

Т.А.Сарданашвили

Современные методы теории поля

1 Геометрия
и классические
поля



Г.А.Сарданашвили
ГЕОМЕТРИЯ И КЛАССИЧЕСКИЕ ПОЛЯ

Современные методы теории поля. Т. 1

М.: УРСС, 1996. — 224 с.

Содержание

Введение	3
Глава 1. Дифференциальная геометрия	5
§1. Топологические пространства	5
§2. Многообразия	15
§3. Расслоенные многообразия	23
§4. Дифференциальные формы	35
§5. Многообразия струй	45
§6. Связности на расслоениях	52
§7. Расслоения со структурными группами	58
Глава 2. Геометрическая теория поля	68
§1. Лагранжев формализм	68
§2. Калибровочная теория	74
§3. Гамильтонов формализм	74
§4. Системы со связями	86
Калибровочные потенциалы (94). Электромагнитное поле (95). Поле Прока (96).	
Глава 3. Топологические характеристики в теории поля	99
§1. Гомотопические группы	99
§2. Топологические солитоны	106
Модель кинков (107). Модель синус-Гордона (107). Модель Нильсена — Олесена (108). Модель т 'Хуфта— Полякова (109).	
§3. Гомологии и когомологии	110
Гомологии комплексов (110). Сингулярные гомологии (113). Когомологии (118).	
§4. Эффект Ааронова — Бома	121
Вакуумные калибровочные поля (121). Относительные гомологии и когомологии (129).	
§5. Характеристические классы расслоений	132
Классификационная теорема (132). Классы Чженя (134). Классы Понтрягина (138).	
§6. Инстантоны	142
§7. Магнитные монополи	154
Электромагнитное поле в модели т 'Хуфта — Полякова (158). Магнитный заряд (159). Модель т 'Хуфта — Полякова (161). Уравнение Богомольного (163).	
Глава 4. Геометрии пространства-времени	166
§1. Гравитация	166
§2. Многомерная гравитация	175
§3. Супергравитация	183

Приложение А. Вариационное исчисление и законы сохранения	193
Пространство струй бесконечного порядка (194). Вариационное исчисление (196). Законы сохранения (199). Нетеровские законы сохранения (200) Законы сохранения энергии-импульса (202). Энергия-импульс калибровочных полей (203). Условие общей ковариантности (204). Энергия-импульс гравитационного поля (206).	
Приложение В. Когомологии со значениями в пучках	209
Библиография	214
Предметный указатель	216

Предметный указатель

<p>А</p> <p>Ааронова-Бома эффект 122</p> <p>алгебра банахова 187</p> <p>— Грассмана 185</p> <p>— Клиффорда 167</p> <p>— Ли левая 60</p> <p>— — правая 64</p> <p>алгебраическая структура 9</p> <p>антисолитон 107</p> <p>атлас ассоциированный 61</p> <p>— главного расслоения 59</p> <p>— голономный 25</p> <p>— многообразия 15</p> <p>— окружности стандартный 18</p> <p>— расслоения 24</p> <p>атласы эквивалентные многообразия 15</p> <p>— — расслоения 24</p> <p>аффинно-метрическая теория гравитации 206</p> <p>аффинное пространство (см. пространство аффинное)</p> <p>— расслоение (см. расслоение аффинное)</p> <p>Б</p> <p>база расслоения 14</p> <p>— топологии (см. топологии база)</p> <p>базис голономный 19, 30</p> <p>Бетти число 118</p> <p>бордизм 112</p> <p>В</p> <p>вакуум янг-миллсовский 155</p> <p>— хиггсовский 155</p>	<p>вакуумное поле 106</p> <p>— — калибровочное 121</p> <p>вариационная производная 198</p> <p>— формула 198</p> <p>вариация с фиксированной границей 196</p> <p>векторное поле 27</p> <p>— — вариационное 196</p> <p>— — вертикальное 42</p> <p>— — неособое 27</p> <p>— — полное 35</p> <p>— — проектируемое 42, 194</p> <p>— — фундаментальное 37, 78</p> <p>вертикальное касательное расслоение 32</p> <p>— кокасательное расслоение 34</p> <p>— расщепление (см. расщепление вертикальное)</p> <p>вложение 14, 20</p> <p>вторая аксиома счетности 7</p> <p>Г</p> <p>Гамильтона оператор (см. оператор Гамильтона)</p> <p>— уравнение (см. уравнение Гамильтона)</p> <p>— функция 86</p> <p>гамильтониан 82</p> <p>— ассоциированный с лагранжианом 87</p> <p>гамильтонова связность 82</p> <p>гамильтоново векторное поле 86</p> <p>гессиан 69</p> <p>голономии группа 124</p>
---	---

- — ограниченная 124
- гомеоморфизм 9
- гомологии относительные 130
- сингулярные 114, 116
- — проективных пространств 116
- — сфер 116
- гомологии группа 111
- гомоморфизм Гуревича 117
- предпучка 210
- гомотопическая группа 101
- — высшая 101
- — относительная 103
- — n -мерная 101
- эквивалентность 100
- — слабая 102
- гомотопически обратное отображение 100
- эквивалентные пространства 100
- гомотопический класс 100
- гомотопные отображения 99
- горизонтальная плотность 44
- проекция 195
- форма (см. форма горизонтальная)
- горизонтальное расслоение 33
- расщепление (см. расщепление горизонтальное)
- горизонтальный лифт векторного поля 73
- — — — канонический 204
- гравитационное поле 169
- градуированная суперкоммутативная алгебра 183
- градуированное векторное пространство 184
- градуированный Λ -модуль 185
- граница 111
- множества 8
- ориентированная 111
- относительная 129
- симплекса 114
- — сингулярного 114
- грассманова оболочка 185
- группа голономии связности (см. голономии группа)
- гомологии (см. гомологии группа)
- гомотопическая (см. гомотопическая группа)
- калибровочная (см. калибровочная группа)
- Клиффорда 168
- когомологии (см. когомологии группа)
- Ли 16
- — $SO(3)$ 17
- — $SU(2)$ 17
- — $U(1)$ 16
- Лоренца 168
- симметрии внутренних 75
- — точных 155, 157
- спинорная (см. спинорная группа)
- структурная (см. структурная группа расслоения)
- фундаментальная 101
- Д
- двойственность Пуанкаре 120
- де Рама 120
- действие группы свободное 29
- — транзитивное 11
- — эффективное 11
- диффеоморфизм 18
- локальный 20
- дифференциал внешний (см. дифференцирование внешнее)
- ковариантный (см. ковариантный дифференциал)
- отображения (см. касательный морфизм)
- $(F-N)$ 41
- дифференциальное уравнение 52
- дифференциальный оператор 52
- дифференцирование вертикальное 195
- внешнее 39
- горизонтальное 195
- Ли (см. производная Ли)
- З
- закон сохранения 73
- — ковариантный 203

— — сильный 193
— — слабый 193
замыкание множества 8
заряд магнитный 160
— топологический 146

И
изоморфизм расслоений 27
— — главных (см. калибровочный
изоморфизм)

иммерсия 20
инстантон 142
— БПШТ 150
интегральное сечение связности 57
инъекция 14

К
калибровка сингулярная 151
калибровочная группа 79
калибровочные преобразования 79
— условия 93
калибровочный изоморфизм 62
— потенциал 75
— принцип 74

Калуца-Клейна модель 175
— — многомерная 176

карта 15
касательное пространство 19
— расслоение 19, 25
касательный морфизм 19, 27
— — вертикальный 32

квантование магнитного заряда 161
— — потока 124
кватернионы 143
— вещественные 143
— мнимые 143

кинк 107
класс гомотопический (см.
гомотопический класс)
— Понтрягина (см. Понтрягина
класс)
— Годда 138
— характеристический (см.
характеристический класс)
— Чженя (см. Чженя класс)
— Чженя-Саймонса 147

— Штифеля—Уитни 142
— Эйлера (см. Эйлера класс)
— эквивалентности 10
классификационная теорема 133
классическое поле 68
— — вакуумное (см. вакуумное
поле)
Клейна бутылка 112
клетка 103
клеточная аппроксимация 103
клеточное пространство 103
— разбиение 103
ковариантная производная 53
ковариантный дифференциал 57
ковекторное поле 30
когомологии де Рама 119
— относительные 129
— с коэффициентами в пучке 212
когомологии группа 118
кограница 118
— относительная 130
кокасательное расслоение 30
коммутант группы 117
компактификация локально
компактного пространства 12
— прямой 13
комплекс де Рама 119
— коцепной 118
— цепной 111 компонента связности
10
конторсии тензор 171
конфигурационное пространство 69
— — гравитации 206
— — калибровочных потенциалов 75
— — материальных полей 77
— — поля Прока 96
координат система 16
координаты голономные 19
— канонические 81
— подчиненные вертикальному
расщеплению 33
— производных (см. скоростей)
— расслоенные 23
— — аффинные 29

- скоростей 46
- коцепь 118
- относительная 130
- с коэффициентами в пучке 211
- коцикл 118
- относительный 130
- кривизна связности 56
- припаивающей формы 57
- кручение 117
- связности 57, 172

- Л
- лагранжева плотность (см. лагранжиан)
 - связность 71
 - лагранжиан 68
 - материальных полей 77
 - невырожденный (см. регулярный)
 - полурегулярный 89
 - поля Прока 96
 - регулярный 69
 - Янга-Миллса 75

- Лагранжа функция 69
- лассо 126

- Лежандра многообразие 80
- отображение 80
- расслоение 80
- лепажев эквивалент лагранжиана 197
- лепажева форма 197
- лист Мебиуса 25

- М
- материальное поле 77
 - метрика (см. расстояния функция)
 - Минковского 168
 - на многообразии 31
 - послойная 30
 - псевдориманова 169
 - риманова 166 многообразие 15
 - Грассмана 17
 - Лежандра (см. Лежандра многообразие)
 - мировое 166
 - ориентированное 22
 - ориентируемое 22
 - полисимплектическое

- (см. полисимплектическое многообразие)
- пространственно-временное 173
- струй (см. струй многообразие)
- топологическое 16
- Штифеля 18
- множество замкнутое 7
- ограниченное 11
- открыто-замкнутое 8
- открытое 6
- плотное 8
- моморфизм расслоений 27
- монополь магнитный 162
- морфизм главных расслоений 62
- импульсный 83
- касательный (см. касательный морфизм)
- многообразий 18
- послойный 15, 27
- расслоений (см. послойный)
- топологических пространств (см. непрерывное отображение)
- тривиализации (см. тривиализации морфизм)
- мультиинстантон 152

- Н
- накрытие 105
 - напряженность калибровочного поля 66
 - неметричности тензор 171
 - непрерывное отображение 8
 - Нетер тождества 79, 201
 - нетеровский ток (см. ток симметрии)
 - нормализатор подгруппы 176
 - нормальный делитель (см. инвариантная подгруппа)
 - носитель 13
- О
- область 8
 - тривиализации (см. тривиализации область) ограниченное множество (см. множество ограниченное)

окрестностей фундаментальная система 5
окрестность 5
оператор Гамильтона 84
— Дирака 171
— Эйлера—Лагранжа 70
— — второго порядка 70
— — первого порядка 70
орбита группы 11
ориентация многообразия 22
отделимость Фреше 12
отношение 10
— эквивалентности 10
отображение Лежандра (см. Лежандра отображение)
— непрерывное (см. непрерывное отображение)
— открытое 23
— пары топологических пространств 103
— пространства с отмеченной точкой 101
отображения гомотопные (см. гомотопные отображения)

П
параллельный перенос 52, 53
погружение 20
подгруппа инвариантная 176
— циклическая 116
подмногообразие 20
— вложенное 20
подпространство топологического пространства 9
подрасслоение 27
полисимплектическая структура 81
— форма 81
полисимплектическое многообразие 81
полиэдр 113
полное семейство гамильтонианов 91
Понтрягина индекс 147
— класс 138
— — многообразия 140
— — полный 139

последовательность гомотопических групп пары 104
— — — расслоения 105
— групп гомологии пары 129
— — когомологий пары 130
— касательных расслоений 34
— кокасательных расслоений 34
— точная 34
почти комплексная структура 140
предел Прасада-Зоммерфельда 164
предпучок 209
— канонический 210
преобразование атласов расслоения 24
— нечетное 183
— общее ковариантное 205
— четное 183
принцип калибровочный (см. калибровочный принцип)
— расщепления 136
— эквивалентности 169
присоединенное представление 61
— проективное пространство 17
проекция 14, 21
— стереографическая (см. стереографическая проекция) произведение внешнее расслоений 29
— — форм 38
— прямое расслоений 28
— расслоений 29
— связностей (см. связностей произведение)
— тензорное абелевых групп 117
— топологических пространств 7
производная ковариантная (см. ковариантная производная)
— Ли 36
— — внешней формы 42
— — тангенциально-значной формы 42
— полная 72
Прока поле 96
пространство аффинное 29

- касательное (см. касательное пространство)
 - классифицирующее 133
 - клеточное (см. клеточное пространство)
 - конфигурационное (см. конфигурационное пространство)
 - метрическое 6
 - Минковского 167
 - проективное (см. проективное пространство)
 - расслоенное (см. расслоенное пространство)
 - с отмеченной точкой 101
 - связей 87
 - спинорное (см. спинорное пространство)
 - топологическое (см. топологическое пространство)
 - фазовое (см. фазовое пространство)
 - Пуанкаре лемма 119
 - путь накрывающий 53 пучок 209
 - алгебр Ли 37
 - внешних форм 38
 - постоянный 210
 - сечений 31
 - тангенциально-значных форм 41
 - тонкий 212
- Р**
- разбиение гамильтониана каноническое 84
 - единицы 13
 - клеточное (см. клеточное пространство)
 - множества 10
 - расслоение 24
 - ассоциированное 58, 61
 - аффинное 29
 - векторное 29
 - вертикальное касательное (см. вертикальное касательное расслоение)
 - — кокасательное (см. вертикальное кокасательное расслоение)
 - геометрическое 204
 - главное 59
 - — реперное 63, 167
 - горизонтальное (см. горизонтальное расслоение)
 - групповое 28, 61
 - дифференцируемое 24
 - дуальное 29
 - индуцированное 28
 - касательное (см. касательное расслоение)
 - кокасательное (см. кокасательное расслоение)
 - Лежандра (см. Лежандра расслоение)
 - на алгебры Клиффорда 168
 - на пространства Минковского 168
 - обобщенное аффинное 29
 - редуцированное 62
 - связностей 65
 - со структурной группой (см. структурная группа расслоения)
 - сопряженное 64
 - спинорное (см. спинорное расслоение)
 - струй (см. струй расслоение)
 - тензорное 30
 - универсальное 133
 - расслоений изоморфизм (см. изоморфизм расслоений)
 - мономорфизм (см. мономорфизм расслоений)
 - морфизм (см. морфизм послойный)
 - произведение (см. произведение прямое расслоений)
 - — внешнее (см. произведение внешнее расслоений)
 - — тензорное (см. произведение тензорное расслоений)
 - свертка (см. свертка расслоений)

— сумма Уитни (см. сумма Уитни векторных расслоений)
расслоения эквивалентные 25
расслоенное многообразие 21
— — локально тривиальное 23
— — тривиальное 23
— пространство 14
расстояния функция 6 расщепление вертикальное 33
— — для аффинного расслоения 33
— — для векторного расслоения 33
— горизонтальное 54
— — каноническое 49
— — проектируемого векторного поля 50
— конфигурационного пространства 92
— локальное расслоенного многообразия 21, 23
— фазового пространства 93
редукция структурной группы (см. расслоение редуцированное)
резольвента пучка 212
росток функции 209
— элемента предпучка 209

С
свертка внешних форм и векторных полей 39
— расслоений 30 связностей произведение 55
— — тензорное 56 связность 53-55
— аффинная 55
— гамильтонова (см. гамильтонова связность)
— дуальная 56
— лагранжева (см. лагранжева связность)
— линейная 55
— — общая 171
— лоренцевская 171
— на ассоциированном расслоении 67
— — главном расслоении 64
— — расслоении связностей 67

— плоская 126
сечение 14, 21
— глобальное 14, 26
— голономное 48
— индуцированное 28
— интегральное (см. интегральное сечение связности)
— критическое 196
— локальное 26
сигнатура многообразия 120
симплекс сингулярный 114
— стандартный 113
система отсчета 170
скобки Ли 37
— (F-N) 41
слабое равенство 73
слой 14, 23
— типичный 23
солитон 106
— нетопологический 107
— топологический 106
спинорная группа 168
спинорное пространство 167
— расслоение 168
спиноры дираковские 167
— майорановские 191
стабилизатор элемента 110
стебель пучка 209
степень отображения 22
стереографическая проекция 9
струй многообразии 46
— — второго порядка 51
— — голономное 51
— — повторное 50
— — полуголономное 50
— — k -порядка 51
— — — повторное 52
— — — полуголономное 52
— пространство бесконечного порядка 194
— расслоение 46
струйное продолжение морфизма 47
— — сечения 48
структурная группа расслоения 58

струя сечений расслоения 45
субмерсия 21
сужение расслоения 28
сумму Уитни векторных расслоений
29
супералгебра Ли 184
— Пуанкаре 186
супергравитация 190
супергруппа Ли 190
— $L(4, 4)$ 190
— $OSp(4, 2; 1)$ 190
суперметрика 191
супермногообразии 189
суперпотенциал 193
— Комара 206
— — обобщенный 208
суперпространство 188
суперрасслоение главное 190
— касательное 189
суперфункция 188
— супердифференцируемая 188
сфера 8
сюръекция 14
Т
тензор кривизны (см. кривизна
тензор)
— неметричности (см.
неметричности тензор)
— энергии-импульса (см. энергии-
импульса тензор) тензорное
поле 30
— расслоение (см. расслоение
тензорное) тензоры т'Хуфта 143
— антисамодуальные 143
— самодуальные 143
тетрадная форма 172
— функция 170
тетрадное поле 169
ток симметрии 73, 200
топологии база 7
— сравнимые 8
топологическая структура 5
топологическое пространство 5
— — векторное 9

— — вполне несвязное 10
— — дискретное 6
— — евклидово 7
— — компактное 12
— — локально евклидово 9
— — локально компактное 12
— — — — счетное в бесконечности
13
— — отделимое 11
— — паракомпактное 13
— — связное 8
— — стягиваемое 100
— — хаусдорфово (см. отделимое)
— — k -связное 102
топология индуцированная 9
— метрическая 6
— образа 9
— подчиненная структуре
многообразия 15
— сильнее 8
— сильнейшая 8
— слабее 8
— слабейшая 8
точка бесконечно удаленная 12
— прикосновения 8
— предельная 12
точная последовательность (см.
последовательность точная)
тривиализации морфизм 24, 25
— область 24
У
уравнение Богомольного 164
— Гамильтона 85
— — алгебраическое 85
— самодуальности 151
— Эйлера-Лагранжа алгебраическое
70, 71
— — второго порядка 70, 71
— — первого порядка 70, 71
Ф
фазовое пространство 80
— — калибровочных потенциалов 94
— — поля Прока 96

— — электромагнитных потенциалов 95
фактор по отношению (см. фактор-множество)
фактор-группа 11
фактор-множество 11
фактор-пространство 11
— левое 11
— правое 11
— топологическое 11
фермионное поле 169, 170
флаксон 122
форма векторнозначная 35
— вертикально-значная
 горизонтальная 43
— внешняя 35, 37
— — горизонтальная 43
— — замкнутая 39
— — точная 39
— — индуцированная 40
— горизонтальная 42
— Картана 197
— Киллинга 76
— контактная 195
— лепажева (см. лепажева форма)
— Лиувилля 43, 85
— — обобщенная 81
— полисимплектическая (см. полисимплектическая форма)
— припаивающая 43
— — каноническая 44
— производящая оператора Эйлера-Лагранжа 70
— Пуанкаре-Картана 69
— пфаффова (см. ковекторное поле)
— связности 65
— — локальная 65
— симплектическая 43, 85
— тангенциально-значная 35, 40
— — вертикальная 42
— — горизонтальная 43
— — каноническая 41
— — проектируемая 43

— характеристическая (см. характеристическая форма)
— Чженя (см. Чженя форма)
— Эйлера (см. Эйлера форма)
функция Гамильтона (см. Гамильтона функция)
— Лагранжа (см. Лагранжа функция)
— перехода 15, 24, 25
— эквивариантная 62
Х
характеристическая форма 135
характеристический класс 134
— полином 134
хиггсовское поле 63, 154
Ц
цепь 111
— относительная 129
— сингулярная 114
цикл 111
— относительный 129
Ч
четность элемента 184
Чженя класс 136
—: — вещественного многообразия 140
— форма 135
— — полная 135
— характер 138
— число 137
число Бетти (см. Бетти число)
— Чженя (см. Чженя число)
Ш
шар замкнутый 8
— открытый 7
Э
Эйлера класс 141
— форма 142
эйлерова характеристика 118
— — многообразия 120
эквивалентности класс (см. класс эквивалентности)
— отношение (см. отношение эквивалентности)

эквивалентность гомотопическая (см.
гомотопическая
эквивалентность)
эквивалентные атласы (см.
атласы эквивалентные)
— расслоения (см. расслоения
эквивалентные)

электромагнитное поле 76
энергии-импульса тензор 73, 202
— — метрический 203
Я
ядро послыйного морфизма 34
Якоби матрица 20
якобиан 22

Введение

Имеется обширная литература по дифференциальной геометрии и ее применению к теории поля. Главная трудность при освещении этой темы состоит в том, чтобы отобрать только тот математический материал, который строго необходим для физических приложений, и в то же время сохранить какую-то последовательность изложения, чтобы не превратить книгу в подобие математического глоссария. Кроме того приходится начинать изложение математического аппарата с самых основ, чтобы сделать его доступным неподготовленному читателю, и доводить его до весьма абстрактных конструкций, используемых в современной теории поля.

Геометрические методы сейчас широко применяются как в классических, так и в квантовых полевых моделях. В этой книге мы ограничимся только классической теорией поля, математический аппарат которой, в отличие от квантовой теории поля, можно считать вполне разработанным. При этом основной акцент будет сделан не на самих полевых моделях, быстро сменяющих одна другую, а на тех математических методах, на которых большинство этих моделей базируется.

Применение геометрических методов в теории поля основывается на следующем положении.

Все классические поля представляются как сечения некоторых дифференцируемых расслоений

$$\pi : Y \rightarrow X,$$

где база X играет роль пространственно-временного многообразия или некоторого пространства параметров, а прообразу $\pi^{-1}(x)$ всякой точки $x \in X$ придается смысл пространства скоростей, импульсов или некоторого внутреннего пространства. При этом, даже если рассматриваются локальные конструкции (на некоторой области пространства X), все объекты строятся глобально хорошо определенными. В первую очередь это вызывает замену операторов частных производных ∂_μ на операторы ковариантных производных

$$D_\mu = \partial_\mu - \Gamma_\mu,$$

где Γ — это некоторая связность на расслоении $Y \rightarrow X$. **Связности** — это тот **новый важнейший физический объект, к которому приводит геометрическая формулировка теории поля**. Например, в калибровочных моделях фундаментальных взаимодействий это — связности на главных расслоениях, интерпретируемые как калибровочные поля — переносчики взаимодействий, характеризующихся той или иной группой симметрий.

Понятие связности является ключевым в геометрическом подходе к теории поля. В большинстве учебников по дифференциальной геометрии ограничиваются рассмотрением связностей на главных расслоениях. Этого однако недостаточно для описания

динамики полей, построения лагранжева и гамильтонова формализмов. В книге мы исходим из общего понятия связностей на дифференцируемых расслоениях, описывая их в терминах тангенциально-значных дифференциальных форм и многообразий струй.

Многообразия струй — еще один математический объект, которому в данной книге, в отличие от большинства стандартных учебников по дифференциальной геометрии, уделяется много внимания. Многообразия струй — это пространства, элементами которых являются классы эквивалентности полей, отождествляемых по первым двум или более членам их разложения в ряд Тейлора. Теория дифференциальных операторов, как известно, формулируется именно на языке многообразий струй. Соответственно лагранжевы и гамильтоновы формализмы в теории поля адекватно описываются в тех же самых терминах.

Важно, что и связности, и многие объекты на многообразиях струй выражаются через тангенциально-значные дифференциальные формы, которыми легко оперировать. Эти формы составляют основу применяемой в книге математической техники.

Помимо связностей, геометрический подход к теории поля вводит в рассмотрение еще один совершенно новый класс физических величин — так называемые *топологические числа и заряды*, описывающие глобальные свойства полевых конфигураций. Они представляют собой различные гомотопические и тополого-алгебраические характеристики многообразий и расслоений. Примерами таких характеристик являются элементы гомотопических групп, числа Чженя, Понтрягина, эйлерова характеристика и др. Они широко применяются в солитонных, монополярных, инстантонных и других нелинейных моделях с различными топологиями. Причем, такие модели не обязательно предполагают топологическую нетривиальность самого пространства-времени. Например, если поля на пространственной бесконечности имеют по всем направлениям одну и ту же асимптотику, их можно рассматривать и классифицировать как поля на сфере.

Настоящая книга далека от того, чтобы пытаться охватить все геометрические конструкции, которые ныне используются в теории поля. Само их перечисление потребовало бы многостраничных пояснений. Мы оставляем на будущее и геометрические методы в квантовой теории поля, аппарат которой нуждается в отдельном тщательном с математической точки зрения изложении.

Дифференциальная геометрия

Мы предполагаем, что читатель знаком с основами теории множеств, теории векторных пространств и теории групп Ли.

В книге используются стандартные обозначения \oplus , \otimes , \vee and \wedge для прямой суммы, тензорного произведения, симметризованного тензорного произведения и антисимметризованного тензорного (внешнего) произведения соответственно. Значком \lrcorner обозначается операция свертки дуальных величин — векторов и форм.

Символы ∂_B^A применяются для упрощенной записи операторов частных производных по координатам с индексами $\begin{smallmatrix} B \\ A \end{smallmatrix}$.

Композиция отображений обозначается значком \circ .

§ 1. Топологические пространства

Топологическая структура, задаваемая на множестве, определяет отношение близости между элементами множества. Она позволяет придать выражению “такое-то свойство имеет место для всех точек, достаточно близких к элементу x ” точный смысл. Это означает, что множество точек, обладающих этим свойством, образует некоторую окрестность элемента x в данной топологии.

Говорят, что множество X наделено *топологической структурой* (т. е. является *топологическим пространством*), если каждому его элементу x тем или иным способом отнесено семейство подмножеств из X , называемых *окрестностями* этого элемента. Обозначим это семейство $B(x)$. Оно должно удовлетворять следующим весьма естественным условиям.

- (i) Элемент x принадлежит каждой своей окрестности.
- (ii) Всякое подмножество X , содержащее какую-либо окрестность элемента x , также является окрестностью x .
- (iii) Пересечение конечного числа окрестностей тоже является окрестностью.
- (iv) Для каждой окрестности V из $B(x)$ всегда существует “меньшая” окрестность $W \subset V$, такая что $V \in B(y)$ для каждого элемента $y \in W$, т. е. V является окрестностью всякого элемента из множества W .

Из условия (ii) следует, что множество окрестностей $B(x)$ можно определить, задавая *фундаментальную систему окрестностей* элемента x , т. е. такое подмножество $\bar{B}(x) \subset B(x)$, что всякая окрестность элемента x содержит некоторую окрестность из $\bar{B}(x)$.

ПРИМЕР 1.1.1. Топологическое пространство называется *дискретным топологическим пространством*, если фундаментальная система окрестностей всякого его элемента сводится к самому этому элементу. Это означает, что всякое множество, содержащее данный элемент, является его окрестностью в дискретной топологии. \square

ПРИМЕР 1.1.2. Рассмотрим случай, когда отношение близости между элементами множества можно выразить числом — расстоянием между элементами. Множество X называется *метрическим пространством*, если для каждой пары его элементов x и x' задана *функция расстояния* (метрика) $\rho(x, x')$. Она определяется как неотрицательная вещественная функция на декартовом (прямом) произведении $X \times X$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\begin{aligned}\rho(x, x) &= 0, \\ \rho(x, x') &= \rho(x', x), \\ \rho(x, x') + \rho(x', x'') &\geq \rho(x, x'').\end{aligned}$$

Примером метрического пространства служит поле действительных чисел \mathbb{R} с функцией расстояния

$$\rho(x, x') = |x - x'|. \quad (1.1)$$

Определим на метрическом пространстве топологию, выбрав в качестве фундаментальной системы окрестностей каждого его элемента x множества

$$D_\varepsilon = \{y : \rho(x, y) < \varepsilon\} \quad (1.2)$$

для всех $\varepsilon > 0$. Такая топология называется *метрической топологией*. Например, фундаментальная система окрестностей всякого элемента x поля действительных чисел \mathbb{R} в метрической топологии образована интервалами

$$D_\varepsilon = \{y : |y - x| < \varepsilon\} =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\quad (1.3)$$

для всех $\varepsilon > 0$. Это топология 1-мерного евклидова топологического пространства \mathbb{R}^1 . В дальнейшем мы предполагаем, что \mathbb{R} , если оно рассматривается как топологическое пространство, наделено именно этой топологией. \square

Топологию на множестве можно вводить несколькими эквивалентными способами, например, задавая семейство его открытых подмножеств.

Подмножество топологического пространства называется *открытым*, если оно является окрестностью любого своего элемента. Так, в дискретной топологии сам элемент уже оказывается открытым подмножеством. В пространстве \mathbb{R} открытыми являются всевозможные интервалы (1.3), тогда как отрезок, например, не открытое множество, поскольку не является окрестностью своей граничной точки.

Множество открытых подмножеств топологического пространства обладает следующими свойствами.

- (i) Всякое объединение открытых подмножеств есть открытое подмножество.
- (ii) Пересечение конечного числа открытых подмножеств есть открытое подмножество.
- (iii) Пустое множество \emptyset и само множество X являются открытыми.

Подчеркнем, что свойство (ii) открытых множеств не распространяется на бесконечное пересечение открытых множеств. Например, пересечение всех интервалов $D_\varepsilon(x)$ (1.3) из Примера 1.1.2 сводится к самому элементу x , который не является открытым подмножеством в метрической топологии на \mathbb{R} .

Задание множества открытых подмножеств, удовлетворяющее приведенным выше условиям, вводит топологию на множестве X . В этом случае окрестность элемента $x \in X$ характеризуется как множество, которое содержит какое-либо открытое подмножество, содержащее x .

ПРИМЕР 1.1.3. Пусть X и X' — топологические пространства. Их *произведение* $X \times X'$ определяется как декартово произведение множеств X и X' , наделенное топологией, открытыми подмножествами в которой являются множества вида $U \times U'$, где U и U' — всевозможные открытые подмножества X и X' . \square

Свойство (i) открытых множеств позволяет определить все множество открытых подмножеств, задав *базу топологии*, т. е. такое семейство открытых подмножеств, что всякое открытое подмножество пространства X является объединением множеств из этого семейства.

Например, базу дискретной топологии из Примера 1.1.1 составляют все элементы пространства X . Базу метрической топологии — множества вида $D_\varepsilon(x)$ (1.2) для всех $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Они именуется *открытыми шарами* радиуса ε .

ПРИМЕР 1.1.4. *Евклидовым топологическим пространством* размерности n называется n -кратное произведение

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}.$$

Базу топологии в нем образуют n -мерные открытые шары

$$D_\varepsilon^n(x) = \left\{ y : \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2 \right)^{1/2} < \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Это метрическая топология, отвечающая функции расстояния $\|x - y\|$. \square

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *второй аксиоме счетности*, если оно обладает счетной базой. Например, евклидово топологическое пространство обладает счетной базой. Ее можно составить из открытых шаров радиусами $1/n$ ($n = 1, 2, \dots$) с центрами в точках с рациональными координатами.

Другой эквивалентный способ введения топологии на множестве X — это задание семейства его *замкнутых подмножеств*, которое удовлетворяет следующим условиям:

- (i) всякое пересечение замкнутых подмножеств — замкнутое подмножество;
- (ii) объединение конечного числа замкнутых подмножеств — замкнутое подмножество;
- (iii) пустое множество и само множество X являются замкнутыми.

В топологическом пространстве X замкнутые подмножества являются дополнениями $X \setminus U$ открытых подмножеств.

Примером замкнутых подмножеств в \mathbb{R} служат отрезки $[a, b]$, как дополнения открытых множеств

$$]-\infty, a[\cup]b, +\infty[.$$

В общем случае метрической топологии — это *замкнутые шары*

$$D_\varepsilon(x) = \{y : \rho(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

В дальнейшем под *шарами*, если специально не оговорено, будут подразумеваться именно замкнутые шары.

Пусть A — подмножество топологического пространства X . Минимальное замкнутое множество, содержащее A , называется его *замыканием* \overline{A} . Оно состоит из всех *точек прикосновения множества A* , т. е. точек, все окрестности которых пересекают A . *Границей множества A* именуют множество ∂A , состоящее из точек, которые являются точками прикосновения как A , так и его дополнения $X \setminus A$.

Например, замыканием интервала $]a, b[$ в \mathbb{R} является отрезок $[a, b]$, а его границей — множество из двух точек $\{a\} \cup \{b\}$. В метрическом пространстве границей открытого шара $D_\varepsilon(x)$ является *сфера*

$$S_\varepsilon(x) = \{y : \rho(x, y) = \varepsilon\}.$$

Говорят, что подмножество топологического пространство *плотно*, если его замыкание совпадает со всем пространством. Например, подмножество рациональных чисел \mathbb{Q} плотно в \mathbb{R} .

Подмножество топологического пространства может быть одновременно и открытым, и замкнутым. Топологическое пространство (или его подмножество), которое не содержит таких *открыто-замкнутых подмножеств*, называется *связным*, т. е. оно не является объединением двух и более непустых непересекающихся открытых или замкнутых множеств.

Примером несвязного пространства может служить дискретное пространство, если оно состоит более чем из одного элемента. Всякое его подмножество является открыто-замкнутым. Связно евклидово топологическое пространство. Связное открытое подмножество называется *областью*.

Одно и то же множество может быть наделено различными топологическими структурами, и это будут разные топологические пространства. Например, на множестве действительных чисел \mathbb{R} могут быть введены дискретная топология, топология евклидова пространства, или топология, в которой единственным непустым открытым множеством является само множество \mathbb{R} .

Пусть на множестве заданы две топологические структуры такие, что всякое подмножество, открытое в первой топологии, является открытым и во второй. Тогда эти топологии называются *сравнимыми топологиями* и говорят, что первая топология *слабее* второй. Грубо говоря, чем больше число открытых подмножеств, тем топология *сильнее*. Не всякие две топологические структуры на множестве сравнимы, но среди всех топологий на множестве всегда есть *слабейшая топология* и *сильнейшая топология*. Первая — это топология, в которой единственным непустым открытым множеством является само это множество, а вторая — дискретная топология.

Определим теперь морфизмы топологических пространств. Это отображения множеств, которые согласуются с их топологическими структурами. Таковыми являются *непрерывные отображения*.

Отображение f топологического пространства X в топологическое пространство X' называется *непрерывным*, если для любой окрестности V' элемента $x' \in X'$ и всякого его прообраза $x \in f^{-1}(x')$ существует окрестность V элемента x такая, что $f(V) \subset V'$. Легко убедиться, что композиция $f \circ f'$ непрерывных отображений f и f' тоже является непрерывным отображением.

ПРИМЕР 1.1.5. Всякое отображение дискретного пространства в любое топологическое пространство является непрерывным, поскольку в дискретной топологии всякий прообраз элемента $f(x)$ сам уже является окрестностью. \square

Отметим, что при непрерывном отображении $X \rightarrow X'$ прообраз открытого подмножества из X' является открытым в X , но образ открытого подмножества из X может не быть открытым в X' .

ПРИМЕР 1.1.6. Пусть A — подмножество топологического пространства X . *Индукцированной топологией* на A называется топология, открытыми подмножествами в которой являются всевозможные пересечения A с открытыми подмножествами из X . Подмножество A , наделенное такой топологией, называется *подпространством* пространства X . Топология подпространства является наиболее слабой топологией на A , при которой естественное вложение $A \hookrightarrow X$ непрерывно. Например, пусть A — прямая линия в плоскости \mathbb{R}^2 . Тогда топология, индуцируемая на A из \mathbb{R}^2 , совпадает с евклидовой топологией на прямой \mathbb{R} . Пусть f — непрерывное отображение топологического пространства X в топологическое пространство X' . Его образ $f(X)$ в X' может быть наделен так называемой *топологией образа*, когда открытыми подмножествами U в $f(X)$ выбираются такие и только такие подмножества, прообразы которых $f^{-1}(U)$ открыты в X . В общем случае топология образа сильнее индуцированной топологии на $f(X) \subset X'$ и $f(X)$ не является подпространством X' . \square

Гомеоморфизмом топологического пространства X на топологическое пространство X' называется непрерывное взаимно однозначное отображение f пространства X на пространство X' такое, что обратное отображение f^{-1} тоже непрерывно. Гомеоморфизм обеспечивает эквивалентность топологических структур на X и X' .

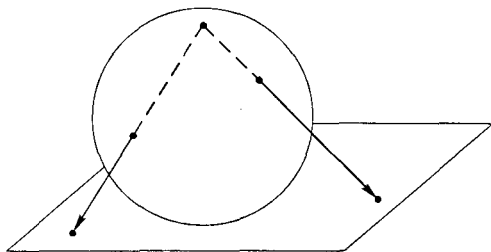


Рис. 1

ПРИМЕР 1.1.7. *Стереографическая проекция* (рис. 1) устанавливает гомеоморфизм n -мерной сферы S^n

без точки и n -мерного евклидова пространства \mathbb{R}^n . Открытый шар в евклидовом пространстве гомеоморфен самому этому пространству. \square

ПРИМЕР 1.1.8. Топологическое пространство называется *локально евклидовым пространством* размерности n , если всякая его точка обладает окрестностью, гомеоморфной евклидовому пространству \mathbb{R}^n . Например, окружность S^1 является локально евклидовым пространством размерности 1. Пространство-время Минковского как топологическое пространство представляет собой 4-мерное евклидово топологическое пространство, что и дает основание ограничиваться в физических моделях евклидовыми и локально евклидовыми пространствами. \square

Пусть множество X снабжено некоторой *алгебраической структурой*, характеризуемой теми или иными морфизмами $X \times X \rightarrow X$, $X \rightarrow X$ или $\mathbb{R} \times X \rightarrow X$. Говорят, что топология на множестве X согласуется с его алгебраической структурой, если все эти морфизмы непрерывны в этой топологии.

ПРИМЕР 1.1.9. Пусть X — векторное пространство. Будучи наделенным некоторой топологической структурой, оно называется *топологическим векторным пространством*, если операции сложения и умножения на число в этой топологии непрерывны. Например, n -мерное векторное пространство в топологии n -мерного евклидова пространства является топологическим векторным пространством. Отметим, что в топологическом векторном пространстве операции сложения с фиксированным вектором и умножения на фиксированное число являются его гомеоморфизмами. Отсюда, в частности, следует, что топологическая структура в окрестности любого элемента определяется топологией окрестности 0 векторного топологического пространства. \square

ПРИМЕР 1.1.10. В калибровочной теории фундаментальных взаимодействий в качестве групп симметрий фигурируют, как правило, группы Ли, которые являются частным случаем топологических групп. Группа G называется *топологической группой*, если ее групповое пространство наделено топологией, в которой операции произведения $(g, g') \mapsto gg'$ и перехода к обратному элементу $g \mapsto g^{-1}$ являются непрерывными. Более того, умножение на фиксированный элемент группы и переход к обратному являются гомеоморфизмами топологической группы. Тем самым топологическая структура в окрестности любого элемента топологической группы определяется топологией окрестности ее единицы. \square

Введем теперь важные понятия отношения эквивалентности и фактор-пространства.

Отношением E на множестве X называется некоторое подмножество $E \subset X \times X$. Говорят, что элемент $a \in X$ находится в отношении E к элементу $b \in X$ (обычно пишут aEb), если $(a, b) \in E$.

Отношение E именуется *отношением эквивалентности*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- всякий элемент эквивалентен сам себе;
- если элемент a эквивалентен b , то b эквивалентен a ;
- если элемент a эквивалентен b и b эквивалентен c , то элемент a эквивалентен c .

Например, отношение параллельности прямых на плоскости есть отношение эквивалентности.

