max_{x[\cdot]} \sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x[\vartheta, t, x^d[t], Z^d]) = \sum_{i=1}^{3} \Phi_i^d[t];$$

3^0 *"current"condition of individual rationality*:

$$\Phi_i^d[t] \ge \max_{U_i} \min_{x[\cdot]} \Phi_i(x[\vartheta, t, x^d[t], U_i]) =$$
$$= \min_{x[\cdot]} \Phi_i(x[\vartheta, t, x^d[t], U_i^g]) = \Phi_i^g[t] \quad (i \in \mathbf{N}).$$

3.2. Existence

First of all we set out some auxiliary assertions. To this end we consider an antagonistic differential game

$$\langle \mathbf{\Sigma}, \mathcal{U}, \mathcal{Z}, \sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x[\vartheta]) \rangle. \tag{3.4}$$

In this game $\mathbf{\Sigma}$, $\mathcal{Z}$, (t_*, x_*), $\Phi_i(x[\vartheta])$ are the same as in the game (3.3), $\mathcal{U}$ is the set of situations. In the game (3.4) the maximizing player chooses his strategy $U \in \mathcal{U}$ to get the largest possible value of $\sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x[\vartheta])$, and the minimizing player's objective point is to minimize the same sum $\sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x[\vartheta])$ choosing $Z \in \mathcal{Z}$. A saddle point (U^d, Z^d) of the game (3.4) is defined by the following chain of equalities:

$$\begin{aligned} &\max_U \min_{x[\cdot]} \sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x[\vartheta, t_*, x_*, U]) = \min_{x[\cdot]} \sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x[\vartheta, t_*, x_*, U^d]) = \\ &= \min_Z \max_{x[\cdot]} \sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x[\vartheta, t_*, x_*, Z]) = \max_{x[\cdot]} \sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x[\vartheta, t_*, x_*, Z^d]). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Lemma 3.3. For antagonistic differential positional game (3.4) let conditions 3.1, 3.2 be satisfied and the equalities

$$\max_{u \in P} \min_{z \in Q} s' f(t, x, u, z) = \min_{z \in Q} \max_{u \in P} s' f(t, x, u, z) \tag{3.6}$$

hold true for every $s \in \mathbf{R}^n$ and $(t, x) \in M$ (the upper prime means transposition).

Then for any choice of a possible initial position (t_*, x_*) in the game (3.4) there exists a universal saddle point $(U^d, Z^d) \in \mathcal{U} \times \mathcal{Z}$, i.e. the chain of equalities (3.5) is fulfilled. The validity of the chain of equalities (3.5) is equivalent to

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x[\vartheta, t_*, x_*, Z^d]) \le \sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x[\vartheta, t_*, x_*, U^d, Z^d]) = v(t_*, x_*) \le \\ &\le \sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x[\vartheta, t_*, x_*, U^d]) \end{aligned}$$

for all quasimotions $x[\cdot, t_*, x_*, Z^d]$, $x[\cdot, t_*, x_*, U^d, Z^d]$ and $x[\cdot, t_*, x_*, U^d]$ of system (3.1) which were generated by the uncertainty Z^d, the couple (U^d, Z^d) and the situation U^d respectively from the initial position (t_*, x_*). The "universality"of the saddle point (U^d, Z^d) means that (U^d, Z^d) is a saddle point not only for the initial position (t_*, x_*) but even for any other initial position. The value $v(t_*, x_*)$ is called a value of the game (3.4). The proof of Lemma 3.3 for motions can be found in [39, p.228-232]. In the case of quasimotions the proof is carried out similarly.

Let us consider three antagonistic positional differential games

$$\langle \{i, \mathbf{N} \setminus i\}, \mathbf{\Sigma}, \{\mathcal{U}_i, \mathcal{U}_{\mathbf{N}\setminus i} \times \mathcal{Z}\}, \Phi_i(x[\vartheta])\rangle \quad (i = 1, 2, 3). \tag{3.7}$$