Классом эквивалентности отношения эквивалентности E на множестве X называется такое подмножество $X_E \subset X$, что aEb для всех $a, b \in X_E$ и отношение E не имеет место ни для каких $a \in X_E$ и $b \in X \setminus X_E$. В силу этого определения классы эквивалентности $\{X_E\}$ образуют разбиение множества X , т. е.

$$X = \bigcup X_E, \quad X_E \cap X_{E'} = \emptyset.$$

ПРИМЕР 1.1.11. Принадлежность двух элементов топологического пространства какому-либо одному связному подмножеству есть отношение эквивалентности. Классы эквивалентности, на которые это отношение разбивает пространство, являются его максимальными связными подмножествами, именуемыми *компонентами связности* топологического пространства. Например, топологическое пространство называется *вполне несвязным*, если его компонентами связности являются лишь его элементы. Дискретное топологическое пространство очевидно вполне несвязно. Но вполне несвязное пространство не обязательно дискретно. Например, множество рациональных чисел, наделенное метрической топологией, задаваемой функцией расстояния (1.1), вполне несвязно. \square

ПРИМЕР 1.1.12. Пусть топологическая группа G из Примера 1.1.10 действует слева непрерывно и *эффективно* в топологическом пространстве представления V . Это означает, что отображение

$$G \times V \ni (g, v) \mapsto gv \in V$$

непрерывно и, если $gv = v$ для всех $v \in V$, то $g = \hat{1}$ — единица группы. Заддим на V отношение E такое, что vEv' , если $v' = gv$ для некоторого элемента $g \in G$. Это отношение эквивалентности. Его классы эквивалентности называются *орбитами группы G в V* . Например, орбитами группы $SO(2)$ вращений плоскости являются окружности с центром в точке вращения. На каждой орбите группа G действует *транзитивно*, т. е. по определению для любых двух элементов v и v' орбиты имеется элемент группы $g \in G$ такой, что $v' = gv$. \square

Множество всех классов отношения эквивалентности E на множестве X называется *фактором множества X по отношению E* , или *фактор-множеством X/E* .

Например, фактор множества прямых на плоскости по отношению параллельности — это окружность с отождествленными противоположными точками, т. е. проективное пространство $\mathbb{R}P^1$.

ПРИМЕР 1.1.13. Пусть H — подгруппа группы G . Рассмотрим на G отношение эквивалентности E такое, что gEg' , если $g' = hg$ (соотв. $g' = gh$) для некоторого элемента $h \in H$. Фактор группы G по этому отношению эквивалентности называется *левым* (соотв. *правым*) *фактор-пространством G/H* . Если H — инвариантная подгруппа G , т. е. $g^{-1}hg \in H$ для всех $g \in G$, $h \in H$, то *левое* и *правое фактор-пространства* совпадают и G/H снабжено структурой группы, называемой *фактор-группой*. \square

Пусть теперь X — топологическое пространство, наделенное некоторым отношением эквивалентности E , и

$$\pi : X \rightarrow X/E$$

— каноническое отображение, сопоставляющее каждому элементу из X его класс эквивалентности. Фактор-множество X/E становится *топологическим фактор-пространством*, если его снабдить топологией образа из Примера 1.1.6. Это наиболее сильная топология на X/E , при которой каноническая проекция $X \rightarrow X/E$ непрерывна.

В теории поля имеют дело главным образом с отделимыми локально компактными паракомпактными топологическими пространствами.

Топологическое пространство, в котором для любых двух различных элементов x и x' существуют не пересекающиеся между собой окрестность элемента x и окрестность элемента x' , называется *отделимым (хаусдорфовым) пространством*.

Например, в дискретном пространстве такими непересекающимися окрестностями являются сами эти элементы, и дискретное пространство отделимо. В частности, можно показать, что дискретная топология на конечном множестве является единственной отделимой топологией.

Евклидово пространство, как и всякое метрическое пространство, отделимо, поскольку любые его две точки можно окружить открытыми шарами, достаточно малого радиуса, чтобы они не пересекались. Более того, евклидова топология является единственной отделимой топологией, согласующейся со структурой конечномерного векторного пространства.

Всякое подпространство отделимого пространства отделимо, а всякий его элемент является замкнутым множеством.

Примером неотделимой топологии может служить слабейшая топология на множестве. Локально евклидово пространство не обязательно отделимо.

ПРИМЕР 1.1.14. Рассмотрим топологическое пространство X , получаемое склеиванием двух вещественных прямых \mathbb{R}_1 и \mathbb{R}_2 по точкам со строго положительными координатами $r_1 = r_2 > 0$. Базу его топологии составляют открытые подмножества прямых \mathbb{R}_1 и \mathbb{R}_2 при их естественном вложении в X . Легко видеть, что это локально евклидово пространство, но его элементы с координатами $r_1 = 0$ и $r_2 = 0$ не являются отделимыми, так как они не имеют окрестностей, которые бы между собой не пересекались. Построенная склейка удовлетворяет однако так называемому условию *отделимости Фреше*: для любых двух различных элементов пространства x и x' существует окрестность элемента x , не содержащая x' . \square

Отделимое топологическое пространство, всякое покрытие которого открытыми подмножествами

$$X = \bigcup U_\xi$$

содержит конечное покрытие, называется *компактным пространством*.

Рассмотрим, например, покрытие дискретного пространства открытыми множествами, каждое из которых состоит из одной точки. Если число точек пространства более чем конечно, то это покрытие не содержит конечного подпокрытия и дискретное пространство некомпактно.

Подчеркнем, что и некомпактное пространство допускает покрытие конечным числом открытых множеств, но не всякое его покрытие содержит конечное подпокрытие.

Приведенное определение компактного пространства возможно недостаточно наглядно. Некоторое представление о компактных пространствах могут дать следующие факты.

- В компактном пространстве любая бесконечная последовательность имеет *предельную точку*, т. е. точку прикосновения, всякая окрестность которой содержит элементы последовательности. В компактном пространстве всякое замкнутое подпространство компактно, а в отделимом пространстве всякое компактное подпространство замкнуто.
- Подпространство метрического (в частности, евклидова) пространства компактно в том и только том случае, когда оно *ограничено* (т. е. принадлежит некоторому шару конечного радиуса) и замкнуто.

Само евклидово топологическое пространство не является компактным. Оно локально компактно.

Отделимое топологическое пространство называется *локально компактным*, если всякий его элемент имеет компактную окрестность.

Например, для элементов метрического пространства такими окрестностями являются шары и оно локально компактно. Дискретное пространство локально компактно, поскольку компактной окрестностью всякого его элемента служит он сам.

Локально компактное пространство всегда можно компактифицировать добавлением так называемой бесконечно удаленной точки.

Для любого локально компактного пространства X существует компактное пространство X' и гомеоморфизм X на дополнение к некоторой точке a в X' . Такое пространство X' называется *компактификацией* локально компактного пространства X . Оно строится как объединение пространства X и множества из одного элемента $\{a\}$. Топология на X' определяется выбором в качестве открытых множеств в X' всех открытых множеств из X и всевозможных множеств вида $(X \setminus K) \cup \{a\}$, где K — компактные подмножества X . Говорят, что X' получается из X присоединением *бесконечно удаленной точки* a .

ПРИМЕР 1.1.15. *Компактификация прямой* \mathbb{R} гомеоморфна окружности S^1 . Действительно, введем на \mathbb{R} декартову координату x , а на S^1 циклическую координату $-\pi \leq \alpha \leq \pi$ так, что координаты π и $-\pi$ принадлежат одной и той же точке a . Отображение

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} x,$$

обратное стереографической проекции из точки a , осуществляет гомеоморфизм \mathbb{R} на $S^1 \setminus \{a\}$. При этом всякое открытое множество $]a + \varepsilon, a - \varepsilon[$ в S^1 , содержащее a , представляет собой объединение образа множества

$$\mathbb{R} \setminus \left[\operatorname{tg} \left(\frac{-\pi + \varepsilon}{2} \right), \operatorname{tg} \left(\frac{\pi - \varepsilon}{2} \right) \right]$$

при таком отображении и точки a , приобретающей декартову координату $x = \pm\infty$. \square

Локально компактное пространство называется *счетным в бесконечности*, если оно является счетным объединением компактных подпространств.

Например, евклидово топологическое пространство счетно в бесконечности. Действительно, числовую прямую легко представить как объединение счетного числа отрезков.

Локально компактные пространства, счетные в бесконечности, паракомпактны.

Отделимое топологическое пространство называется *паракомпактным*, если любое его открытое покрытие содержит локально конечное подпокрытие, т. е. всякий элемент обладает открытой окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом множеств из этого подпокрытия.

Условие паракомпактности существенно входит в ряд теорем, которые будут в дальнейшем использоваться. Это связано с тем, что паракомпактные пространства допускают так называемое разбиение единицы.

Пусть $\{U_\xi\}$ — открытое покрытие отделимого топологического пространства X . Семейство f_ξ неотрицательных вещественных непрерывных функций на X называется *разбиением единицы*, подчиненным этому покрытию, если:

- носитель $\operatorname{supp} f_\xi$ (т. е. наименьшее замкнутое множество, вне которого $f_\xi = 0$) принадлежит U_ξ ;
- каждый элемент X обладает открытой окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом множеств $\operatorname{supp} f_\xi$;
- $\sum_{\xi} f_\xi(x) = 1$ для любого $x \in X$.

Важно, что всякое замкнутое подпространство паракомпактного пространства тоже паракомпактно.

Отметим, что свойства отделимости, компактности, локальной компактности, паракомпактности и связности топологических пространств сохраняются при непрерывных отображениях, т. е. образ топологического пространства, обладающего каким-либо из этих свойств, при непрерывном отображении тоже обладает тем же свойством в топологии образа.

В дальнейшем все отображения считаются непрерывными.

Договоримся о терминологии, касающейся разных типов отображений. Она различается в разных изданиях.

Будем для наглядности именовать элементы топологического пространства точками. Вложение топологического пространства в топологическое пространство называется *инъекцией* (injection), а сам термин *вложение* (imbedding) будем применять только в случае, когда инъекция является гомеоморфизмом на топологическое подпространство.

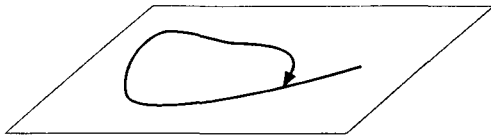


Рис. 2

ПРИМЕР 1.1.16. Рисунок 2 демонстрирует инъекцию прямой \mathbb{R} в плоскость \mathbb{R}^2 , которая не является вложением. Индуцированная топология на образе этой прямой слабее евклидовой топологии на \mathbb{R} . \square

Отображение топологического пространства на топологическое пространство называется *сюръекцией* (surjection). Сюръекции вида

$$\text{pr}_1 : A \times B \rightarrow A,$$

$$\text{pr}_2 : A \times B \rightarrow B$$

иногда называют также *проекциями*.

Всякая сюръекция

$$\pi : Y \rightarrow X \tag{1.4}$$

задает разбиение

$$Y = \bigcup_{x \in X} \pi^{-1}(x)$$

пространства Y на *слои* (fiber) $Y_x = \pi^{-1}(x)$ над точками пространства X . Поэтому будем именовать топологическое пространство Y *расслоенным пространством* над базой (base) X , если задана сюръекция (1.4).

ПРИМЕР 1.1.17. Евклидово топологическое пространство \mathbb{R}^3 представляет собой расслоенное пространство над базой \mathbb{R}^2 относительно ортогональной проекции на \mathbb{R}^2 . Слоями являются прямые, ортогональные плоскости \mathbb{R}^2 . Тор $T^2 = S^1 \times S^1$ представляет собой расслоенное пространство над окружностью S^1 со слоями — окружностями S^1 . \square

Подчеркнем что база X расслоенного пространства (1.4) не является его подпространством, но может существовать, хотя и не всегда, послойное вложение

$$s : X \hookrightarrow Y,$$

когда всякой точке $x \in X$ сопоставляется некоторая точка $s(x)$ обязательно из слоя Y_x над x , т. е. $\pi \circ s = \text{Id}_X$. Такое вложение s называется *глобальным сечением* расслоенного пространства Y . Соответственно, послойное вложение s некоторого подпространства $U \subset X$ в Y называется *локальным сечением* над U или просто *сечением* (section), если U — это открытое подмножество X .

Одно и то же топологическое пространство может быть наделено разными структурами расслоенного пространства. Например, $V \times X \rightarrow X$ и $V \times X \rightarrow V$ — это два разных расслоенных пространства. Даже гомеоморфизм топологического пространства на себя может нарушить его структуру как расслоенного пространства.

Чтобы не терять структуру расслоенного пространства при отображениях, в качестве морфизмов расслоенных пространств рассматривают только так называемые послойные

отображения, когда всякий слой одного расслоенного пространства $Y \rightarrow X$ полностью отображается в один из слоев другого расслоенного пространства $Y' \rightarrow X'$. Такой *послойный морфизм* (fibered morphism) задается парой отображений

$$\Phi: Y \rightarrow Y', \quad f: X \rightarrow X',$$

образующих коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\Phi} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

При этом говорят, что отображение Φ является послойным морфизмом над f . Если $f = \text{Id}_X$ — тождественное отображение, Φ для краткости называют послойным морфизмом над X и обозначают

$$Y \xrightarrow[X]{} Y'.$$

Мы не будем далее углубляться в общую теорию топологических расслоенных пространств, поскольку главным объектом нашего внимания будут расслоенные многообразия.

§ 2. Многообразия

Хотя в ряде полевых моделях привлекаются топологические пространства подчас весьма специального вида, стандартная классическая теория поля ограничивается рассмотрением многообразий — топологических пространств, которые как бы склеены из областей евклидова пространства. Это позволяет на каждой такой области вводить систему координат, а если переходы между этими областями достаточно гладкие, задавать на таком пространстве дифференцируемую структуру.

Пусть M — топологическое пространство и $\{U_\zeta\}$ — его открытое покрытие такое, что для каждого U_ζ задан его гомеоморфизм ϕ_ζ на открытое подмножество из \mathbb{R}^m . Пара (U_ζ, ϕ_ζ) называется *картой* (chart) на M . Говорят, что две карты (U_ζ, ϕ_ζ) и (U_ξ, ϕ_ξ) на M гладко согласованы, если отображение $\phi_\zeta \circ \phi_\xi^{-1}$ множества $\phi_\xi(U_\zeta \cap U_\xi) \subset \mathbb{R}^m$ в множество $\phi_\zeta(U_\zeta \cap U_\xi) \subset \mathbb{R}^m$ (оно именуется *функцией перехода* (transition function)) принадлежит классу C^∞ , т. е. является бесконечно дифференцируемым.

Все семейство попарно гладко согласованных карт $\Psi_M = \{U_\zeta, \phi_\zeta\}$ называется гладким *атласом* пространства M . На M могут существовать различные атласы. Два атласа считаются *эквивалентными*, если их объединение — тоже атлас, т. е. если карты, принадлежащие этим разным атласам, тоже попарно гладко согласованы.

Топологическое пространство, наделенное семейством таких эквивалентных гладких атласов называется m -мерным вещественным дифференцируемым многообразием или просто *многообразием* (manifold). Причем, если одно и то же топологическое пространство допускает неэквивалентные атласы, то это будут разные многообразия.

Следует подчеркнуть, что структуру многообразия на множестве можно ввести безотносительно какой-либо первоначальной топологии на нем. Уже потом это многообразие может быть наделено *подчиненной* локально евклидовой топологической структурой.

Мы не станем здесь вдаваться в такие детали и будем в дальнейшем предполагать, что всякое многообразие является и соответствующим топологическим пространством.

Казалось бы, что пространства, гладко склеенные из областей евклидова пространства, с гарантией обладают хорошими топологическими свойствами. Однако это не так. Склейка двух прямых из Примера 1.1.14 является гладким многообразием, однако оно даже не отделимо. Поэтому, если специально не оговорено, в дальнейшем потребуем, чтобы многообразия были отделимыми локально компактными счетными в бесконечности (т. е. паракомпактными) связными топологическими пространствами. В частности, такое многообразие всегда можно покрыть счетным числом карт. Многообразия, используемые в физических приложениях, допускают, как правило, атласы с конечным числом карт.

Заметим, что можно рассматривать многообразия над другими числовыми полями и других классов гладкости, в том числе аналитические многообразия, а также *топологические многообразия*, когда требуется не дифференцируемость, а только непрерывность функций перехода между картами.

Задание атласа многообразия позволяет ввести на нем *систему координат*.

Пусть M — m -мерное многообразие. На каждой карте (U, ϕ) многообразия M всякой точке $z \in U$ можно сопоставить набор чисел (z^1, \dots, z^m) — коэффициентов разложения вектора $\phi(z)$ относительно некоторого фиксированного базиса пространства \mathbb{R}^m , т. е.

$$z^\mu(z) = (v^\mu \circ \phi)(z),$$

где (v^μ) — координаты на \mathbb{R}^m . Этот набор называется *локальными координатами* (или просто координатами) точки z в карте (U, ϕ) . Если точка z накрывается еще другой картой (U', ϕ') , то в этой карте ей будет сопоставлен другой набор локальных координат (z'^μ) . Функция перехода $\phi' \circ \phi^{-1}$ между картами тогда записывается как преобразование координат

$$(z^\mu) \rightarrow (z'^\mu(z^\nu))$$

на пересечении $U \cap U'$.

Часто технически удобно задавать атлас многообразия именно как систему координат.

ПРИМЕР 1.2.1. Сфера S^2 является дифференцируемым многообразием, атлас которого может быть построен из двух карт — (U_1, ϕ_1) и (U_2, ϕ_2) , где U_1 (соотв. U_2) — сфера без северного (соотв. южного) полюса и ϕ_1 (соотв. ϕ_2) стереографическая проекция из северного (соотв. южного) полюса на плоскость \mathbb{R}^2 . Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — соответствующие координаты в этих картах. Функция перехода между картами имеет вид

$$x_2 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y_2 = \frac{-y_1}{x_1^2 + y_1^2}. \quad (1.5)$$

□

ПРИМЕР 1.2.2. Групповое пространство *группы Ли* — это аналитическое многообразие, образованное множеством ее параметров. Приведем некоторые полезные примеры групп Ли.

- *Группа* $U(1)$ умножений на комплексные числа вида $\exp(i\alpha)$ (она же группа поворотов $SO(2)$). Ее групповое пространство — окружность S^1 . Эта группа лежит в основе калибровочной теории электромагнетизма.

- *Группа $SU(2)$* комплексных унитарных (2×2) -матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & a_3 + ia_4 \\ -a_3 + ia_4 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix}, \quad A^+ A = \widehat{1}, \quad \det A = 1.$$

Поскольку

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1,$$

групповое пространство $SU(2)$ представляет собой 3-мерную сферу S^3 . В калибровочных моделях фундаментальных взаимодействий группа $SU(2)$ играет роль простейшей группы внутренних симметрий — изоспина, лептоспина.

- *Группа $SO(3)$* вращений в 3-мерном евклидовом пространстве. Она изоморфна фактор-группе группы $SU(2)$ по подгруппе \mathbb{Z}_2 умножений на матрицу $-\widehat{1}$. Ее групповое пространство получается отождествлением противоположных точек сферы S^3 . Это проективное пространство $\mathbb{R}P^3$.

□

ПРИМЕР 1.2.3. Проективные пространства фигурируют в целом ряде полевых моделей. Вещественное n -мерное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ определяется как сфера S^n с отождествленными противоположными точками. Стандартный атлас $\{U_i, \phi_i\}$ на $\mathbb{R}P^n$ состоит из $n + 1$ карты, определяемых следующим образом. Поместим S^n в евклидово пространство \mathbb{R}^{n+1} с координатами (x^i) . Тогда проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ гомеоморфно пространству центральных (проходящих через 0) прямых в \mathbb{R}^{n+1} . Область U_i включает прямые, которые пересекаются с гиперплоскостью $x^i = 1$. Каждой такой прямой сопоставим координаты точки ее пересечения с этой гиперплоскостью:

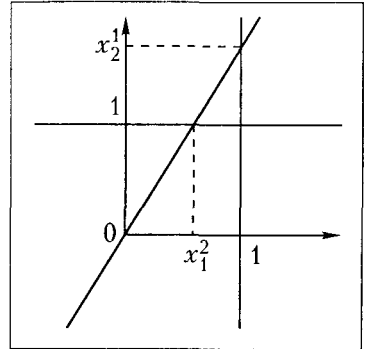


Рис. 3

$$(x_1^1, \dots, x_i^{n+1}) = (x^1, \dots, x^i = 1, \dots, x^{n+1}).$$

Это и есть отображение ϕ_i . Функции перехода между картами имеют вид

$$x_j^k = \frac{x_i^k}{x_i^j}.$$

Мы проиллюстрируем эту конструкцию рисунком для случая $\mathbb{R}P^1$ (рис. 3). Отметим, что $\mathbb{R}P^1 = S^1$. □

Упомянем еще два типа многообразий, с которыми придется встретиться в дальнейшем.

ПРИМЕР 1.2.4. *Многообразием Грассмана $\mathbb{R}G(n, k)$* называется многообразие k -мерных векторных подпространств пространства \mathbb{R}^n . Приведем полезные соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{R}G(n, 1) &= \mathbb{R}P^n, \\ \mathbb{R}G(n, n-1) &= \mathbb{R}P^{n-1}. \end{aligned}$$

□

ПРИМЕР 1.2.5. Многообразием Штифеля $\mathbb{R}V(n, k)$ называется многообразие линейных изометрических отображений $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$. Оно гомеоморфно фактор-пространству $SO(n)/SO(n-k)$ и

$$\mathbb{R}V(n, k)/O(k) = \mathbb{R}G(n, k).$$

Для частных случаев многообразий Штифеля имеем следующие соотношения

$$\mathbb{R}V(n, n-1) = SO(n),$$

$$\mathbb{R}V(n, 1) = S^{n-1}.$$

□

Пусть M и M' — многообразия и f — отображение M в M' . Говорят, что отображение f является *морфизмом многообразий* (дифференцируемым отображением), если оно непрерывно и для любых карт (U, ϕ) на M и (U', ϕ') на M' таких, что $f(U) \subset U'$, отображение

$$\phi' \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \phi'(U')$$

бесконечно дифференцируемо. Если при этом f взаимно однозначное отображение и обратное отображение f^{-1} тоже дифференцируемое, то f осуществляет изоморфизм многообразия M на многообразии M' и называется *диффеоморфизмом*.

ПРИМЕР 1.2.6. Построим отображение f окружности S^1 на окружность S^1 , при котором первая окружность дважды оборачивается вокруг второй. Чтобы удовлетворить условию $f(U) \subset U'$, введем на первой окружности атлас, который в отличие от стандартного, состоит из 4 карт

$$\left(-\frac{\pi}{4} < \alpha_1 < \frac{3\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{\pi}{4} < \alpha_2 < \frac{5\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{3\pi}{4} < \alpha_3 < \frac{7\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{5\pi}{4} < \alpha_4 < \frac{9\pi}{4}\right),$$

$$\frac{5\pi}{4} < \alpha_4 = \alpha_3 < \frac{7\pi}{4}, \quad \frac{7\pi}{4} < \alpha_4 = \alpha_1 + 2\pi < \frac{9\pi}{4},$$

а на второй окружности — *стандартный атлас*

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \phi_1 < \frac{3\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{\pi}{2} < \phi_2 < \frac{5\pi}{2}\right),$$

$$\frac{\pi}{2} < \phi_1 = \phi_2 < \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} < \phi_2 = \phi_1 + 2\pi < \frac{5\pi}{2}.$$

Тогда отображение f имеет вид

$$\alpha_1 \rightarrow \phi_1 = 2\alpha_1, \quad \alpha_3 \rightarrow \phi_1 = 2\alpha_3 - 2\pi,$$

$$\alpha_2 \rightarrow \phi_2 = 2\alpha_2, \quad \alpha_4 \rightarrow \phi_2 = 2\alpha_4 - 2\pi.$$

□

В дальнейшем предполагается, что все отображения, если специально не оговорено, являются дифференцируемыми класса C^∞ .

Заметим, что часто нет необходимости полностью выписывать координатный атлас многообразия, а достаточно ограничиться некоторой одной координатной картой, следя за тем, чтобы все рассматриваемые геометрические объекты соответствующим образом преобразовывались при замене координат и тем самым могли быть глобально определены на всем многообразии.

Обратимся теперь к конструкции, характерной именно для дифференцируемых многообразий. Это касательные пространства.

Строгое математическое определение касательного вектора к многообразию выглядит весьма техническим. Мы не станем здесь вдаваться в его детали, апеллируя к наглядным представлениям о касательной плоскости к искривленной поверхности. Этого вполне достаточно, чтобы оперировать понятиями касательного вектора и касательного пространства к многообразию.

Касательные векторы к m -мерному многообразию M в точке $z \in M$ образуют m -мерное векторное пространство $T_z M$, которое и называется *касательным пространством* к M в точке z . Множество TM всех касательных пространств к многообразию M тоже можно наделить структурой многообразия, задав на нем *голономную систему координат*

$$(z^\lambda, \dot{z}^\lambda), \quad (1.6)$$

$$\dot{z}^{\prime\lambda} = \frac{\partial z^{\prime\lambda}}{\partial z^\alpha} \dot{z}^\alpha, \quad (1.7)$$

где z^λ координаты на многообразии M , а \dot{z}^λ координаты на касательных пространствах к M относительно голономных базисов этих пространств.

Хотя базис касательного пространства $T_z M$ можно выбрать произвольно, его обычно задают так, чтобы базисные векторы были касательными векторами к координатным линиям на M через точку z . Он называется *голономным базисом* и обозначается $\{\partial_\lambda\}$. Если требовать, чтобы голономность базиса касательного пространства сохранялась при преобразованиях координат на многообразии, последние должны сопровождаться переходом к новым голономным базисам

$$\partial'_{\lambda} = \frac{\partial z^\alpha}{\partial z^{\prime\lambda}} \partial_\alpha.$$

Имеет место естественная сюръекция

$$\pi_M : TM \supset T_z M \rightarrow z \in M \quad (1.8)$$

многообразия касательных пространств TM на M . Она наделяет TM структурой расслоенного пространства, которое называется *касательным расслоением*. При этом всякий морфизм многообразий $f : M \rightarrow M'$ порождает морфизм соответствующих касательных расслоений

$$Tf : TM \rightarrow TM', \quad (1.9)$$

$$\dot{z}^{\prime\lambda} \circ Tf = \frac{\partial f^\lambda}{\partial z^\alpha} \dot{z}^\alpha.$$

Это послыйный морфизм над f , который осуществляет линейные отображения касательных пространств $T_z M$ к M в касательные пространства $T_{f(z)} M'$ к M' . Его называют *дифференциалом отображения f* или *касательным морфизмом* (tangent morphism) к f .

В дальнейшем мы будем иметь дело, как правило, с морфизмами многообразий следующих типов: инъекция, сюръекция, иммерсия, погружение, вложение, субмерсия, проекция, уже упомянутый выше диффеоморфизм и локальный диффеоморфизм. Остановимся на них подробнее, поскольку в разных изданиях терминология различается. Кроме того, в ключевом для нас определении расслоенного многообразия $\pi : Y \rightarrow X$ требуется, чтобы морфизм π был не просто сюръекцией, а еще и субмерсией. Поэтому необходимо ясно представлять, что это такое.

Существует два типа морфизмов многообразий $f : M \rightarrow M'$, когда *матрицы Якоби*

$$S_f(z) = \left(\frac{\partial f^\lambda}{\partial z^\alpha} \right)$$

касательного морфизма Tf к f в точках $z \in M$ имеют максимальный ранг. Это иммерсия, когда $\dim M \leq \dim M'$ и субмерсия, когда $\dim M \geq \dim M'$. Если морфизм f является одновременно и иммерсией, и субмерсией, когда $\dim M = \dim M'$, это *локальный диффеоморфизм*.

Морфизм многообразий $f : M \rightarrow M'$ называется *иммерсией* (immersion), если для любой точки $z \in M$ касательный морфизм Tf осуществляет инъекцию касательного пространства $T_z M$ в касательное пространство $T_{f(z)} M'$.

Приведем следующий критерий иммерсии. Морфизм $f : M \rightarrow M'$ является иммерсией тогда и только тогда, когда для всякой точки $z \in M$ существуют ее открытая окрестность U_z и открытая окрестность $U_{f(z)} \supset f(U)$ точки $f(z)$ с такими координатами (z'^λ) , что

$$z'^\lambda \circ f = 0, \quad \lambda = \dim M + 1, \dots, \dim M',$$

а $(z'^\lambda \circ f)$, $\lambda = 1, \dots, \dim M$, являются координатами на U_z .

Морфизм $f : M \rightarrow M'$, который является одновременно инъекцией и иммерсией, называется *погружением*. Образ погружения многообразия M в многообразии M' по определению считается *подмногообразием* многообразия M' .

ПРИМЕР 1.2.7. Рассмотрим многообразии $M = \mathbb{R}$ с координатой (z) и многообразии $M' = \mathbb{R}^2$ с координатами (z'^1, z'^2) . Отображение

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ z &\mapsto (z'^1 = 0, z'^2 = (z)^3), \end{aligned}$$

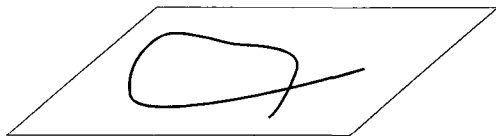


Рис. 4

дает пример инъекции, которая не является иммерсией, и соответственно ее образ не является подмногообразием. Рисунок 4 демонстрирует случай иммерсии, которая не является инъекцией. □

Подчеркнем, что в отличие от структуры топологического подпространства, далеко не всякое подмножество многообразия может быть наделено структурой подмногообразия. Более того не всякое подмногообразие является топологическим подпространством многообразия. Пример 1.1.16 иллюстрирует этот факт.

Подмногообразие, которое является также и топологическим подпространством многообразия называется *вложенным подмногообразием*, а диффеоморфизм на вложенное подмногообразие называется *вложением многообразия*. Следующее условие может служить критерием вложения.

Морфизм $f : M \rightarrow M'$ является вложением тогда и только тогда, когда для всякой точки $z \in M$ существует открытая окрестность $U_{f(z)}$ точки $f(z)$ с такими координатами (z'^λ) , что пересечение $f(M) \cap U_{f(z)}$ состоит из тех и только тех точек $z' \in U_{f(z)}$, чьи координаты удовлетворяют условию

$$z'^\lambda = 0, \quad \lambda = \dim M + 1, \dots, \dim M'. \quad (1.10)$$

Это означает, что вложенное подмногообразие может быть локально задано координатными условиями (1.10).

Например, всякое открытое подмножество U многообразия M может быть наделено структурой многообразия, такой что естественная инъекция $i_U : U \hookrightarrow M$ является вложением. Поэтому в дальнейшем, говоря об открытом подмножестве многообразия, мы будем подразумевать и его структуру вложенного подмногообразия.

Морфизм $f : M \rightarrow M'$ называется *субмерсией* (submersion), если для всякой точки $z \in M$ касательный морфизм Tf является сюръекцией касательного пространства $T_z M$ к M' на касательное пространство $T_{f(z)} M'$.

Следующие условия эквивалентны.

- Морфизм $f : M \rightarrow M'$ является субмерсией.
- Для всякой точки $z \in M$ существуют: (i) открытая окрестность U_z , (ii) открытая окрестность $U_{f(z)} \supset f(U)$ точки $f(z)$, (iii) многообразие V_U и (iv) диффеоморфизм

$$\begin{aligned} \psi : U_z &\rightarrow U_{f(z)} \times V_U, \\ \text{pr}_1 \circ \psi &= f|_{U_z}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Другими словами имеет место *локальное расщепление* многообразия M .

- Пусть U_z и $U_{f(z)}$ — упомянутые в предыдущем пункте окрестности точек z и $f(z)$ соответственно. Пусть (z'^λ) — координаты на $U_{f(z)}$. Можно так выбрать координаты (z^λ) на U_z , что

$$z^\lambda = z'^\lambda \circ f, \quad \lambda = 1, \dots, \dim M',$$

т. е. эти координаты совпадают с координатами на $U_{f(z)}$.

- Для любой точки $f(z) \in M'$ имеется открытая окрестность $U_{f(z)}$ и ее вложение s в M такое, что

$$(s \circ f)(z) = z.$$

Другими словами существует *сечение* многообразия M над $U_{f(z)}$.

Каждое из приведенных выше условий полностью характеризует субмерсию и может служить в качестве ее эквивалентного определения.

Морфизм многообразий, который одновременно является субмерсией и сюръекцией, называется *проекцией*.

ПРИМЕР 1.2.8. Отображение

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ z' &= z^3 - z, \end{aligned}$$

дает пример сюръекции, которая не является субмерсией. \square

Многообразие M , наделенное проекцией $f : M \rightarrow M'$, называется *расслоенным многообразием* над базой M' . Это основной математический объект, к которому мы будем обращаться на протяжении всей книги.

В полевых моделях обычно рассматривают расслоенные многообразия над ориентируемой базой, которая играет роль пространственно-временного многообразия.

Координатный атлас многообразия M называется *ориентированным*, если якобианы

$$\det \left(\frac{\partial z_\zeta^\mu}{\partial z_\xi^\nu} \right)$$

всех функций перехода между картами положительны. Многообразию считается *ориентируемым*, если всякий его атлас эквивалентен некоторому ориентированному атласу. Говорят, что два ориентированных атласа на многообразии ориентированы одинаково, если их объединение — тоже ориентированный атлас. *Ориентацией многообразия* называется класс эквивалентности одинаково ориентированных атласов. Связное ориентируемое многообразие имеет в точности две ориентации.

ПРИМЕР 1.2.9. Сфера S^n ориентируема. Для иллюстрации рассмотрим сферу S^2 из Примера 1.2.1. Якобиан функции перехода (1.5) равен

$$(x_1^2 + y_1^2)^{-2} > 0,$$

т. е. координатный атлас $\{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\}$ является ориентированным. Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ ориентируемо только для нечетных n . В частности, рассмотрим проективное пространство $\mathbb{R}P^1$ из Примера 1.2.3. Функция перехода между картами $(1, x_1^2)$ и $(x_2, 1)$ имеет вид

$$x_2^1 = \frac{1}{x_1^2}.$$

Легко проверить, что ее якобиан отрицателен: $-(x_1^2)^2 < 0$. Это означает, что указанный атлас не является ориентированным. Но преобразованием координат

$$x_1'^2 = x_1^2, \quad x_2'^1 = -x_2^1$$

можно перейти к эквивалентному ориентированному атласу на $\mathbb{R}P^1$. \square

Задание ориентации на многообразии можно себе представить наглядно в случае 2-мерной поверхности в 3-мерном евклидовом пространстве как построение гладкого поля нормальных к поверхности векторов. Ясно, что, если такое поле построено, то возможно еще только одно такое поле, получаемое изменением направлений всех векторов на противоположные. Примером поверхности, на которой поле нормальных векторов построить нельзя, является лист Мебиуса.

Морфизмы ориентируемых многообразий имеют специфическую характеристику, именуемую степенью отображения.

Рассмотрим сюръекцию ориентируемых m -мерных многообразий $f: M \rightarrow M'$ такую, что (i) прообраз $f^{-1}(z')$ всякой точки $z' \in M'$ состоит из конечного числа точек и (ii) якобиан касательного морфизма Tf , записанного относительно ориентированных координат, во всех этих точках отличен от нуля, т. е. это локальный диффеоморфизм. *Степень отображения f в точке z'* определяется как разность

$$\deg f_{z'} = N_+(z') - N_-(z')$$

числа N_+ точек прообраза $z \in f^{-1}(z')$, в которых якобиан Tf положителен (т. е. f не изменяет ориентацию) и числа N_- точек прообраза, где якобиан Tf отрицателен (т. е. f меняет ориентацию). Важно, что, если M и M' связны, степень отображения одна и та же во всех точках многообразия M' .

В частности, степень отображения сферы S^n на сферу S^n показывает сколько раз при этом отображении первая сфера обертывается вокруг второй. Например, легко убедиться, что степень отображения окружности на окружность из Примера 1.2.6 равна двум.

§ 3. Расслоенные многообразия

Рассмотрим расслоенное многообразие

$$\pi : Y \rightarrow X, \quad (1.12)$$

где морфизм π по определению является сюръекцией и субмерсией. Договоримся использовать символы y и x для обозначения точек расслоенного многообразия Y и его базы X соответственно. Если специально не оговорено, база X в дальнейшем имеет размерность n . Она наделена системой координат (x^λ) .

Отметим, что в случае расслоенного многообразия, проекция π является *открытым отображением*, т. е. переводит открытые множества в открытые. Она определяет отношение эквивалентности $\pi(y) = \pi(y')$ на Y , классами эквивалентности которого являются *слои* $\pi^{-1}(x)$ расслоенного многообразия. При этом база X гомеоморфна фактору Y по этому отношению эквивалентности.

На расслоенном многообразии $Y \rightarrow X$ по определению может быть задана *расслоенная система координат*

$$\begin{aligned} (x^\lambda, y^i), \\ x^\lambda \rightarrow x'^\lambda(x^\mu), \\ y^i \rightarrow y'^i(x^\mu, y^j), \end{aligned} \quad (1.13)$$

подчиненная структуре расслоения (1.12). Иными словами среди координат расслоенного многообразия можно выделить координаты базы x^λ , преобразования перехода которых не зависят от оставшихся координат y^i .

Мы, как правило, будем иметь дело с расслоенными многообразиями следующей, можно сказать, упрощенной конструкции.

Расслоенное многообразие $Y \rightarrow X$ называется *тривиальным расслоением*, если существует такое многообразие V , что Y диффеоморфно прямому произведению $X \times V$.

ПРИМЕР 1.3.1. Тор $T^2 = S^1 \times S^1$ из Примера 1.1.17 является тривиальным расслоением над окружностью S^1 . Наглядным примером нетривиального расслоенного многообразия может служить открытый лист Мебиуса. Базой его является окружность S^1 , а слоями — интервалы $] - 1, 1[$ (см. ниже Пример 1.3.4). Он отличается от открытого кольца $S^1 \times] - 1, 1[$ — тривиального расслоения с той же базой и такими же слоями. \square

Подобно тому как многообразия склеены из областей евклидовых пространств, будем рассматривать в основном расслоенные многообразия, которые как бы склеены из кусков тривиальных расслоений.

Расслоенное многообразие $Y \rightarrow X$ называется *локально тривиальным*, если для каждой точки $x \in X$ существует открытая окрестность U такая, что имеет место *локальное расщепление*

$$\begin{aligned} \psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times V, \\ \text{pr}_1 \circ \psi = \pi, \end{aligned} \quad (1.14)$$

расслоенного многообразия Y . При этом, в отличие от (1.11), во всех локальных расщеплениях (1.14) фигурирует одно и то же многообразие V , которому диффеоморфны слои Y . Оно называется *типичным слоем* (standard fiber). Расщепление (1.14) представляет собой тривиальное расслоения $U \times V \rightarrow U$ над U . Существует открытое покрытие $\{U_\varepsilon\}$ базы X такое, что локально тривиальное расслоенное многообразие Y выглядит как склеенное из тривиальных расслоений $U_\varepsilon \times V$ над U_ε . Подмножества $U_\varepsilon \subset X$

называются *областями тривиализации*, а соответствующие диффеоморфизмы ψ_ξ — *морфизмами тривиализации* расслоенного многообразия Y . Пары областей и морфизмов тривиализации (U_ξ, ψ_ξ) составляют *атлас расслоения*

$$\Psi = \{U_\xi, \psi_\xi, \rho_{\xi\zeta}\}$$

с функциями перехода

$$\begin{aligned} \rho_{\xi\zeta} : (U_\xi \cap U_\zeta) \times V &\xrightarrow{U_\xi \cap U_\zeta} (U_\xi \cap U_\zeta) \times V, \\ \psi_\xi(y) &= (\rho_{\xi\zeta} \circ \psi_\zeta)(y), \quad y \in \pi^{-1}(U_\xi \cap U_\zeta). \end{aligned}$$

Последние удовлетворяют естественным циклическим условиям

$$\begin{aligned} \rho_{\xi\xi} &= \text{Id}_{U_\xi \times V}, \\ \rho_{\xi\zeta} \circ \rho_{\zeta\kappa} \Big|_{U_\xi \cap U_\zeta \cap U_\kappa \times V} &= \rho_{\xi\kappa} \Big|_{U_\xi \cap U_\zeta \cap U_\kappa \times V}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1.3.2. Рассмотрим многообразия $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, параметризуемое координатами (y^1, y^2) , и \mathbb{R} , параметризуемое (x) . Проекция

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x \circ \pi &= (y^1)^2 - (y^2)^2, \end{aligned}$$

дает пример расслоенного многообразия, которое не является локально тривиальным. \square

Дифференцируемым расслоением или просто *расслоением* (fiber bundle) называется локально тривиальное расслоенное многообразие (1.12), наделенное семейством эквивалентных атласов расслоения.