In the game (3.7) the elements $\mathbf{N} = \{1, 2, 3\}$, $\mathbf{\Sigma}$, i, $\mathcal{U}_i$, $\mathcal{U}_{\mathbf{N}\setminus i}$, $\mathcal{Z}$, $\Phi_i(x[\vartheta])$, (t_*, x_*) are the same as in the differential game (3.3). In (3.7) the maximizing player i using his strategy $U_i \in \mathcal{U}_i$ wants to get the largest possible values of the payoff function $\Phi_i(x[\vartheta, t_*, x_*, U_i])$, the other player minimizes $\Phi_i(x[\vartheta])$ choosing his strategy $(U_{\mathbf{N}\setminus i}, Z) \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}\setminus i} \times \mathcal{Z}$. We recall that

$$U_{\mathbf{N}\setminus i} = (U_1, ..., U_{i-1}, U_{i+1}, ..., U_N) \in \mathcal{U}_{\mathbf{N}\setminus i} = \prod_{j\in\mathbf{N}\setminus i} \mathcal{U}_j.$$

The universal saddle point $(U_i^g, U_{\mathbf{N}\setminus i}^{(i)}, Z^{(i)})$ of the game (3.7) is determined by the chain of equalities

$$\begin{aligned}
&\max_{U_i} \min_{x[\cdot]} \Phi_i(x[\vartheta, t_*, x_*, U_i]) = \min_{x[\cdot]} \Phi_i(x[\vartheta, t_*, x_*, U_i^g]) = \\
&= \max_{x[\cdot]} \Phi_i(x[\vartheta, t_*, x_*, U_{\mathbf{N}\setminus i}^{(i)}, Z^{(i)}]) = \\
&= \min_{(U_{\mathbf{N}\setminus i}, Z)} \max_{x[\cdot]} \Phi_i(x[\vartheta, t_*, x_*, U_{\mathbf{N}\setminus i}, Z]) = v_i(t_*, x_*),
\end{aligned}$$

which must be valid for any possible initial positions (t_*, x_*); $v_i(t_*, x_*)$ is a value of the game (3.7).

Lemma 3.4. For the game (3.7) let the conditions 3.1, 3.2 be satisfied and for any $s^{(i)} \in \mathbf{R}^n$ and $(t, x) \in M$ the following equalities be valid

$$\begin{aligned}
&\max_{u_i\in P_i} \min_{(u_{\mathbf{N}\setminus i}, z)\in P_{\mathbf{N}\setminus i}\times Q} [s^{(i)}]' f(t, x, u_i, u_{\mathbf{N}\setminus i}, z) = \\
&= \min_{(u_{\mathbf{N}\setminus i}, z)\in P_{\mathbf{N}\setminus i}\times Q} \max_{u_i\in P_i} [s^{(i)}]' f(t, x, u_i, u_{\mathbf{N}\setminus i}, z).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Then in the game (3.7) for any choice of the possible initial position (t_*, x_*) there exists a universal saddle point $(U_i^g, U_{\mathbf{N}\setminus i}^{(i)}, Z^{(i)})$ and hence there exists a value of the game $v_i(t_*, x_*)$.

Remark 3.1. For example, if in the system (3.1) the n-vector-function is

$$f(t, x, u_1, ..., u_N, z) = \sum_{i=1}^{3} f^{(i)}(t, x, u_i) + f^{(4)}(t, x, z).$$

then the conditions (3.6) and (3.8) $(i = 1, 2, 3)$ are satisfied.

Lemma 3.5 Let us assume that in the game (3.3) for the initial position (t_*, x_*) there exist the following maximins and maximin strategies

$$\begin{aligned}
&\max_{U} \min_{x[\cdot]} \sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x[\vartheta, t_*, x_*, U]) = \min_{x[\cdot]} \sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x[\vartheta, t_*, x_*, U^d]), \\
&\max_{U_i} \min_{x[\cdot]} \Phi_i(x[\vartheta, t_*, x_*, U_i]) = \min_{x[\cdot]} \Phi_i(x[\vartheta, t_*, t_*, U_i^g]), \ i \in \mathbf{N}.
\end{aligned}$$

Then

$$\max_{U} \min_{x[\cdot]} \sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x[\vartheta, t_*, x_*, U]) \geq \sum_{i=1}^{3} \max_{U_i} \min_{x[\cdot]} \Phi_i(x[\vartheta, t_*, x_*, U_i]).$$

Remark 3.2 Lemma 3.5 sets up the possibility for a choice of $\Phi_i^d[t]$ $(i = 1, 2, 3)$ satisfying the requirements 1^0 and 3^0 from the Definition 3.1 simultaneously.

On the basis of lemmas 3.1–3.5 the existence theorem for DAGS in the game (3.3) is established.