Как и для атласов многообразий, два атласа расслоения считаются *эквивалентными*, если их объединение тоже является атласом расслоения. В частности, два атласа расслоения $\Psi = \{U_\xi, \psi_\xi\}$ и $\Psi' = \{U_\xi, \psi'_\xi\}$ над одним и тем же покрытием $\{U_\xi\}$ базы X эквивалентны тогда и только тогда, когда их морфизмы тривиализации отличаются друг от друга изоморфизмами тривиальных расслоений $U_\xi \times V$:

$$\begin{aligned} g_\xi : U_\xi \times V &\xrightarrow{U_\xi} U_\xi \times V, \\ \psi'_\xi &= g_\xi \circ \psi_\xi. \end{aligned}$$

В свою очередь всякое семейство таких изоморфизмов $\{U_\xi, g_\xi\}$ задает *преобразование атласов расслоения*

$$\{U_\xi, \psi_\xi\} \rightarrow \{U_\xi, g_\xi \circ \psi_\xi\}. \quad (1.15)$$

Например, расслоение является тривиальным тогда и только тогда, когда всякий его атлас посредством преобразований (1.15) может быть приведен к атласу только с тождественными функциями перехода $\rho_{\xi\zeta}$.

Заметим, что часто, вместо функций перехода $\rho_{\xi\zeta}$, технически бывает более удобно оперировать величинами

$$\varrho_{\xi\zeta} := \text{pr}_2 \circ \rho_{\xi\zeta} : (U_\xi \cap U_\zeta) \times V \rightarrow V, \quad (1.16)$$

которые также будем называть *функциями перехода*. Аналогично, вместо морфизмов тривиализации ψ_ξ , иногда целесообразно использовать величины

$$\varphi_\xi := \text{pr}_2 \circ \psi_\xi : \pi^{-1}(U_\xi) \rightarrow V,$$

которые также будем называть *морфизмами тривиализации*. При этом атлас расслоения можно эквивалентно характеризовать посредством $\varrho_{\xi\zeta}$ и φ_ξ , поскольку

$$\rho_{\xi\zeta} = \text{Id}_{U_\xi \cap U_\zeta} \times \varrho_{\xi\zeta},$$

$$\psi_\xi = \pi \times \varphi_\xi.$$

Если $Y \rightarrow X$ — расслоение, будем в дальнейшем предполагать, что система расслоенных координат (1.13) на Y ассоциирована с некоторым атласом расслоения Ψ , т. е.

$$y^i(y) = (v^i \circ \varphi_\xi)(y), \quad \pi(y) \in U_\xi,$$

где v^i являются координатами на типичном слое V расслоения Y . Функции перехода (1.16) тогда записываются как преобразования расслоенных координат

$$v^i \circ \varrho_{\xi\zeta} = y_\xi^i(x_\zeta^\lambda, y_\zeta^j).$$

Для этого атлас расслоения и координатный атлас базы расслоения необходимо задавать над одним и тем же открытым покрытием базы, например, взяв объединение открытых покрытий для этих атласов. Поэтому в дальнейшем договоримся просто считать открытое покрытие $\{U_\xi\}$ базы расслоения фиксированным.

ПРИМЕР 1.3.3. Пусть TM — многообразии касательных пространств к многообразию M . Легко проверить, что морфизм (1.8) является проекцией и $\pi_M : TM \rightarrow M$ — это расслоение. Оно называется *касательным расслоением* (tangent bundle). Если задан координатный атлас $\Psi_M = \{U_\xi, \phi_\xi\}$ многообразия M , то в качестве атласа касательного расслоения обычно (но вовсе не обязательно) выбирают соответствующий *голономный атлас* (holonomic atlas)

$$\Psi = \{U_\xi, \psi_\xi = T\phi_\xi\}. \quad (1.17)$$

Ассоциированной системой расслоенных координат на TM являются голономные координаты (1.6). Функции перехода атласа (1.17) в этих координатах имеют вид (1.7). \square

Расслоения можно вводить по-разному. Один из распространенных подходов основывается на том факте, что всякое расслоение $Y \rightarrow X$ однозначно задается набором (X, V, Ψ) , включающим базу X , типичный слой V и атлас расслоения Ψ . При этом расслоения (X, V, Ψ) и (X, V, Ψ') с одной и той же базой, одним и тем же типичным слоем и разными, но эквивалентными атласами — это суть одно и то же расслоение. Они называются *эквивалентными расслоениями*.

ПРИМЕР 1.3.4. Уже упоминавшийся открытый лист *Мебиуса* является нетривиальным расслоением над окружностью S^1 с типичным слоем — интервалом $V =]-1, 1[$. Его стандартный атлас состоит из двух карт $U_1 \times V$ and $U_2 \times V$ над покрытием

$$U_1 = \{-\varepsilon < \chi < \pi + \varepsilon\}, \quad U_2 = \{\pi - \varepsilon < \chi < 2\pi + \varepsilon\},$$

$$U_1 \cap U_2 = W_1 \cup W_2 =]-\varepsilon, \varepsilon[\cup]\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon[.$$

с функцией перехода

$$\varrho(\chi) : v \mapsto -v, \quad \chi \in W_1,$$

$$\varrho(\chi) : v \mapsto v, \quad \chi \in W_2.$$

У кольца в тех же обозначениях функция перехода имеет вид

$$\varrho(\chi) : v \mapsto v.$$

□

ПРИМЕР 1.3.5. Касательное расслоение TM над m -мерным многообразием M из Примера 1.3.3 можно определить как расслоение с базой M , типичным слоем \mathbb{R}^m и атласом расслоения Ψ , эквивалентным некоторому голономному атласу (1.17). Например, касательное расслоение над окружностью S^1 тривиально и диффеоморфно цилиндру. Касательное расслоение над сферой S^2 , координатный атлас которой описан в Примере 1.2.1, уже не тривиально. Функции перехода соответствующего голономного атласа на TS^2 можно получить подстановкой выражения (1.5) в (1.7):

$$\dot{x}_2 = \frac{y_1^2 - x_1^2}{(x_1^2 + y_1^2)^2} \dot{x}_1 - \frac{2x_1 y_1}{(x_1^2 + y_1^2)^2} \dot{y}_1,$$

$$\dot{y}_2 = \frac{2x_1 y_1}{(x_1^2 + y_1^2)^2} \dot{x}_1 + \frac{y_1^2 - x_1^2}{(x_1^2 + y_1^2)^2} \dot{y}_1.$$

Подчеркнем, что над многообразием M существуют и другие расслоения с типичным слоем \mathbb{R}^m , не эквивалентные TM . □

Если строить расслоение, задавая его базу, типичный слой и атлас расслоения, то выбрать области тривиализации для атласа расслоения помогает тот факт, что любое расслоение над стягиваемой базой (когда любая замкнутая линия стягиваема в точку) всегда тривиально. Здесь существенным образом используется, что по соглашению все многообразия считаются паракомпактными.

Расслоенное многообразие $\pi : Y \rightarrow X$, поскольку π — субмерсия, по определению имеет *локальное сечение* над некоторой открытой окрестностью всякой точки $x \in X$. Если Y — расслоение, то оно с очевидностью допускает сечение $s_\zeta : U_\zeta \hookrightarrow Y$ над всякой своей областью тривиализации U_ζ . Если на расслоенном многообразии Y задана система расслоенных координат (x^λ, y^i) , то его сечения s характеризуются семействами локальных координатных функций $s^i = y^i \circ s$ с соответствующими законами координатных преобразований.

Сечение расслоенного многообразия $Y \rightarrow X$ представляет собой вложение $s_U : U \hookrightarrow Y$, т. е. его образ является вложенное подмногообразие в Y . Образ *глобального сечения* $s : X \hookrightarrow Y$ — это замкнутое вложенное подмногообразие. Однако не всякое расслоение имеет глобальное сечение. В силу соглашения о паракомпактности базы дифференцируемого расслоения, мы можем использовать следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1.3.1. Если расслоение $Y \rightarrow X$ имеет глобальное сечение, всякое его локальное сечение над замкнутым вложенным подмногообразием базы X может быть продолжено (хотя и не однозначно) до глобального сечения $Y \rightarrow X$. □

ТЕОРЕМА 1.3.2. Всякое расслоение с типичным слоем \mathbb{R}^m допускает глобальное сечение. □

Из Теоремы 1.3.2, в частности, следует, что касательное расслоение TM всегда имеет глобальное сечение, например, $(z^\mu \circ s)(z) = 0$. Лист Мебиуса из Примера 1.3.4 тоже имеет глобальное сечение $(v \circ s)(\chi) = 0$.

ПРИМЕР 1.3.6. Глобальное сечение u касательного расслоения TM над многообразием M называется *векторным полем* на M . В голономных координатах на TM оно имеет вид

$$u(z) = u^\mu(z)\partial_\mu.$$

Векторное поле называется *неособым*, если оно нигде не обращается в 0. Неособые векторные поля существуют не на всяком многообразии. Например, такое поле нельзя построить на сфере S^2 . \square

В полевых моделях, как уже отмечалось, классические поля представляются сечениями расслоенных многообразий. Как правило, это расслоения. Поэтому в дальнейшем, за исключением некоторых случаев, мы ограничимся рассмотрением именно расслоений, тем более, что все изложенное ниже, будет справедливо и для расслоенных многообразий.

Как и в случае топологических расслоенных пространств, в качестве *морфизмов расслоений* рассматриваются их *послойные морфизмы*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\Phi} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array} \quad (1.18)$$

В частности, если морфизм расслоений (1.18) — это послойное погружение над X , то его образ является подмногообразием в Y' и он называется *подрасслоением* расслоения $Y' \rightarrow X$. Послойное вложение часто называют *моморфизмом расслоений* (bundle monomorphism), а послойный диффеоморфизм над X — *изоморфизмом расслоений* (bundle isomorphism).

Послойный морфизм Φ (1.18) над диффеоморфизмом f преобразует всякое сечение s расслоения $Y \rightarrow X$ в сечение

$$s' = \Phi \circ s \circ f^{-1} \quad (1.19)$$

расслоения $Y' \rightarrow X'$.

Примером послойного морфизма расслоений может служить *касательный морфизм* Tf (1.9) касательного расслоения TM в касательное расслоение TM' , порождаемый морфизмом многообразий $f : M \rightarrow M'$. Он представляет собой линейный послойный морфизм над f :

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TM' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

Если f — диффеоморфизм, то Tf изоморфизм.

Заметим, что не всякий даже диффеоморфизм $X \rightarrow X'$ базы расслоения $Y \rightarrow X$ на базу расслоения $Y' \rightarrow X'$ может быть продолжен до послойного морфизма расслоений $Y \rightarrow Y'$. В то же время, если дано расслоение $Y' \rightarrow X'$, всякий морфизм $f : X \rightarrow X'$

порождает так называемое *индуцированное* (pullback) расслоение f^*Y' над X . Оно образовано всевозможными парами

$$\{(y', x) \in Y' \times X, \pi'(y') = f(x)\}$$

с естественной проекцией $(y', x) \mapsto x$. Другими словами, слоем индуцированного расслоения f^*Y' над точкой $x \in X$ является слой расслоения Y' над точкой $f(x) \in X'$. При этом существует естественный послыйный морфизм

$$\begin{aligned} f_* : f^*Y' &\rightarrow Y', \\ f_* : (y', x) &\mapsto y', \end{aligned} \quad (1.20)$$

над f . Отметим, что всякое сечение s расслоения Y' задает *индуцированное сечение*

$$(f^*s)(x) = ((s \circ f)(x), x) \quad (1.21)$$

расслоения $f^*Y' \rightarrow X$, индуцированного из $Y' \rightarrow X'$.

ПРИМЕР 1.3.7. Пусть дано расслоение $Y' \rightarrow X'$. Если образ отображения $f : X \rightarrow X'$ является подмногообразием в X' , то индуцированное расслоение

$$f^*Y' = Y' |_{f(X)}$$

называется *сужением расслоения* Y' на подмногообразии $f(X) \subset X'$. \square

ПРИМЕР 1.3.8. *Прямое произведение расслоений* $\pi : Y \rightarrow X$ и $\pi' : Y' \rightarrow X$ над одной и той же базой X определяется как индуцированное расслоение

$$\pi^*Y' = \pi'^*Y = Y \times_X Y'.$$

\square

Рассмотрим теперь расслоения, наделенные некоторой алгебраической структурой.

Расслоение $\pi : Y \rightarrow X$ называется *групповым расслоением*, если заданы послыйные морфизмы

$$\begin{aligned} \widehat{m} : Y \times_X Y &\rightarrow Y, \\ \widehat{i} : Y &\rightarrow Y \end{aligned} \quad (1.22)$$

над X и глобальное сечение

$$e : X \hookrightarrow Y, \quad (1.23)$$

которые превращают каждый слой Y_x расслоения Y в группу

$$\begin{aligned} \widehat{m}((e \circ \pi)(y), y) &= \widehat{m}(y, (e \circ \pi)(y)) = y, \\ \widehat{m}(\widehat{i}(y), y) &= \widehat{m}(y, \widehat{i}(y)) = (e \circ \pi)(y). \end{aligned}$$

Более точно было бы назвать такое расслоение *расслоением на группы*, когда само многообразие Y не является группой, но “расслаивается” на группы. Подчеркнем, что, хотя слои группового расслоения наделены групповой структурой, его типичный слой в общем случае не является группой.

Пусть даны расслоение $Y \rightarrow X$ и групповое расслоение $\bar{Y} \rightarrow X$ вместе с послыным морфизмом

$$\tau : Y \times_{\bar{Y}} \bar{Y} \rightarrow Y$$

над X , который определяет в каждом слое Y_x расслоения Y левое (или правое) свободное транзитивное действие группы \bar{Y}_x . Тогда расслоение Y называется *обобщенным аффинным расслоением*, моделируемым слева (соотв. справа) над групповым расслоением \bar{Y} .

Напомним, что действие группы G в пространстве V называется *свободным*, если $gv = v$ для некоторого $v \in V$ влечет $g = \hat{1}$.

ПРИМЕР 1.3.9. *Векторное расслоение* $Y \rightarrow X$ можно характеризовать как групповое расслоение, слои которого являются векторными пространствами, т. е. имеют структуру аддитивной группы векторного пространства \mathbb{R}^k . Однако этого недостаточно. Предполагается, что векторное расслоение должно быть наделено атласом расслоения, морфизмы тривиализации которого линейны на его слоях. Более того, только такие атласы рассматриваются в качестве атласов векторного расслоения. В этом случае типичный слой векторного расслоения является векторным пространством и не только диффеоморфен, но и изоморфен \mathbb{R}^k . Примером векторного расслоения может служить касательное расслоение $TM \rightarrow M$. \square

ПРИМЕР 1.3.10. *Аффинным расслоением* называется обобщенное аффинное расслоение $Y \rightarrow X$, моделируемое над некоторым векторным расслоением $\bar{Y} \rightarrow X$. Оно наделено атласом *аффинных расслоенных координат* (x^λ, y^i) таких, что

$$\tau : (y^i, \bar{y}^i) \mapsto y^i + \bar{y}^i,$$

где (x^λ, \bar{y}^i) — линейные расслоенные координаты на векторном расслоении \bar{Y} . Типичный слой аффинного расслоения Y является *аффинным пространством*, моделируемым над векторным пространством типичного слоя векторного расслоения \bar{Y} . Он диффеоморфен некоторому \mathbb{R}^k . В частности, всякое векторное расслоение Y имеет каноническую структуру аффинного расслоения, моделируемого над самим собой посредством морфизма

$$\tau : (y, y') \mapsto y + y'.$$

Из Теоремы 1.3.2 следует, что аффинное расслоение, как и векторное, всегда обладает глобальным сечением. \square

Приведем основные операции, производимые с векторными расслоениями над одной и той же базой:

- *дуальное* к Y векторное расслоение Y^* с типичным слоем V^* , дуальным типичному слою V векторного расслоения Y ;
- *сумма Уитни* $Y \oplus Y'$ векторных расслоений Y и Y' с типичным слоем $V \oplus V'$ — прямой суммой типичных слоев расслоений Y и Y' ;
- *тензорное произведение* $Y \otimes Y'$ векторных расслоений Y и Y' с типичным слоем $V \otimes V'$ — тензорным произведением типичных слоев расслоений Y и Y' ;
- r -кратное *внешнее произведение* (exterior product)

$$\bigwedge^r Y = Y \wedge \cdots \wedge Y.$$

расслоения Y с типичным слоем — r -кратным антисимметризованным тензорным произведением $\bigwedge^r V$ типичного слоя V расслоения Y ,

- *свертка*

$$\lrcorner : Y \otimes Y^* \rightarrow X \times \mathbb{R}$$

или

$$\langle \rangle : Y \times Y^* \rightarrow X \times \mathbb{R}.$$

ПРИМЕР 1.3.11. Дуальным к касательному расслоению $TM \rightarrow M$ является *кокасательное расслоение* (cotangent bundle) $T^*M \rightarrow M$. Оно обычно наделяется атласом расслоенных голономных координат

$$(z^\lambda, \dot{z}_\lambda),$$

$$\dot{z}'_\lambda = \frac{\partial z^\mu}{\partial z'^\lambda} \dot{z}_\mu,$$

которые представляют собой коэффициенты разложения кокасательных векторов

$$T^*M \ni t^* = \dot{z}_\lambda dz^\lambda$$

относительно *голономных базисов* $\{dz^\lambda\}$ кокасательных пространств к M , дуальных к $\{\partial_\lambda\}$:

$$\partial_\lambda \lrcorner dz^\alpha = \delta_\lambda^\alpha.$$

Сечение ϕ кокасательного расслоения T^*M именуется *ковекторным полем* или *пфаффовой формой* на M . В голономных координатах на T^*M оно имеет вид

$$\phi(z) = \phi_\mu(z) dz^\mu.$$

Диффеоморфизм многообразий $f : M \rightarrow M'$ порождает соответствующий изоморфизм кокасательных расслоений

$$T^*f : T^*M \rightarrow T^*M',$$

задаваемый соотношением

$$Tf(t) \lrcorner T^*f(t_*) = t \lrcorner t_*$$

для всех пар векторов $t \in T_z M$ и ковекторов $t_* \in T_z^* M$. Могут быть образованы всевозможные тензорные произведения

$$\left(\bigotimes^n T^*M \right) \otimes \left(\bigotimes^m TM \right)$$

кокасательных и касательных расслоений. Они называются *тензорными расслоениями*, а их сечения — n раз ковариантными и m раз контравариантными *тензорными полями*

$$\phi = \phi_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_m}(z) dz^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dz^{\nu_n} \otimes \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_m}.$$

□

Послойной метрикой или просто метрикой в слоях векторного расслоения $Y \rightarrow X$ называется глобальное сечение a расслоения $Y^* \otimes Y^* \rightarrow X$. Она задает билинейную форму

$$a(x) : Y_x \times Y_x \ni (y, y') \mapsto a_{ij}(x) y^i y'^j \in \mathbb{R}$$

на каждом слое расслоения Y . Метрика a называется невырожденной, если все билинейные формы $a(x)$ невырождены. Невырожденная метрика в векторном расслоении Y однозначно определяет дуальную метрику в дуальном векторном расслоении Y^* . В целях упрощения обе такие метрики мы будем обозначать одним и тем же символом. Метрика в касательном расслоении TX называется *метрикой на многообразии X* .

Заметим, что сечения s_U группового расслоения $Y \rightarrow X$ над одним и тем же открытым подмножеством U базы X образуют некоторую группу G_U относительно операций поточечного умножения

$$(s_U \circ s'_U)(x) = s_U(x)s'_U(x), \quad x \in U,$$

и перехода к обратному

$$s_U^{-1} = \widehat{i} \circ s_U.$$

При этом единичным элементом группы G_U служит сечение $e_U = e|_U$. Ясно однако, что, для сечений s_U и $s_{U'}$, заданных над разными подмножествами базы X , операцию умножения нельзя определить. Поэтому все множество сечений группового расслоения группой не является, но представляет собой так называемый *пучок сечений* (sheaf of sections) (см. Приложение В). В частности, мы будем иметь дело с пучком сечений $\mathcal{S}(M)$ касательного расслоения TM и пучком сечений $\mathcal{S}^*(M)$ кокасательного расслоения T^*M над многообразием M , а также пучками

$$\left(\bigotimes^n \mathcal{S}^*(M) \right) \otimes \left(\bigotimes^m \mathcal{S}(M) \right)$$

тензорных полей на M .

Рассмотрим теперь касательные и кокасательные расслоения над многообразиями, которые сами являются расслоениями. Естественно, что такие касательные и кокасательные расслоения обладают некоторой дополнительной структурой.

Пусть $\pi_Y : TY \rightarrow Y$ — касательное расслоение над многообразием Y , которое в свою очередь является расслоением $\pi : Y \rightarrow X$ над многообразием X . При заданных расслоенных координатах (x^λ, y^i) на Y , голономными координатами на TY служат

$$(x^\lambda, y^i, \dot{x}^\lambda, \dot{y}^i),$$

где $(\dot{x}^\lambda, \dot{y}^i)$ — координаты на касательных пространствах к Y , заданные относительно голономных базисов $\{\partial_\lambda, \partial_i\}$:

$$\begin{aligned} \dot{y}^i &= \frac{\partial y^i}{\partial y^j} \dot{y}^j + \frac{\partial y^i}{\partial x^\lambda} \dot{x}^\lambda, \\ \dot{x}^{\lambda\mu} &= \frac{\partial x^{\lambda\mu}}{\partial x^\lambda} \dot{x}^\lambda. \end{aligned}$$

Расслоение TY естественным образом является также расслоением над X :

$$\pi \circ \pi_Y : TY \rightarrow X,$$

а касательный морфизм $T\pi$ к π задает на нем еще и структуру расслоения над TX :

$$\begin{aligned} T\pi : TY &\rightarrow TX, \\ T\pi : (x^\lambda, y^i, \dot{x}^\lambda, \dot{y}^i) &\mapsto (x^\lambda, \dot{x}^\lambda). \end{aligned} \tag{1.24}$$

В результате имеет место следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} TY & \xrightarrow{T\pi} & TX \\ \pi_Y \downarrow & & \downarrow \pi_X \\ Y & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

Пусть Φ — послойный морфизм (1.18) расслоения $Y \rightarrow X$ в расслоение $Y' \rightarrow X'$ над $f: X \rightarrow X'$. Касательный морфизм к Φ имеет вид

$$T\Phi: TY \rightarrow TY' \\ (\dot{x}^\lambda, \dot{y}^i) \circ T\Phi = (\partial_\mu f^\lambda \dot{x}^\mu, \partial_\mu \Phi^i \dot{x}^\mu + \partial_j \Phi^i \dot{y}^j).$$

Он представляет собой как линейный послойный морфизм над Φ , так и послойный морфизм над Tf :

$$\begin{array}{ccc} TY & \xrightarrow{T\Phi} & TY' \\ \downarrow & & \downarrow \\ TX & \xrightarrow{Tf} & TX' \end{array}$$

В частности, если $Y \rightarrow X$ — расслоение с алгебраической структурой, то расслоение $TY \rightarrow TX$ (1.24) наследует эту алгебраическую структуру, задаваемую касательными морфизмами к морфизмам структуры (1.22) и (1.23).

ПРИМЕР 1.3.12. Если $Y \rightarrow X$ векторное расслоение, то $TY \rightarrow TX$ тоже векторное расслоение. Если $Y \rightarrow X$ — аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением $\bar{Y} \rightarrow X$, то $TY \rightarrow TX$ — тоже аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением $T\bar{Y} \rightarrow TX$. \square

Касательное расслоение $TY \rightarrow Y$ над расслоением $Y \rightarrow X$ обладает вложенным векторным подрасслоением

$$VY = \text{Ker } T\pi,$$

задаваемым координатными условиями

$$\dot{x}^\lambda = 0.$$

Это подрасслоение состоит только из векторов, касательных к слоям расслоения Y , и называется *вертикальным касательным расслоением* (vertical tangent bundle) над Y , т. е. его слоями являются вертикальные подпространства касательных пространств к Y , натянутые на базисные векторы $\{\partial_i\}$. Координатами на VY служат голономные координаты $(x^\lambda, y^i, \dot{y}^i)$.

Выделение вертикального подрасслоения VY тем более имеет смысл, что, если дан послойный морфизм $\Phi: Y \rightarrow Y'$, то касательный морфизм $T\Phi$ отображает $VY \subset TY$ в $VY' \subset TY'$. Ограничение $T\Phi$ на вертикальное подрасслоение VY называется *вертикальным касательным морфизмом* к Φ и обозначается $V\Phi$. Это линейный послойный

морфизм над Φ :

$$\begin{array}{ccc} VY & \xrightarrow{V\Phi} & VY' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\Phi} & Y' \end{array},$$

$$\dot{y}^i \circ V\Phi = \partial_j \Phi^i \dot{y}^j.$$

Во многих важных случаях вертикальные касательные расслоения устроены следующим простым способом.

Говорят, что расслоение $Y \rightarrow X$ допускает *вертикальное расщепление* (vertical splitting), если вертикальное касательное расслоение $VY \rightarrow Y$ тривиально и имеет место изоморфизм

$$\alpha : VY \xrightarrow{Y} Y \times_X \bar{Y}, \tag{1.25}$$

где $\bar{Y} \rightarrow X$ некоторое векторное расслоение.

ПРИМЕР 1.3.13. Для всякого векторного расслоения $Y \rightarrow X$ существует *каноническое вертикальное расщепление*

$$VY = Y \times_X Y. \tag{1.26}$$

Аффинное расслоение $Y \rightarrow X$, моделируемое над векторным расслоением $\bar{Y} \rightarrow X$, допускает *каноническое вертикальное расщепление*

$$VY = Y \times_X \bar{Y}. \tag{1.27}$$

□

Расслоенные координаты y^i на расслоении Y называются *подчиненными вертикально-му расщеплению* (1.25), если соответствующие голономные координаты на вертикальном касательном расслоении VY имеют вид

$$\dot{y}^i = \bar{y}^i \circ \alpha,$$

где (x^μ, \bar{y}^i) — расслоенные координаты на \bar{Y} . В этом случае координатные преобразования $\dot{y}^i \rightarrow \dot{y}'^i$ не зависят от координат y^i . Например, системы координат на векторных и аффинных расслоениях подчинены соответствующим каноническим вертикальным расщеплениям (1.26), когда $\dot{y}^i = y^i$, и (1.27), когда $\dot{y}^i = \bar{y}^i$.

По примеру вертикального касательного расслоения, индуцированное расслоение

$$Y \times_X TX$$

можно назвать *горизонтальным расслоением* над Y . Слоями этого расслоения в $y \in Y$ служат касательные пространства $T_{\pi(y)}X$ к X , но, в отличие от VY , его элементы не являются касательными векторами к Y . Другими словами, не существует канонического вложения $Y \times_X TX$ в TY . В то же время имеет место каноническая сюръекция

$$\pi_T : TY \xrightarrow{Y} Y \times_X TX,$$

$$(x^\lambda, y^i, \dot{x}^\lambda, \dot{y}^i) \mapsto (x^\lambda, y^i, \dot{x}^\lambda).$$

Рассмотрим теперь кокасательное расслоение $T^*Y \rightarrow Y$ над расслоением $Y \rightarrow X$. При заданных расслоенных координатах (x^λ, y^i) на Y , голономными координатами на T^*Y являются

$$(x^\lambda, y^i, \dot{x}_\lambda, \dot{y}_i),$$

где $(\dot{x}_\lambda, \dot{y}_i)$ — координаты на кокасательных пространствах к Y , заданные относительно голономных базисов $\{dx^\lambda, dy^i\}$, дуальных $\{\partial_\lambda, \partial_i\}$. Подобно касательному расслоению TY , кокасательное расслоение T^*Y является также расслоением над X , но T^*Y не образует расслоения над T^*X , как это видно из закона преобразований координат

$$\dot{x}'_\mu = \frac{\partial y^i}{\partial x'^\mu} \dot{y}_i + \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \dot{x}_\lambda.$$

Вертикальное кокасательное расслоение $V^*Y \rightarrow Y$ над Y определяется как векторное расслоение, дуальное вертикальному касательному расслоению $VY \rightarrow Y$. Однако, в отличие от вертикального подрасслоения VY касательного расслоения TY , какого-либо канонического вложения V^*Y в кокасательное расслоение T^*Y над Y не существует. Действительно, обозначим $\{\bar{d}y^i\}$ базисы слоев расслоения V^*Y , дуальные базисам $\{\partial_i\}$ слоев расслоения VY . Их преобразования

$$\bar{d}y'^i = \frac{\partial y^i}{\partial y^j} \bar{d}y^j$$

отличаются от преобразований

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial y^j} dy^j + \frac{\partial y^i}{\partial x^\lambda} dx^\lambda$$

базисных элементов dy^i слоев кокасательного расслоения T^*Y . В то же время имеет место каноническая сюръекция

$$\begin{aligned} T^*Y &\xrightarrow{Y} V^*Y, \\ \dot{x}_\lambda dx^\lambda + \dot{y}_i dy^i &\mapsto \dot{y}_i \bar{d}y^i. \end{aligned}$$

Полностью соотношения между расслоениями TY и VY , а также между T^*Y и V^*Y можно представить в виде двух *точных последовательностей*:

$$0 \rightarrow VY \hookrightarrow TY \rightarrow Y \times_X TX \rightarrow 0, \quad (1.28a)$$

$$0 \rightarrow Y \times_X T^*X \hookrightarrow T^*Y \rightarrow V^*Y \rightarrow 0, \quad (1.28b)$$

где все отображения — это послойные морфизмы над Y . Точность последовательностей означает, что образ предыдущего отображения содержится в ядре последующего.

Сделаем два технических замечания.

- *Ядром послойного морфизма* Φ над X расслоения $Y \rightarrow X$ в некоторое векторное расслоение $Y' \rightarrow X$ называется прообраз

$$\text{Ker } \Phi = \Phi^{-1}(\widehat{0}(X))$$

в Y образа $\widehat{0}(X) \subset Y'$ глобального нулевого сечения $\widehat{0}(x) = 0$ векторного расслоения Y' .

- В дальнейшем для упрощения выражений мы будем использовать символы TX и T^*X для обозначения любых индуцированных расслоений вида

$$Y \times_X TX, \quad Y \times_X T^*X.$$

Точные последовательности (1.28a) и (1.28b) играют фундаментальную роль в дифференциальной геометрии. Хотя TX над Y не является каноническим подрасслоением TY , а V^*Y не является каноническим подрасслоением T^*Y , могут существовать различные вложения

$$\begin{aligned} Y \times_X TX &\hookrightarrow TY, \\ \partial_\lambda &\mapsto \partial_\lambda + \Gamma_\lambda^i(y)\partial_i, \end{aligned} \tag{1.29}$$

и

$$\begin{aligned} V^*Y &\hookrightarrow T^*Y, \\ \bar{d}y^i &\mapsto dy^i - \Gamma_\lambda^i(y)dx^\lambda, \end{aligned} \tag{1.30}$$

которые, как говорится, расщепляют точные последовательности (1.28a) и (1.28b). Каждое такое расщепление по определению соответствует заданию некоторой связности Γ на расслоении $Y \rightarrow X$ (см. §1.6).

§ 4. Дифференциальные формы

Этот параграф посвящен векторным полям и различным типам дифференциальных форм на многообразиях и расслоениях. Все они — это частные случаи тензорных полей — глобальных сечений тензорных расслоений (см. Пример 1.3.11).

- Векторное поле на многообразии M — это сечение касательного расслоения TM .
- *Внешние дифференциальные формы* на M — сечения внешних произведений кокасательных расслоений

$$\overset{r}{\bigwedge} T^*M.$$

- *Тангенциально-значные дифференциальные формы* на M — сечения тензорных произведений

$$\overset{r}{\bigwedge} T^*M \otimes TM.$$

- Тангенциально-значные формы, а точнее, дифференциальные формы со значениями в касательных расслоениях, — это частный случай *векторнозначных форм* — сечений тензорных произведений

$$\overset{r}{\bigwedge} T^*M \otimes_M E,$$

где $E \rightarrow M$ — некоторое векторное расслоение над M .

Пусть M — это m -мерное многообразие с координатами (z^μ) и $u = u^\mu \partial_\mu$ — ненулевое векторное поле на M . Из известных теорем о существовании и единственности решения такой системы уравнений следует, что через каждую точку $z_0 \in M$ проходит одно и только одно решение $z(t, z_0)$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dz^\mu}{dt} = u^\mu(z(t)), \quad z(0, z_0) = z_0,$$

определенное на интервале $|t| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Векторное поле называется *полным*, если его интегральные кривые определены при всех $z_0 \in M$, $t \in \mathbb{R}$. Для этого достаточно, чтобы они были определены при всех $z_0 \in M$ и некотором $\varepsilon > 0$.

Полное векторное поле u на многообразии M индуцирует семейство диффеоморфизмов

$$G_u(t) : M \ni z_0 \mapsto z(t, z_0) \in M \quad (1.31)$$

многообразия M на себя. Они удовлетворяют естественным условиям

$$\begin{aligned} G_u(0) &= \text{Id}_M, \\ G_u(t + t') &= G_u(t') \circ G_u(t), \\ G_u(-t) &= G_u^{-1}(t) \end{aligned}$$

и образуют однопараметрическую группу Ли, действующую на M :

$$\mathbb{R} \times M \rightarrow M.$$

Мы обозначим ее G_u .

Диффеоморфизмы (1.31) многообразия M порождают соответствующие преобразования (1.19) векторных полей

$$\tau'(z) = (TG_u(t) \circ \tau)(G_u(t)^{-1}(z)),$$

пфаффовых форм

$$\phi'(z) = (T^*G_u(t) \circ \phi)(G_u(t)^{-1}(z))$$

и вообще пучков тензорных полей на многообразии M . Действие однопараметрической группы G_u на тензорных полях удобно представить, задав ее генератор

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_u \phi_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_k}(z) &= (\partial_{\nu_1} u^\alpha) \phi_{\alpha \nu_2 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_k}(z) + \dots + (\partial_{\nu_n} u^\alpha) \phi_{\nu_1 \dots \alpha}^{\mu_1 \dots \mu_k}(z) - \\ &- (\partial_\alpha u^{\mu_1}) \phi_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\alpha \mu_2 \dots \mu_k}(z) - \dots - (\partial_\alpha u^{\mu_k}) \phi_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \alpha}(z) + u^\lambda \partial_\lambda \phi_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_k}(z). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Он называется *производной Ли* или *дифференцированием Ли* вдоль векторного поля u и удовлетворяет привычным для генераторов и дифференцирований условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_u(\phi + \phi') &= \mathbf{L}_u \phi + \mathbf{L}_u \phi', \\ \mathbf{L}_u(\phi \otimes \phi') &= \mathbf{L}_u \phi \otimes \phi' + \phi \otimes \mathbf{L}_u \phi'. \end{aligned}$$

В частности, если ϕ — вещественная функция на многообразии M , ее производная Ли сводится к обычному оператору дифференцирования по направлению u :

$$\mathbf{L}_u \phi = u^\lambda \partial_\lambda \phi.$$

В случае векторного поля $\phi = u'$, его производную Ли (1.32) можно представить в виде коммутатора или скобок Ли векторных полей u и u' :

$$L_u u' = (u^\alpha \partial_\alpha u'^\mu - u'^\alpha \partial_\alpha u^\mu) \partial_\mu = [u, u'], \quad (1.33)$$

где базисные векторы ∂_μ представляются соответствующими операторами частных производных $\partial/\partial z^\mu$.

Конструкции дифференцирования Ли (1.32) и скобок Ли (1.33) могут быть распространены на произвольное (будь то особое или локальное) векторное поле u на многообразии M . При этом скобки Ли (1.33) наделяют пучок $\mathcal{F}(M)$ векторных полей на M структурой пучка алгебр Ли. Другими словами всякое векторное поле на многообразии может быть представлено как элемент некоторой алгебры Ли.

Обратно, пусть G — некоторая группа Ли диффеоморфизмов многообразия M , которая действует на M эффективно. Имеет место вложение алгебры Ли \mathcal{G} группы G в пучок векторных полей на M , при котором всякому элементу $I \in \mathcal{G}$ ставится в соответствие векторное поле u_I такое, что действие генератора I на тензорные поля совпадает с их дифференцированием Ли L_{u_I} вдоль векторного поля u_I . Оно называется *фундаментальным векторным полем*, отвечающим генератору I алгебры Ли \mathcal{G} . Можно сказать, что фундаментальное векторное поле $u_I(z)$ указывает направление, в котором переносится точка z под действием генератора I группы диффеоморфизмов G . На практике это означает, что, если мы хотим исследовать инвариантность той или иной величины, заданной на многообразии, относительно действия некоторой группы Ли диффеоморфизмов этого многообразия, часто бывает достаточно рассмотреть соответствующие производные Ли.

Перейдем теперь к дифференциальным формам на многообразии. Как уже отмечалось, это внешние и векторнозначные дифференциальные формы.

Изложение, краткое или во всех деталях, аппарата внешних дифференциальных форм можно найти в любой книге по дифференциальной геометрии и в обширной литературе по калибровочной теории. Поэтому напомним здесь только основные выражения.

Пусть M — это m -мерное многообразие с координатами (z^λ) . Внешними дифференциальными формами степени r на M (или просто внешними r -формами) именуются сечения расслоения

$$\bigwedge^r T^*M \rightarrow M. \quad (1.34)$$

Например, сечения кокасательного расслоения T^*M в такой терминологии называются внешними 1-формами или, как уже говорилось, пфаффовыми формами. Вещественные функции на M принято считать внешними 0-формами.

Голономные базисы слоев расслоения (1.34) составляют элементы $dz^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\lambda_r}$ с фиксированным порядком $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. По определению это полностью антисимметризованные тензорные произведения

$$dz^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\lambda_r} = \sum_{[\mu_1 \dots \mu_r]} \text{sgn} \left(\begin{matrix} \lambda_1 \dots \lambda_r \\ \mu_1 \dots \mu_r \end{matrix} \right) dz^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes dz^{\mu_r},$$

где суммирование производится по всем перестановкам $[\mu_1 \dots \mu_r]$ индексов $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ и $\text{sgn}() = \pm 1$ — знак такой перестановки. В голономных координатах, внешняя r -форма принимает вид

$$\phi = \phi_{\mu_1 \dots \mu_r}(z) dz^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes dz^{\mu_r} = \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_r}(z) dz^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\lambda_r}, \quad (1.35)$$

где в последнем выражении сумма берется по всем упорядоченным некоторым образом наборам индексов $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. При выборе другого упорядочивания одного и того же

набора индексов надо принимать во внимание, что коэффициентные функции $\phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}(z)$ в разложении (1.35) антисимметричны по всем индексам.

ПРИМЕР 1.4.1. Внешняя 3-форма на 4-мерном многообразии имеет вид

$$\phi = \phi_{123}(z) dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3 + \phi_{234}(z) dz^2 \wedge dz^3 \wedge dz^4 + \phi_{124}(z) dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^4 + \phi_{134}(z) dz^1 \wedge dz^3 \wedge dz^4.$$

Разложение (1.35) внешней m -формы на m -мерном многообразии содержит только одно слагаемое

$$\phi = \phi(z) dz^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dz^{\lambda_m}.$$

Подчеркнем, что $\phi(z)$ в этом выражении не является вещественной функцией. При координатном преобразовании она делится на якобиан. Строго говоря, надо было бы написать $\phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}(z)$. \square

Внешние r -формы на многообразии M образуют пучок

$$\bigwedge^r \mathcal{F}^*(M),$$

а все внешние формы на M — пучок

$$\bigwedge \mathcal{F}^*(M) = R(M) \oplus \left(\bigoplus_1^m \left(\bigwedge^r \mathcal{F}^*(M) \right) \right),$$

где $R(M)$ обозначает пучок вещественных функций на M .

Перечислим основные операции над внешними формами.

(i) Прежде всего это — операция *внешнего произведения* (exterior product) \wedge внешних форм, которая наделяет пучок внешних форм на многообразии M структурой пучка градуированных алгебр. Она обладает следующими свойствами.

- Пусть ϕ — внешняя r -форма и ϕ' — внешняя k -форма, тогда $\phi \wedge \phi'$ — это внешняя $(r+k)$ -форма.
- Наряду с линейностью относительно сложения

$$\sigma \wedge (\phi + \phi') = \sigma \wedge \phi + \sigma \wedge \phi',$$

имеем следующее правило перестановки

$$\phi \wedge \phi' = (-1)^{|\phi||\phi'|} \phi' \wedge \phi,$$

где символ $|\phi|$ обозначает степень внешней формы ϕ .

- Используя предыдущие свойства и то что

$$(dz^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dz^{\lambda_r}) \wedge (dz^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dz^{\mu_k}) = dz^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dz^{\lambda_r} \wedge dz^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dz^{\mu_k},$$

можно легко получить внешнее произведение любых внешних форм, заданных в координатном виде (1.35).

(ii) Операция *свертки* внешней r -формы (1.35) и векторного поля

$$u = u^\mu \partial_\mu$$

на многообразии M дается выражением

$$u \lrcorner \phi = \sum_{p=1}^r (-1)^{p-1} u^\mu \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_{p-1} \mu \lambda_{p+1} \dots \lambda_r} dz^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dz^{\lambda_p}} \wedge \dots \wedge dz^{\lambda_r},$$

где $\widehat{dz^{\lambda_p}}$ указывает на то, что элемент dz^{λ_p} удален. Эта операция естественным образом линейна по сложению внешних форм и удовлетворяет условию

$$u \lrcorner (\phi \wedge \phi') = (u \lrcorner \phi) \wedge \phi' + (-1)^{|\phi|} \phi \wedge (u \lrcorner \phi').$$

Удобно ввести обозначения

$$\begin{aligned} \omega &= dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \\ \omega_\lambda &= \partial_\lambda \lrcorner \omega, \quad \partial_\mu \lrcorner \omega_\lambda = \omega_{\mu\lambda}. \end{aligned} \tag{1.36}$$

(iii) На пучке внешних форм определена операция *внешнего дифференцирования* или просто *внешний дифференциал* (exterior differential) d . Оператор d переводит внешнюю r -форму во внешнюю $(r + 1)$ -форму и обладает свойствами

$$\begin{aligned} dd &= 0, \\ d(\phi \wedge \phi') &= (d\phi) \wedge \phi' + (-1)^{|\phi|} \phi \wedge (d\phi'). \end{aligned}$$

В голономных координатах операция внешнего дифференцирования имеет вид

$$d\phi = \partial_\mu \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_r}(z) dz^\mu \wedge dz^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dz^{\lambda_r}.$$

ПРИМЕР 1.4.2. Если, ϕ — вещественная функция, то

$$d\phi = \partial_\mu \phi dz^\mu.$$

Если ϕ — 1-форма, тогда

$$d\phi = \partial_\mu \phi_\nu dz^\mu \wedge dz^\nu.$$

Например, выражение для тензора напряженности электромагнитного поля через его вектор-потенциал $A = A_\nu dx^\nu$ имеет вид

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = dA.$$

□

Внешняя форма ϕ называется *замкнутой*, если $d\phi = 0$. Внешняя форма ϕ называется *точной*, если $\phi = d\sigma$. Из свойств операции внешнего дифференцирования следует, что всякая точная форма является замкнутой, но не наоборот. Существуют топологические препятствия тому, чтобы замкнутая форма была точной. Это всегда имеет место на стягиваемом многообразии, все глобальные топологические характеристики которого тривиальны. Мы вернемся к этому вопросу в следующей главе.

(iv) Пусть $f : M \rightarrow M'$ — морфизм многообразий. Всякая внешняя форма φ на M' порождает внешнюю форму $f^*\varphi$ на M , задаваемую соотношением

$$t \lrcorner f^*\varphi(z) = Tf(t) \lrcorner \varphi(f(z))$$

для всех элементов $t \in TM$ над одной и той же точкой $z \in M$. Она называется *индуцированной формой* (pullback form) на M . Например, всякая пфафхова форма

$$\phi(z') = \phi_\mu(z') dz'^\mu$$

на многообразии M' порождает пфафхову форму

$$f^*\phi(z) = \phi_\mu(f(z)) \frac{\partial f^\mu}{\partial z^\lambda} dz^\lambda$$

на многообразии M . Процедуру построения индуцированной формы легко распространить на внешние формы произвольной степени, используя соотношения

$$\begin{aligned} f^*(\phi \wedge \phi') &= f^*\phi \wedge f^*\phi', \\ f^*(d\phi) &= d(f^*\phi). \end{aligned}$$

В отличие от внешних форм, аппарат векторнозначных дифференциальных форм, хотя он давно разработан, не столь широко освещается в стандартных учебниках по дифференциальной геометрии и тем более мало известен физикам. В то же время векторнозначные формы на многообразиях и расслоениях составляют основу математической техники, которую мы будем использовать.

Тангенциально-значной формой (tangent-valued form) степени r на многообразии M называется сечение расслоения

$$\bigwedge^r T^*M \otimes TM \rightarrow M,$$

которое в голономных координатах имеет вид

$$\phi = \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^\mu(z) dz^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dz^{\lambda_r} \otimes \partial_\mu.$$

ПРИМЕР 1.4.3. Легко видеть, что тангенциально-значными 0-формами являются векторные поля на многообразии M . Существует взаимно однозначное соответствие между тангенциально-значными 1-формами

$$\theta : M \rightarrow T^*M \otimes TM$$

на многообразии M и линейными послыными морфизмами в себя касательного и кокасательного расслоений над M :

$$\begin{aligned} \theta : TM &\rightarrow TM, \\ \theta : T_z M \ni t &\mapsto t \lrcorner \theta(z) \in T_z M, \end{aligned} \tag{1.37}$$

и

$$\begin{aligned} \theta : T^*M &\rightarrow T^*M, \\ \theta : T_z^*M \ni t^* &\mapsto \theta(z) \lrcorner t^* \in T_z^*M. \end{aligned}$$

Чтобы не усложнять обозначения, будем использовать для этих морфизмов тот же самый символ θ , что и для соответствующей формы. В частности, тождественным морфизмам Id_{TM} и Id_{T^*M} соответствует *каноническая тангенциально-значная 1-форма*

$$\theta_M = dz^\lambda \otimes \partial_\lambda \quad (1.38)$$

на многообразии M , которая задается условием

$$\partial_\lambda \lrcorner \theta_M = \partial_\lambda.$$

Канонической эта форма называется потому, что имеет один и тот же вид во всех голономных системах координат. \square

Тангенциально-значные формы на многообразии M образуют пучок, который является тензорным произведением

$$\wedge \mathcal{F}^*(M) \otimes \mathcal{F}(M)$$

пучка внешних форм и пучка векторных полей на M . Иными словами тангенциально-значную форму можно представить как своего рода тензорное произведение внешней формы и векторного поля. На тангенциально-значных формах определена операция *скобок Frölicher—Nijenhuis* (или просто $(F-N)$ -скобок), которая обобщает скобки Ли на пучке векторных полей:

$$\begin{aligned} [\phi, \sigma]_{FN} &= [\alpha \otimes u, \beta \otimes v]_{FN} = \\ &= \alpha \wedge \beta \otimes [u, v] + \alpha \wedge \mathbf{L}_u \beta \otimes v - (-1)^{rs} \beta \wedge \mathbf{L}_v \alpha \otimes u + \\ &\quad + (-1)^r (v \lrcorner \alpha) \wedge d\beta \otimes u - (-1)^{rs+s} (u \lrcorner \beta) \wedge d\alpha \otimes v, \\ &\alpha \in \wedge^r \mathcal{F}^*(M), \quad \beta \in \wedge^s \mathcal{F}^*(M), \quad u, v \in \mathcal{F}(M), \end{aligned}$$

где \mathbf{L}_u и \mathbf{L}_v — производные Ли внешних форм. В голономных координатах $(F-N)$ -скобки имеют вид

$$\begin{aligned} [\phi, \sigma]_{FN} &= \left\{ \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^\nu \partial_\nu \sigma_{\lambda_{r+1} \dots \lambda_{r+s}}^\mu - (-1)^{rs} \sigma_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^\nu \partial_\nu \phi_{\lambda_{s+1} \dots \lambda_{r+s}}^\mu - \right. \\ &\quad - (-1)^{r+p} \sum_{p=1}^r \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_{p-1} \nu \lambda_{p+1} \dots \lambda_r}^\mu \partial_{\lambda_p} \sigma_{\lambda_{r+1} \dots \lambda_{r+s}}^\nu + \\ &\quad \left. + (-1)^{r+s+s+p} \sum_{p=1}^s \sigma_{\lambda_1 \dots \lambda_{p-1} \nu \lambda_{p+1} \dots \lambda_s}^\mu \partial_{\lambda_p} \phi_{\lambda_{s+1} \dots \lambda_{r+s}}^\nu \right\} dz^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dz^{\lambda_{r+s}} \otimes \partial_\mu. \end{aligned}$$

Они подчиняются правилу перестановки

$$[\phi, \sigma]_{FN} = -(-1)^{|\phi||\sigma|} [\sigma, \phi]_{FN}$$

и наделяют пучок *тангенциально-значных форм* структурой пучка градуированных алгебр Ли.

Если фиксировать форму θ , то $(F-N)$ -скобки задают на тангенциально-значных формах операцию $(F-N)$ -дифференцирования или другими словами $(F-N)$ -дифференциал

$$d_\theta : \sigma \mapsto d_\theta \phi = [\theta, \sigma]_{FN}. \quad (1.39)$$

Он обладает следующими свойствами

$$d_\theta[\phi, \sigma]_{FN} = [d_\theta\phi, \sigma]_{FN} + (-1)^{|\theta||\phi|}[\phi, d_\theta\sigma]_{FN},$$

$$d_\theta d_\eta - (-1)^{|\eta||\theta|} d_\eta d_\theta = d_{[\theta, \eta]}_{FN}.$$

ПРИМЕР 1.4.4. Если $\theta = u$ — векторное поле, дифференциал d_u (1.39) сводится к производной Ли тангенциально-значной формы

$$L_u\sigma = [u, \sigma]_{FN}.$$

□

ПРИМЕР 1.4.5. Приведем полезное выражение для производной Ли внешних дифференциальных форм

$$L_u\sigma = u \lrcorner d\sigma + d(u \lrcorner \sigma). \quad (1.40)$$

□

Рассмотрим теперь дифференциальные формы на многообразиях, которые являются расслоениями.

Пусть $Y \rightarrow X$ — расслоение, наделенное атласом расслоенных координат (1.13). Напомним (отсылая к точным последовательностям (1.28a) и (1.28b)), что касательное расслоение TY содержит подрасслоение VY , а кокасательное расслоение T^*Y — подрасслоение $Y \times T^*X$, которое по соглашению обозначается просто T^*X . В этой связи договоримся о терминологии.

Все формы на Y , ограниченные на подрасслоение $T^*X \subset T^*Y$, будем называть *горизонтальными формами* (horizontal forms), а тангенциально-значные формы, принимающие значения в подрасслоении $VY \subset TY$ — *вертикальными формами*. К последним можно отнести и *вертикальные векторные поля*

$$u = u^i \partial_i : Y \rightarrow VY$$

на расслоении Y .

Среди векторных полей на расслоении выделяют также *проектируемые векторные поля* (projective vector fields). Векторное поле u на расслоении $Y \rightarrow X$ называется проектируемым, если оно накрывает некоторое векторное поле τ_u на базе расслоения X , т. е. имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{u} & TY \\ \pi \downarrow & & \downarrow T\pi \\ X & \xrightarrow{\tau_u} & TX \end{array}$$

В голономных координатах проектируемое векторное поле имеет вид

$$u = u^\mu(x) \partial_\mu + u^i(y) \partial_i,$$

т. е. его коэффициенты разложения $u^\mu(x)$ зависят только от координат на X . Такое векторное поле на Y проектируется на векторное поле

$$\tau_u = u^\mu(x) \partial_\mu$$

на X . Например, всякое вертикальное векторное поле u на расслоении $Y \rightarrow X$ является проектируемым и проектируется на всюду нулевое векторное поле $\tau_u = 0$ на X .

Тангенциально-значные формы на расслоении, которые представляют собой тензорные произведения внешних форм и проектируемых векторных полей, именууют *проектируемыми формами*.

В основном мы будем иметь дело со следующими типами внешних и тангенциально-значных форм на расслоениях:

- *внешние горизонтальные формы*

$$\begin{aligned} \phi : Y &\rightarrow \bigwedge^r T^* X, \\ \phi &= \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_r}(y) dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_r}; \end{aligned}$$

- *тангенциально-значные горизонтальные формы*

$$\begin{aligned} \phi : Y &\rightarrow \bigwedge^r T^* X \otimes_Y TY, \\ \phi &= dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_r} \otimes [\phi_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^\mu(y) \partial_\mu + \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^i(y) \partial_i]; \end{aligned}$$

- *тангенциально-значные проектируемые горизонтальные формы*

$$\phi = dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_r} \otimes [\phi_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^\mu(x) \partial_\mu + \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^i(y) \partial_i];$$

- *вертикально-значные горизонтальные формы*

$$\begin{aligned} \phi : Y &\rightarrow \bigwedge^r T^* X \otimes_Y VY, \\ \phi &= \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^i(y) dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_r} \otimes \partial_i. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1.4.6. На всяком кокасательном расслоении T^*M определена каноническая внешняя горизонтальная 1-форма

$$\theta = -\dot{z}_\lambda dz^\lambda, \tag{1.41}$$

которая называется *формой Лиувилля*. Ее внешним дифференциалом со знаком минус является каноническая *симплектическая форма*

$$\Omega = -d\theta = d\dot{z}_\lambda \wedge dz^\lambda$$

на T^*M . □

ПРИМЕР 1.4.7. Вертикально-значные горизонтальные 1-формы

$$\begin{aligned} \sigma : Y &\rightarrow T^* X \otimes_Y VY, \\ \sigma &= \sigma_\lambda^i(y) dx^\lambda \otimes \partial_i, \end{aligned}$$

на Y именууются часто *припаявающими формами* (soldering forms). Например, рассмотрим касательное расслоение TX . Имеет место вертикальное расщепление

$$VTX = TX \times TX.$$

На TX определена каноническая припаивающая форма

$$\sigma = dx^\mu \otimes \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu}.$$

При этом $\text{rg}_2 \circ \sigma = \theta_X$ — это каноническая тангенциально-значная 1-форма на X из Примера 1.4.3, которую поэтому тоже часто называют припаивающей формой. \square

Помимо тангенциально-значных форм, мы будем рассматривать на расслоениях еще некоторые типы векторнозначных форм. Это дифференциальные формы на Y , которые представляют собой морфизмы

$$Y \rightarrow \bigwedge_Y^r T^*Y \otimes TX, \quad (1.42)$$

$$\phi = \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^\mu(y) dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_r} \otimes \partial_\mu,$$

и

$$Y \rightarrow \bigwedge_Y^r T^*Y \otimes V^*Y, \quad (1.43)$$

$$\phi = \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_r i}(y) dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_r} \otimes \bar{d}y^i.$$

Подчеркнем, что формы (1.42) не являются тангенциально-значными формами, поскольку индуцированное на Y расслоение $Y \times_X TX$ не есть подрасслоение касательного расслоения TY (см. точную последовательность (1.28a)). В частности, к ним не применима операция (F-N)-дифференцирования. В свою очередь, формы (1.43) не являются внешними формами, поскольку вертикальное кокасательное расслоение V^*Y не есть подрасслоение кокасательного расслоения T^*Y (см. точную последовательность (1.28b)), и к ним не применима операция внешнего дифференцирования.

ПРИМЕР 1.4.8. Формой типа (1.42) на расслоении $\pi : Y \rightarrow X$ является форма

$$\pi^* \phi = \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^\mu(x) dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_r} \otimes \partial_\mu,$$

индуцированная из тангенциально-значной формы ϕ на X . Формы ϕ и $\pi^* \phi$ имеют одно и то же выражение в голономных координатах, и мы их будем обозначать одним и тем же символом ϕ . В частности, мы будем иметь дело с формой

$$\theta_X : Y \rightarrow T^*X \otimes_Y TX,$$

$$\theta_X = dx^\lambda \otimes \partial_\lambda,$$

которая индуцирована на Y из канонической тангенциально-значной формы θ_X (1.38) на базе X . \square

В дальнейшем дифференциальные формы на расслоении $Y \rightarrow X$ всех приведенных выше типов будут часто называться просто формами, а все горизонтальные n -формы — *горизонтальными плотностями*.

§ 5. Многообразия струй

Динамика классических полей, описываемых как сечения s тех или иных расслоений $Y \rightarrow X$, математически строго формулируется на языке струй $j_x^k s$ этих сечений, когда сечения в точке $x \in X$ отождествляются по их значениям и значениям их частных производных до некоторого k -го порядка включительно. Действительно, если полевые уравнения, например, содержат производные полей не более второго порядка, нет особой необходимости различать эти поля по значениям их высших производных. Однако только одного этого наблюдения было бы недостаточно, чтобы развивать аппарат струй, не обладай пространства струй рядом весьма привлекательных свойств.

Место, которое занимают пространства струй в дифференциальной геометрии, и их применение в теории поля обусловлены следующим.

- Пространства струй сечений расслоений являются конечномерными многообразиями, что позволяет описывать динамику полевых моделей на конечномерных конфигурационных и фазовых пространствах.
- Многие объекты в теории струй выражаются через привычные тангенциально-значные формы, которыми легко оперировать.
- Над многообразием струй первого порядка существует каноническое расщепление точных последовательностей (1.28a) и (1.28b), что лежит в основе применения струй в теории связностей и в дифференциальной геометрии в целом. Это приводит к появлению связностей и в описании динамики полевых систем.

Имея в виду последующие приложения к теории поля, мы здесь ограничимся формализмом струй в основном первого и второго порядков.

Пусть дано расслоение $Y \rightarrow X$. Рассмотрим классы эквивалентности $j_x^1 s$, $x \in X$, сечений s расслоения Y такие, что сечения s и s' принадлежат одному и тому же классу эквивалентности $j_x^1 s$ тогда и только тогда, когда

$$Ts|_{T_x X} = Ts'|_{T_x X}.$$

Другими словами, сечения из $j_x^1 s$ отождествляются по своим значениям

$$s^i(x) = s'^i(x)$$

и значениям своих частных производных первого порядка

$$\partial_\mu s^i(x) = \partial_\mu s'^i(x)$$

в точке x . Класс эквивалентности $j_x^1 s$ называют *струей сечений* (jet) s в точке $x \in X$. Обозначим $J^1 Y$ множество всех струй сечений расслоения Y во всех точках X .

Существует несколько эквивалентных способов, чтобы наделить множество струй $J^1 Y$ структурой многообразия. Не будем здесь вдаваться в детали. Результат получается следующий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5.1. Пусть $Y \rightarrow X$ — расслоение с атласом расслоенных координат (x^λ, y^i) (1.13). Множество струй $J^1 Y$, будучи наделенным координатным атласом

$$(x^\lambda, y^i, y_\lambda^i), \tag{1.44}$$

$$(x^\lambda, y^i, y_\lambda^i)(j_x^1 s) = (x^\lambda, s^i(x), \partial_\lambda s^i(x)),$$

$$y_\lambda^i = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\lambda} (\partial_\mu + y_\mu^j \partial_j) y^i, \tag{1.45}$$

удовлетворяет всем требованиям, которые мы договорились выше предъявлять к многообразиям. Оно называется *многообразием струй* первого порядка или просто многообразием струй (jet manifold) расслоения Y . \square

В физической литературе координаты y_λ^i на J^1Y часто называют *координатами скоростей* или *координатами производных*, поскольку их преобразования полностью идентичны координатным преобразованиям производных полевых функций $\partial_\lambda s^i(x)$. То, что значения производных полевых функций выбираются в качестве независимых координат, напоминает известный прием при решении дифференциальных уравнений, когда производные переменных сами рассматриваются как независимые переменные, что позволяет, например, понизить порядок дифференциальных уравнений.

Многообразии струй имеет естественные расслоения

$$\pi^1 : J^1Y \ni j_x^1 s \mapsto x \in X \quad (1.46)$$

и

$$\pi_0^1 : J^1Y \ni j_x^1 s \mapsto s(x) \in Y. \quad (1.47)$$

Легко убедиться, что координаты (1.44) на многообразии струй подчинены этим расслоениям. Более того, преобразования перехода (1.45) указывают на то, что расслоение (1.47) является аффинным расслоением, моделируемым (как это следует из вида линейной части этих преобразований) над векторным расслоением

$$T^*X \otimes_Y VY \rightarrow Y. \quad (1.48)$$

Мы будем называть $J^1Y \rightarrow Y$ *расслоением струй*.

Заметим, что $J^1Y \rightarrow Y$ остается расслоением, даже если $Y \rightarrow X$ не расслоение, а расслоенное многообразие, и в общем случае оно не тривиально, даже если $Y \rightarrow X$ тривиально.

ПРИМЕР 1.5.1. Многообразии струй тривиального расслоения

$$\text{pr}_1 : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$$

является аффинным расслоением, моделируемым над индуцированным расслоением

$$T^*X \times_x \mathbb{R},$$

которое в общем случае не является тривиальным расслоением над $X \times \mathbb{R}$. Если однако базой тривиального расслоения является евклидово пространство \mathbb{R}^m , расслоение струй всегда тривиально. \square

ПРИМЕР 1.5.2. Пусть Y и Y' — расслоения над одной и той же базой X . Имеет место естественный диффеоморфизм

$$J^1(Y \times_X Y') = J^1Y \times_X J^1Y'. \quad (1.49)$$

\square

Следующая теорема играет ключевую роль в формализме струй. Она показывает, что расслоение струй является аффинным подрасслоением некоторых тензорных расслоений, что позволяет оперировать струями как обычными тангенциально-значными формами.

ТЕОРЕМА 1.5.2. Пусть J^1Y — многообразие струй расслоения $Y \rightarrow X$. Существуют два канонических мономорфизма над Y :

$$\lambda : J^1Y \hookrightarrow T^*X \otimes_Y TY, \quad (1.50)$$

$$\lambda = dx^\lambda \otimes \widehat{\partial}_\lambda = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + y_\lambda^i \partial_i),$$

и

$$\theta_1 : J^1Y \hookrightarrow T^*Y \otimes_Y VY, \quad (1.51)$$

$$\theta_1 = \widehat{d}y^i \otimes \partial_i = (dy^i - y_\lambda^i dx^\lambda) \otimes \partial_i.$$

□

Прагматическим следствием этой теоремы является то, что всякий элемент многообразия струй с координатами скоростей y_λ^i может быть представлен тангенциально-значными формами

$$dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + y_\lambda^i \partial_i)$$

или

$$(dy^i - y_\lambda^i dx^\lambda) \otimes \partial_i.$$

Рассмотрим теперь, как те или иные операции с расслоениями могут быть продолжены на многообразия струй этих расслоений.

Пусть Φ — послыйный морфизм расслоения $Y \rightarrow X$ в расслоение $Y' \rightarrow X$ над диффеоморфизмом f их общей базы X . Существует продолжение морфизма Φ до морфизма многообразий струй

$$J^1\Phi : J^1Y \rightarrow J^1Y',$$

$$J^1\Phi : j_x^1 s \mapsto j_{f(x)}^1 (\Phi \circ s \circ f^{-1}).$$

Это послыйный аффинный морфизм расслоения струй $J^1Y \rightarrow Y$ в расслоение струй $J^1Y' \rightarrow Y'$ над Φ :

$$\begin{array}{ccc} J^1Y & \xrightarrow{J^1\Phi} & J^1Y' \\ \pi_{01} \downarrow & & \downarrow \pi'_{01} \\ Y & \xrightarrow{\Phi} & Y' \end{array}$$

Будем называть его *струйным продолжением* (jet prolongation) морфизма Φ . В координатах (1.44) он имеет вид

$$y_\mu^i \circ J^1\Phi = (\partial_\lambda \Phi^i + \partial_j \Phi^i y_\lambda^j) \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\mu}.$$

ПРИМЕР 1.5.3. Струйные продолжения морфизмов удовлетворяют естественным условиям

$$J^1(\Phi \circ \Phi') = J^1\Phi \circ J^1\Phi',$$

$$J^1(\text{Id}_Y) = \text{Id}_{J^1Y}.$$

Если морфизм Φ — сюръекция или инъекция, таковым же является и его струйное продолжение $J^1\Phi$. □

Всякое сечение s расслоения $Y \rightarrow X$ может быть продолжено до сечения

$$(J^1 s)(x) = j_x^1 s,$$

$$(y^i, y_\lambda^i) \circ J^1 s = (s^i(x), \partial_\lambda s^i(x)),$$

расслоения $J^1 Y \rightarrow X$. Оно именуется *струйным продолжением сечения s* . Ясно, что не каждое сечение \bar{s} расслоения $J^1 Y \rightarrow X$ представляет собой струйное продолжение некоторого сечения расслоения $Y \rightarrow X$. Если же оно является таковым, т. е. $\bar{s} = J^1 s$, то мы будем называть его *голономным сечением*.

Всякое векторное поле

$$u = u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i$$

на расслоении $Y \rightarrow X$ может быть поднято до векторного поля

$$\bar{u} = r_1 \circ J^1 u : J^1 Y \rightarrow J^1 T Y \rightarrow T J^1 Y,$$

$$\bar{u} = u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i + (\partial_\lambda u^i + y_\lambda^j \partial_j u^i - y_\mu^i \partial_\lambda u^\mu) \partial_i^\lambda, \quad (1.52)$$

на многообразии струй $J^1 Y$ расслоения Y . Мы здесь использовали канонический послыйный морфизм

$$r_1 : J^1 T Y \rightarrow T J^1 Y,$$

$$\dot{y}_\lambda^i \circ r_1 = (\dot{y}^i)_\lambda - y_\mu^i \dot{x}_\lambda^\mu,$$

где под $J^1 T Y$ понимается многообразие струй расслоения $T Y \rightarrow X$. В частности, имеет место канонический изоморфизм

$$V J^1 Y = J^1 V Y,$$

$$\dot{y}_\lambda^i = (\dot{y}^i)_\lambda,$$

где $V J^1 Y$ — вертикальное касательное расслоение над расслоением $J^1 Y \rightarrow X$.

Если расслоение $Y \rightarrow X$ наделено той или иной алгебраической структурой, эта структура наследуется и расслоением $J^1 Y \rightarrow X$ благодаря струйным продолжениям соответствующих морфизмов.

ПРИМЕР 1.5.4. Если Y — векторное расслоение, то $J^1 Y \rightarrow X$ тоже векторное расслоение. В частности, пусть Y — векторное расслоение и $\langle \rangle$ — свертка

$$\langle \rangle : Y \times_X Y^* \longrightarrow X \times \mathbb{R},$$

$$r \circ \langle \rangle = y^i y_i,$$

где (y^i) и (\bar{y}^i) дуальные координаты на Y и Y^* соответственно. Струйным продолжением свертки $\langle \rangle$ является линейный послыйный морфизм

$$J^1 \langle \rangle : J^1 Y \times_X J^1 Y^* \longrightarrow T^* X \times \mathbb{R},$$

$$\dot{x}_\mu \circ J^1 = y_\mu^i y_i + y^i y_{i\mu}.$$

□

ПРИМЕР 1.5.5. Если Y — аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением \bar{Y} , то $J^1Y \rightarrow X$ тоже аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением $J^1\bar{Y} \rightarrow X$. \square

Основание для применения многообразий струй в дифференциальной геометрии дает тот факт, что существует каноническое расщепление точных последовательностей (1.28a) и (1.28b), если касательное и кокасательное расслоения над Y индуцировать на J^1Y . Другими словами, определены канонические вложения

$$\widehat{\lambda}: J^1Y \times_{X} TX \hookrightarrow_{J^1Y} J^1Y \times_{Y} TY$$

и

$$\widehat{\theta}_1: J^1Y \times_{Y} V^*Y \hookrightarrow_{J^1Y} J^1Y \times_{Y} T^*Y.$$

Они индуцированы каноническими морфизмами (1.50) и (1.51) и имеют координатный вид

$$\widehat{\lambda}: J^1Y \times_{X} TX \ni \partial_\lambda \mapsto \widehat{\partial}_\lambda = \partial_\lambda \lrcorner \lambda \in J^1Y \times_{Y} TY, \quad (1.53)$$

$$\widehat{\partial}_\lambda = \partial_\lambda + y_\lambda^i \partial_i,$$

и

$$\widehat{\theta}_1: J^1Y \times_{Y} V^*Y \ni dy^i \mapsto \widehat{dy}^i = \theta_1 \lrcorner dy^i \in J^1Y \times_{Y} T^*Y, \quad (1.54)$$

$$\widehat{dy}^i = dy^i - y_\lambda^i dx^\lambda.$$

Вложения (1.53) и (1.54) задают каноническое горизонтальное расщепление (canonical horizontal splitting) индуцированных расслоений

$$J^1Y \times_{Y} TY = \widehat{\lambda}(TX) \oplus_{J^1Y} VY, \quad (1.55)$$

$$\dot{x}^\lambda \partial_\lambda + \dot{y}^i \partial_i = \dot{x}^\lambda (\partial_\lambda + y_\lambda^i \partial_i) + (\dot{y}^i - \dot{x}^\lambda y_\lambda^i) \partial_i,$$

и

$$J^1Y \times_{Y} T^*Y = T^*X \oplus_{J^1Y} \widehat{\theta}_1(V^*Y), \quad (1.56)$$

$$\dot{x}_\lambda dx^\lambda + \dot{y}_i dy^i = (\dot{x}_\lambda + \dot{y}_i y_\lambda^i) dx^\lambda + \dot{y}_i (dy^i - y_\lambda^i dx^\lambda).$$

Иначе говоря, мы получаем канонические горизонтальные расщепления над J^1Y касательного и кокасательного расслоений TY и T^*Y .

Связь вышеизложенного с теорией связностей состоит в том, что при подстановке в формулы (1.53) и (1.54) некоторого глобального сечения Γ расслоения струй $J^1Y \rightarrow Y$:

$$y_\lambda^i \circ \Gamma = \Gamma_\lambda^i(y),$$

воспроизводятся выражения (1.29) и (1.30) для расщепление точных последовательностей (1.28a) and (1.28b) посредством связности на расслоении Y . Таким образом, связности на расслоении $Y \rightarrow X$ можно задавать, как это будет подробно рассмотрено в следующем параграфе, посредством глобальных сечений соответствующего расслоения струй $J^1Y \rightarrow Y$.

ПРИМЕР 1.5.6. Канонические горизонтальные расщепления (1.55) и (1.56) приводят, в частности, к каноническому *горизонтальному расщеплению* проектируемого векторного поля

$$u = u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i = u_H + u_V = u^\lambda (\partial_\lambda + y_\lambda^i \partial_i) + (u^i - u^\lambda y_\lambda^i) \partial_i \quad (1.57)$$

и канонической тангенциально-значной 1-формы

$$\begin{aligned} \theta_Y &= dx^\lambda \otimes \partial_\lambda + dy^i \otimes \partial_i = \lambda + \theta_1 = dx^\lambda \otimes \widehat{\partial}_\lambda + \widehat{dy}^i \otimes \partial_i = \\ &= dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + y_\lambda^i \partial_i) + (dy^i - y_\lambda^i dx^\lambda) \otimes \partial_i \end{aligned} \quad (1.58)$$

на расслоении Y . \square

Рассмотрим теперь многообразия струй второго порядка.

Пусть $J^1 Y$ — многообразие струй первого порядка расслоения $Y \rightarrow X$. Можно в свою очередь построить многообразие струй $J^1 J^1 Y$ расслоения $J^1 Y \rightarrow X$. Оно называется *повторным многообразием струй* (repeated jet manifold). Его подмногообразиями, к которым мы будем часто обращаться, являются полуголономное многообразие струй $\widehat{J}^2 Y$ и собственно многообразие струй второго порядка $J^2 Y$ расслоения Y .

При заданных координатах (1.45) на многообразии струй $J^1 Y$, повторное многообразие струй $J^1 J^1 Y$ наделяется соответствующими координатами

$$\begin{aligned} &(x^\lambda, y^i, y_\lambda^i, y_{(\mu)}^i, y_{\lambda\mu}^i), \\ y_{(\lambda)}^i &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} (\partial_\mu + y_{(\mu)}^j \partial_j) y'^i, \\ y_{\lambda\mu}^i &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} (\partial_\alpha + y_{(\alpha)}^j \partial_j + y_{\nu\alpha}^j \partial_j^\nu) y'^i_\lambda. \end{aligned}$$

Имеют место два разных расслоения $J^1 J^1 Y$ над $J^1 Y$:

- обычное расслоение струй (1.47) над $J^1 Y$:

$$\begin{aligned} \pi_{11} : J^1 J^1 Y &\rightarrow J^1 Y, \\ y_\lambda^i \circ \pi_{11} &= y_\lambda^i, \end{aligned} \quad (1.59)$$

- и расслоение

$$\begin{aligned} J^1 \pi_0^1 : J^1 J^1 Y &\rightarrow J^1 Y, \\ y_\lambda^i \circ J^1 \pi_0^1 &= y_{(\lambda)}^i. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Точки, в которых проекции π_{11} и $J^1 \pi_0^1$ совпадают, образуют аффинное подрасслоение

$$\widehat{J}^2 Y \rightarrow J^1 Y \quad (1.61)$$

расслоений (1.59) и (1.60), задаваемое координатным условием

$$y_{(\lambda)}^i = y_\lambda^i.$$

Оно называется *полуголономным многообразием струй* (sesquiholonomic jet manifold) и параметризуется координатами

$$(x^\lambda, y^i, y_\lambda^i, y_{\lambda\mu}^i).$$

Многообразие струй второго порядка (second order jet manifold) J^2Y расслоения $Y \rightarrow X$, которое также именуют *голономным многообразием струй*, определяется как подрасслоение

$$\pi_1^2 : J^2Y \rightarrow J^1Y$$

аффинного расслоения (1.61), задаваемое координатным условием

$$y_{\lambda\mu}^i = y_{\mu\lambda}^i$$

и параметризуемое координатами

$$(x^\lambda, y^i, y_\lambda^i, y_{\lambda\mu}^i = y_{\mu\lambda}^i).$$

Можно дать другое эквивалентное и самодостаточное определение многообразия 2-струй J^2Y как объединения всех классов эквивалентности $j_x^2 s$ сечений s расслоения $Y \rightarrow X$ таких, что

$$y_\lambda^i(j_x^2 s) = \partial_\lambda s^i(x), \quad y_{\lambda\mu}^i(j_x^2 s) = \partial_\mu \partial_\lambda s^i(x).$$

Иначе говоря, сечения $s \in j_x^2 s$ отождествляются по их значениям и значениям их частных производных первого и второго порядков в точке $x \in X$.

Пусть s — сечение расслоения $Y \rightarrow X$ и $J^1 s$ — его струйное продолжение до сечения расслоения $J^1 Y \rightarrow X$. В свою очередь рассмотрим струйное продолжение последнего до сечения $J^1 J^1 s$ расслоения $J^1 J^1 Y \rightarrow X$. Легко убедиться, что оно принимает значения в голономном многообразии струй $J^2 Y$ и поэтому, как принято, будем его обозначать $J^2 s$:

$$(J^1 J^1 s)(x) = (J^2 s)(x) = j_x^2 s.$$

Имеют место условия интегрируемости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5.3. Пусть \bar{s} — сечение расслоения $J^1 Y \rightarrow X$ и $J^1 \bar{s}$ — его струйное продолжение до сечения расслоения $J^1 J^1 Y \rightarrow X$. Следующие условия эквивалентны:

- сечение \bar{s} является голономным, т. е. $\bar{s} = J^1 s$ где s — некоторое сечение $Y \rightarrow X$,
- сечение $J^1 \bar{s}$ принимает значения в $\widehat{J^2 Y}$,
- сечение $J^1 \bar{s}$ принимает значения в $J^2 Y$.

□

Они будут использованы в §2.1 для редукции дифференциальных операторов и дифференциальных уравнений второго порядка к дифференциальным операторам и дифференциальным уравнениям первого порядка. Это прежде всего операторы и уравнения Эйлера—Лагранжа первого и второго порядков.

Приведенные выше определения многообразий струй 2-го порядка почти дословно распространяются на многообразия струй произвольного k -го порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5.4. *Многообразие струй k -го порядка* $J^k Y$ расслоения $Y \rightarrow X$ состоит из классов эквивалентности $j_x^k s$, $x \in X$, сечений s расслоения Y таких, что сечения s и s' принадлежат одному и тому же классу $j_x^k s$ тогда и только тогда, когда их значения и значения их частных производных до k -го порядка включительно совпадают в точке x . Это многообразие является конечномерным и удовлетворяет всем условиям, которые мы предъявляем к многообразиям. □

Аналогично случаю $k = 2$ определяются *повторное многообразие k -струй* $J^1 J^{k-1} Y$, *полуголономное многообразие k -струй* $J^k Y$ и *k -струйное продолжение* $J^k s$ сечения s расслоения $Y \rightarrow X$ до сечения $J^k Y \rightarrow X$.

Ключевым для развития аппарата струй стало его применение в теории дифференциальных операторов. Оно основывается на следующем определении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5.5. Пусть $J^k Y$ — многообразие k -струй расслоения $Y \rightarrow X$ и $E \rightarrow Y$ — векторное расслоение над Y . Всякий послыйный морфизм

$$\mathcal{E} : J^k Y \xrightarrow{Y} E \quad (1.62)$$

над Y называется *дифференциальным оператором k -го порядка* на сечениях расслоения Y или просто на расслоении Y . Он отображает всякое сечение $s(x)$ расслоения $Y \rightarrow X$ в сечение $(\mathcal{E} \circ J^k s)(x)$ расслоения $E \rightarrow X$. \square

Дифференциальные уравнения в таком подходе возникают как условия на ядро дифференциального оператора. Пусть \mathcal{E} — дифференциальный оператор k -порядка. Говорят, что сечение s расслоения $Y \rightarrow X$ удовлетворяет соответствующей системе дифференциальных уравнений, если

$$J^k s(X) \subset \text{Ker } \mathcal{E}.$$

Коротко это можно записать как

$$\mathcal{E} \circ J^k s = 0.$$

В теории поля мы имеем дело с дифференциальными операторами и дифференциальными уравнениями, как правило, не выше второго порядка.

§ 6. Связности на расслоениях

Конструкция связности обобщает операцию параллельного переноса в евклидовой геометрии на многообразия и расслоения. Поясним необходимость и характер такого обобщения следующими простыми рассуждениями.

В евклидовой геометрии параллельным называется перенос вектора, при котором направление вектора сохраняется. На плоскости, например, его можно определить как перенос вдоль прямых так, что угол между вектором и прямой постоянен. На искривленной поверхности роль прямых играют наикратчайшие линии, например, дуги большого круга на сфере. Тогда параллельный перенос касательного вектора к поверхности можно описать как его перенос вдоль наикратчайших так, что угол между вектором и наикратчайшей остается неизменным. Однако сам вектор при этом поворачивается. Изменение касательного вектора при *параллельном переносе* и описывается введением связности. В дифференциальной форме это можно сделать заданием оператора поворота Γ векторов τ при переходе из точки с координатами x^μ в точку с координатами $x^\mu + dx^\mu$, а именно:

$$\Gamma(\tau^\mu) = \tau^\mu - \Gamma^\mu_{\alpha\nu} \tau^\alpha dx^\nu. \quad (1.63)$$

Изменение вектора может быть оценено только путем его сравнения с некоторыми базисными векторами. Однако, если в качестве таких базисных векторов взять, например, касательные векторы к наикратчайшим, переносимый вектор относительно них поворачиваться не будет, т. е. связность в такой системе отсчета как бы становится тривиальной. Этого можно избежать, если переносимый вектор сравнивать с самим собой до и после переноса по замкнутому контуру. В отличие от плоскости, на искривленной

поверхности эти два вектора не совпадают, и их отклонение друг от друга характеризуется кривизной поверхности.