Theorem 3.1 [40]. For cooperative differential positional game (3.3) under uncertainty and with side payments let the conditions 3.1, 3.2 and 3.6 be satisfied and for all $i = 1, 2, 3$ the requirement (3.8) be valid.

Then in the game (3.3) for any choice of the possible position (t_*, x_*) there exists a dynamical appropriate guaranteed solution.

3.3. Differential linear-quadratic game

Let us consider a differential positional linear-quadratic two-person game with side payments and under uncertainty:

$$\Gamma(t_*) = \langle \{1, 2\}, \mathbf{\Sigma}, \{\mathcal{U}_i\}_{i=1,2}, \mathcal{Z}, \{J_i(U, Z, t_*, x_*)\}_{i=1,2} \rangle. \tag{3.9}$$

Here 1 and 2 are the players' numbers; the changing (in time) of the controlled system $\mathbf{\Sigma}$ is described by a vector linear differential equation

$$\dot{x} = A(t)x + u_1 + u_2 + z, \quad x[t_*] = x_*, \tag{3.10}$$

where vectors $x, u_i, z \in \mathbf{R}^n$; a starting moment of the game $t_* \geq 0$, a moment of the game finish $\vartheta > t_*$ and an initial position (t_*, x_*) are given; the elements of the $n \times n$-mattix $A(t)$ are continuous on $[0, \vartheta]$. The strategies U_i of the i-th player are associated with the functions $u_i(t, x) = Q_i(t)x$ $(U_i \div u_i(t, x))$ where the elements of the $n \times n$-matrices $Q_i(t)$ are assumed continuous on $[0, \vartheta]$ and are chosen by the i-th player. The set of strategies of the i-th player is

$$\mathcal{U}_i = \{U_i \div u_i(t, x) \mid u_i(t, x) = Q_i(t)x\} \;\; (i = 1, 2).$$

The set of uncertainties is

$$\mathcal{Z} = \{Z \div z(t, x) \mid z(t, x) = P(t)x\},$$

where the elements of the $n \times n$-matrices $P(t)$ are assumed continuous on $[0, \vartheta]$.

In the game (3.9) the players choose and use their specific strategies $U_i \in \mathcal{U}_i$, $U_i \div u_i(t, x) = Q_i^*(t)x$ $(i = 1, 2)$ simultaneously, namely they choose specific continuous $n \times n$-matrices $(Q_1^*(t), Q_2^*(t))$. As a result the situation $U = (U_1, U_2) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}$ is composed. Irrespective of players' actions some uncertainty $Z \in \mathcal{Z}$, $Z \div z(t, x) = P^*(t)x$, where the matrix $P^*(t)$ is continuous on $[0, \vartheta]$, is realized in the game (3.9). Then the continuous solution $x[t]$, $t \in [t_*, \vartheta]$ is constructed for homogeneous linear system with continuous on $[t_*, \vartheta]$ coefficients (see (3.10)):

$$\dot{x} = A(t)x + u_1(t, x) + u_2(t, x) + z(t, x) = [A + Q_1^*(t) + Q_2^*(t) + P^*(t)]x, \;\; x[t_*] = x_*.$$

By means of this solution the realization $u_i[t] = Q_i^*(t)x(t)$ of the strategies U_i $(i = 1, 2)$ chosen by the players and the realization $z[t] = P^*(t)x(t)$ of the uncertainty Z. On the continuous set of four $(x[t], u_1[t], u_2[t], z[t] \mid t_* \leq t \leq \vartheta)$ the payoff function of the i-th player is determined which is prescribed by the quadratic functional

$$J_i(U, Z, t_*, x_*) = x'[\vartheta]C_i x[\vartheta] + \int\limits_{t_*}^{\vartheta} \{\sum_{j=1}^{2} u_j'[t]D_{ij}u_j[t] + z'[t]L_i z[t]\}dt \;\; (i = 1, 2), \tag{3.11}$$

the value of which is the preliminary payoff of the i-th player. The constant $n \times n$-matrices C_i, D_{ij}, L_i are symmetric, the upper prime means transposition. We assume that the players' payoffs are measured in one and the same scale and during the game for each player there exists a possibility for transmission of a portion of his "current"payoff without loss to other player.