Изменение вектора при параллельном переносе сказывается и на операции дифференцирования. Действительно, дифференцирование определяется как предел

$$\lim_{|dx| \rightarrow 0} \frac{\tau(x + dx) - \tau(x)}{|dx|}.$$

Но векторы $\tau(x + dx)$ и $\tau(x)$ заданы в разных точках, и чтобы их вычесть друг из друга, вектор $\tau(x)$ надо сначала перенести в точку $x + dx$ посредством связности (1.63). В результате операция дифференцирование при наличии связности принимает вид

$$D_\nu \tau^\mu = \partial_\nu \tau^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\nu} \tau^\alpha.$$

Производная D_ν называется *ковариантной производной* и может рассматриваться как генератор параллельного переноса вдоль координатной линии x^ν .

Все эти наглядные соображения применимы и для связности на расслоении. На расслоении $\pi : Y \rightarrow X$ *параллельный перенос* можно представить как сопоставление всякому пути $\gamma([a, b])$ в базе X семейства отображений

$$\varrho_{\gamma(t_1, t_2)} : V_{\gamma(t_1)} \rightarrow V_{\gamma(t_2)}, \quad t_1, t_2 \in [a, b],$$

слоев $V_{\gamma(t)}$ расслоения Y над точками этого пути. При этом имеют место естественные соотношения

$$\begin{aligned} \varrho_{\gamma(t_1, t_2)} \circ \varrho_{\gamma(t_2, t_3)} &= \varrho_{\gamma(t_1, t_3)}, \\ \varrho_{\gamma(t_1, t_2)} &= \varrho_{\gamma(t_2, t_1)}^{-1}. \end{aligned}$$

Пусть v — некоторая точка слоя $V_{\gamma(a)}$. Тогда множество образов $v(t)$ точки v при отображениях $\varrho_{\gamma(a, t)}$, $t \in [a, b]$, образуют некоторый путь

$$\varrho_{\gamma(a, t)}(v) : [a, b] \rightarrow Y$$

в расслоении Y . Поскольку

$$\pi(\varrho_\gamma(v)) = \gamma,$$

такой путь называется *накрывающим* путь γ в базе X . Подобные пути, накрывающие γ , выходят из каждой точки слоя $Y_{\gamma(a)}$. Поэтому в инфинитезимальной форме задание *связности* на расслоении Y можно наглядно представить как задание в каждой точке $y \in Y$ направления, в котором она будет переноситься в многообразии Y , если ее проекция $\pi(y)$ переносится в некотором направлении в базе X . Другими словами для каждой точки $y \in Y$ осуществляется поднятие касательного пространства $T_{\pi(y)}X$ к базе X в касательное пространство $T_y Y$ к Y , как это условно изображено на рисунке 5.

Перейдем теперь от наглядных соображений к строгой математической конструкции связностей на расслоении.

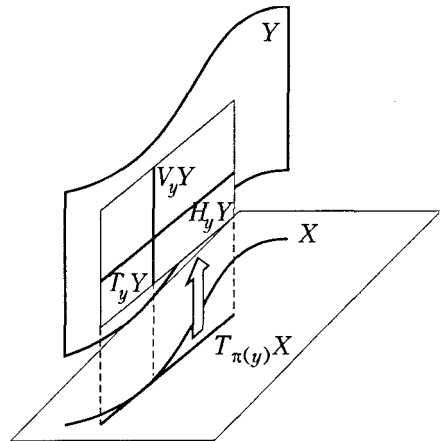


Рис. 5

Существует несколько эквивалентных способов введения связностей. Мы начнем с вышеупомянутого наиболее традиционного, когда для всякой точки y расслоения $Y \rightarrow X$ касательный вектор $\dot{x}^\lambda \partial_\lambda$ к базе X в точке $x = \pi(y)$ поднимается до касательного вектора

$$\dot{x}^\lambda (\partial_\lambda + \Gamma_\lambda^i(y) \partial_i)$$

к Y в точке y .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.1. *Связность на расслоении (connection) $Y \rightarrow X$ определяется как расщепление точной последовательности (1.28a) (и соответственно (1.28b)).* \square

Это означает, что задано некоторое вложение

$$\Gamma_T : TX \hookrightarrow TY, \quad (1.64)$$

которое определяет *горизонтальное расщепление касательного расслоения TY* :

$$TY = HY \oplus_V Y = \Gamma_T(TX) \oplus_V VY. \quad (1.65)$$

Вложение (1.64) порождает линейный послыйный морфизм

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_T \circ T\pi : TY \rightarrow TY, \\ \dot{x}^\lambda \partial_\lambda + \dot{y}^i \partial_i &\mapsto \dot{x}^\lambda (\partial_\lambda + \Gamma_\lambda^i(y) \partial_i), \end{aligned}$$

который удовлетворяет условию

$$TV = \text{Ker } \Gamma.$$

Он задается соответствующей тангенциально-значной 1-формой (1.37). Это позволяет дать эквивалентное определение связностей на расслоении в терминах тангенциально-значных форм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.2. *Связность на расслоении $Y \rightarrow X$ определяется как проектируемая горизонтальная тангенциально-значная 1-форма Γ на Y такая, что*

$$\Gamma \lrcorner \phi = \phi$$

для всех внешних горизонтальных форм ϕ на Y . В расслоенных координатах (1.13) на Y она дается выражением

$$\Gamma = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \Gamma_\lambda^i(y) \partial_i), \quad (1.66)$$

$$\Gamma_\lambda^i = \left(\frac{\partial y^i}{\partial y^j} \Gamma_\mu^j + \frac{\partial y^i}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\lambda}.$$

\square

Связностями, вводимыми таким способом, удобно оперировать в различных выражениях. Однако, чтобы исследовать их свойства, более предпочтительно другое определение связностей.

Нетрудно убедиться в том, как мы на это уже указывали, что горизонтальное расщепление (1.65) касательного расслоения TY можно получить из канонического горизонтального расщепления (1.55) касательного расслоения $T'Y$, индуцированного на J^1Y , подстановкой глобального сечения Γ расслоения струй $J^1Y \rightarrow Y$. Поэтому можно дать еще следующее определение связностей на расслоении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.3. *Связность на расслоении* $Y \rightarrow X$ определяется как глобальное сечение Γ аффинного расслоения струй $J^1Y \rightarrow Y$:

$$\begin{aligned} \Gamma: Y &\rightarrow J^1Y, \\ y_\lambda^i \circ \Gamma &= \Gamma_\lambda^i(y). \end{aligned} \quad (1.67)$$

□

Следует однако отметить, что в математической литературе Определение 1.6.3 — это не определение, а теорема, которая утверждает, что существует взаимно однозначное соответствие между связностями на расслоении $Y \rightarrow X$ и глобальными сечениями расслоения струй $J^1Y \rightarrow Y$. В композиции с каноническим морфизмом λ (1.50) всякое такое глобальное сечение Γ (1.67) представляется тангенциально-значной формой $\lambda \circ \Gamma$ (1.66) на Y , которая для удобства обозначается тем же символом Γ . Подставляя выражение (1.66) в канонические горизонтальные расщепления (1.55) и соответственно (1.56), мы получаем горизонтальные расщепления

$$\begin{aligned} \dot{x}^\lambda \partial_\lambda + \dot{y}^i \partial_i &= \dot{x}^\lambda (\partial_\lambda + \Gamma_\lambda^i \partial_i) + (\dot{y}^i - \dot{x}^\lambda \Gamma_\lambda^i) \partial_i, \\ \dot{x}_\lambda dx^\lambda + \dot{y}_i dy^i &= (\dot{x}_\lambda + \Gamma_\lambda^i \dot{y}_i) dx^\lambda + \dot{y}_i (dy^i - \Gamma_\lambda^i dx^\lambda) \end{aligned} \quad (1.68)$$

касательного и кокасательного расслоений TY и T^*Y относительно связности Γ на Y . Обратно всякое горизонтальное расщепление (1.68) определяет некоторую тангенциально-значную форму (1.66) и соответственно глобальное сечение расслоения струй $J^1Y \rightarrow Y$.

ПРИМЕР 1.6.1. Пусть $Y \rightarrow X$ — векторное расслоение. *Линейная связность* на Y имеет вид

$$\Gamma = dx^\lambda \otimes [\partial_\lambda - \Gamma^i_{j\lambda}(x) y^j \partial_i]. \quad (1.69)$$

□

ПРИМЕР 1.6.2. Пусть $Y \rightarrow X$ — аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением $\bar{Y} \rightarrow X$. *Аффинная связность* на Y имеет вид

$$\Gamma = dx^\lambda \otimes [\partial_\lambda + (-\Gamma^i_{j\lambda}(x) y^j + \Gamma^i_\lambda(x)) \partial_i],$$

где

$$\Gamma = dx^\lambda \otimes [\partial_\lambda - \Gamma^i_{j\lambda}(x) \bar{y}^j \partial_i]$$

— линейная связность на \bar{Y} . □

Естественно, что при изоморфизме Φ расслоения связность Γ переходит в новую связность

$$\Gamma' = J^1\Phi \circ \Gamma \circ \Phi^{-1}.$$

Приведем ее координатный вид, когда Φ — изоморфизм над X :

$$y_\lambda^i \circ \Gamma' = (\partial_\lambda \Phi^i + \Gamma_\lambda^j \partial_j \Phi^i) \circ \Phi^{-1}.$$

В частности, пусть Γ — связность на расслоении $Y \rightarrow X$ и Γ' — связность на расслоении $Y' \rightarrow X$. Вследствие изоморфизма (1.49), они порождают связность

$$\Gamma \times \Gamma' = dx^\mu \otimes \left(\partial_\mu + \Gamma_\mu^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \Gamma'^i_\mu \frac{\partial}{\partial y'^i} \right)$$

на произведении $Y \times_X Y$, которая называется *произведением связностей*.

Приведем также две специфические операции с линейными связностями на векторных расслоениях.

Пусть $Y \rightarrow X$ — векторное расслоение и Γ — линейная связность (1.69) на Y . Она определяет линейную связность

$$\Gamma_{i\lambda}^* = -\Gamma_{i\lambda}^j(x)y_j$$

на дуальном векторном расслоении $Y^* \rightarrow X$, которая называется *дуальной связностью*.

ПРИМЕР 1.6.3. Линейная связность K на касательном расслоении TX над многообразием X и дуальная связность K^* на кокасательном расслоении T^*X имеют вид

$$\begin{aligned} K_\lambda^\alpha &= -K_{\nu\lambda}^\alpha(x)\dot{x}^\nu, \\ K_{\alpha\lambda}^* &= K_{\alpha\lambda}^\nu(x)\dot{x}_\nu. \end{aligned} \quad (1.70)$$

□

Пусть Y, Y' — векторные расслоения над X и Γ, Γ' — линейные связности на этих расслоениях. Они задают линейную связность

$$(\Gamma \otimes \Gamma')_\lambda^{ik} = \Gamma_{j\lambda}^i y^{jk} + \Gamma'_{j\lambda}^k y^{ij}$$

на тензорном произведении

$$Y \otimes_X Y' \rightarrow X,$$

которая называется *тензорным произведением линейных связностей*.

Представление связностей как глобальных сечений расслоения струй позволяет следующим образом характеризовать все множество связностей на расслоении. Так как расслоение струй $J^1Y \rightarrow Y$ расслоения $Y \rightarrow X$ является аффинным расслоением, моделируемым над векторным расслоением (1.48), связности на расслоении Y образуют аффинное пространство, моделируемое над линейным пространством припаявающихся форм на Y из Примера 1.4.7. Отсюда следует, что, если Γ — связность и

$$\sigma = \sigma_\lambda^i dx^\lambda \otimes \partial_i$$

— припаявающая форма на Y , их сумма

$$\Gamma + \sigma = dx^\lambda \otimes [\partial_\lambda + (\Gamma_\lambda^i + \sigma_\lambda^i)\partial_i]$$

тоже связность на Y . Обратное, если Γ и Γ' — связности на расслоении Y , тогда их разность

$$\Gamma - \Gamma' = (\Gamma_\lambda^i - \Gamma'_\lambda^i) dx^\lambda \otimes \partial_i$$

— это припаявающая форма на Y .

Поскольку связности представляются тангенциально-значными формами, к ним можно применить операцию (F-N)-дифференцирования (1.39). Таким путем, в частности, получаем:

- *кривизну связности* (curvature)

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} d_r \Gamma = \frac{1}{2} R_{\lambda\mu}^i dx^\lambda \wedge dx^\mu \otimes \partial_i = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\lambda \Gamma_\mu^i - \partial_\mu \Gamma_\lambda^i + \Gamma_\lambda^j \partial_j \Gamma_\mu^i - \Gamma_\mu^j \partial_j \Gamma_\lambda^i) dx^\lambda \wedge dx^\mu \otimes \partial_i; \end{aligned} \quad (1.71)$$

- *кручение* (torsion) связности относительно припаивающей формы σ :

$$\Omega = d_\sigma \Gamma = d_1 \sigma = \frac{1}{2} \Omega_{\lambda\mu}^i dx^\lambda \wedge dx^\mu \otimes \partial_i = (\partial_\lambda \sigma_\mu^i + \Gamma_\lambda^j \partial_j \sigma_\mu^i - \partial_j \Gamma_\lambda^i \sigma_\mu^j) dx^\lambda \wedge dx^\mu \otimes \partial_i;$$

- *кривизну припаивающей формы* σ :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} d_\sigma \sigma = \frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\mu}^i dx^\lambda \wedge dx^\mu \otimes \partial_i = \frac{1}{2} (\sigma_\lambda^j \partial_j \sigma_\mu^i - \sigma_\mu^j \partial_j \sigma_\lambda^i) dx^\lambda \wedge dx^\mu \otimes \partial_i.$$

Например, если $\Gamma' = \Gamma + \sigma$, то

$$R' = R + \varepsilon + \Omega.$$

ПРИМЕР 1.6.4. Кривизна (1.71) линейной связности (1.69) имеет вид

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu}^i(y) &= -R^i_{j\lambda\mu}(x)y^j, \\ R^i_{j\lambda\mu} &= \partial_\lambda \Gamma^i_{j\mu} - \partial_\mu \Gamma^i_{j\lambda} + \Gamma^k_{j\mu} \Gamma^i_{k\lambda} - \Gamma^k_{j\lambda} \Gamma^i_{k\mu}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

□

Всякая связность Γ на расслоении $Y \rightarrow X$ определяет дифференциальный оператор первого порядка

$$D_\Gamma : J^1 Y \ni z \mapsto [z - \Gamma(\pi_0^1(z))] \in T^* X \otimes_Y VY, \quad (1.73)$$

$$D_\Gamma = (y_\lambda^i - \Gamma_\lambda^i) dx^\lambda \otimes \partial_i,$$

на Y . Он называется *ковариантным дифференциалом* относительно связности Γ . Его действие на сечения s расслоения Y имеет вид

$$\nabla_\Gamma s = D_\Gamma \circ J^1 s = [\partial_\lambda s^i - (\Gamma \circ s)_\lambda^i] dx^\lambda \otimes \partial_i \quad (1.74)$$

и называется ковариантным дифференцированием. В частности, сечение s называется *интегральным сечением связности* (integer section) Γ , если $\nabla_\Gamma s = 0$, т. е.

$$\Gamma \circ s = J^1 s.$$

Общий способ задания связностей как сечений расслоения струй применим и для описания хорошо известных по физическим приложениям связностей на главных расслоениях. Связности этого типа моделируют калибровочные потенциалы в калибровочных моделях фундаментальных взаимодействий. Однако даже калибровочная теория не может ограничиться только главными расслоениями и связностями на них. Например, расслоения, сечениями которых являются сами калибровочные потенциалы, не являются главными и связности на них не есть связности на главных расслоениях.

§ 7. Расслоения со структурными группами

Расслоениям со структурной группой, главным расслоениям и связностям на них посвящена обширная математическая литература. Поэтому мы здесь затронем только те факты и понятия, которые строго необходимы для рассматриваемых в книге физических приложений.

Пусть Y — расслоение, задаваемое своей базой X , типичным слоем V и атласом расслоения

$$\Psi = \{U_\xi, \psi_\xi, \varrho_{\xi\zeta}\},$$

где

$$\varrho_{\xi\zeta} : (U_\xi \cap U_\zeta) \times V \rightarrow V$$

— функции перехода (1.16). Пусть G — группа, которая действует гладко и эффективно в пространстве типичного слоя V расслоения Y . Предположим, что можно выбрать такой атлас расслоения Ψ , функции перехода которого

$$\varrho_{\xi\zeta}(x) : x \times V \rightarrow V$$

в каждой точке $x \in U_\xi \cap U_\zeta$ представляются элементами $g_{\xi\zeta}(x)$ группы G , действующими на V , т. е.

$$\begin{aligned} \varrho_{\xi\zeta}(x)(V) &= g_{\xi\zeta}(x)V, \\ g_{\xi\zeta} : U_\xi \cap U_\zeta \times V &\rightarrow G \times V \rightarrow V, \end{aligned} \quad (1.75)$$

где $g_{\xi\zeta}$ — гладкие G -значные функции на $U_\xi \cap U_\zeta$. Тогда группа G именуется *структурной группой расслоения* (structure group). Само расслоение Y , наделенное классом эквивалентных атласов с функциями перехода вида (1.75) называется *расслоением со структурной группой*.

ПРИМЕР 1.7.1. Открытый лист Мебиуса из Примера 1.3.4 может быть представлен как топологическое расслоение со структурной группой \mathbb{Z}_2 , наделенной дискретной топологией и действующей на интервале $] -1, 1[$ как группа умножений на -1 . \square

В теории калибровочных полей, как правило, используются расслоения со структурными группами Ли. В дальнейшем, если специально не оговорено, мы будем предполагать, что структурной группой расслоения является вещественная конечномерная группа Ли.

Расслоение Y со структурной группой однозначно характеризуется базой X , структурной группой G , типичным слоем V и атласом расслоения

$$\Psi = \{U_\xi, \psi_\xi, g_{\xi\zeta}\}.$$

Семейство функций перехода $\{g_{\xi\zeta}\}$ этого атласа определяет, как расслоение Y сконструировано из тривиальных расслоений $U_\xi \times V$. Пусть Y' — расслоение, как и Y , над базой X , со структурной группой G , но другим типичным слоем V' ; и пусть его атлас характеризуется тем же семейством функций перехода $\{g_{\xi\zeta}\}$, что и атлас расслоения Y . Это означает, что расслоение Y' организовано из тривиальных расслоений $U_\xi \times V'$ в точности как Y . Расслоения со структурной группой, которые отличаются только типичным слоем, называются *ассоциированными расслоениями* (associated bundles). Ассоциированные расслоения имеют целый ряд общих свойств: одно и то же множество классов эквивалентности расслоений, одинакового типа связности и др.

Среди ассоциированных расслоений с данной структурной группой G важным случаем является расслоение, типичным слоем которого служит групповое пространство самой структурной группы, на которое она действует умножениями слева

$$g : G \rightarrow gG, \quad g \in G.$$

Такое расслоение называется *главным расслоением* (principal bundle).

ПРИМЕР 1.7.2. Для описания дираковского монополя используются главные расслоения λ_n , $n = 0, 1, \dots$, со структурной группой $U(1)$ над сферой S^2 . Параметризуем сферу S^2 циклическими координатами

$$(0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \alpha < 2\pi),$$

а групповое пространство $U(1) = S^1$ — координатой $\exp(i\chi)$. Атлас расслоения λ_n устроен следующим образом. Покроем сферу S^2 двумя открытыми полусферами U_+ и U_- с координатами соответственно $\theta > -\varepsilon$ и $\theta < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Они являются областями тривиализации расслоения λ_n , которое получается склеиванием двух тривиальных расслоений $U_+ \times U(1)$ и $U_- \times U(1)$ с координатами $(\theta, \alpha, \exp(i\chi_+))$ и $(\theta, \alpha, \exp(i\chi_-))$ соответственно. Функцией перехода является $U(1)$ -значная функция на пересечении $U_+ \cap U_-$, удовлетворяющая условию периодичности по координате α . Оно имеет вид

$$\exp(i\chi_-) = \exp(in\alpha) \exp(i\chi_+).$$

Для разных n и m расслоения λ_n и λ_m неизоморфны. Например, λ_0 — тривиальное расслоение $S^2 \times S^1$, тогда как $\lambda_1 = S^3$. \square

Главные расслоения обладают целым рядом специфических свойств. Однако приведенное выше определение не позволяет их выявить. Поэтому обратимся к более конструктивному и общепринятому определению главного расслоения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7.1. Расслоение

$$\pi_P : P \rightarrow X \tag{1.76}$$

называется *главным расслоением* со структурной группой Ли G (или просто *главным G -расслоением*), если задано послыное свободное и транзитивное действие группы G на P справа:

$$\tau_g : p \mapsto pg, \quad p \in P, g \in G. \tag{1.77}$$

База главного расслоения X диффеоморфна фактор-пространству P/G , а проекция π_P совпадает с каноническим морфизмом $P \rightarrow P/G$. \square

Другими словами главное расслоение (1.76) представляет собой обобщенное аффинное пространство

$$P \times_X (X \times G) \rightarrow P,$$

моделируемое справа над тривиальным групповым расслоением $X \times G$.

Будем использовать p для обозначения элементов главного расслоения.

Эквивалентность двух приведенных определений главного расслоения устанавливает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.7.2. Всякое главное расслоение P из Определения 1.7.1 однозначно задается выбором базы X , структурной группы G и атласа главного расслоения

$$\Psi^P = \{U_\xi, \varphi_\xi^P, g_{\xi\zeta}\}, \tag{1.78}$$

где функции перехода $g_{\xi\zeta}$ — G -значные гладкие функции на $U_\xi \cap U_\zeta$. \square

Морфизмы тривиализации главного расслоения удовлетворяют условию

$$\varphi_\xi^P(pg) = \varphi_\xi^P(p)g.$$

Поэтому всякому атласу Ψ^P (1.78) главного расслоения P можно однозначно сопоставить набор его локальных сечений $\{z_\xi\}$ таких, что

$$\begin{aligned} (\varphi_\xi^P \circ z_\xi)(x) &= 1_G, & x \in U_\xi, \\ z_\zeta(x) &= z_\xi(x)g_{\xi\zeta}(x). \end{aligned}$$

Более того, часто удобно задавать атлас Ψ^P главного расслоения именно набором таких сечений $\{z_\xi\}$.

Отсюда, в частности, следует, что глобальное сечение главного расслоения существует тогда и только тогда, когда оно тривиально. Действительно, если глобальное сечение s главного расслоения существует, можно выбрать $z_\xi = s|_{U_\xi}$, и преобразования перехода такого атласа будут тождественными.

ПРИМЕР 1.7.3. Пусть G — группа Ли и K — ее замкнутая подгруппа. Напомним, что замкнутая подгруппа группы Ли тоже группа Ли. Пусть G/K — правое факторпространство группы G по K . Тогда каноническая проекция

$$G \rightarrow G/K$$

является главным расслоением со структурной группой K . \square

ПРИМЕР 1.7.4. Пусть $P \rightarrow X$ — главное расслоение со структурной группой G и K — замкнутая подгруппа группы G . Обозначим P/K фактор многообразия P по действию K на P справа. Тогда канонический морфизм

$$\pi_{P\Sigma} : P \rightarrow P/K \tag{1.79}$$

является главным расслоением со структурной группой K . \square

ПРИМЕР 1.7.5. Если $P \rightarrow X$ — главное расслоение со структурной группой G , то расслоение $TP \rightarrow TX$ также является главным расслоением

$$TP \times_{TX} T(X \times G) \rightarrow TP$$

со структурной группой

$$TG = G \times \mathcal{G}_l,$$

где \mathcal{G}_l — левая алгебра Ли левоинвариантных векторных полей на группе G . \square

Заметим, что главное G -расслоение $P \rightarrow X$ допускает каноническое вертикальное расщепление

$$\begin{aligned} \alpha : VP &\rightarrow P \times \mathcal{G}_l, \\ \text{pr}_2 \circ \alpha &= e_m, \end{aligned} \tag{1.80}$$

где $\{J_m\}$ — базис левой алгебры Ли \mathcal{G}_l и $\{e_m\}$ — соответствующие фундаментальные векторные поля на P , отвечающие каноническому действию G на P справа.

Всякому главному расслоению $P \rightarrow X$ со структурной группой G можно сопоставить, как уже отмечалось, *ассоциированное расслоение* $Y \rightarrow X$ с данным типичным слоем V , реализующим эффективное действие группы G слева. Следуя Определению 1.7.1 главного расслоения, ассоциированное расслоение Y можно определить как фактор

$$Y = (P \times V)/G \quad (1.81)$$

прямого произведения $P \times V$ относительно действия группы G , т. е. когда всякие две точки $(p \times v)$ и $(pg \times g^{-1}v)$, $g \in G$, отождествляются.

ПРИМЕР 1.7.6. Для всякого главного G -расслоения $P \rightarrow X$ всегда существует *ассоциированное групповое расслоение* $\tilde{P} \rightarrow X$ типичным слоем которого служит сама группа G , на котором структурная группа G действует по *присоединенному представлению*

$$\text{ad } g : G \rightarrow gGg^{-1}, \quad g \in G.$$

Главное расслоение P является обобщенным аффинным расслоением, моделируемым слева над групповым расслоением \tilde{P} :

$$\tilde{P} \times P \ni (\tilde{p}, p) \mapsto \tilde{p}p \in P.$$

Более того, для каждого ассоциированного с P расслоения Y существует послыйный морфизм

$$\tilde{P} \times Y \xrightarrow{x} Y, \quad (1.82)$$

который задает представление группы \tilde{P}_x в слое Y_x для всех $x \in X$. \square

Пусть Y — ассоциированное с P расслоение с типичным слоем V . Для $p \in P$ обозначим $[p]_V$ сужение канонического отображения

$$P \times V \rightarrow (P \times V)/G$$

на подмногообразии $p \times V$. Тогда

$$v \rightarrow [p]_V v, \quad v \in V,$$

есть отображение типичного слоя V в слой $Y_{\pi_P(p)}$ расслоения Y такое, что

$$[pg]_V(v) = [p]_V(gv)$$

для всех $g \in G$.

В частности, если

$$\Psi^P = \{U_\xi, z_\xi\}$$

— атлас главного расслоения P , то отображение

$$[z_\xi(x)]_V : V \rightarrow Y_x, \quad x \in U_\xi$$

задает атлас

$$\Psi = \{U_\xi, \varphi_\xi\}$$

ассоциированного расслоения Y такой, что

$$\varphi_\xi(x) \circ [z_\xi(x)]_V = \text{Id}_V, \quad x \in U_\xi.$$

Будем называть его *ассоциированным атласом*.

Существует также взаимно однозначное соответствие между глобальными сечениями s ассоциированного с P расслоения Y и *эквивариантными* (equivariant) V -значными функциями f_s на Y , т. е. такими, что

$$f_s(pg) = g^{-1} f_s(p).$$

Оно задается соотношением

$$s(\pi_P(p)) = [p]_V(f_s(p))$$

и в ассоциированных атласах расслоений P и Y принимает вид

$$s_\xi(x) = (\varphi_\xi \circ s)(x) = f_s(z_\xi(x)).$$

Рассмотрим теперь *морфизмы главных расслоений*. Это должны быть послойные морфизмы, сохраняющие структуру главного расслоения.

Морфизм главного G -расслоения $P \rightarrow X$ в главное G' -расслоение $P' \rightarrow X'$ по определению представляет собой пару (Φ, F) , состоящую из послойного морфизма расслоений $\Phi: P \rightarrow P'$ и гомоморфизма групп $F: G \rightarrow G'$ таких, что

$$\Phi(pg) = \Phi(p)F(g), \quad p \in P, g \in G.$$

В частности, изоморфизм главного G -расслоения P на себя — это эквивариантный изоморфизм Φ_P над X расслоения P , когда для всех $g \in G$ выполняется соотношение

$$\tau_g \circ \Phi_P = \Phi_P \circ \tau_g.$$

Мы будем называть его *калибровочным изоморфизмом* (gauge isomorphism). Всякий такой изоморфизм Φ_P представим в виде

$$\Phi_P(p) = p f_\Phi(p), \quad p \in P, \quad (1.83)$$

где f_Φ — некоторая G -значная эквивариантная функция на P :

$$f_\Phi(pg) = g^{-1} f_\Phi(p)g, \quad g \in G.$$

Имеет место взаимно однозначное соответствие между такими функциями (а следовательно калибровочными морфизмами Φ_P) и глобальными сечениями s_Φ группового расслоения \tilde{P} из Примера 1.7.6. Оно дается соотношением

$$s_\Phi(\pi_P(p))p = p f_\Phi(p).$$

Это позволяет, используя морфизм (1.82), всякий калибровочный изоморфизм Φ_P главного расслоения P перенести на любое ассоциированное с P расслоение Y :

$$\Phi_Y: Y \ni y \mapsto (s_\Phi \circ \pi_P)(y)y \in Y,$$

где s_Φ — соответствующее глобальное сечение группового расслоения \tilde{P} .

Еще одним важным случаем морфизмов главных расслоений, на котором мы остановимся, является то, что называют редукцией структурной группы главного расслоения.

Рассмотрим погружение над X главного расслоения $P' \rightarrow X$ со структурной группой K в главное расслоение $P \rightarrow X$ со структурной группой G такое, что $K \rightarrow G$ —

мономорфизм групп. Другими словами P' является главным подрасслоением со структурной группой K главного расслоения P' . Оно называется *редуцированным расслоением* (reduced bundle), а выделение такого подрасслоения — *редукцией структурной группы G к подгруппе K* . Говорят, что структурная группа G главного расслоения P редуцируема к подгруппе Ли $K \subset G$, если существует редуцированное подрасслоение P со структурной группой K .

Приведем известные теоремы о редукции структурной группы.

ТЕОРЕМА 1.7.3. Структурная группа G главного расслоения P редуцируема к подгруппе Ли K тогда и только тогда, когда существует атлас расслоения P , все функции перехода которого принимают значения в подгруппе K . \square

Эта теорема позволяет распространить понятие редукции структурной группы на любое расслоение со структурной группой. Мы будем говорить, что структурная группа G расслоения Y редуцируема к подгруппе K , если существует атлас расслоения Y , все функции перехода (1.75) которого принимают значения в подгруппе K . В этом смысле структурная группа, например, тривиального расслоения всегда редуцирована к тривиальной подгруппе, состоящей из единицы группы.

Следующая теорема устанавливает необходимые и достаточные условия редуцируемости структурной группы. Она играет исключительную роль в моделях теории поля со спонтанным нарушением симметрий и, в частности, в теории гравитации.

ТЕОРЕМА 1.7.4. Структурная группа главного расслоения $P \rightarrow X$ редуцируема к своей замкнутой подгруппе K тогда и только тогда, когда ассоциированное с P расслоение

$$\pi_\Sigma : P/K \rightarrow X \quad (1.84)$$

с типичным слоем G/K , на который структурная группа G действует слева, допускает глобальное сечение. \square

Более того, имеет место взаимно однозначное соответствие между глобальными сечениями h расслоения (1.84) и редуцированными подрасслоениями P_h расслоения P , имеющими структурную группу K . Оно задается соотношением

$$\pi_{P\Sigma}(P_h) = (h \circ \pi_P)(P_h),$$

и можно показать, что всякое редуцированное расслоение P_h представляет собой сужение главного K -расслоения $P \rightarrow P/K$ (1.79) на замкнутое подмногообразие $h(X) \subset P/K$.

В полевых моделях глобальные сечения h расслоения (1.84) играют роль *хиггсовских полей*, отвечающих ситуации спонтанного нарушения симметрий, образующих группу G , когда подгруппой точных симметрий является K .

В общем случае существуют топологические препятствия для редукции структурной группы расслоения. Опираясь на Теорему 1.3.2 и Теорему 1.7.4, можно показать, что структурная группа расслоения (над паракомпактной базой) всегда редуцируема к своей максимальной компактной подгруппе.

ПРИМЕР 1.7.7. Структурной группой касательного расслоения TX над многообразием X является группа $GL(n, \mathbb{R})$. Ассоциированное с TX главное $GL(n, \mathbb{R})$ -расслоение можно представить как расслоение, всякий слой которого над $x \in X$ состоит из всевозможных базисных n -реперов в касательном пространстве $T_x X$ к X . Оно называется *главным реперным расслоением* (principal linear frame bundle). Обозначим его LX . Структурная группа $GL(n, \mathbb{R})$ расслоения LX и касательного расслоения TX всегда редуцируема к своей максимальной компактной подгруппе $O(n)$. Это означает, что всегда

существует атлас касательного расслоения с функциями перехода, принимающими значения в группе $O(n)$. Однако такой атлас в общем случае не является голономным. \square

Рассмотрим теперь связности на главных и ассоциированных расслоениях.

В случае главного расслоения $P \rightarrow X$ со структурной группой G , точная последовательность (1.28а) сводится к точной последовательности

$$0 \rightarrow V^G P \hookrightarrow T^G P \rightarrow TX \rightarrow 0, \quad (1.85)$$

где

$$\begin{aligned} T^G P &= TP/G, \\ V^G P &= VP/G \end{aligned}$$

— факторы касательного пространства TP и вертикального касательного пространства VP над P относительно касательных Tr_g и вертикальных касательных Vr_g морфизмов к каноническому действию r_g (1.77) элементов $g \in G$ на P справа. С расслоением $V^G P$ мы часто будем иметь дело. Оно называется *сопряженным расслоением*. Его типичным слоем является *правая алгебра Ли* \mathcal{G}_r право-инвариантных векторных полей на группе G с базисом $\{I_m\}$. Группа G действует на этот типичный слой по присоединенному представлению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7.5. *Связностью на главном расслоении* (principal connection) $P \rightarrow X$ называется глобальное сечение A расслоения струй $J^1 P \rightarrow P$, эквивариантное относительно канонического правого действия (1.77) группы G на P , т. е. это связность на P такая, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{A} & J^1 P \\ r_g \downarrow & & \downarrow J^1 r_g \\ P & \xrightarrow{A} & J^1 P \end{array} .$$

коммулативна для всех $g \in G$. \square

Связность A на главном расслоении представляется тангенциально-значной формой

$$A = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + A_\lambda^m(p)e_m), \quad (1.86)$$

коэффициенты которой вследствие условия эквивариантности

$$A \circ r_g = J^1 r_g \circ A, \quad g \in G,$$

удовлетворяют соотношению

$$A_\lambda^m(pg) = A_\lambda^m(p) \operatorname{ad} g^{-1}(e_m).$$

Связность на главном расслоении задает расщепление

$$TX \hookrightarrow T^G P$$

точной последовательности (1.85).

Приведенное определение связности на главном расслоении отличается от того, которое обычно дается в стандартных учебниках по дифференциальной геометрии. Однако оно позволяет получить расслоение, сечениями которого являются связности на главном расслоении, т. е. в физической интерпретации потенциалы калибровочных полей. В то же время, используя канонический морфизм (1.51) и каноническое горизонтальное расщепление (1.80), из формы (1.86) можно воспроизвести известную форму связности (connection form)

$$\bar{A} = \alpha \circ \theta_1 \circ A$$

на главном расслоении P . Пусть $\Psi^P = \{z_\xi\}$ — некоторый атлас главного расслоения P . Относительно атласа Ψ^P , связность на главном расслоении (1.86) характеризуется, как обычно, семейством локальных 1-форм связности

$$A_\xi = z_\xi^* \bar{A} = -A_\lambda^m(x) dx^\lambda \otimes J_m \quad (1.87)$$

на базе X .

ПРИМЕР 1.7.8. Рассмотрим связность на главном $U(1)$ -расслоении λ_n из Примера 1.7.2. Она задается локальными 1-формами связности A_+ на U_+ и A_- на U_- с функцией перехода

$$A_+ = A_- - in d\phi$$

на $U_+ \cap U_-$. В частности, можно выбрать связность

$$A_\pm = -\frac{in}{2} (\cos \theta \pm 1) d\phi. \quad (1.88)$$

□

Связности на главном расслоении, как всякие классические поля, можно представить сечениями некоторого расслоения. В силу условия эквивариантности существует взаимно однозначное соответствие между связностями на главном расслоении $P \rightarrow X$ со структурной группой G и глобальными сечениями расслоения

$$C := J^1P/G \rightarrow X, \quad (1.89)$$

получаемого из расслоения струй $J^1P \rightarrow P$ переходом к фактору относительно струйных продолжений канонических морфизмов (1.77). Мы будем называть расслоение (1.89) *расслоением связностей*. Это аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением

$$\bar{C} = T^*X \otimes V^G P. \quad (1.90)$$

В частности, оно допускает каноническое вертикальное расщепление

$$VC = C \times \bar{C}.$$

Подчеркнем однако, что расслоение связностей C (1.89) не является расслоением со структурной группой.

Если задан атлас Ψ^P главного расслоения P , расслоение связностей C наделяется ассоциированной системой расслоенных координат (x^μ, k_μ^m) таких, что для любого его сечения A координатные функции

являются коэффициентами локальной 1-формы связности (1.87) связности A . Многообразии струй J^1C расслоения связностей C параметризуется соответствующими координатами (1.44):

$$(x^\mu, k_\mu^m, k_{\mu\lambda}^m). \quad (1.91)$$

В калибровочной теории многообразии струй J^1C расслоения связностей C играет роль конечномерного конфигурационного пространства калибровочных потенциалов. Исследуем поэтому его структуру.

ЛЕММА 1.7.6. Аффинное расслоение струй $J^1C \rightarrow C$ моделируется над векторным расслоением

$$T^*X \otimes_C (C \times T^*X \otimes V^G P).$$

Имеет место его каноническое расщепление

$$J^1C = C_+ \oplus_C C_- = (J^2P/G) \oplus_C \left(\bigwedge^2 T^*X \otimes_C V^G P \right) \quad (1.92)$$

над C , где

$$C_- = C \times \bigwedge^2 T^*X \otimes_X V^G P,$$

а $C_+ \rightarrow C$ — это аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением

$$\bar{C}_+ = \bigvee T^*X \otimes_C V^G P.$$

□

В координатах (1.91), расщепление (1.92) имеет вид

$$k_{\mu\lambda}^m = \frac{1}{2} (k_{\mu\lambda}^m + k_{\lambda\mu}^m + c_{nl}^m k_\lambda^n k_\mu^l) + \frac{1}{2} (k_{\mu\lambda}^m - k_{\lambda\mu}^m - c_{nl}^m k_\lambda^n k_\mu^l),$$

где c_{mn}^k структурные константы правой алгебры Ли \mathcal{G}_r группы G . Выпишем соответствующие канонические проекции

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &:= \text{pr}_1 : J^1C \rightarrow C_+, \\ \mathcal{S}_{\lambda\mu}^m &= k_{\mu\lambda}^m + k_{\lambda\mu}^m + c_{nl}^m k_\lambda^n k_\mu^l, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \text{pr}_2 : J^1C \rightarrow C_-, \\ \mathcal{F} &= \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\lambda\mu}^m dx^\lambda \wedge dx^\mu \otimes I_m, \\ \mathcal{F}_{\lambda\mu}^m &= k_{\mu\lambda}^m - k_{\lambda\mu}^m - c_{nl}^m k_\lambda^n k_\mu^l. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что для всякой связности A величина

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \circ J^1A &= F, \\ F &= \frac{1}{2} F_{\lambda\mu}^m dx^\lambda \wedge dx^\mu \otimes I_m, \\ F_{\lambda\mu}^m &= \partial_\lambda A_\mu^m - \partial_\mu A_\lambda^m - c_{nk}^m A_\lambda^n A_\mu^k, \end{aligned} \quad (1.93)$$

— это *напряженность* (strength) калибровочного потенциала A .

ПРИМЕР 1.7.9. Напряженность связности (1.88) из Примера 1.7.8 имеет вид

$$F_{\pm} = dA_{\pm} = \frac{in}{2} \sin \theta d\theta \wedge d\phi.$$

□

Связность A на главном расслоении P индуцирует связность Γ на ассоциированном с P расслоении Y (1.81) в соответствии с коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} J^1 P \times V & \longrightarrow & J^1 Y \\ \uparrow A \times \text{ld}_V & & \uparrow \Gamma \\ P \times V & \longrightarrow & Y \end{array} .$$

Относительно ассоциированных атласов Ψ на Y и Ψ^P на P , эта связность дается выражением

$$\Gamma = dx^\lambda \otimes [\partial_\lambda + A_\mu^m(x) I_m^i{}_j y^j \partial_i] \quad (1.94)$$

где $A_\mu^m(x)$ — коэффициенты локальной 1-формы связности (1.87) и I_m — генераторы структурной группы G , действующей на типичном слое V расслоения Y . Кривизна связности (1.94) принимает вид

$$R_{\lambda\mu}^i = F_{\lambda\mu}^m I_m^i{}_j y^j,$$

где $F_{\lambda\mu}^m$ — коэффициенты напряженности (1.93) связности A .

ПРИМЕР 1.7.10. Всякая линейная связность (1.70) из Примера 1.6.3 на касательном расслоении TX ассоциирована с некоторой связностью на главном реперном расслоении LX со структурной группой $GL(n, \mathbb{R})$, действующей в типичных слое \mathbb{R}^n этого расслоения с генераторами

$$(I_a^b)_c^d = \delta_a^b \delta_c^d.$$

□

Проблема возникает со связностью на расслоении связностей $C \rightarrow X$, поскольку оно не является расслоением со структурной группой. Она решается следующим образом.

Если задана симметричная линейная связность K^* (1.70) (т. е. $K^\nu{}_{\alpha\lambda} = K^\nu{}_{\lambda\alpha}$) на кокасательном расслоении T^*X над X , всякая связность B на главном расслоении $P \rightarrow X$ индуцирует связность

$$\begin{aligned} S_B : C &\rightarrow C_+, \\ S_B \circ B &= \mathcal{S} \circ J^1 B, \end{aligned}$$

на расслоении связностей C . В координатах (1.91) на C , эта связность дается выражением

$$S_{B\mu\lambda}^m = \frac{1}{2} [c_{nl}^m k_\lambda^n k_\mu^l + \partial_\mu B_\lambda^m + \partial_\lambda B_\mu^m - c_{nl}^m (k_\mu^n B_\lambda^l + k_\lambda^n B_\mu^l)] - K^\beta{}_{\mu\lambda} (B_\beta^m - k_\beta^m). \quad (1.95)$$

Геометрическая теория поля

Геометрическая формулировка классической теории поля основывается, как уже отмечалось, на представлении классических полей глобальными сечениями дифференцируемых расслоений

$$\pi : Y \rightarrow X,$$

где база X играет роль пространственно-временного многообразия или обобщенного пространства параметров.

Общепринятый способ описания динамики полей дает лагранжев формализм, в котором роль уравнений поля выполняют уравнения Эйлера—Лагранжа. В теории поля, как правило, можно ограничиться лагранжевым формализмом первого порядка, когда лагранжиан зависит от производных полей не более первого порядка. Из фундаментальных полей только в теории гравитации продолжают по традиции использовать лагранжиан Гильберта—Эйнштейна второго порядка по метрическому полю, однако и он вычитанием дивергентного члена может быть сведен к первому порядку. Более того, современная калибровочная теория гравитационного взаимодействия является аффинно-метрической, когда пространственно-временные метрика и связность рассматриваются как независимые динамические переменные, и все лагранжианы классической и квантовой гравитации в этих переменных — это лагранжианы первого порядка.

Лагранжев формализм в теории поля однако не является всеобъемлющим. Он оказывается не вполне удовлетворителен при описании систем со связями, когда лагранжиан полей вырожден. В то же время большинство современных полевых моделей, включая калибровочную теорию и теорию гравитации, имеют именно вырожденные лагранжианы. Динамика таких моделей адекватно описывается в рамках гамильтонова формализма. Однако это не есть стандартный гамильтонов формализм, как в механике, а его так называемое многоимпульсное обобщение, когда канонические импульсы полей соответствуют производным полевых функций по всем пространственно-временным координатам, а не только по времени.

§ 1. Лагранжев формализм

Пусть $Y \rightarrow X$ — некоторое расслоение с атласом расслоенных координат (x^λ, y^i) . Будем интерпретировать его глобальные сечения как *классические поля* на n -мерном многообразии X . В конкретных полевых моделях X будет рассматриваться как 4-мерное пространственно-временное многообразие.

В формализме струй всякая *лагранжева плотность* (Lagrangian density) или просто *лагранжиан* первого порядка сечений расслоения $Y \rightarrow X$ определяется как внешняя

горизонтальная плотность

$$L = \mathcal{L}(x^\mu, y^i, y_\mu^i)\omega, \tag{2.1}$$

$$L : J^1Y \rightarrow \bigwedge^n T^*X,$$

на расслоении $J^1Y \rightarrow X$. Это означает, что многообразие струй J^1Y расслоения Y играет роль своего рода *конфигурационного пространства* полей, представляемых сечениями расслоения $Y \rightarrow X$. Очень важно, что это конфигурационное пространство конечномерно и с ним можно манипулировать, как с обычным многообразием.

Коэффициентная функция \mathcal{L} формы (2.1) называется *функцией Лагранжа*, хотя она на самом деле не является функцией и при преобразованиях координат делится на якобиан преобразования координат (x^μ) . В дальнейшем будет удобно использовать обозначения

$$\pi_i^\lambda = \partial_i^\lambda \mathcal{L}.$$

Лагранжиан L называется *регулярным* или *невырожденным*, если его *гессиан*

$$\det(\partial_i^\mu \partial_j^\lambda \mathcal{L})$$

отличен от нуля во всех точках многообразия струй J^1Y .

ПРИМЕР 2.1.1. Рассмотрим тривиальное линейное расслоение

$$Y := X \times \mathbb{R} \rightarrow X$$

из Примера 1.5.1 с координатами (x^λ, y) . Глобальное сечение этого расслоения может быть интерпретировано как вещественное скалярное поле на многообразии X . Конфигурационным пространством этих полей является многообразие струй

$$J^1Y = T^*X \times \mathbb{R}$$

с координатами $(x^\lambda, y, y_\lambda)$. Стандартный лагранжиан вещественного безмассового скалярного поля на этом конфигурационном пространстве принимает вид

$$L = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu}(x) y_\lambda y_\mu \sqrt{|g|} \omega, \tag{2.2}$$

где g — некоторая невырожденная метрика в кокасательном расслоении T^*X и $g = \det(g)$. Этот лагранжиан является регулярным. □

Мы не будем здесь углубляться в проблематику вариационной задачи (см. Приложение А). Отметим только, что в лагранжем формализме высших порядков при ее решении обычно рассматривают не сам лагранжиан, а его так называемый *Leragean эквивалент*. В лагранжем формализме первого порядка в качестве такого эквивалента обычно выбирают *форму Пуанкаре—Картана*. Это внешняя горизонтальная n -форма на расслоении струй $J^1Y \rightarrow Y$, которая имеет координатный вид

$$\Xi_L = \pi_i^\lambda dy^i \wedge \omega_\lambda + (\mathcal{L} - \pi_i^\lambda y_\lambda^i) \omega. \tag{2.3}$$

С ней связаны уравнения Картана и уравнения Де Дондера—Гамильтона, которые в определенной мере, хотя и не полностью, эквивалентны (например, для регулярных лагранжианов) уравнениям Эйлера—Лагранжа. Рассмотрением последних мы и ограничимся.

В лагранжем формализме первого порядка имеются три типа уравнений *Эйлера—Лагранжа*:

- алгебраические уравнения Эйлера—Лагранжа для сечений повторного расслоения струй $J^1 J^1 Y \rightarrow J^1 Y$,
- уравнения Эйлера—Лагранжа *первого порядка* для сечений расслоения $J^1 Y \rightarrow X$,
- уравнения Эйлера—Лагранжа *второго порядка* для сечений собственно расслоения $Y \rightarrow X$.

Мы не станем обращаться к вариационному способу построения уравнений Эйлера—Лагранжа, а получим эти уравнения, исходя из условия на ядро оператора Эйлера—Лагранжа.

Оператор Эйлера—Лагранжа, отвечающий лагранжиану L , может быть введен как дифференциальный оператор второго порядка

$$\mathcal{E}_L : J^2 Y \longrightarrow \bigwedge_{Y}^{n+1} T^* Y$$

так называемого вариационного типа. Однако мы его построим как ограничение на многообразии струй второго порядка $J^2 Y$ некоторой внешней формы Ω_L , заданной на повторном многообразии струй $J^1 J^1 Y$. Именно эта форма является лагранжевым партнером оператора Гамильтона в многоимпульсном гамильтоново формализме.

Всякий лагранжиан L (2.1) наделяет многообразие струй $J^1 Y$ векторнозначной полисимплектической формой

$$\Omega_L = d\pi_i^\lambda \wedge dy^i \wedge \omega \otimes \partial_\lambda. \quad (2.4)$$

Индукция форму (2.4) и форму Пуанкаре—Картана (2.3) на повторное многообразие струй $J^1 J^1 Y$ посредством проекции π_{11} (1.59), построим упомянутую выше внешнюю форму на $J^1 J^1 Y$:

$$\Lambda_L = d\Xi_L - \lambda \lrcorner \Omega_L = (y_{(\lambda)}^i - y_\lambda^i) d\pi_i^\lambda \wedge \omega + (\partial_i - \widehat{\partial}_\lambda \partial_i^\lambda) \mathcal{L} dy^i \wedge \omega, \quad (2.5)$$

где

$$\lambda = dx^\lambda \otimes \widehat{\partial}_\lambda, \quad \widehat{\partial}_\lambda = \partial_\lambda + y_{(\lambda)}^i \partial_i + y_{\mu\lambda}^i \partial_i^\mu.$$

Назовем ее *производящей формой*. Ее сужение на полуголомное многообразие струй $\widehat{J}^2 Y$ определяет дифференциальный оператор первого порядка

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_L : \widehat{J}^2 Y &\longrightarrow \bigwedge_{J^1 Y}^{n+1} T^* Y, \\ \mathcal{E}'_L &= [\partial_i - (\partial_\lambda + y_\lambda^j \partial_j + y_{\mu\lambda}^j \partial_j^\mu) \partial_i^\lambda] \mathcal{L} dy^i \wedge \omega, \end{aligned} \quad (2.6)$$

на расслоении $J^1 Y \rightarrow X$. Он называется *оператором Эйлера—Лагранжа первого порядка*.

Ограничение производящей формы (2.5) на многообразии струй второго порядка $\widehat{J}^2 Y$ определяет дифференциальный оператор второго порядка \mathcal{E}_L на самом расслоении $Y \rightarrow X$. Он именуется *оператором Эйлера—Лагранжа второго порядка* и задается тем же самым выражением, что и (2.6), но с симметричными координатами ускорений $y_{\mu\lambda}^i = y_{\lambda\mu}^i$.

Пусть задан лагранжиан L (2.1). Связность

$$\bar{\Gamma} = dx^\lambda \otimes \left(\partial_\lambda + y_\lambda^i \partial_i + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^i \partial_i^\mu \right)$$

на расслоении $J^1Y \rightarrow X$ со значениями в \tilde{J}^2Y называется лагранжевой связностью для L , если она принимает значения в ядре $\text{Ker } \mathcal{E}'_L$ оператора Эйлера—Лагранжа (2.6):

$$\mathcal{E}'_L \circ \bar{\Gamma} = 0,$$

$$\partial_i \mathcal{L} - (\partial_\lambda + y_\lambda^j \partial_j + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^j \partial_j^\mu) \partial_i^\lambda \mathcal{L} = 0. \quad (2.7)$$

Уравнения (2.7) можно интерпретировать как систему линейных алгебраических уравнений Эйлера—Лагранжа для компонент $\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^i(x^\nu, y^j, y_\nu^j)$ лагранжевой связности.

Заметим, что существование решений алгебраических уравнений (2.7) является необходимым условием существования решений дифференциальных уравнений Эйлера—Лагранжа. Это условие можно исследовать стандартными методами теории линейных алгебраических уравнений. В частности, если лагранжиан регулярен, локальная лагранжева связность для него всегда существует.

Пусть локальная лагранжева связность $\bar{\Gamma}$ для лагранжиана L существует и имеет интегральное сечение \bar{s} расслоения $J^1Y \rightarrow X$, т. е. струйное продолжение $J^1\bar{s}$ сечения \bar{s} принимает значения в $\text{Ker } \mathcal{E}'_L$:

$$\mathcal{E}'_L \circ J^1\bar{s} = 0.$$

Тогда сечение $\bar{s}(x^\nu, y^j)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений Эйлера—Лагранжа первого порядка, отвечающих лагранжиану L :

$$\partial_\lambda \bar{s}^i = \bar{s}_\lambda^i, \quad (2.8a)$$

$$\partial_i \mathcal{L} - (\partial_\lambda + \bar{s}_\lambda^j \partial_j + \partial_\lambda \bar{s}_\mu^j \partial_j^\mu) \partial_i^\lambda \mathcal{L} = 0. \quad (2.8b)$$

Эта система дифференциальных уравнений первого порядка в свою очередь эквивалентна системе дифференциальных уравнений Эйлера—Лагранжа второго порядка

$$\partial_i \mathcal{L} - (\partial_\lambda + \partial_\lambda s^j \partial_j + \partial_\lambda \partial_\mu s^j \partial_j^\mu) \partial_i^\lambda \mathcal{L} = 0 \quad (2.9)$$

для сечения $s(x^\nu)$ расслоения $Y \rightarrow X$, второе струйное продолжение J^2s которого принимает значения в ядре оператора Эйлера—Лагранжа второго порядка \mathcal{E}_L :

$$\mathcal{E}_L \circ J^2s = 0.$$

Действительно, пусть \bar{s} — сечение расслоения $J^1Y \rightarrow X$, струйное продолжение $J^1\bar{s}$ которого лежит в полуголономном многообразии струй \tilde{J}^2Y . Согласно Предложению 1.5.3 существует сечение s расслоения $Y \rightarrow X$ такое, что

$$\bar{s} = J^1s \quad (2.10)$$

и, как это следует из определения операторов Эйлера—Лагранжа первого и второго порядков, выполняется соотношение

$$\mathcal{E}' \circ J^1\bar{s} = \mathcal{E} \circ J^2s.$$

В силу этого соотношения каждое решение s уравнений (2.9) задает решение J^1s уравнений (2.8a) и (2.8b). Обратно, всякое решение \bar{s} уравнений (2.8a) и (2.8b) принимает вид (2.10), где s — решение уравнений (2.9).

ПРИМЕР 2.1.2. Рассмотрим лагранжиан (2.2) из Примера 2.1.1. Имеем соответствующие алгебраические уравнения Эйлера—Лагранжа

$$\partial_\lambda \left(g^{\lambda\mu} \sqrt{|g|} \right) y_\mu + \bar{\Gamma}_{\lambda\mu} g^{\lambda\mu} \sqrt{|g|} = 0,$$

дифференциальные уравнения Эйлера—Лагранжа первого порядка

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \bar{s} &= \bar{s}_\lambda, \\ \partial_\lambda \left(g^{\lambda\mu} \sqrt{|g|} \right) \bar{s}_\mu + \partial_\lambda \bar{s}_\mu g^{\lambda\mu} \sqrt{|g|} &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

и дифференциальные уравнения Эйлера—Лагранжа второго порядка

$$\partial_\lambda \left(g^{\lambda\mu} \sqrt{|g|} \right) \partial_\mu s + \partial_\lambda \partial_\mu s g^{\lambda\mu} \sqrt{|g|} = 0. \quad (2.12)$$

Легко убедиться, что системы дифференциальных уравнений (2.11) и (2.12) эквивалентны. \square

Исследуем теперь законы сохранения, т. е. своего рода интегралы движения, которые можно получить в лагранжевом формализме на решениях уравнений Эйлера—Лагранжа. Существуют разные типы законов сохранения. Мы ограничимся дифференциальными лагранжевыми законами сохранения, которые следует из свойства инвариантности лагранжиана относительно тех или иных преобразований и выражаются как условие на дивергенцию некоторой величины. Такие законы сохранения получаются вычислением производной Ли лагранжиана вдоль соответствующего векторного поля. Причем, поскольку лагранжиан определен на многообразии струй, векторное поле должно быть тоже поднято на многообразии струй.

Пусть u — проектируемое векторное поле на расслоении $Y \rightarrow X$ и \bar{u} — его поднятие (1.52) на многообразии струй $J^1 Y \rightarrow X$. Нам потребуется его каноническое горизонтальное расщепление. Поэтому рассмотрим индуцированное из \bar{u} векторное поле на повторном многообразии струй $J^1 J^1 Y$ посредством проекции π_{11} . Будем обозначать его, как это практикуется для индуцированных конструкций, тем же символом \bar{u} . Тогда его каноническое горизонтальное расщепление (1.57) (где роль расслоения Y играет расслоение $J^1 Y \rightarrow X$) дается выражением

$$\bar{u} = \bar{u}_H + \bar{u}_V = u^\lambda \left(\partial_\lambda + y_{(\lambda}^i \partial_i + y_{\mu\lambda}^i \partial_i^\mu \right) + \left[(u^i - y_{(\lambda}^i u^\lambda) \partial_i + (u^\mu - y_{\mu\lambda}^i u^\lambda) \partial_i^\mu \right].$$

Пусть L — лагранжиан (2.1) на многообразии струй $J^1 Y$ расслоения $Y \rightarrow X$. Рассмотрим его индукцию на полуголомное многообразии струй $\bar{J}^1 Y$, обозначив ее тем же символом L . Вычислив производную Ли $L_{\bar{u}} L$ внешней горизонтальной плотности L в явном виде по формуле (1.40), получим

$$\begin{aligned} L_{\bar{u}} L &= \partial_\lambda u^\lambda \mathcal{L} + [u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i + (\partial_\lambda u^i + y_\lambda^j \partial_j u^i - y_\mu^i \partial_\lambda u^\mu) \partial_i^\lambda] \mathcal{L} = \\ &= \widehat{\partial}_\lambda [\pi_i^\lambda (u^i - u^\mu y_\mu^i) + u^\lambda \mathcal{L}] \omega + \bar{u}_V \lrcorner \mathcal{E}'_L, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$\widehat{\partial}_\lambda = \partial_\lambda + y_\lambda^i \partial_i + y_{\mu\lambda}^i \partial_i^\mu$$

означает оператор полной производной по координате x^λ .

При ограничении на ядро оператора Эйлера—Лагранжа первого порядка (2.6), выражение (2.13) приводится к тождеству

$$\partial_\lambda u^\lambda \mathcal{L} + [u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i + (\partial_\lambda u^i + y_\lambda^j \partial_j u^i - y_\mu^i \partial_\lambda u^\mu) \partial_i^\lambda] \mathcal{L} \approx \widehat{\partial}_\lambda [\pi_i^\lambda (u^i - u^\mu y_\mu^i) + u^\lambda \mathcal{L}], \quad (2.14)$$

где значком “ \approx ” обозначается так называемое *слабое равенство* по модулю уравнений Эйлера—Лагранжа. На решениях \bar{s} уравнений Эйлера—Лагранжа первого порядка (2.8a) и (2.8b) слабое тождество (2.14) превращается в *дифференциальный закон сохранения*

$$\bar{s}^* \mathbf{L}_{\bar{s}} L \approx - \frac{d}{dx^\lambda} [\pi_i^\lambda (u^\mu \bar{s}_\mu^i - u^i) - u^\lambda \mathcal{L}] \omega. \quad (2.15)$$

В теории поля обычно рассматриваются два типа дифференциальных законов сохранения (2.15) — законы сохранения токов симметрий и тензора энергии-импульса.

Пусть $u = u^i \partial_i$ — вертикальное векторное поле на расслоении $Y \rightarrow X$. Тогда тождество (2.14) принимает вид

$$[u^i \partial_i + (\partial_\lambda u^i + y_\lambda^j \partial_j u^i) \partial_i^\lambda] \mathcal{L} \approx \widehat{\partial}_\lambda (u^i \pi_i^\lambda).$$

Если

$$\mathbf{L}_{\bar{s}} L = 0,$$

то левая сторона этого тождества обращается в 0 и закон сохранения (2.15) на решениях уравнений Эйлера—Лагранжа первого порядка сводится к слабому закону сохранения

$$\frac{d}{dx^\lambda} [u^i \pi_i^\lambda] \approx 0 \quad (2.16)$$

так называемого *тока симметрий*

$$\mathcal{J}_u^\mu = u^i \pi_i^\mu,$$

отвечающего вертикальному векторному полю u . В калибровочной теории, например, это — известные тождества Нетер (см. следующий параграф).

Пусть теперь $\tau = \tau^\lambda \partial_\lambda$ — произвольное векторное поле на базе X и

$$\tau_\Gamma = \tau^\mu (\partial_\mu + \Gamma_\mu^i \partial_i)$$

его *горизонтальное* поднятие на расслоение $Y \rightarrow X$ посредством связности Γ на Y . В этом случае слабое равенство (2.14) приобретает форму

$$[\partial_\mu + \Gamma_\mu^i \partial_i + (\partial_\lambda \Gamma_\mu^i + y_\lambda^j \partial_j \Gamma_\mu^i) \partial_i^\lambda] \mathcal{L} + \widehat{\partial}_\lambda [\pi_i^\lambda (y_\mu^i - \Gamma_\mu^i) - \delta_\mu^\lambda \mathcal{L}] \approx 0. \quad (2.17)$$

На решениях \bar{s} уравнений Эйлера—Лагранжа первого порядка тождество (2.17) превращается в дифференциальный закон сохранения

$$[\partial_\mu + \Gamma_\mu^i \partial_i + (\partial_\lambda \Gamma_\mu^i + \bar{s}_\lambda^j \partial_j \Gamma_\mu^i) \partial_i^\lambda] \mathcal{L} + \frac{d}{dx^\lambda} [\mathcal{T}_{\Gamma \mu}^\lambda(\bar{s})] \approx 0, \quad (2.18)$$

где

$$\mathcal{T}_{\Gamma \mu}^\lambda(\bar{s}) = [\pi_i^\lambda (\bar{s}_\mu^i - \Gamma_\mu^i) - \delta_\mu^\lambda \mathcal{L}]$$

— это *канонический тензор энергии-импульса* относительно связности Γ .

ПРИМЕР 2.1.3. Если выбрать локальную тривиальную связность $\Gamma_\mu^i = 0$, закон сохранения (2.18) сведется к известному закону сохранения

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\lambda} + \frac{d}{dx^\lambda} \mathcal{F}^\lambda_\mu(\bar{s}) \approx 0$$

обычного канонического тензора энергии-импульса

$$\mathcal{F}^\lambda_\mu(\bar{s}) = \pi_i^\lambda \delta_\mu^i - \delta_\mu^\lambda \mathcal{L}, \quad (2.19)$$

который однако является глобально плохо определенным объектом. На пространстве Минковского компонента \mathcal{F}^0_0 тензора (2.19) интерпретируется как выражение для энергии поля \bar{s} . \square

§ 2. Калибровочная теория

С математической точки зрения объектами калибровочной теории являются связности на главных расслоениях и сечения ассоциированных расслоений.

Исторически калибровочная теория основывалась на так называемом *калибровочном принципе*, который требовал инвариантность лагранжиана полей относительно преобразований симметрий с параметрами, зависящими от пространственно-временных координат. Главным следствием этого условия является замена в лагранжиане полей операторов частных производных ∂_μ на операторы ковариантных производных

$$\partial_\mu - A_\mu^m(x)I_m,$$

где I_m — генераторы данной группы симметрий, а A_μ^m — калибровочные потенциалы.

Истории калибровочной теории посвящена обширная литература и мы не будем касаться этих вопросов. Калибровочный принцип во многом утратил свое былое значение после того, как была предложена математическая модель калибровочных потенциалов как связностей на главных расслоениях. Более того, калибровочный принцип в большинстве случаев недостаточен для построения калибровочных моделей. Говоря математическим языком, он фиксирует только структурную группу расслоения. Но, например, касательное расслоение TX (с которым ассоциированы все другие расслоения в теории гравитации) нельзя охарактеризовать лишь как векторное расслоение над X со структурной группой $GL(n, \mathbb{R})$. Его ключевое отличие от других таких расслоений над многообразием X состоит в том, что оно обладает голономным атласом. Кроме того его структурная группа редуцируема к своей подгруппе, что в физической интерпретации является признаком так называемого спонтанного нарушения симметрий. Традиционный калибровочный принцип этого не учитывает.

В то же время все современные модели фундаментальных взаимодействия являются моделями с нарушенными симметриями, что позволяет, например, используя механизм Хигса, генерировать массы частиц. Поэтому сейчас требование инвариантности относительно калибровочных, да и обычных преобразований симметрий не представляется уже столь абсолютным, как два десятилетия назад.

В геометрическом подходе, чтобы адекватно задать полеую модель, требуется фиксировать расслоение $Y \rightarrow X$, сечениями которого являются описываемые поля, и ввести на нем связности. На многообразии струй J^1Y этого расслоения строится лагранжиан (2.1). В теории поля все лагранжианы являются полиномиальными (как правило, квадратичными или аффинными) формами по координатам скоростей y^λ_i . Так как расслоение струй $J^1Y \rightarrow Y$ является аффинным расслоением, моделируемым над векторным

расслоением (1.48), всякий лагранжиан теории поля представляет собой композицию сначала отображения аффинного расслоения $J^1Y \rightarrow Y$ в векторное расслоение (1.48), а потом дифференциальной формы на этом векторном расслоении, т. е.

$$L : J^1Y \xrightarrow{D} T^*X \otimes_V Y \rightarrow \bigwedge^n T^*X, \quad (2.20)$$

где D — ковариантный дифференциал (1.73) относительно некоторой связности на расслоении $Y \rightarrow X$.

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением калибровочной теории ненарушенных внутренних симметрий.

Пусть $\pi_P : P \rightarrow X$ — главное расслоение со структурной группой G внутренних симметрий. Последнее означает, что эта группа не является какой-либо структурной группой касательного расслоения TX над базой X . Под X мы будем понимать 4-мерное ориентируемое многообразие, наделенное невырожденной метрикой $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ в касательном и кокасательном расслоениях над X . Как и в Примере 2.1.1, обозначим $g = \det(g_{\mu\nu})$. В калибровочной теории только внутренних симметрий, метрика g не является динамической переменной и рассматривается как внешнее (своего рода параметрическое) поле.

Калибровочные потенциалы, отвечающие группе симметрий G , отождествляются со связностями на главном расслоении P и представляются глобальными сечениями A расслоения связностей $C = J^1P/G$ (1.89) с координатами (x^μ, k_μ^m) такими, что

$$(k_\mu^m \circ A)(x) = A_\mu^m(x)$$

— коэффициенты локальной 1-формы связности. Расслоение C можно наделить связностями (1.95):

$$S_{B\mu\lambda}^m = \frac{1}{2} [c_{nl}^m k_\lambda^n k_\mu^l + \partial_\mu B_\lambda^m + \partial_\lambda B_\mu^m - c_{nl}^m (k_\mu^n B_\lambda^l + k_\lambda^n B_\mu^l)] - K^\beta{}_{\mu\lambda} (B_\beta^m - k_\beta^m).$$

Конфигурационным пространством калибровочных потенциалов является многообразие струй J^1C расслоения C с координатами $(x^\mu, k_\mu^m, k_{\mu\lambda}^m)$. Имеет место его каноническое расщепление (1.92):

$$J^1C = C_+ \oplus_C C_-,$$

$$k_{\mu\lambda}^m = \frac{1}{2} (\mathcal{S}_{\lambda\mu}^m + \mathcal{F}_{\lambda\mu}^m) = \frac{1}{2} (k_{\mu\lambda}^m + k_{\lambda\mu}^m + c_{nl}^m k_\lambda^n k_\mu^l) + \frac{1}{2} (k_{\mu\lambda}^m - k_{\lambda\mu}^m - c_{nl}^m k_\lambda^n k_\mu^l).$$

На этом конфигурационном пространстве общепринятый лагранжиан Янга—Миллса L_{YM} калибровочных потенциалов дается выражением

$$L_{YM} = \frac{1}{4\epsilon^2} a_{mn}^G g^{\lambda\mu} g^{\beta\nu} \mathcal{F}_{\lambda\beta}^m \mathcal{F}_{\mu\nu}^n \sqrt{|g|} \omega, \quad (2.21)$$

где a^G — некоторая невырожденная G -инвариантная билинейная форма на алгебре Ли \mathcal{G} — типичном слое сопряженного расслоения $V^G P$, и ϵ — константа взаимодействия.

Заметим, что невырожденная инвариантная билинейная форма на алгебре Ли существует не всегда, и поэтому не для всех групп Ли может быть построена янг-миллсовская

калибровочная модель. Например, если G — полупростая группа, такой формой является форма Киллинга

$$a_{mn}^G = c_{mk}^l c_{nl}^k.$$

Если G — компактная группа, форма Киллинга является отрицательно определенной и существует базис алгебры Ли, в котором она принимает вид $a_{mn}^G = -2\delta_{mn}$. В калибровочной теории внутренних симметрий обычно ограничиваются моделями с компактными группами симметрий, поскольку отрицательная определенность формы Киллинга гарантирует положительную определенность энергии калибровочных потенциалов в таких моделях.

Лагранжиан Янга—Миллса (2.21) факторизуется согласно общему выражению (2.20) в виде

$$L_{YM} : J^1 C \xrightarrow{D} C_- \rightarrow \bigwedge^4 T^* X,$$

где D — ковариантный дифференциал относительно какой-либо связности (1.95).

ПРИМЕР 2.2.1. Простейшим примером калибровочного поля является *электромагнитное поле*. Электромагнитные потенциалы отождествляются со связностями на главных расслоениях со структурной группой $U(1)$. Такие расслоения над сферой S^2 и связности на них были рассмотрены в Примерах 1.7.2 и 1.7.8. Пусть $P \rightarrow X$ — главное $U(1)$ -расслоение. В этом случае соответствующее сопряженное расслоение $V^G P$ сводится к тривиальному линейному расслоению

$$V^G P = X \times \mathbb{R},$$

а расслоение связностей C (1.89) изоморфно аффинному кокасательному расслоению $T^* X$ над X с координатами (x^λ, k_μ) . Связности (1.95) на нем принимают форму

$$\Gamma_{B\mu\lambda} = \frac{1}{2} (\partial_\mu B_\lambda + \partial_\lambda B_\mu) - K^\beta{}_{\mu\lambda} (B_\beta - k_\beta).$$

Конфигурационным пространством электромагнитных потенциалов является многообразие струй

$$J^1 C = J^1 T^* X = \bigotimes_X T^* X \times T^* X.$$

Его каноническое расщепление (1.92) имеет вид

$$J^1 T^* X = \sqrt[2]{T^* X} \oplus_{T^* X} \bigwedge^2 T^* X, \quad (2.22)$$

$$k_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} (\mathcal{S}_{\mu\lambda} + \mathcal{F}_{\mu\lambda}) = k_{(\mu\lambda)} + k_{[\mu\lambda]}.$$

Для всякого сечения A аффинного кокасательного расслоения $T^* X$, величина

$$F_{\mu\lambda} = \mathcal{F}_{\mu\lambda} \circ J^1 A = \partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda$$

является напряженностью электромагнитного поля. На конфигурационном пространстве (2.22) общепринятый лагранжиан электромагнитного поля дается выражением

$$L_E = -\frac{1}{16\pi} g^{\lambda\mu} g^{\beta\nu} \mathcal{F}_{\lambda\beta} \mathcal{F}_{\mu\nu} \omega \quad (2.23)$$

в системе единиц, в которой скорость света принята равной 1. \square

Легко проверить, что лагранжиан Янга—Миллса (2.21) вырожден. Если построить соответствующие алгебраические уравнения Эйлера—Лагранжа (2.7), нетрудно убедиться, что они оставляют произвольными компоненты $\bar{\Gamma}_{\lambda\lambda}^m$ лагранжевой связности, и дифференциальные уравнения Эйлера—Лагранжа для калибровочных потенциалов оказываются недоопределенными.

Еще одним объектом калибровочной теории являются так называемые материальные поля. В калибровочной теории внутренних симметрий *материальные поля* со значениями во внутреннем пространстве V описываются глобальными сечениями векторного расслоения

$$Y = (P \times V)/G, \quad (2.24)$$

ассоциированного с главным расслоением P . Это скалярные поля. Связности Γ на расслоении Y ассоциированы со связностями на главном расслоении P и имеют вид (1.94).

$$\Gamma_A = dx^\lambda \otimes [\partial_\lambda + A_\mu^m(x) I_m^i{}_j y^j \partial_i].$$

Чтобы можно было построить лагранжиан материальных полей, предполагается, что расслоение Y (2.24) надлено G -инвариантной послойной метрикой a^Y . Благодаря каноническому вертикальному расщеплению

$$VY = Y \underset{X}{\otimes} Y,$$

метрика a^Y служит также послойной метрикой в вертикальном касательном расслоении $VY \rightarrow X$.

Конфигурационным пространством материальных полей является многообразие струй J^1Y расслоения (2.24) с координатами $(x^\lambda, y^i, y_\lambda^i)$. На этом конфигурационном пространстве стандартный *лагранжиан скалярных материальных полей* в присутствии внешнего калибровочного потенциала A имеет вид

$$L_{(m)} = \frac{1}{2} a_{ij}^Y [g^{\mu\nu} (y_\mu^i - \Gamma_{A\mu}^i)(y_\nu^j - \Gamma_{A\nu}^j) - m^2 y^i y^j] \sqrt{|g|} \omega, \quad (2.25)$$

$$\Gamma_{A\lambda}^i = A_\lambda^m(x) I_m^i{}_j y^j. \quad (2.26)$$

Он является непосредственным обобщением лагранжиана скалярного поля из Примера 2.1.1 и описывает взаимодействие материальных полей с внешним калибровочным потенциалом A . Лагранжиан (2.25) регулярен. Он не является калибровочно инвариантным из-за внешнего поля A .

В случае ненарушенных симметрий полная система динамических материальных полей и динамических калибровочных потенциалов представляется сечениями прямого произведения

$$C \underset{X}{\times} Y \quad (2.27)$$

расслоения связностей C и расслоения материальных полей Y с координатами $(x^\lambda, k_\mu^m, y^i)$.

В качестве связности на расслоении (2.27) можно было бы взять произведение связностей S_B на C и Γ_A на Y , но при таком варианте мы получили бы, как и в предыдущем случае, взаимодействие материальных полей с внешним, а не с динамическим калибровочным потенциалом. Поэтому выберем связность на расслоении (2.27) в виде

$$\Gamma = dx^\lambda \otimes [\partial_\lambda + S_{B\mu\lambda}^m \partial_m^\mu + k_\lambda^m I_m^i{}_j y^j \partial_i].$$

Общее конфигурационное пространство материальных и калибровочных полей является произведением их конфигурационных пространств

$$J^1(C \times Y) = J^1C \times J^1Y. \quad (2.28)$$

Соответственно полный лагранжиан L на этом конфигурационном пространстве представляет собой сумму лагранжиана Янга—Миллса (2.21) и лагранжиана материальных полей (2.25), в котором однако связность (2.26) заменена на связность

$$\Gamma_\lambda^i = k_\lambda^m I_m^i{}_j y^j.$$

Такой лагранжиан является инвариантным относительно калибровочных преобразований.

Заметим, что в калибровочной теории рассматривается несколько разновидностей *калибровочных преобразований*. Это преобразования атласов главных и ассоциированных расслоений, калибровочные изоморфизмы (1.83) главного расслоения $P \rightarrow X$ над тождественным преобразованием базы X и общие изоморфизмы главного расслоения над диффеоморфизмами базы. В калибровочной теории внутренних симметрий достаточно ограничиться первыми двумя типами калибровочных преобразований. Они связаны между собой следующим образом.

Пусть дан атлас $\{z_\xi(x)\}$ главного расслоения P . Всякий калибровочный изоморфизм Φ_P (1.83) главного расслоения P определяет новый атлас расслоения, задаваемый семейством локальных сечений

$$z'_\xi(x) = z_\xi(x) f_\Phi^{-1}(z_\xi(x)), \quad x \in U_\xi. \quad (2.29)$$

Нетрудно проверить, что оба атласа имеют одни и те же функции перехода. Обратно, для любых двух карт (U_ξ, z_ξ) и (U_ξ, z'_ξ) на одной и той же области тривиализации U_ξ существует локальный калибровочный изоморфизм над U_ξ такой, что выполняется соотношение (2.29). Это означает, что по крайней мере локально на областях тривиализации главного расслоения имеет место взаимно однозначное соответствие между двумя рассматриваемыми типами калибровочных преобразований. Более того, в расслоенных координатах они задаются одними и теми же координатными преобразованиями. Все это справедливо и для ассоциированных расслоений. Поэтому условия инвариантности лагранжиана относительно как преобразований атласов расслоений, так и калибровочных изоморфизмов эквивалентны.

Калибровочные изоморфизмы (1.83) главного расслоения P образуют группу, которая изоморфна группе глобальных сечений группового расслоения \bar{P} из Примера 1.7.6. Она называется *калибровочной группой*. Не вдаваясь в детали, отметим, что эта группа может быть пополнена до банаховой (бесконечномерной) группы Ли. Элементам ее алгебры Ли \mathcal{G} соответствуют *фундаментальные вертикальные векторные поля* $u_{\mathcal{G}}$ на главном и ассоциированных расслоениях. Отсюда условие калибровочной инвариантности лагранжиана L на конфигурационном пространстве (2.28) состоит в том, что

$$L_{u_{\mathcal{G}}} L = 0 \quad (2.30)$$

для любого локального фундаментального векторного поля $u_{\mathcal{G}}$ на $C \times Y$.

Явное выражение для локальных фундаментальных векторных полей $u_{\mathcal{G}}$ можно получить, трактуя их как своего рода *генераторы инфинитезимальных калибровочных изоморфизмов*. Так, на ассоциированном с P векторном расслоении $Y \rightarrow X$ всякое такое поле имеет вид

$$u_{\mathcal{G}} = \alpha^m(x) I_m^i{}_j y^j \partial_i,$$

где I_m — генераторы структурной группы G , действующей на типичном слое V , и $\alpha^m(x)$ — произвольные локальные функции на X . Оно отвечает инфинитезимальному калибровочному изоморфизму

$$y^i \rightarrow y^i + t\alpha^m(x)I_m^i{}_j y^j,$$

где t — малый групповой параметр.

На расслоении связностей C фундаментальные векторные поля даются выражением

$$u_{\mathcal{G}} = [\partial_\mu \alpha^m(x) + c_{nl}^m k_\mu^l \alpha^n(x)] \partial_\mu^m.$$

Соответственно на произведении $C \times_Y X$ они принимают форму

$$u_{\mathcal{G}} = (u_m^{A\lambda} \partial_\lambda \alpha^m + u_m^A \alpha^m) \partial_A = (\partial_\mu \alpha^m + c_{nl}^m k_\mu^l \alpha^n) \partial_\mu^m + \alpha^m I_m^i{}_j y^j \partial_i,$$

где мы использовали коллективный индекс A . Подставляя это выражение в условие калибровочной инвариантности (2.30), получаем тождество, которое должно выполняться при произвольных функциях $\alpha^m(x)$. Отсюда, приравнявая нулю соответствующие выражения, приходим к системе равенств

$$\begin{aligned} u_m^A (\partial_A - \widehat{\partial}_\lambda \partial_A^\lambda) \mathcal{L} + \widehat{\partial}_\lambda (u_m^A \partial_A^\lambda \mathcal{L}) &= 0, \\ u_m^{A\mu} (\partial_A - \widehat{\partial}_\lambda \partial_A^\lambda) \mathcal{L} + \widehat{\partial}_\lambda (u_m^{A\mu} \partial_A^\lambda \mathcal{L}) + u_m^A \partial_A^\mu \mathcal{L} &= 0, \\ u_m^{A\lambda} \partial_A^\mu \mathcal{L} + u_m^{A\mu} \partial_A^\lambda \mathcal{L} &= 0, \end{aligned}$$

которые на решениях уравнений Эйлера—Лагранжа воспроизводят известные *тождества Нетер*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^\lambda} (u_m^A \partial_A^\lambda \mathcal{L}) &\approx 0, \\ \frac{d}{dx^\lambda} (u_m^{A\mu} \partial_A^\lambda \mathcal{L}) + u_m^A \partial_A^\mu \mathcal{L} &\approx 0, \\ u_m^{A\lambda} \partial_A^\mu \mathcal{L} + u_m^{A\mu} \partial_A^\lambda \mathcal{L} &= 0 \end{aligned}$$

для калибровочно инвариантного лагранжиана L .

В частности, доказано, что лагранжиан Янга—Миллса (2.21) является единственным квадратичным калибровочно инвариантным лагранжианом калибровочных потенциалов.