In terms of "meaning"the players objective point in the game (3.9) is to choose their strategies (simultaneously) and the way of current redistribution of their current payoff so that their resulting payoffs will be as large as possible. When choosing their strategies players should allow for emerging of any uncertainty $Z \in \mathcal{Z}$. Note that the notion presented below is a result of application of the Definition 2.2 to the game (3.9). In this definition we use a situation $U^d = (U_1^d, U_2^d) \in \mathcal{U}$, $U_i^d \div Q_i^d(t)x$ $(i = 1, 2)$, an uncertainty $Z^d \in \mathcal{Z}$, $Z^d \div P^d(t)x$, a solution $x^d[t]$, $t \in [t_*, \vartheta]$, of a system

$$\dot{x} = [A(t) + Q_1^d(t) + Q_2^d(t) + P^d(t)]x, \quad x(t_*) = x_*,$$

and a "current"game

$$\Gamma(t) = \langle \{1, 2\}, \mathbf{\Sigma}^t, \{\mathcal{U}_i\}_{i=1,2}, \mathcal{Z}, \{J_i(U, Z, t, x^d[t])\}_{i=1,2} \rangle.$$

In contrast to the game (3.9) in the game $\Gamma(t)$ the initial position (t_*, x_*) is replaced with $(t, x^d[t])$, where $t \in [t_*, \vartheta]$.

Definition 3.2. The ternary $(U^d, \Phi_1[t_*], \Phi_2[t_*]) \in \mathcal{U} \times \mathbf{R}^2$ is called a *dynamical appropriate guaranteed solution* (DAGS) of the game (3.9) with initial position $(t_*, x_*) \in [0, \vartheta) \times \mathbf{R}^n$ if there exists an uncertainty $Z^d \in \mathcal{Z}$ such that for all $t \in [t_*, \vartheta]$ for the mentioned above solution $x^d[t]$ of the system (3.10) the following conditions are satisfied

1^0 *"absence of degradation"of the summary current payoff*, namely

$$\max_U \min_Z \sum_{i=1}^2 J_i(U, Z, t, x^d[t]) = \min_Z \sum_{i=1}^2 J_i(U^d, Z, t, x^d[t]) = \sum_{i=1}^2 \Phi_i[t];$$

2^0 *"current"condition of analogue of the individual rationality*

$$\Phi_1[t] \geq \max_{U_1} \min_{(U_2,Z)} J_1(U_1, U_2, Z, t, x^d[t]) = \min_{(U_2,Z)} J_1(U_1^{(1)}, U_2, Z, t, x^d[t]) = J_1^g[t],$$

$$\Phi_2[t] \geq \max_{U_2} \min_{(U_1,Z)} J_2(U_1, U_2, Z, t, x^d[t]) = \min_{(U_1,Z)} J_2(U_1, U_2^{(2)}, Z, t, x^d[t]) = J_2^g[t];$$

3^0 *"current"condition of the collective rationality analogue*, namely

$$\min_Z \max_U \sum_{i=1}^2 J_i(U, Z, t, x^d[t]) = \max_U \sum_{i=1}^2 J_i(U, Z^d, t, x^d[t]) = \sum_{i=1}^2 \Phi_i[t].$$

The function $\Phi_i[t]$ is called a side payment to the i-th player $(i = 1, 2)$ at the time moment $t \in [t_*, \vartheta]$.

In the following assertions the constant $n \times n$-matrices

$$D_i = D_{1i} + D_{2i} \ \ (i = 1, 2), \quad L = L_1 + L_2, \quad C = C_1 + C_2. \tag{3.12}$$

will be used. The matrices C_i, D_{ij}, L_i $(i, j = 1, 2)$ were given in (3.11); $||x||$ is a Euclidean norm for a n-vector x; for symmetric constant $n \times n$-matrix $B > 0$ $(<, \geq, \leq)$ means a quadratic form $x'Bx$ being positive definite (negative, nonnegative, nonpositive), i.e. $x'Bx > 0$ $(<, \geq, \leq)$ for all $||x|| \neq 0$.

Assertion 3.1. Let in the linear-quadratic differential positional cooperative two-person game with side payments and under uncertainty (3.9)

1^0. $D_{ii} < 0$, $D_{ij} > 0$, $L_i > 0$, $C_i > 0$ $(i, j = 1, 2;\ i \neq j)$;

2^0. $D_i = D_{1i} + D_{2i} < 0$ $(i = 1, 2)$, $D_1^{-1} + D_2^{-1} + (L_1 + L_2)^{-1} \geq 0$;

3^0. $D_{i1}^{-1} + D_{i2}^{-1} + L_i^{-1} \geq 0$ $(i = 1, 2)$.