§ 3. Гамильтонов формализм

Лагранжианы большинства фундаментальных полевых моделей, включая калибровочные поля, фермионные поля, гравитацию и др., не являются регулярными. В случае вырожденного лагранжиана соответствующие уравнения Эйлера—Лагранжа оказываются недоопределенными, поскольку старшие производные полевых функций, как это видно из алгебраических уравнений (2.7), не выражаются однозначно через их младшие производные. Возникает необходимость в дополнительных уравнениях. В калибровочной теории такими уравнениями оказываются хорошо известные калибровочные условия. Однако в общем случае (например, для поля Прока) неясно, как задавать подобные добавочные условия.

В механике вполне адекватное описание вырожденных систем дает, как известно, гамильтонов формализм. Этот гамильтонов формализм широко используется и в квантовой теории поля для канонического квантования полей. Главным его достижением стала процедура построения одновременных коммутационных соотношений полей для систем со связями.

Не столь успешным однако оказалось применение стандартной гамильтоновой техники в классической теории поля, когда каноническими переменными являются полевые функции в данный момент времени. В результате соответствующее фазовое пространство оказывается бесконечномерным, а уравнения Гамильтона не являются дифференциальными уравнениями на полевые функции, в отличие от уравнений Эйлера—Лагранжа. Поэтому в классической теории поля, в сравнении с механикой, традиционный симплектический гамильтонов формализм перестает быть партнером лагранжева формализма.

Таким партнером оказывается так называемый *многоимпульсный гамильтонов формализм*, где каноническими переменными являются полевые функции и импульсы, соответствующие производным этих функций по всем пространственно-временным координатам, а не только по времени. В математической литературе это направление особенно активно стало развиваться с 70-х годов. В физической литературе, аналогичная идея была положена в основу так называемой алгебры токов. Трудность возникает с установлением коммутационных соотношений между многоимпульсными каноническими переменными при переходе к квантовой теории. Однако ее можно обойти, если ограничиться хронологическими произведениями и квантовать поля в технике функционального интегрирования. Мы не будем касаться здесь этих вопросов.

Для данного расслоения $Y \rightarrow X$ рассмотрим расслоение

$$\Pi = \bigwedge^n T^*X \underset{Y}{\otimes} TX \underset{Y}{\otimes} V^*Y \quad (2.31)$$

над Y , наделенное атласом расслоенных координат

$$(x^\lambda, y^i, p_i^\lambda),$$

$$p_i^\lambda = \frac{\partial y^j}{\partial y'^i} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \det \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \right) p_j^\mu. \quad (2.32)$$

Всякий лагранжиан L (2.1) на многообразии струй J^1Y расслоения Y задает послойный морфизм

$$\widehat{L} : J^1Y \underset{Y}{\longrightarrow} \Pi,$$

$$p_i^\mu \circ \widehat{L} = \pi_i^\mu, \quad (2.33)$$

над Y конфигурационного пространства в расслоение Π . Этот морфизм выглядит как естественное n -мерное обобщение известного преобразования в механике от скоростей к импульсам. Поэтому многообразие Π (2.31) является естественным претендентом на роль конечномерного *фазового пространства* в теории поля. Оно называется *многообразием Лежандра*, расслоение

$$\pi_{\Pi Y} : \Pi \rightarrow Y$$

именуется соответственно *расслоением Лежандра* над Y , а послойный морфизм (2.33) — *отображением Лежандра* из конфигурационного в фазовое пространство.

Будем использовать символ q для обозначения элементов многообразия Лежандра Π и станем называть координаты (2.32) на нем *каноническими координатами*.

В качестве фазового пространства многообразия Лежандра Π (2.31) наделяется так называемой *полисимплектической структурой*, и многоимпульсный гамильтонов формализм на этом многообразии строится подобно гамильтонову формализму на симплектических многообразиях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.1. *Обобщенной формой Лиувилля* на расслоении Лежандра $\Pi \rightarrow Y$ называется векторнозначная горизонтальная форма

$$\theta = -p_i^\lambda dy^i \wedge \omega \otimes \partial_\lambda, \quad (2.34)$$

отвечающая каноническому послыному мономорфизму

$$\theta : \Pi \xrightarrow{Y} \bigwedge^{n+1} T^*Y \otimes_Y TX.$$

□

Подчеркнем, что форма θ (2.34) не является тангенциально-значной и к ней нельзя прямо применить операцию (F-N)-дифференцирования, чтобы получить соответствующую полисимплектическую форму. Поэтому мы дадим независимое определение полисимплектической формы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.2. *Полисимплектической формой* на многообразии Лежандра Π называется векторнозначная форма, которая во всяком атласе канонических координат (2.32) на Π дается выражением

$$\Omega = dp_i^\lambda \wedge dy^i \wedge \omega \otimes \partial_\lambda. \quad (2.35)$$

□

Хотя можно установить и прямую связь полисимплектической формы (2.35) с обобщенной формой Лиувилля (2.34), мы здесь ограничимся следующим утверждением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.3. Для всякой внешней 1-формы ϕ на X и индуцированной из нее внешней горизонтальной 1-формы ϕ на расслоении $\Pi \rightarrow X$, полисимплектическая форма (2.35) и обобщенная форма Лиувилля (2.34) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} d(\Omega \lrcorner \phi) &= 0, \\ \Omega \lrcorner \phi &= -d(\theta \lrcorner \phi). \end{aligned}$$

□

Многообразии Лежандра, наделенное обобщенной формой Лиувилля (2.34) и полисимплектической формой (2.35), называется *полисимплектическим многообразием*. Легко видеть, что при $\dim X = 1$ формы (2.34) и (2.35) сводятся соответственно к канонической форме Лиувилля (1.41) и к канонической симплектической форме из Примера 1.4.6. Случай $n = 1$ механики является однако весьма специфичным. Поэтому в дальнейшем в теории поля мы будем полагать $n > 1$.

Одним из ключевых объектов при построении гамильтонова формализма на симплектических многообразиях являются, как известно, гамильтоновы векторные поля на симплектическом многообразии. В гамильтоновом формализме на полисимплектическом многообразии Π аналогичную роль играют так называемые гамильтоновы связности.

Рассмотрим многообразие струй $J^1\Pi$ расслоения $\Pi \rightarrow X$ с координатами

$$(x^\lambda, y^i, p_i^\lambda, y_{(\mu)}^i, p_{i\mu}^\lambda).$$

Струйным продолжением проекции $\pi_{\Pi Y} : \Pi \rightarrow Y$ является сюръекция

$$J^1\pi_{\Pi Y} : J^1\Pi \rightarrow J^1Y, \\ y_\mu^i \circ J^1\pi_{\Pi Y} = y_{(\mu)}^i.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.4. Говорят, что связность

$$\gamma = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \gamma_{(\lambda)}^i \partial_i + \gamma_{i\lambda}^\mu \partial_\mu^i)$$

на расслоении $\Pi \rightarrow X$ является *гамильтоновой связностью*, если внешняя форма

$$\gamma \lrcorner \Omega = dp_i^\lambda \wedge dy^i \wedge \omega_\lambda + \gamma_{i\lambda}^\lambda dy^i \wedge \omega - \gamma_{(\lambda)}^i dp_i^\lambda \wedge \omega$$

на Π точная. \square

Приведем следующий важный случай гамильтоновых связностей.

ПРИМЕР 2.3.1. Можно показать, что всякая связность Γ на расслоении $Y \rightarrow X$ поднимается до связности

$$\tilde{\Gamma} = dx^\lambda \otimes [\partial_\lambda + \Gamma_\lambda^i(y) \partial_i + (-\partial_j \Gamma_\lambda^i(y) p_j^\mu - K^\mu{}_{\nu\lambda}(x) p_j^\nu + K^\alpha{}_{\alpha\lambda}(x) p_j^\alpha) \partial_\mu^j]$$

на расслоении $\Pi \rightarrow X$, где K — некоторая симметричная линейная связность (1.70) на расслоениях TX и T^*X . Рассмотрим векторнозначную форму

$$\hat{\Gamma} := \Gamma \circ \pi_{\Pi Y} : \Pi \rightarrow Y \rightarrow J^1Y, \\ \hat{\Gamma} = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \Gamma_\lambda^i \partial_i), \quad (2.36)$$

на расслоении Лежандра $\Pi \rightarrow Y$, индуцированную из формы Γ (1.66). Имеет место соотношение

$$\tilde{\Gamma} \lrcorner \Omega = d(\hat{\Gamma} \lrcorner \theta), \quad (2.37)$$

из которого следует, что $\tilde{\Gamma}$ — гамильтонова связность. \square

Этот пример показывает, что гамильтоновы связности всегда существуют. Более того, всякой связности на расслоении $Y \rightarrow X$ соответствует некоторая гамильтонова связность на расслоении $\Pi \rightarrow X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.5. Внешняя n -форма H на полисимплектическом многообразии Π называется *гамильтонианом*, если существует гамильтонова связность, удовлетворяющая уравнению

$$\gamma \lrcorner \Omega = dH. \quad (2.38)$$

\square

ПРИМЕР 2.3.2. Продолжая Пример 2.3.1 и сравнивая уравнение (2.37) с уравнением (2.38), получаем, что всякой связности Γ на расслоении $Y \rightarrow X$ соответствует гамильтониан

$$H_\Gamma = \hat{\Gamma} \lrcorner \theta = p_i^\lambda dy^i \wedge \omega_\lambda - p_i^\lambda \Gamma_\lambda^i(y) \omega \quad (2.39)$$

на многообразии Лежандра Π . \square

Имея гамильтонианы (2.39), можно охарактеризовать все множество гамильтонианов на многообразии Лежандра, если опираться на следующий факт.

ТЕОРЕМА 2.3.6. Пусть H — гамильтониан. Для всякой внешней горизонтальной плотности

$$\tilde{H} = \tilde{\mathcal{H}}\omega \quad (2.40)$$

на расслоении $\Pi \rightarrow X$ форма $H - \tilde{H}$ тоже является гамильтонианом. Обратное, если H и H' — гамильтонианы, их разность $H - H'$ является внешней горизонтальной плотностью типа (2.40). \square

Из Теоремы 2.3.6 следует, что гамильтонианы на многообразии Лежандра образуют аффинное пространство, моделируемое над линейным пространством горизонтальных плотностей (2.40). Отсюда всякий гамильтониан можно представить в виде

$$H = H_\Gamma - \tilde{H}_\Gamma = p_i^\lambda dy^i \wedge \omega_\lambda - p_i^\lambda \Gamma_\lambda^i \omega - \tilde{\mathcal{H}}_\Gamma \omega = p_i^\lambda dy^i \wedge \omega_\lambda - \mathcal{H} \omega, \quad (2.41)$$

где Γ — некоторая связность на расслоении $Y \rightarrow X$. Если выбрать другую связность $\Gamma' = \Gamma + \sigma$, где σ — некоторая припаивающая форма на Y , то получим простое соотношение

$$\tilde{H}_{\Gamma'} = \tilde{H}_\Gamma - p_i^\lambda \sigma_\lambda^i \omega.$$

Выражение (2.41) сохраняет свой вид при всех преобразованиях канонических координат. Поэтому в приложениях его можно использовать как определение гамильтониана на многообразии Лежандра. К тому же, как будет показано ниже, всякий гамильтониан сам определяет некоторую связность на расслоении $Y \rightarrow X$, подставляя которую в выражение (2.41), мы получим его каноническое разбиение.

Будем называть *импульсным морфизмом* любое послейное отображение над Y фазового пространства в конфигурационное пространство:

$$\begin{aligned} \Phi : \Pi &\longrightarrow J^1 Y, \\ y_\lambda^i \circ \Phi &= \Phi_\lambda^i(q), \quad q \in \Pi. \end{aligned} \quad (2.42)$$

В композиции с мономорфизмом (1.50) импульсный морфизм (2.42) можно представить векторнозначной 1-формой

$$\Phi = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \Phi_\lambda^i(q)\partial_i) \quad (2.43)$$

на расслоении Лежандра $\Pi \rightarrow Y$.

ПРИМЕР 2.3.3. Связность Γ на расслоении Y индуцирует импульсный морфизм $\hat{\Gamma}$ (2.36). Обратное, всякий импульсный морфизм Φ (2.42) задает связность

$$\Gamma_\Phi = \Phi \circ \hat{\Gamma}$$

на расслоении $Y \rightarrow X$, где $\hat{\Gamma}$ — всюду нулевое глобальное сечение расслоения Лежандра $\Pi \rightarrow Y$. В частности, легко убедиться, что

$$\Gamma_{\tilde{H}} = \Gamma.$$

\square

Подобно тому, как всякий лагранжиан индуцирует отображение Лежандра $J^1Y \rightarrow \Pi$, каждый гамильтониан H (2.41) определяет импульсный морфизм

$$\begin{aligned} \widehat{H} : \Pi &\rightarrow J^1Y, \\ y_\lambda^i \circ \widehat{H} &= \partial_\lambda^i \mathcal{H}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

а также связность

$$\Gamma_H = \widehat{H} \circ \widehat{\theta}$$

на расслоении $Y \rightarrow X$. Например, для гамильтониана H_Γ (2.39) находим

$$\Gamma_{H_\Gamma} = \Gamma.$$

Справедливо и обратное утверждение. Всякий импульсный морфизм (2.42), представленный векторнозначной формой (2.43) на многообразии Лежандра Π , порождает соответствующий гамильтониан

$$H_\Phi = \Phi \lrcorner \theta = H_{\Gamma_\Phi} - \widetilde{H}_\Phi = p_\lambda^\lambda dy^i \wedge \omega_\lambda - p_\lambda^i \Phi_\lambda^i(q)\omega. \quad (2.45)$$

В частности, гамильтониан H_Γ (2.39) является гамильтонианом типа (2.45), порождаемым импульсным морфизмом $\widehat{\Gamma}$ (2.36). Обратно, если гамильтониан H удовлетворяет соотношению

$$H_{\widehat{H}} = H,$$

то это — гамильтониан типа H_Γ для некоторой связности Γ на Y .

Пусть H — произвольный гамильтониан и Γ_H — индуцируемая им связность на расслоении $Y \rightarrow X$. Подставляя ее в выражение (2.41), мы получаем упоминавшееся выше каноническое разбиение

$$H = H_{\Gamma_H} - \widetilde{H}.$$

гамильтониана H .

Заметим, что в механике гамильтонианы не имеют какого-либо канонического вида. Это вызвано тем, что семейство канонических преобразований при $n = 1$ гораздо богаче, чем при $n > 1$, когда они ограничиваются в основном преобразованиями (2.32) и, что самое главное, новые канонические координаты y'^i не могут выражаться через старые импульсы p_i^μ .

Перейдем теперь к рассмотрению уравнений Гамильтона. Ими по сути дела являются уравнения (2.38). Они представляют собой условия на ядро оператора Гамильтона для данного гамильтониана H . Это дифференциальный оператор первого порядка

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_H : J^1\Pi &\rightarrow \bigwedge^{n+1} T^*\Pi, \\ \mathcal{E}_H &= [(y_{(\lambda)}^i - \partial_\lambda^i \mathcal{H}) dp_i^\lambda - (p_i^\lambda + \partial_i \mathcal{H}) dy^i] \wedge \omega, \end{aligned} \quad (2.46)$$

на расслоении $\Pi \rightarrow X$. Для всякой связности

$$\gamma = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \gamma_{(\lambda)}^i \partial_i + \gamma_{i\lambda}^\mu \partial_\mu^i)$$

на расслоении $\Pi \rightarrow X$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}_H \circ \gamma = dH - \gamma \lrcorner \Omega.$$

Из него следует, что связность γ является гамильтоновой связностью для гамильтониана H как раз тогда и только тогда, когда она принимает значения в ядре $\text{Ker } \mathcal{E}_H$ оператора Гамильтона (2.46), т. е. удовлетворяет системе алгебраических уравнений Гамильтона

$$\gamma_{(\lambda)}^i = \partial_\lambda^i \mathcal{H}, \quad (2.47a)$$

$$\gamma_{i\lambda}^\lambda = -\partial_i \mathcal{H}. \quad (2.47b)$$

Легко видеть, что эти уравнения в силу своей структуры всегда имеют решение, но, поскольку число неизвестных в этих уравнениях больше числа самих уравнений, их решение не единственно. Это означает, что, в отличие от механики, существуют разные гамильтоновы связности для одного и того же гамильтониана H и можно даже установить их общую форму. В силу уравнения (2.47a) все они удовлетворяют соотношению

$$J^1 \pi_{TY} \circ \gamma = \widehat{H}$$

и имеют вид

$$\gamma = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \partial_\lambda^i \mathcal{H} \partial_i + \gamma_{i\lambda}^\mu \partial_\mu^i).$$

Как и в случае уравнений Эйлера—Лагранжа, перейдем теперь от алгебраических к дифференциальным уравнениям Гамильтона. Пусть r — сечение расслоения $\Pi \rightarrow X$ такое, что его струйное продолжение $J^1 r$ принимает значения в ядре оператора Гамильтона (2.46). Тогда это сечение удовлетворяет системе дифференциальных уравнений Гамильтона первого порядка

$$\partial_\lambda r^i = \partial_\lambda^i \mathcal{H}, \quad (2.48a)$$

$$\partial_\lambda r_i^\lambda = -\partial_i \mathcal{H}, \quad (2.48b)$$

получаемых из алгебраических уравнений Гамильтона (2.47a) и (2.47b).

Уравнения Гамильтона (2.48a) и (2.48b) выглядят как естественное n -мерное обобщение обычных уравнений Гамильтона. Действительно, если $X = \mathbb{R}$, многоимпульсный гамильтонов формализм сводится к обычному гамильтонову формализму в механике. В этом случае расслоение Y тривиально и имеют место изоморфизмы

$$Y = \mathbb{R} \times F, \quad (2.49)$$

$$\Pi = \mathbb{R} \times T^* F, \quad (2.50)$$

где F — некоторое многообразие. Координатами на Y и Π являются (t, y^i) и $(t, y^i, p_i = \dot{y}_i)$.

Обобщенная форма Лиувилля (2.34) и полисимплектическая форма (2.35) на многообразии Лежандра Π (2.50) сводятся к формам

$$\theta = -\dot{y}_i dy^i,$$

$$\Omega = d\dot{y}_i \wedge dy^i,$$

индуцированными на Π соответственно из канонической формы Лиувилля и канонической симплектической формы на кокасательном расслоении $T^* F$. Пусть Γ_0 — тривиальная связность на расслоении Y , отвечающая расщеплению (2.49). Тогда всякий гамильтониан на многообразии Лежандра Π (2.50) дается выражением

$$H = H_{\Gamma_0} - \bar{H} = \dot{y}_i dy^i - \bar{H}_0 dt. \quad (2.51)$$

Соответствующие алгебраические уравнения Гамильтона (2.47а) и (2.47б) сводятся к известным уравнениям Гамильтона

$$\begin{aligned} u^i &= \partial^i \overline{\mathcal{H}}_0, \\ u_i &= -\partial_i \overline{\mathcal{H}}_0 \end{aligned}$$

для гамильтонова векторного поля

$$u = u^i \partial_i + u_i \partial^i,$$

задаваемого функцией Гамильтона $\overline{\mathcal{H}}_0$ на $\mathbb{R} \times T^*F$. В частности, имеет место взаимно однозначное соответствие между гамильтоновыми векторными полями u и гамильтоновыми связностями γ на $\mathbb{R} \times T^*F$. Оно дается соотношением

$$\gamma = dt \otimes (\partial_t + u).$$

Заметим, что, в отличие от уравнений Гамильтона в механике, уравнения Гамильтона (2.48а) и (2.48б) в теории поля описывают так называемую обобщенную гамильтонову динамику, когда динамика системы не сводится к эволюции во времени, задаваемой скобками Пуассона.

§ 4. Системы со связями

Рассмотрим связь между лагранжевым и многоимпульсным гамильтоновым формализмами в наиболее интересной для приложений ситуации вырожденных лагранжианов. К этому случаю относятся почти все сколько-нибудь интересные полевые модели.

Пусть дано расслоение $Y \rightarrow X$. Пусть H — гамильтониан (2.41) на многообразии Лежандра Π (2.31) и L — лагранжиан (2.1) на многообразии струй J^1Y . Пусть \widehat{H} — соответствующий импульсный морфизм (2.44), а \widehat{L} — отображение Лежандра (2.33). Приведем полезные координатные выражения для их струйных продолжений $J^1\widehat{L}$ и $J^1\widehat{H}$:

$$\begin{aligned} (y_\mu^i, y_{(\mu)}^i, y_{\mu\lambda}^i) \circ J^1\widehat{H} &= (\partial_\mu^i \mathcal{H}, y_{(\mu)}^i, \widehat{\partial}_\lambda \partial_\mu^i \mathcal{H}), \\ \widehat{\partial}_\lambda &= \partial_\lambda + y_{(\lambda)}^j \partial_j + p_{j\lambda}^\nu \partial_\nu^j, \\ (p_i^\lambda, y_{(\mu)}^i, p_{i\mu}^\lambda) \circ J^1\widehat{L} &= (\pi_i^\lambda, y_{(\mu)}^i, \widehat{\partial}_\mu \pi_i^\lambda), \\ \widehat{\partial}_\lambda &= \partial_\lambda + y_{(\lambda)}^j \partial_j + y_{\mu\lambda}^j \partial_j^\mu. \end{aligned}$$

Существенно также, что, если γ — гамильтонова связность для гамильтониана H , то композиция $J^1\widehat{H} \circ \gamma$ принимает значения в полуголономном подмногообразии струй J^2Y :

$$(y_\mu^i, y_{(\mu)}^i) \circ J^1\widehat{H} \circ \gamma = (\partial_\mu^i \mathcal{H}, \partial_\mu^i \mathcal{H}).$$

Чтобы прийти к понятию ассоциированных лагранжевых и гамильтоновых систем, рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Pi & \xrightarrow{\widehat{H}} & J^1Y \\ \widehat{L} \uparrow & & \downarrow \widehat{L} \\ J^1Y & \xleftarrow{\widehat{H}} & \Pi \end{array}$$

Как мы увидим ниже, когда отображение Лежандра \widehat{L} — диффеоморфизм, для лагранжевой системы существует единственная эквивалентная гамильтонова система такая, что соответствующий импульсный морфизм является обратным диффеоморфизмом $\widehat{H} = \widehat{L}^{-1}$. Отсюда следует, что, если отображение Лежандра регулярно (т. е. является локальным диффеоморфизмом) в некоторой точке конфигурационного пространства J^1Y , соответствующая лагранжева система, ограниченная на некоторую открытую окрестность этой точки, допускает эквивалентную гамильтонову систему. Для сохранения этой локальной эквивалентности в общем случае вырожденных лагранжевых систем, следует потребовать, чтобы для ассоциированных лагранжевых и гамильтоновых систем образ конфигурационного пространства J^1Y при отображении Лежандра \widehat{L} содержал все точки фазового пространства, в которых импульсный морфизм \widehat{H} регулярен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4.1. Пусть задан лагранжиан L на многообразии струй J^1Y расслоения $Y \rightarrow X$. Будем говорить, что гамильтониан H на расслоении Лежандра Π над Y является *ассоциированным* с L , если H удовлетворяет условиям

$$\widehat{L} \circ \widehat{H} |_Q = \text{Id}_Q, \quad (2.52a)$$

$$H = H_{\widehat{H}} + L \circ \widehat{H}, \quad (2.52b)$$

где

$$Q = \widehat{L}(J^1Y) \quad (2.53)$$

— образ конфигурационного пространства J^1Y в фазовом пространстве Π при отображении Лежандра. \square

В координатах условия (2.52a) и (2.52b) принимают вид

$$p_i^\mu = \partial_i^\mu \mathcal{L}(x^\mu, y^i, \partial_\lambda^\mu \mathcal{H}),$$

$$\mathcal{H} = p_i^\mu \partial_\mu^i \mathcal{H} - \mathcal{L}(x^\mu, y^i, \partial_\lambda^\mu \mathcal{H}).$$

Причем последнее из них выглядит как естественное n -мерное обобщение известного выражения для функции Гамильтона через функцию Лагранжа в механике.

По аналогии с механикой назовем Q (2.53) *пространством связей*. Можно убедиться, что в силу условия (2.52b) импульсный морфизм \widehat{H} не является регулярным вне пространства связей Q , что и требовалось от ассоциированных лагранжевых и гамильтоновых систем. Кроме того, как это будет показано ниже, все решения уравнений Гамильтона, имеющие своими аналогами решения уравнений Эйлера—Лагранжа, принадлежат пространству лагранжевых связей.

Подчеркнем, что с одним и тем же лагранжианом могут быть ассоциированы разные гамильтонианы. Однако возможны случаи, когда ассоциированные гамильтонианы, определенные на всем фазовом пространстве Φ , вообще не существуют.

ПРИМЕР 2.4.1. Все гамильтонианы H_Γ (2.39) ассоциированы с нулевым лагранжианом $L = 0$. В этом случае пространство связей совпадает с образом $Q = \widehat{0}(Y)$ канонического нулевого сечения $\widehat{0}$ расслоения Лежандра $\Pi \rightarrow Y$. Условие (2.52a) сводится к тривиальному тождеству $0 = 0$, и гамильтонианы H_Γ удовлетворяют условию (2.52b), которое принимает вид

$$\mathcal{H} = p_i^\mu \partial_\mu^i \mathcal{H}.$$

\square

ПРИМЕР 2.4.2. Пусть Y — расслоение $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, параметризуемое координатами (x^1, x^2, y) . Многообразии струй J^1Y и расслоение Лежандра Π над Y имеют соответственно координаты (x^1, x^2, y, y_1, y_2) и (x^1, x^2, y, p^1, p^2) . Выберем лагранжиан

$$L = \left[\exp y_1 + \frac{1}{2} (y_2)^2 \right] \omega.$$

Соответствующее отображение Лежандра

$$\begin{aligned} p^1 \circ \widehat{L} &= \exp y_1, \\ p^2 \circ \widehat{L} &= y_2, \end{aligned}$$

является локальным диффеоморфизмом, но не диффеоморфизмом. Пространство связей Q задается координатным соотношением $p^1 > 0$ и является открытым подмногообразием многообразия Лежандра. На Q существует единственный ассоциированный с L гамильтониан

$$\begin{aligned} H &= p^\lambda dy \wedge \omega_\lambda - \mathcal{H} \omega, \\ \mathcal{H} &= p^1 (\ln p^1 - 1) + \frac{1}{2} (p^2)^2 \end{aligned}$$

который однако нельзя продолжить на все многообразие Лежандра Π . \square

Посмотрим, что есть общего у гамильтонианов, ассоциированных с одним и тем же лагранжианом L . Всякий такой гамильтониан удовлетворяет соотношениям

$$H|_Q = \Xi_L \circ \widehat{H}|_Q, \quad (2.54)$$

$$\partial_i \mathcal{H} = -\partial_i \mathcal{L} \circ \widehat{H}, \quad (2.55)$$

где Ξ_L — форма Пуанкаре—Картана (2.3). В частности, равенство (2.54) означает, что каждый ассоциированный с L гамильтониан H совпадает на пространстве связей Q с формой, индуцированной из формы Пуанкаре—Картана посредством импульсного морфизма \widehat{H} , хотя разные такие гамильтонианы в общем случае отличаются друг от друга даже на Q .

Можно предложить следующий способ построения гамильтонианов, ассоциированных с данным лагранжианом L . Пусть Φ — импульсный морфизм. Построим гамильтониан

$$H_{L\Phi} = H_\Phi + L \circ \Phi, \quad (2.56)$$

где H_Φ — гамильтониан (2.45). Если импульсный морфизм Φ удовлетворяет соотношениям

$$\widehat{L} \circ \Phi|_Q = \text{Id}_Q, \quad (2.57)$$

$$\widehat{H}_{L\Phi} = \Phi, \quad (2.58)$$

то легко убедиться, что гамильтониан (2.56) ассоциирован с L .

Покажем теперь, что многоимпульсный гамильтонов формализм действительно является естественным партнером лагранжева формализма в теории поля и что введенное выше понятие ассоциированных гамильтоновых систем имеет реальный смысл. Рассмотрим для этого случай, когда лагранжиан L регулярен во всех точках конфигурационного пространства J^1Y . Более того, говоря о регулярном лагранжиане, будем в дальнейшем

считать, что соответствующее отображение Лежандра \widehat{L} — это диффеоморфизм, а не только локальный диффеоморфизм, поскольку с последним могут быть связаны трудности, проиллюстрированные в Примере 2.4.2.

Если лагранжиан L регулярен, всегда существует единственный ассоциированный с ним гамильтониан

$$H = H_{\widehat{L}^{-1}} + L \circ \widehat{L}^{-1}.$$

При этом выполняются соотношения

$$\Xi_L = H \circ \widehat{L}. \quad (2.59)$$

$$\Lambda_L = \mathcal{E}_H \circ J^1 \widehat{L}, \quad (2.60)$$

$$\mathcal{E}_H = \Lambda_L \circ J^1 \widehat{H}, \quad (2.61)$$

где \mathcal{E}_H — оператор Гамильтона (2.46) и Λ_L — производящая форма (2.5).

Глядя на выражения (2.54) и (2.59), можно сделать заключение, что именно форма Пуанкаре—Картана Ξ_L является лагранжевым аналогом ассоциированных с L гамильтонианов, тогда как лагранжевым партнером оператора Гамильтона оказывается производящая форма Λ_L (2.5). Ограничение этой формы на полуголомное многообразие струй $\widehat{J}^2 Y$ представляет собой по определению оператор Эйлера—Лагранжа первого порядка \mathcal{E}'_L . А поскольку в случае, когда γ — гамильтонова связность для H , композиция $J^1 \widehat{H} \circ \gamma$ принимает значения в $\widehat{J}^2 Y$, то из соотношения (2.61) следует, что она принимает значения в ядре оператора \mathcal{E}'_L и $J^1 \widehat{H} \circ \gamma \circ \widehat{L}$ — лагранжева связность для L .

Это важный результат, из которого вытекает, что для **регулярного лагранжиана L и ассоциированного с ним гамильтониана H соответствующие уравнения Эйлера—Лагранжа первого порядка (2.8а)—(2.8б) и уравнения Гамильтона (2.48а)—(2.48б) эквивалентны.**

Перейдем теперь к рассмотрению вырожденных лагранжевых систем, ограничившись классом *полурегулярных* (semiregular) лагранжианов L , когда прообраз $\widehat{L}^{-1}(q)$ всякой точки q пространства связей $\widehat{L}(J^1 Y)$ является связным подмногообразием конфигурационного пространства $J^1 Y$. Основанием для нашего выбора является то, что такие лагранжианы с одной стороны исчерпывают все сколько-нибудь разумные лагранжианы полевых моделей, а с другой стороны, позволяют установить достаточно полные соотношения между решениями уравнений Эйлера—Лагранжа и решениями уравнений Гамильтона для ассоциированных лагранжевых и гамильтоновых систем.

Пусть L — полурегулярный лагранжиан. Ключевым является следующее утверждение.

Предложение 2.4.2. Все гамильтонианы, ассоциированные с полурегулярным лагранжианом L совпадают на пространстве связей Q . Более того, форма Пуанкаре—Картана Ξ_L (2.3) для L совпадает с формой, индуцированной из каждого такого гамильтониана H посредством отображения Лежандра \widehat{L} , т. е. имеет место соотношение

$$\Xi_L = H \circ \widehat{L},$$

$$\pi_i^\lambda y_i^\lambda - \mathcal{L} = \mathcal{H}(x^\mu, y^i, \pi_i^\lambda). \quad (2.62)$$

□

Пример 2.4.3. Пусть Y — расслоение из Примера 2.4.2. Выберем полурегулярный лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} (y_1)^2 \omega. \quad (2.63)$$

Соответствующее отображение Лежандра имеет вид

$$\begin{aligned} p^1 \circ \widehat{L} &= y_1, \\ p^2 \circ \widehat{L} &= 0, \end{aligned}$$

и пространство связей Q состоит из точек с координатами $p^2 = 0$. Для гамильтонианов, ассоциированных с лагранжианом (2.63), имеет место общее выражение

$$H = p^\lambda dy \wedge \omega_\lambda - \left[\frac{1}{2} (p^1)^2 + c(x^1, x^2, y) p^2 \right] \omega,$$

где c — произвольные функции координат x^1, x^2 и y . \square

Соотношение (2.62) из Предложения 2.4.2 в некотором смысле дополняет условие (2.52b) из Определения 2.4.1. Оно приводит к тождеству

$$(y_\lambda^i - \partial_\lambda^i \mathcal{H} \circ \widehat{L}) d\pi_i^\lambda \wedge \omega - (\partial_i \mathcal{L} + \partial_i \mathcal{H} \circ \widehat{L}) dy^i \wedge \omega = 0,$$

опираясь на которое можно воспроизвести в случае полурегулярных лагранжианов соотношение (2.60):

$$\Lambda_L = \mathcal{E}_H \circ J^1 \widehat{L},$$

но не соотношение (2.61). Поэтому для полурегулярных лагранжианов нет полной эквивалентности между решениями уравнений Эйлера—Лагранжа и решениями уравнений Гамильтона, и связь между ними устанавливается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2.4.3. Пусть дан полурегулярный лагранжиан L на многообразии струй $J^1 Y$ расслоения $Y \rightarrow X$ и Π — расслоение Лежандра над Y .

(i) Если сечение τ расслоения $\Pi \rightarrow X$ является решением уравнений Гамильтона (2.48a) и (2.48b) для некоторого гамильтониана H , ассоциированного с L , и принадлежит пространству связей Q (2.53), то сечение

$$\bar{s} = \widehat{H} \circ \tau = J^1(\pi_{\Pi Y} \circ \tau)$$

расслоения $J^1 Y \rightarrow X$ удовлетворяет уравнениям Эйлера—Лагранжа первого порядка (2.8a) и (2.8b), а $s = \pi_{\Pi Y} \circ \tau$ — уравнениям Эйлера—Лагранжа второго порядка.

(ii) Обратно, пусть сечение \bar{s} расслоения $J^1 Y \rightarrow X$ является решением уравнений Эйлера—Лагранжа первого порядка (2.8a) и (2.8b) для L . Пусть H — ассоциированный с L гамильтониан такой, что соответствующий импульсный морфизм \widehat{H} удовлетворяет условию

$$\widehat{H} \circ \widehat{L} \circ \bar{s} = \bar{s}. \quad (2.64)$$

Тогда сечение

$$\tau = \widehat{L} \circ \bar{s}$$

расслоения $\Pi \rightarrow X$ является решением уравнений Гамильтона (2.48a) и (2.48b) для H . Очевидно, что оно принадлежит пространству связей Q . \square

Теорема 2.4.3 показывает, что, если гамильтониан H ассоциирован с полурегулярным лагранжианом L , всякое решение уравнений Гамильтона, лежащее в пространстве связей, порождает решение уравнений Эйлера—Лагранжа. В то же время, чтобы исчерпать все решения уравнений Эйлера—Лагранжа необходимо рассмотреть некоторое

семейство ассоциированных с L гамильтонианов. Назовем такое семейство гамильтонианов *полным*, если для любого решения \bar{s} уравнений Эйлера—Лагранжа первого порядка (2.8a) и (2.8b), существует решение r уравнений Гамильтона (2.48a) и (2.48b) для некоторого гамильтониана H из этого семейства такое, что

$$\begin{aligned} r &= \widehat{L} \circ \bar{s}, \\ \bar{s} &= \widehat{H} \circ r = J^1(\pi_{PY} \circ r). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Согласно Теореме 2.4.3, семейство гамильтонианов, ассоциированных с данным полурегулярным лагранжианом, является полным тогда и только тогда, когда для всякого решения \bar{s} уравнений Эйлера—Лагранжа первого порядка существует гамильтониан из этого семейства такой, что выполняется равенство (2.64).

В полевых моделях с лагранжианами, квадратичными или аффинными по координатам скоростей, полные семейства ассоциированных гамильтонианов всегда существуют. Следующий пример показывает, что подобное семейство может существовать, когда лагранжиан даже не является полурегулярным.

ПРИМЕР 2.4.4. Пусть Y — расслоение из Примера 2.4.2. Зададим лагранжиан

$$L = \left[\frac{1}{3} (y_1)^3 + \frac{1}{2} (y_2)^2 \right] \omega.$$

Соответствующее отображение Лежандра имеет вид

$$\begin{aligned} p^1 \circ \widehat{L} &= (y_1)^2, \\ p^2 \circ \widehat{L} &= y_2, \end{aligned} \quad (2.66)$$

и пространство связей Q задается координатным условием $p^1 \geq 0$. Оно не является даже подмногообразием Π . Рассмотрим два ассоциированных с L гамильтониана

$$\begin{aligned} H_+ &= p^\lambda dy \wedge \omega_\lambda - \left[\frac{2}{3} (p^1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} (p^2)^2 \right] \omega, \\ H_- &= p^\lambda dy \wedge \omega_\lambda - \left[-\frac{2}{3} (p^1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} (p^2)^2 \right] \omega \end{aligned}$$

на Q , которые отвечают двум разным решениям

$$y_1 = \sqrt{p^1}, \quad y_2 = -\sqrt{p^1}$$

уравнения (2.66). Легко видеть, что они образуют полное семейство. \square

Исследуем теперь общий случай вырожденных квадратичных лагранжианов. Удастся провести полный гамильтонов анализ таких динамических систем, что особенно важно для физических приложений.

Пусть дано расслоение $Y \rightarrow X$ и соответствующие конфигурационное и фазовое пространства. Рассмотрим квадратичный лагранжиан

$$L = \left[\frac{1}{2} a_{ij}^{\lambda\mu}(y) y_\lambda^i y_\mu^j + b_i^\lambda(y) y_\lambda^i + c(y) \right] \omega, \quad (2.67)$$

где a , b и c — локальные вещественные функции на Y . Соответствующее преобразование Лежандра имеет вид

$$p_i^\lambda \circ \widehat{L} = a_{ij}^{\lambda\mu} y_\mu^j + b_i^\lambda, \quad (2.68)$$

и нетрудно показать, что лагранжиан (2.67) является полурегулярным. Предположим, что пространство связей Q содержит образ $\widehat{0}(Y)$ глобального нулевого сечения расслоения $\Pi \rightarrow Y$.

Отображение Лежандра (2.68) является аффинным морфизмом над Y . Оно индуцирует соответствующий линейный морфизм

$$\begin{aligned} \bar{L} : T^*X \otimes_Y VY &\rightarrow \Pi, \\ p_i^\lambda \circ \bar{L} &= a_{ij}^{\lambda\mu} \bar{y}_\mu^j, \end{aligned}$$

где \bar{y}_μ^j — координаты векторного расслоения (1.48).

Рассмотрим ядро

$$\text{Ker } \widehat{L} = \widehat{L}^{-1}(\widehat{0}(Y))$$

отображения Лежандра (2.68). Это аффинное подрасслоение расслоения струй $J^1Y \rightarrow Y$. Поэтому всегда существует его глобальное сечение, т. е. связность Γ на расслоении $Y \rightarrow X$, принимающая значения в $\text{Ker } \widehat{L}$:

$$\Gamma : Y \rightarrow \text{Ker } \widehat{L}, \quad (2.69)$$

$$a_{ij}^{\lambda\mu} \Gamma_\mu^j + b_i^\lambda = 0. \quad (2.70)$$

Используя эту связность, лагранжиан (2.67) можно привести к виду

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} a_{ij}^{\lambda\mu} (y_\lambda^i - \Gamma_\lambda^i)(y_\mu^j - \Gamma_\mu^j) + c,$$

соответствующему факторизации (2.20).

ЛЕММА 2.4.4. Найдется линейная векторнозначная горизонтальная 1-форма

$$\sigma : \Pi \rightarrow T^*X \otimes_Y VY, \quad (2.71)$$

$$\bar{y}_\lambda^i \circ \sigma = \sigma_{\lambda\mu}^{ij} p_j^\mu,$$

на расслоении Лежандра $\Pi \rightarrow Y$ такая, что

$$\begin{aligned} \bar{L} \circ \sigma|_Q &= \text{Id}_Q, \\ a_{ij}^{\lambda\mu} \sigma_{\mu\alpha}^{jk} a_{kb}^{\alpha\nu} &= a_{jb}^{\lambda\nu}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

□

Заметим, что, если лагранжиан (2.67) регулярен, существует единственная связность (2.69), удовлетворяющая алгебраическим уравнениям (2.70), и единственная форма (2.71), удовлетворяющая алгебраическим уравнениям (2.72).