Then for any choice of an initial position $(t_*, x_*) \in [0, \vartheta) \times \mathbf{R}^n$, $||x_*|| \neq 0$, in the game (3.9) the dynamical appropriate guaranteed solution $(U^d, \Phi_1^d[t_*], \Phi_2^d[t_*])$ exists and is of the form

$$U^d \div (-D_1^{-1}\Theta(t)x, -D_2^{-1}\Theta(t)x), \quad \Phi_1^d[t_*] = \alpha v[t_*], \quad \Phi_2^d[t_*] = (1 - \alpha)v[t_*])$$

for any constant
$$\alpha \in \left[\frac{v_1[t_*]}{v[t_*]}, \frac{v[t_*]-v_2[t_*]}{v[t_*]}\right],$$
where $v[t_*] = x'_*\Theta(t_*)x_*$, $v_i[t_*] = x'_*\Theta_i(t_*)x_*$ $(i = 1, 2)$, symmetric matrices
$$\Theta(t) = [X^{-1}(t)]'\{C^{-1} + \int\limits_t^{\vartheta} X^{-1}(\tau)[D_1^{-1} + D_2^{-1} + L^{-1}][X^{-1}(\tau)]'d\tau\}^{-1}X^{-1}(t) > 0;$$
$$\Theta_i(t) = [X^{-1}(t)]'\{C_1^{-1} + \int\limits_t^{\vartheta} X^{-1}(\tau)[D_{i1}^{-1} + D_{i2}^{-1} + L_1^{-1}][X^{-1}(\tau)]'d\tau\}^{-1}X^{-1}(t)$$
$$(i{=}1,2),$$
here $X(t)$ is a solution for a system of matrix differential homogeneous equations with continuous on $[0, \vartheta]$ coefficients
$$\dot{X} = A(t)X, \quad X(\vartheta) = E_n,$$
E_n is an identity $n \times n$-matrix.

Assertion 3.2. Assume that in the game (3.9)
1^0. $D_{ii} < 0, \quad D_{ij} > 0, \quad L_i > 0 \quad (i, j = 1, 2;\ i \neq j), \quad C_1 > 0, \quad C_2 < 0, \quad C = C_1 + C_2 > 0$;
2^0. $D_i < 0$ $(i = 1, 2)$, $D_1^{-1} + D_2^{-1} + L^{-1} \geq 0$;
3^0. $D_{11}^{-1} + D_{12}^{-1} + L_1^{-1} \geq 0$;
4^0. $D_{21}^{-1} + D_{22}^{-1} + L_2^{-1} \leq 0$.
Then for any choice of an initial position $(t_*, x_*) \in [0, \vartheta) \times \mathbf{R}^n$, $||x_*|| \neq 0$, DAGS $(U^d, \Phi_1^d[t_*], \Phi_2^d[t_*])$ for the game (3.9) exists and is of the form
$$U^d \div (-D_1^{-1}\Theta(t)x, -D_2^{-1}\Theta(t)x),$$
where one can use any value $\Phi_1^d[t_*] \in [v_1[t_*], v[t_*]]$ and then $\Phi_2^d[t_*] = v[t_*] - \Phi_1[t_*]$, where $\Theta(t)$, $v[t_*]$, $v_i[t_*]$ $(i = 1, 2)$ are the same as in Assertion 3.1.

Assertion 3.3. Let in the game (3.9)
1^0. $D_{ii} < 0$, $D_{ij} > 0$, $L_i > 0$ $(i, j = 1, 2;\ i \neq j)$, $C_1 < 0$, $C_2 > 0$, $C > 0$;
2^0. $D_i < 0$ $(i = 1, 2)$, $D_1^{-1} + D_2^{-1} + L^{-1} \geq 0$;
3^0. $D_{11}^{-1} + D_{12}^{-1} + L_1^{-1} \leq 0$;
4^0. $D_{21}^{-1} + D_{22}^{-1} + L_2^{-1} \geq 0$.
Then for any choice of an initial position $(t_*, x_*) \in [0, \vartheta) \times \mathbf{R}^n$, $||x_*|| \neq 0$, DAGS $(U^d, \Phi_1^d[t_*], \Phi_2^d[t_*])$ for the game (3.9) exists and is of the form
$$U^d \div (-D_1^{-1}\Theta(t)x, -D_2^{-1}\Theta(t)x).$$
Note that one can use any value $\Phi_2^d[t_*] \in [v_2[t_*], v[t_*]]$ and then $\Phi_1^d[t_*] = v[t_*] - \Phi_2^d[t_*]$, where $\Theta(t)$, $v[t_*]$, $v_i[t_*]$ $(i = 1, 2)$ are the same as in Assertion 3.1.

Conclusion

Note that Theorem 3.1 is also valid for the game of $N > 3$ person. The results from Section 3.3 can be applied to the $N > 2$ person games. However the coefficient conditions (the analogues of Assertions 3.1-3.3) lead to the giant criteria. You can find the detailed proofs of assertions from this part of the review in the papers [40,41] of the first author of this review. Finally we note that the results presented here can be generalized both to the case of other solutions (C-kernel, Shapley vector, etc.) of cooperative game and to the other ways of description of dynamics (namely, the equations (3.1) and (3.10) can be replaced to either the multistage or with time delay or integral or integral-differential equation, etc.)

References

[1] Von Neumann J., Morgenstern O. *Theory games and economic behavior*. Princeton University Press, 1944.

[2] Ferro F. *Minimax theorem for vector-valued functions* // J. Optimiz. Theory and Appl. 1989. 60. P. 19–31.

[3] Ferro F. *Minimax theorem for vector–valued functions. Part 2.* // J. Optimiz. Theory and Appl. 1991. 68, N 1. P. 35–48.

[4] Ferro F. *Minimax type theorems for n-valued functions* // Annali di Matematica Pura ed Appl. 1982. 32. P. 113–130.

[5] Ferro F. *Minimax theorem for vector-valued functions. Part 2.* // Dip. Mat. Univ. Genova. 1989. 101. P. 1–17.

[6] Tanaka T. *Existence theorems for cone saddle-points of vector-valued functions in infinite-demensional spacer* // J. Optimiz. Theory and Appl. 1989. 62, N 1. P. 127–138.

[7] Tanaka T. *Some minimax problems of vector-valued function* // J. Optimiz. Theory and Appl. 1988. 9, N 3. P. 505–524.

[8] Tanaka T. *Two types of minimax theorems for vector-valued functions* // J. Optimiz. Theory and Appl. 1991. 68, N 2. P. 321–334.

[9] Tanaka T. *Generalized quasiconvexities cone saddle-points and minimax theorem for vector-valued functions* // J. Optimiz. Theory and Appl. 1994. 81, N 2. P. 355–377.

[10] Tanaka T. *Generalized semicontinuity and existence theorems for cone saddle-points* // Appl. Math. Opt. 1997. 36, N 3. P. 313–322.

[11] Li Z. F., Wang S. Y. *A type of minimax inequality for vector-valued mappings* // J. Math. Anal. and Appl. 1998. 227, N 1. P. 68–80.

[12] Chang S.S., Yuan G.X., Lee G.M. *Saddle-points and minimax theorems for vector-valued multifunctions of H-spaces* // Appl. Math. Lett. 1998. 11, N 3. P. 101–107.

[13] Raucci R. *Lower and upper limits for vector-valued sequences and relative semicontinuity for vector-valued functions* // B Unione Mat. Ital. 1996. 10B, N 3. P. 761–774.

[14] Chen G.Y., Li S.J. *Existence of solutions for a generalized vector quasivariational inequality* // J. Optimiz. Theory and Appl. 1996. 90, N 2. P. 321–334.

[15] Tan K.K., Yu J., Yuan X.Z. *Existence theorems for saddle-points of vector-valued maps* // J. Optimiz. Theory and Appl. 1996. 89, N 3. P. 731–747.

[16] Chang S.S., Lee G.M., Lee B.S. *Minimax inequalities for vector-valued mappings on W-spaces* // J. Math. Anal. and Apple. 1996. 198, N 2. P. 371–380.

[17] Shi D.S., Ling C. *Minimax theorems and cone saddle – points of uniformly sameorder vector-valued functions* // J. Optimiz. Theory and Appl. 1995. 84, N 3. P. 575–587.

[18] Dinh T.L., Vargas C. *A saddle – point theorem for set – valued maps* // Nonlinear Anal-Theor. 1992. 18, N 1. P. 1–7.

[19] Chan W.L., Lau W.T. *Vector saddle – points and distributed parameter differential games* // Comput. and Math. Appl. 1989. 18, N 1–3. P. 195–207.

[20] Chen G.Y. *A generalized section theorem and minimax inequality for vector – valued mapping* // Optimization. 1991. 22. P. 745–754.

[21] Blacwell O. *An analogue of the minimax theorem for vector – payoff* // Pacific. J. Math. 1956. 6. P. 1–8.

[22] Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. *The vector – valued maximin.* N. Y. etc.: Academic Press, 1994.

[23] Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. *Sufficient conditions in vector – valued maximin problems* // J. Optimiz. Theory and Appl. 1996. 90, N 3. P. 523–534.

[24] Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. *Optimization of guarantees in multicriteria control problems.* Tbilisy: Metsniereba, 1996 (in Russian).

[25] Zhukovskiy V.I., Molostvov V.S. *Multicriteria optimization of systems with incomplete information.* Moscow: International Research Institute for Management Sciences, 1990 (in Russian).

[26] Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. *Multicriteria control problems under uncertainty.* Tbilisy: Metsniereba, 1991 (in Russian).

[27] Zhukovskiy V.I. *Introduction to differential games under uncertainty.* Moscow: International Research Institute for Management Sciences, 1997 (in Russian).

[28] Zhukovskiy V.I., Molostvov V.S., Vaisman K.S. *Non-cooperative games under uncertainty* // International Year Book "Game Theory and Appl."1997. III. P.189–222.

[29] Zhukovskiy V.I. *Cooperative games under uncertainty and their applications.* Moscow: Editorial URSS, 1999.

[30] Borwein J. *Proper efficient points for maximization with respect to cones* // SIAM J. Control and Optimiz. 1977. 15, N 1. P. 57–63.

[31] Geoffrion A.M. *Proper efficiency and the theory of vector maximization* // J. Math. Anal. and Appl. 1968. 22, N 3. P. 618–630.

[32] Podynovskiy V.V., Nogin V.G. *Pareto-optimal solutions of multicriteria problems.* Moscow: Science, 1982 (in Russian).

[33] Belskikh J.A. *Guaranteed imputation in a game with informational discrimination of players.* //Control of Complicated Systems. Moscow: RCITLI. 1999. P. 10-14 (in Russian)

[34] Lusternik L.A., Sobolev V.I. *Foundations of functional analysis.* Moscow: Science, 1965 (in Russian).

[35] Krasovskiy N.N., Subbotin A.I. *Positional differential games.* Moscow: Science, 1974 (in Russian).

[36] Gorelik V.A., Larina O.V. *Cooperative games with interval characteristic function* // Modelling, optimization and decomposition of complicated dynamical processes. Moscow: CC RAS. 1993. P.75-91 (in Russian).

[37] Gorelik V.A., Larina O.V. *Method of covering for cooperative games with interval characteristic function.* // Modelling, optimization and decomposition of complicated dynamical processes. Moscow: CC RAS. 1996. P.51-60 (in Russian).

[38] Moore R.E. *Interval analysis.* N.Y.: Prentice – Hall, 1966.

[39] Krasovskiy N.N. *Control of dynamical system.* Moscow: Science, 1985 (in Russian)

[40] Zhukovskiy V.I. *Guaranteed imputation in differential game under uncertainty.* (in Russian, to apper)

[41] Zhukovskiy V.I. *Guaranteed solution for a cooperative differential game.* (in Russian, to apper)

Department of Mathematics and Mechanics, Russian Correspondence Institute of Textile and Light Industries, 38-2, Narodnogo Opolcheniya Str., Moscow, 123298, Russia, Phone: (095) 943-19-04

E-mail: molostv@isa.ac.ru

Содержание

Section 2. Evolution and Boundary Value Problems

Subsection 2.1. Differential-Operator and Evolution Equations

Subsection 2.2. Boundary Value Problems

Section 3. Optimization, Control, Games and Economic Behavior

Сборник научных трудов

Информационно-издательский отдел
Таврического национального университета им. В. И. Вернадского
95007, Симферополь, ул. Ялтинская, 4

Подписано к печати Формат 60×84/8 Бумага тип.
Объем ?? печ. л. Тираж 300 экз. Заказ