Связность (2.69) и форма (2.71) играют ключевую роль при гамильтоновом анализе квадратичных лагранжевых систем.

Во-первых, имеет место *расщепление конфигурационного пространства*

$$J^1Y = \text{Ker } \widehat{L} \oplus_Y \text{Im } \sigma, \quad (2.73)$$

$$y_\lambda^i = [y_\lambda^i - \sigma_{\lambda\alpha}^{ik} (a_{kj}^{\alpha\mu} y_\mu^j + b_k^\alpha)] + [\sigma_{\lambda\alpha}^{ik} (a_{kj}^{\alpha\mu} y_\mu^j + b_k^\alpha)].$$

Кроме того существует форма σ (2.71) такая, что *расщепляется* также фазовое пространство

$$\Pi = \text{Ker } \sigma \oplus_Y Q. \quad (2.74)$$

Во-вторых, при заданных σ (2.71) и Γ (2.69), рассмотрим импульсный морфизм

$$\begin{aligned} \Phi &= \widehat{\Gamma} + \sigma, \\ \Phi_\lambda^i &= \Gamma_\lambda^i(y) + \sigma_{\lambda\mu}^{ij} p_j^\mu. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Он удовлетворяет уравнению (2.57) для отображения Лежандра \widehat{L} (2.68). Обратно, всякий импульсный морфизм, подчиняющийся уравнению (2.57), дается выражением (2.75). Отсюда можно показать, что всякий гамильтониан

$$H = H_{L\Phi} = p_i^\lambda dy^i \wedge \omega_\lambda - \left[\Gamma_\lambda^i \left(p_i^\lambda - \frac{1}{2} b_i^\lambda \right) + \frac{1}{2} \sigma_{\lambda\mu}^{ij} p_i^\lambda p_j^\mu - c \right] \omega, \quad (2.76)$$

соответствующий согласно (2.56) импульсному морфизму Φ (2.75), является ассоциированным с лагранжианом (2.67). Более того, все такие гамильтонианы образуют полное семейство.

Действительно, рассмотрим в случае гамильтониана (2.76) уравнения Гамильтона (2.48a) для сечений r расслоения $\Pi \rightarrow X$. Они записываются в виде

$$\begin{aligned} J^1 s &= (\widehat{\Gamma} + \sigma) \circ r, & s &= \pi_{\Pi Y} \circ r, \\ \partial_\lambda r^i &= \Gamma_\lambda^i + \sigma_{\lambda\mu}^{ij} r_j^\mu. \end{aligned} \quad (2.77)$$

С расщеплением (2.73) связаны сюръекции

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &:= \text{pr}_1 : J^1 Y \rightarrow \text{Ker } \widehat{L}, \\ \mathcal{S} &: y_\lambda^i \rightarrow y_\lambda^i - \sigma_{\lambda\alpha}^{ik} (a_{kj}^{\alpha\mu} y_\mu^j + b_k^\alpha), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \text{pr}_2 : J^1 Y \rightarrow \text{Im } \sigma, \\ \mathcal{F} &= \sigma \circ \widehat{L} : y_\lambda^i \rightarrow \sigma_{\lambda\alpha}^{ik} (a_{kj}^{\alpha\mu} y_\mu^j + b_k^\alpha). \end{aligned}$$

Используя их, уравнения Гамильтона (2.77) можно разделить на две части

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \circ J^1 s &= \Gamma \circ s, \\ \partial_\lambda r^i - \sigma_{\lambda\alpha}^{ik} (a_{kj}^{\alpha\mu} \partial_\mu r^j + b_k^\alpha) &= \Gamma_\lambda^i. \end{aligned} \quad (2.78)$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \circ J^1 s &= \sigma \circ r, \\ \sigma_{\lambda\alpha}^{ik} (a_{kj}^{\alpha\mu} \partial_\mu r^j + b_k^\alpha) &= \sigma_{\lambda\alpha}^{ik} r_k^\alpha. \end{aligned} \quad (2.79)$$

При этом оказывается, что уравнения Гамильтона (2.78) не зависят от канонических импульсов r_k^α и имеют смысл своего рода *калибровочных условий*. Более того, для всякого сечения s расслоения $Y \rightarrow X$ существует связность Γ (2.69) такая, что выполняются

калибровочные условия (2.78). В этом случае импульсный морфизм (2.75) удовлетворяет уравнению (2.64):

$$\Phi \circ \widehat{L} \circ J^1 s = J^1 s.$$

Откуда следует, что гамильтонианы (2.76) действительно составляют полное семейство.

Интересно отметить, что гамильтонианы из этого семейства отличаются друг от друга только связностью Γ (2.69), а уравнения Гамильтона — только калибровочными условиями (2.78).

Проиллюстрируем приведенную общую процедуру на примере ряда полевых моделей.

Калибровочные потенциалы

Фазовым пространством калибровочных потенциалов, лагранжевой теории которых был посвящен §2.2, является расслоение Лежандра

$$\Pi = \bigwedge^n T^* X \otimes_C TX \otimes_C [C \times \overline{C}]^*$$

над расслоением связностей C (1.89). Оно параметризуется каноническими координатами

$$(x^\lambda, k_\mu^m, p_m^{\mu\lambda}).$$

Расслоение Лежандра Π над C , подобно расслоению струй $J^1 C \rightarrow C$, допускает каноническое расщепление

$$\Pi = \Pi_+ \oplus_C \Pi_-, \quad (2.80)$$

$$p_m^{\mu\lambda} = p_m^{(\mu\lambda)} + p_m^{|\mu\lambda|} = \frac{1}{2}(p_m^{\mu\lambda} + p_m^{\lambda\mu}) + \frac{1}{2}(p_m^{\mu\lambda} - p_m^{\lambda\mu}).$$

Отображение Лежандра, отвечающее лагранжиану Янга—Миллса (2.21), имеет вид

$$p_m^{(\mu\lambda)} \circ \widehat{L}_{YM} = 0, \quad (2.81a)$$

$$p_m^{|\mu\lambda|} \circ \widehat{L}_{YM} = \varepsilon^{-2} a_{mn}^G g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta}^n \sqrt{|g|}. \quad (2.81b)$$

Нетрудно заметить, что $\text{Ker } \widehat{L}_{YM} = C_+$ и $Q = \Pi_-$. Отсюда следует, что расщепления (1.92) и (2.80) являются ни чем иным как расщеплениями (2.73) и (2.74). Поэтому для построения полного семейства гамильтонианов, ассоциированных с лагранжианом Янга—Миллса L_{YM} (2.21), можно следовать приведенной выше общей процедуре описания полевых систем с вырожденными квадратичными лагранжианами.

Рассмотрим в согласии с ней связности на расслоении C , которые принимают значения в $\text{Ker } \widehat{L}$. Ими, например, являются связности S_B (1.95). Для всякой такой связности построим гамильтониан (2.76):

$$\begin{aligned} H_B &= p_m^{\mu\lambda} dk_\mu^m \wedge \omega_\lambda - p_m^{\mu\lambda} S_{B\mu\lambda}^m \omega - \widetilde{\mathcal{H}}_{YM} \omega, \\ \widetilde{\mathcal{H}}_{YM} &= \frac{\varepsilon^2}{4} a_G^{mn} g_{\mu\nu} g_{\lambda\beta} p_m^{|\mu\lambda|} p_n^{|\nu\beta|} |g|^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Он ассоциирован с лагранжианом L_{YM} . Соответствующими уравнениями Гамильтона являются

$$\partial_\lambda r_m^{\mu\lambda} = -c_{lm}^n r_\nu^l r_n^{[\mu\nu]} + c_{ml}^n B_\nu^l r_n^{(\mu\nu)} - K^\mu{}_{\lambda\nu} r_m^{(\lambda\nu)}, \quad (2.83)$$

$$\partial_\lambda r_\mu^m + \partial_\mu r_\lambda^m = 2S_{B(\mu\lambda)}^m \quad (2.84)$$

и плюс уравнение (2.81b).

Уравнения Гамильтона (2.84) и (2.81b) аналогичны соответственно уравнениям (2.78) и (2.79). Уравнения Гамильтона (2.81b) и (2.83), ограниченные на пространство связей (2.81a), в точности совпадают с уравнениями Янга—Миллса для калибровочных потенциалов

$$A = \pi_{\text{ПС}} \circ \tau.$$

Разные гамильтонианы H_B и $H_{B'}$ приводят к разным уравнениям (2.84). Эти уравнения не зависят от канонических импульсов и представляют собой дополнительные калибровочные условия

$$S_B \circ A = \mathcal{S} \circ J^1 A$$

типа (2.78). Причем, для всякого решения A уравнений Янга—Миллса существует гамильтониан, например, $H_{B=A}$ такой, что выполняется соотношение (2.64):

$$\widehat{H}_B \circ \widehat{L}_{YM} \circ J^1 A = J^1 A.$$

Следовательно гамильтонианы H_B составляют полное семейство.

Электромагнитное поле

Рассмотрим особо электромагнитное поле из Примера 2.2.1 как простейший случай калибровочной теории, чтобы потом сравнить с ним модель полей Прока, лагранжиан которой вырожден, но не калибровочно инвариантен. Ограничимся для простоты случаем, когда X^4 — пространство Минковского с метрикой Минковского η .

Фазовым пространством электромагнитных потенциалов является расслоение Лежандра

$$\Pi = \left(\bigwedge^4 T^* X \otimes TX \otimes TX \right) \times_X T^* X$$

с координатами $(x^\lambda, k_\mu, p^{\mu\lambda})$. В этих координатах отображение Лежандра, отвечающее лагранжиану L_E (2.23), записывается в виде

$$p^{(\mu\lambda)} \circ \widehat{L}_E = 0, \quad (2.85a)$$

$$p^{[\mu\lambda]} \circ \widehat{L}_E = -\frac{1}{4\pi} \eta^{\lambda\alpha} \eta^{\mu\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta}. \quad (2.85b)$$

Как и в общем случае калибровочных полей, гамильтонианы

$$H_B = p^{\mu\lambda} dk_\mu \wedge \omega_\lambda - p^{\mu\lambda} S_{B\mu\lambda} \omega - \widetilde{\mathcal{H}}_E \omega, \quad (2.86)$$

$$S_{B\mu\lambda} = \frac{1}{2} (\partial_\mu B_\lambda + \partial_\lambda B_\mu),$$

$$\widetilde{\mathcal{H}}_E = -\pi \eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\beta} p^{[\mu\lambda]} p^{[\nu\beta]},$$

параметризуемые электромагнитными потенциалами B , ассоциированы с лагранжианом электромагнитного поля (2.23) и составляют полное семейство.

Для данного гамильтониана H_B (2.86) соответствующими уравнениями Гамильтона являются

$$\partial_\lambda r^{\mu\lambda} = 0, \quad (2.87)$$

$$\partial_\lambda r_\mu + \partial_\mu r_\lambda = \partial_\lambda B_\mu + \partial_\mu B_\lambda \quad (2.88)$$

и плюс уравнение (2.85b). На пространстве связей (2.85a) уравнения (2.85b) и (2.87) сводятся к обычным уравнениям Максвелла без материальных источников. В то же время уравнение (2.88) не зависит от канонических импульсов и играет роль дополнительно калибровочного условия. Это калибровочное условие однако разнится от тех, что обычно используются в теории электромагнитного поля. Но, поскольку электромагнитные потенциалы, отличающиеся калибровочными преобразованиями, трактуются как физически эквивалентные, уравнение (2.88) можно заменить каким-либо условием, накладываемым на величину $\partial_\lambda r_\mu + \partial_\mu r_\lambda$. Например, таким путем можно воспроизвести условие лоренцевской калибровки

$$\eta^{\mu\lambda} \partial_\mu r_\lambda = 0.$$

Поле Прока

Модель полей Прока — это модель массивного электромагнитного поля, лагранжиан которого отличается от лагранжиана электромагнитного поля только массовым членом. Он вырожден, но не калибровочно инвариантен. Поэтому в этом случае заранее неясно, как получить калибровочные условия, дополняющие уравнения Эйлера—Лагранжа для поля Прока.

Пусть, как и в предыдущей модели, X — пространство Минковского.

Векторные поля Прока описываются сечением кокасательного расслоения $T^*X \rightarrow X$, тогда как электромагнитные потенциалы — сечениями аффинного расслоения, моделируемого над T^*X . Конфигурационным пространством полей Прока является аффинное расслоение струй

$$J^1 T^* X \rightarrow T^* X,$$

моделируемое над векторным расслоением

$$\overset{2}{\otimes} T^* X \times T^* X \rightarrow T^* X. \quad (2.89)$$

Координатами на нем являются

$$(x^\lambda, k_\mu, k_{\mu\lambda}),$$

где по аналогии с электромагнитным полем мы обозначили $k_\mu = \dot{x}_\mu$ обычные голономные координаты на T^*X .

Лагранжиан полей Прока на таком конфигурационном пространстве имеет вид

$$L_P = L_E - \frac{1}{8\pi} m^2 \eta^{\mu\lambda} k_\mu k_\lambda \omega. \quad (2.90)$$

Фазовым пространством полей Прока является многообразие Лежандра

$$\Pi = \overset{4}{\wedge} T^* X \otimes TX \otimes TX \times T^* X$$

с каноническими координатами $(x^\lambda, k_\mu, p^{\mu\lambda})$. В этих координатах отображение Лежандра, определяемое лагранжианом (2.90), выглядит в точности как отображение Лежандра \widehat{L}_E :

$$p^{(\mu\lambda)} \circ \widehat{L}_P = 0, \quad (2.91a)$$

$$p^{|\mu\lambda|} \circ \widehat{L}_P = -\frac{1}{4\pi} \eta^{\lambda\alpha} \eta^{\mu\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta}. \quad (2.91b)$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} \text{Ker } \widehat{L}_P &= \bigvee^2 T^*X \times T^*X, \\ Q &= \bigwedge^4 T^*X \otimes_{T^*X} \left(\bigwedge^2 TX \right). \end{aligned}$$

Следуя общей процедуре описания полевых систем с вырожденными квадратичными лагранжианами, рассмотрим форму σ (2.71):

$$\bar{k}_{\mu\lambda} \circ \sigma = -2\pi \eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\beta} p^{[\nu\beta]},$$

где $\bar{k}_{\mu\lambda}$ — координаты на расслоении (2.89). Поскольку

$$\begin{aligned} \text{Im } \sigma &= \bigwedge^2 T^*X \times T^*X, \\ \text{Ker } \sigma &= \bigwedge^4 T^*X \otimes \left(\bigvee^2 TX \right) \times T^*X, \end{aligned}$$

можно осуществить расщепление (2.73) конфигурационного пространства

$$J^1 T^*X = \bigvee^2 T^*X \oplus_{T^*X} \bigwedge^2 T^*X,$$

$$k_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_{\mu\lambda} + \mathcal{F}_{\mu\lambda}) = k_{(\mu\lambda)} + k_{|\mu\lambda]}$$

и расщепление (2.74) фазового пространства

$$\begin{aligned} \Pi &= \left[\bigwedge^4 T^*X \otimes_{T^*X} \left(\bigvee^2 TX \right) \right]_{T^*X} \oplus Q, \\ p^{\mu\lambda} &= p^{(\mu\lambda)} + p^{|\mu\lambda]}. \end{aligned}$$

Опять же согласно общей процедуре рассмотрим связности на кокасательном расслоении T^*X , принимающие значения в $\text{Ker } \widehat{L}_P$. Как и в случае электромагнитного поля, достаточно ограничиться связностями вида

$$S_B = dx^\lambda \otimes \left[\partial_\lambda + \frac{1}{2} (\partial_\mu B_\lambda + \partial_\lambda B_\mu) \partial_\mu \right],$$

где B — некоторое сечение T^*X . Можно убедиться, что соответствующие гамильтонианы

$$\begin{aligned} H_B &= p^{\mu\lambda} dk_\mu \wedge \omega_\lambda - p^{\mu\lambda} S_{B_{\mu\lambda}} \omega - \widetilde{\mathcal{H}}_P \omega, \\ \widetilde{\mathcal{H}}_P &= \widetilde{\mathcal{H}}_E + \frac{1}{8\pi} m^2 \eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu, \end{aligned}$$

являются ассоциированными с лагранжианом L_P (2.23) и образуют полное семейство.

Уравнениями Гамильтона для данного гамильтониана H_B являются

$$\partial_\lambda r^{\mu\lambda} = -\frac{1}{4\pi} m^2 \eta^{\mu\nu} r_\nu, \tag{2.92}$$

$$\partial_\lambda r_\mu + \partial_\mu r_\lambda = \partial_\lambda B_\mu + \partial_\mu B_\lambda \tag{2.93}$$

и плюс уравнение (2.91b). На пространстве связей (2.91a) уравнения (2.91b) и (2.92) сводятся к уравнениям Эйлера—Лагранжа, которые дополняются калибровочным условием (2.93). Последнее можно заменить тем или иным условием на величину $\partial_\lambda r_\mu + \partial_\mu r_\lambda$, например, условием лоренцевской калибровки

$$\eta^{\mu\lambda} \partial_\mu r_\lambda = 0.$$

Но, в отличие от случая электромагнитного поля, не все физически неэквивалентные решения уравнений Эйлера—Лагранжа для поля Прока будут ему удовлетворять. Оно применимо, например, к волновым решениям.

Топологические характеристики в теории поля

Формализация систем классических полей расслоениями делает возможным описание глобальных свойств полевых конфигураций с использованием методов алгебраической топологии.

Эти методы позволяют оперировать с категориями объектов — топологических пространств, многообразий, расслоений и др., которые, если пытаться выделить каждый объект, являются необозримыми. Суть их состоит в установлении определенного отношения эквивалентности объектов в такой категории и в рассмотрении их классов эквивалентности путем сопоставления им некоторых алгебраических (групповых) и даже числовых характеристик. В физических приложениях такие характеристики выступают в качестве всевозможных “топологических” чисел и зарядов.

Настоящая глава посвящена применению этих характеристик в полевых моделях: солитонов, монополей, инстантонов и других полевых образований, обязанных своим существованием нелинейному взаимодействию полей и не описываемых по теории возмущений.

В этой главе, если специально не оговорено, под расслоениями понимаются топологические расслоения, а к многообразиям относятся и многообразия с границей.

§ 1. Гомотопические группы

В алгебраической топологии основной рассматриваемой категорией является категория топологических пространств, а отношением эквивалентности в ней — гомотопическая эквивалентность.

Пусть Y и X — топологические пространства и f и f' — непрерывные отображения Y в X . Эти отображения называются *гомотопными*, если существует такое непрерывное отображение $g: [0, 1] \times Y \rightarrow X$, что

$$g \downarrow \{0\} \times Y = f, \quad g \downarrow \{1\} \times Y = f'.$$

Наглядно гомотопные отображения f и f' можно представить себе как такие, образы которых $f(Y)$ и $f'(Y)$ в X могут быть совмещены друг с другом непрерывной деформацией через промежуточные образы $g(\{\tau\} \times Y)$, $\tau \in]0, 1[$.

ПРИМЕР 3.1.1. Пусть Y — окружность S^1 , а X — плоскость \mathbb{R}^2 . Все непрерывные отображения S^1 в \mathbb{R}^2 являются гомотопными. \square

ПРИМЕР 3.1.2. Пусть теперь $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ — плоскость без точки. Тогда отображения $f, f', f'' : S^1 \rightarrow X$, образы которых $f(S^1), f'(S^1), f''(S^1)$ изображены на рис. 6, представляют собой пример негомотопных отображений. \square

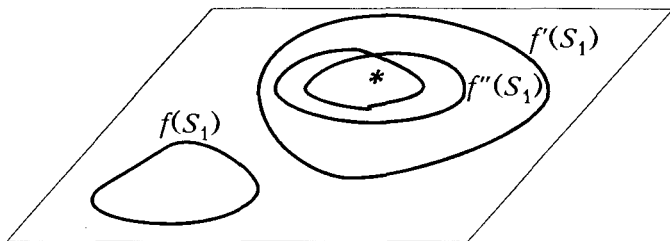


Рис. 6

Топологическое пространство X называется *стягиваемым*, если его тождественное отображение на себя Id_X гомотопно отображению X в некоторую свою точку $X \rightarrow x_0 \in X$, т. е. наглядно, если X может быть непрерывно стянуто в точку. Примером стягиваемых пространств могут служить евклидовы пространства \mathbb{R}^n , а нестягиваемых — сферы S^n .

Можно показать, что, если пространство X стягиваемо, то всякие два непрерывных отображения f и f' любого топологического пространства Y в X гомотопны. Действительно, поскольку X стягиваемо, образ $f(Y)$ первого отображения f как подмножество X может быть непрерывно деформирован в точку, а из нее в образ $f'(Y)$ второго отображения в X .

Легко проверить, что понятие гомотопности отображений определяет отношение эквивалентности на множестве непрерывных отображений топологического пространства Y в пространство X . Классы эквивалентности, на которые оно разбивает это множество, называются *гомотопическими классами*, и множество этих классов обозначается $\pi(Y, X)$.

В частности, если X стягиваемо, то множество $\pi(Y, X)$ для любого Y состоит из одного элемента.

ПРИМЕР 3.1.3. Множество $\pi(Y, X)$ для Y и X из Примера 3.1.2 счетно. Гомотопический класс отображения

$$f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

определяется тем, сколько раз линия $f(S^1)$ “обернута” вокруг точки $\{0\}$. \square

Пусть f — непрерывное отображение $Y \rightarrow X$. Непрерывное отображение $g : X \rightarrow Y$ называется *гомотопически обратным*, если композиция $g \circ f$ гомотопна тождественному отображению Id_Y , а $f \circ g$ гомотопна Id_X . Непрерывное отображение, обладающее гомотопически обратным, именуется *гомотопической эквивалентностью*. Если существует гомотопическая эквивалентность $Y \rightarrow X$, то пространства Y и X называются *гомотопически эквивалентными*.

Очевидно, **гомеоморфизм топологических пространств есть гомотопическая эквивалентность**. Примером негомеоморфных, но гомотопически эквивалентных пространств служат стягиваемое пространство и его точка.

Гомотопическая эквивалентность разбивает топологические пространства на гомотопические типы и множество таких типов уже оказывается обозримым. Для этого достаточно фиксировать некоторый набор стандартных пространств Y_1, Y_2, \dots и характеризовать гомотопический тип всякого топологического пространства X гомотопическими классами непрерывных отображений Y_i в X . В качестве таких стандартных пространств выбраны сферы S^n .

Пусть X — топологическое пространство и $x_0 \in X$. Пару (X, x_0) называют *пространством с отмеченной точкой*. Часто, когда конкретный выбор точки несущественен, пространство с отмеченной точкой обозначают (X, \cdot) .

Отображением пространства с отмеченной точкой (Y, y_0) в пространство с отмеченной точкой (X, x_0) называется непрерывное отображение $f : Y \rightarrow X$, такое, что $f(y_0) = x_0$. Ясно, что множество таких отображений составляет подмножество всех непрерывных отображений и на нем определено отношение гомотопности отображений.

Рассмотрим всевозможные отображения окружности с отмеченной точкой (S^1, \cdot) . Образами этих отображений являются замкнутые пути в X , выходящие и входящие в точку x_0 , и на этом множестве можно ввести операцию *произведения отображений*

$$(ff')(y) = \begin{cases} f(y^2), & \operatorname{Im} y \geq 0, \\ f'(y^2), & \operatorname{Im} y \leq 0, \end{cases}$$

где $y = \exp(i\alpha)$ — комплексная координата, параметризующая окружность S^1 . Эта операция наследуется при переходе к гомотопическим классам отображений (S^1, \cdot) в (X, x_0) и индуцирует на множестве этих классов структуру группы. Она называется *фундаментальной группой пространства X в точке x_0* и обозначается $\pi_1(X, x_0)$. В частности, фундаментальная группа стягиваемого пространства тривиальна.

ПРИМЕР 3.1.4. Группа $\pi_1(X, \cdot)$ для пространства $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ из Примера 3.1.2 изоморфна группе \mathbb{Z} целых чисел по сложению. Элементу $n \in \mathbb{Z}$ отвечает кривая, обернутая n раз вокруг точки $\{0\}$ в определенном направлении, а элементу $(-n)$ — кривая, обернутая столько же раз, но в противоположном направлении. \square

Обобщая определение группы $\pi_1(X, \cdot)$, рассмотрим n -мерную сферу с отмеченной точкой (S^n, \cdot) и множество $\pi_n(X, x_0)$ гомотопических классов отображений (S^n, \cdot) в пространство с отмеченной точкой (X, x_0) . На $\pi_n(X, \cdot)$ тоже может быть определена структура группы, которая называется *n -мерной гомотопической группой пространства X в точке x_0* . По аналогии группа $\pi_1(X, \cdot)$ часто именуется одномерной гомотопической группой, и формально определяется множество $\pi_0(X)$, совпадающее с множеством компонент связности пространства X . Группы $\pi_n(X, \cdot)$, $n > 1$, называются *высшими гомотопическими группами*. Они коммутативны.

ПРИМЕР 3.1.5. Группы $\pi_r(S^n)$, $r < n$, тривиальны, а $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$. \square

В случае связного пространства X все гомотопические группы $\pi_n(X, \cdot)$ в разных точках изоморфны между собой при любом n , и можно говорить о гомотопической группе $\pi_n(X)$ (как абстрактной группе) пространства X без отмеченной точки.

ПРИМЕР 3.1.6: Выполняется правило

$$\pi_n(X \times X') = \pi_n(X) \times \pi_n(X').$$

В частности, для тора $T^2 = S^1 \times S^1$ находим

$$\pi_1(T^2) = \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

□

Некоторые гомотопические группы, часто встречающиеся в физических приложениях, приведены в таблице

X	π_1	π_2	π_3
$S^1 = \mathbb{R}P^1$	\mathbb{Z}	0	0
S^2	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
S^3	0	0	\mathbb{Z}
$\mathbb{R}P^n, n > 1$	\mathbb{Z}_2	$\pi_2(S^n)$	$\pi_3(S^n)$
$SO(4)$	\mathbb{Z}_2	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$SO(3)$	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}
$U(n), n > 1$	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}

Топологическое пространство X называется k -связным ($0 \leq k < \infty$), если все гомотопические группы $\pi_n(X)$ с $n \leq k$ тривиальны. Это эквивалентно тому, что образ всякого непрерывного отображения n -мерной сферы S^n в X при $n \leq k$ стягивается в точку. Например, из таблицы видно, что сфера S^2 односвязна, т. е. любая замкнутая кривая на сфере стягиваема в точку.

Пусть Y — топологическое пространство с гомотопическими группами $\{\pi_n(Y)\}$, а X — топологическое пространство с гомотопическими группами $\{\pi_n(X)\}$. Всякое непрерывное отображение $f: Y \rightarrow X$ индуцирует гомоморфизмы

$$f_n^*: \pi_n(Y) \rightarrow \pi_n(X)$$

гомотопических групп. Если отображения

$$f, f': Y \rightarrow X$$

гомотопны, то $f_n^* = f_n'^*$ при любом n . Если f — гомотопическая эквивалентность, то f_n^* — изоморфизмы.

Таким образом, топологические пространства, принадлежащие одному и тому же гомотопическому типу, имеют одинаковый набор гомотопических групп.

Непрерывное отображение f топологического пространства Y в топологическое пространство X называется *слабой гомотопической эквивалентностью*, если гомоморфизмы

$$f_n^*: \pi_n(Y) \rightarrow \pi_n(X)$$

являются изоморфизмами при любом n . Однако сам по себе изоморфизм всех гомотопических групп пространств X и Y не гарантирует даже слабую гомотопическую эквивалентность этих пространств, поскольку может не существовать непрерывного отображения Y в X , реализующего этот изоморфизм.

Гомотопические группы являются примером тополого-алгебраических характеристик, которые постоянны на слабо гомотопически эквивалентных пространствах.

Естественно возникает вопрос о существовании пространства с наперед заданными гомотопическими группами. Ответ положителен в подкатегории клеточных пространств.

Клеточным пространством X называется отделимое топологическое пространство, наделенное *клеточным разбиением*, т. е. разбиением

$$X = \bigcup_i e_i, \quad e_i \cap e_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

на множестве элементов которого $\{e\}$ определена функция $d(e)$ с натуральными значениями такая, что для каждого элемента e этого разбиения существует непрерывное отображение $d(e)$ -мерного шара $D^{d(e)}$ в X с двумя свойствами:

- оно изоморфно отображает внутренность шара $\text{Int } D^{d(e)}$ на e ;
- оно отображает границу $S^{d(e)-1}$ шара $D^{d(e)}$ в объединение элементов разбиения, на которых d принимает значения, меньшие $d(e)$.

Элементы клеточного разбиения называются *клетками*.

ПРИМЕР 3.1.7. Каноническое клеточное разбиение сферы S^n состоит из 0-мерной клетки — некоторой точки $x \in S^n$ и n -мерной клетки $S^n \setminus \{x\}$. \square

ТЕОРЕМА 3.1.1. Каковы бы ни были группа G_1 и абелевы группы G_2, G_3, \dots , существует связное клеточное пространство X с $\pi_n(X) = G_n$ ($n = 1, 2, \dots$). \square

Приведем утверждения, которые позволяют в теории гомотопий вместо всей категории топологических пространств ограничиваться часто подкатегорией клеточных пространств, а именно:

- всякое компактное многообразие гомотопически эквивалентно конечному (по числу элементов разбиения) клеточному пространству;
- для всякого топологического пространства X существует его *клеточная аппроксимация*, т. е. клеточное пространство, слабо гомотопически эквивалентное X .

При определении гомотопических групп мы рассматривали гомотопические классы отображений пространства с выделенной точкой в пространство с выделенной точкой. Обобщая, можно определить гомотопические классы непрерывных *отображений пары* (Y, U) пространства Y и его подмножества U в пару (X, A) топологического пространства X и его подмножества A , при которых U отображается в A . Если в качестве Y взять шар D^i , а в качестве U — его граничную сферу S^{i-1} с выделенной точкой $s_0 \in S^{i-1}$, то гомотопические классы отображений пары (D^i, S^{i-1}, s_0) с выделенной точкой s_0 в пару (X, A, x_0) с выделенной точкой $x_0 \in A \subset X$ образуют при $i > 1$ группу, которая называется *относительной гомотопической группой* $\pi_i(X, A, x_0)$. Она коммутативна при $i > 2$.

Если $A = x_0$, то относительная гомотопическая группа $\pi_i(X, x_0, x_0)$ совпадает с обычной гомотопической группой $\pi_i(X, x_0)$. Действительно, в этом случае отображение D^i в X , при котором сфера S^{i-1} переводится в точку x_0 , можно представить как композицию канонического отображения $D^i \rightarrow S^i$ (при котором S^{i-1} стягивается в точку) и $S^i \rightarrow X$. Гомотопические классы последнего и образуют группу $\pi_i(X, \cdot)$.

Существует связь между гомотопическими группами $\pi_i(X, A, x_0)$, $\pi_i(X, x_0)$ и $\pi_{i-1}(A, x_0)$. Она задается следующими тремя гомоморфизмами.

Непрерывное отображение f пары с выделенной точкой (X, A, x_0) в (X', A', x'_0) индуцирует гомоморфизм

$$f_i^* : \pi_i(X, A, x_0) \rightarrow \pi_i(X', A', x'_0)$$

относительных гомотопических групп. Поэтому отображение

$$X \rightarrow X, \quad x_0 \rightarrow A, \quad x_0 \rightarrow x_0$$

индуцирует гомоморфизм

$$j : \pi_i(X, x_0) \rightarrow \pi_i(X, A, x_0). \quad (3.1)$$

Включение $A \rightarrow X$ порождает гомоморфизм

$$i : \pi_i(A, x_0) \rightarrow \pi_i(X, x_0). \quad (3.2)$$

Наконец, всякое отображение

$$f : D^i \rightarrow X, \quad S^{i-1} \rightarrow A, \quad s_0 \rightarrow x_0,$$

представляющее собой элемент из $\pi_i(X, A, x_0)$, включает отображение границы

$$\partial f = f|_{\partial D^i} : S^{i-1} \rightarrow A, \quad s_0 \rightarrow x_0.$$

Поскольку гомотопным отображениям f соответствуют гомотопные отображения границы, всякому элементу a группы $\pi_i(X, A, x_0)$ соответствует некоторый элемент ∂a группы $\pi_{i-1}(A, x_0)$. При этом произведение в группе $\pi_i(X, A, x_0)$ содержит в себе произведение гомотопических классов отображений границы, так что отображение

$$\partial : \pi_i(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{i-1}(A, x_0) \quad (3.3)$$

является гомоморфизмом групп.

С помощью гомоморфизмов (3.1), (3.2), (3.3) можно записать *последовательность гомотопических групп* для пары (X, A)

$$\dots \xrightarrow{\partial} \pi_i(A, x_0) \xrightarrow{i} \pi_i(X, x_0) \xrightarrow{j} \pi_i(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(A, x_0) \longrightarrow \dots, \quad (3.4)$$

Причем эта последовательность *точна*, поскольку ядро последующего гомоморфизма совпадает с образом предыдущего гомоморфизма, а именно:

$$\text{Ker } \partial = \text{Im } j, \quad \text{Ker } j = \text{Im } i, \quad \text{Ker } i = \text{Im } \partial.$$

ПРИМЕР 3.1.8. Если X стягиваемо, то $\pi_i(X, x_0) = 0$, $i > 0$, и $\text{Im } j = 0$, а значит, $\text{Ker } \partial = 0$ и

$$\pi_i(X, A, x_0) = \pi_{i-1}(A, x_0).$$

□

ПРИМЕР 3.1.9. Рассмотрим в качестве пары (X, A) расслоенное пространство $X = \text{tl } \lambda$ некоторого локально тривиального расслоения $\pi : \text{tl } \lambda \rightarrow \text{bs } \lambda$ и его слой $A = V$ через точку $p \in V \subset \text{tl } \lambda$. Имеет место изоморфизм

$$\pi_n(\text{tl } \lambda, V, p) = \pi_n(\text{bs } \lambda, \pi(p)), \quad n > 0,$$

с учетом которого последовательность (3.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{\partial} \pi_i(V, p) \xrightarrow{i} \pi_i(\text{tl } \lambda, p) \xrightarrow{j} (\text{bs } \lambda, \pi(p)) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(V, p) \longrightarrow \dots \\ \dots &\xrightarrow{j} \pi_1(\text{bs } \lambda, \pi(p)) \xrightarrow{\partial} \pi_0(V, p) \xrightarrow{i} \pi_0(\text{tl } \lambda, p) \xrightarrow{j} \pi_0(\text{bs } \lambda, \pi(p)) \longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Последовательность (3.5) называется *гомотопической последовательностью расслоения* λ и будет использована в ряде моделей. \square

ПРИМЕР 3.1.10. *Накрытием* называется локально тривиальное расслоение над связной базой, слои которого являются дискретными пространствами. Структурная группа накрытия дискретна. Расслоенное пространство накрытия называется *накрывающим пространством* и предполагается связным. Все слои накрытия, как локально тривиального расслоения, имеют одну и ту же мощность. Она называется числом листов накрытия. Накрытие с числом листов больше 1 нетривиально. Действительно, тривиальное расслоение гомеоморфно произведению базы на слой. Поэтому оно не может быть связным, если слой дискретен и состоит более чем из одной точки.

Пусть λ — накрытие с дискретной группой G . Рассмотрим для такого расслоения точную последовательность гомотопических групп (3.5). Поскольку всякий его слой V — дискретное пространство, а база X и расслоенное пространство $\text{tl } \lambda$ связны, имеем

$$\begin{aligned} \pi_n(V, p) &= 0, \quad n > 0; \quad \pi_0(V, p) = V, \\ \pi_0(\text{tl } \lambda, p) &= 0, \quad \pi_0(X, \pi(p)) = 0, \quad p \in V \subset \text{tl } \lambda. \end{aligned}$$

В результате точная последовательность (3.5) распадается на короткие последовательности

$$0 \longrightarrow \pi_{n+1}(\text{tl } \lambda, p) \longrightarrow \pi_{n+1}(X, \pi(p)) \longrightarrow 0, \quad n > 0, \quad (3.6)$$

$$0 \longrightarrow \pi_1(\text{tl } \lambda, p) \longrightarrow \pi_1(X, \pi(p)) \longrightarrow V \longrightarrow 0. \quad (3.7)$$

Последовательность (3.6) устанавливает, что все высшие гомотопические группы $\text{tl } \lambda$ и X изоморфны. Из последовательности (3.7) вытекает, что отображение

$$\pi_1(\text{tl } \lambda, p) \rightarrow \pi_1(X, \pi(p)) \quad (3.8)$$

— вложение, а морфизм

$$\pi_1(X, \pi(p)) \rightarrow \pi_0(V, p) = V \quad (3.9)$$

— проекция. Из последовательности (3.7) следует также, что нетривиальное накрытие не допускает глобального сечения. Действительно, если s — глобальное сечение, то композиция отображений $\pi \circ s = \text{Id}_X$ порождает изоморфизм групп

$$\pi_1(X, \pi(p)) \xrightarrow{s^*} \pi_1(\text{tl } \lambda, p) \xrightarrow{\pi^*} \pi_1(X, \pi(p)).$$

Но если $\pi_1(\text{tl } \lambda, p)$ и $\pi_1(X, \pi(p))$ изоморфны, то в силу точности последовательности (3.7) слой V состоит из одного элемента, т. е. накрытие λ — тривиально. \square

§ 2. Топологические солитоны

Физический солитон можно наглядно представить себе как локализованный самоподдерживающийся волновой пакет, образованный в результате баланса двух конкурирующих явлений — расплывания волнового пакета вследствие дисперсии (зависимости скорости распространения волн от их длины) и сжатия пакета вследствие нелинейности. Общепринятое математическое определение *солитонов* до сих пор отсутствует. Разные авторы предлагают свои не совсем совпадающие варианты. Например, различают солитоны и уединенные волны, локализованность определяют в терминах самих волновых полей и в терминах плотности энергии, требуют или не требуют пространственно-временную зависимость плотности энергии вида $E(x - ut)$ и т. д.

В теории поля, исходя из того, что элементарные частицы в природе также представляют собой как бы локализованные пакеты энергии, усматривают определенное соответствие между классическими солитонными решениями и состояниями, описывающими протяженные частицы в квантовой теории поля. Оно устанавливается процедурой “квантования солитонов” на основе квазиклассического разложения.

Разработано несколько эффективных и сложных методов исследования решений нелинейных волновых уравнений. Однако наша цель другая — продемонстрировать применение тополого-алгебраических методов для анализа нелинейных полевых конфигураций. Для этого достаточно использовать один из признаков локализованных полевых конфигураций, а именно, что их пространственной асимптотикой служат *вакуумные классические поля*. Последние ищутся как решения уравнений поля, минимизирующие функционал энергии модели. Причем перенормировкой на константу функционал энергии всегда может быть сделан таким, что минимальное значение энергии будет равно нулю.

Пусть V — пространство, в котором могут принимать значения волновые функции φ , описывающие локализованную полевую конфигурацию на $(d + 1)$ -мерном пространстве-времени $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Пусть W — подпространство V значений вакуумных полевых функций. Ограничимся случаем статических полей. Тогда поле φ представляет собой отображение \mathbb{R}^d в V такое, что при присоединении к \mathbb{R}^d бесконечноудаленной сферы S_∞^{d-1} и непрерывном продолжении φ на S_∞^{d-1} последняя будет отображаться в W . В ходе эволюции полевой конфигурации отображение φ может меняться, но при этом будет оставаться гомотопным исходному. Это побуждает характеризовать полевую конфигурацию гомотопическим классом отображения φ , который не зависит от ее непрерывной деформации.

С другой стороны, рассмотрим всевозможные непрерывные отображения φ пары (D^d, S_∞^{d-1}) из d -мерного шара D^d (гомотопически эквивалентного пространству \mathbb{R}^d с присоединенной сферой S_∞^{d-1}) и его границы S_∞^{d-1} в пару (V, W) . Назовем гомотопические классы этих отображений *топологическими солитонами*. При $d > 1$ они представляются элементами относительной гомотопической группы $\pi_d(V, W)$, а если пространство V стягиваемо, то элементами гомотопической группы $\pi_{d-1}(W)$. Случай $d = 1$ требует специального рассмотрения (см. ниже) из-за особого определения групп π_0 .

Таким образом, спектр топологических солитонов определяется только размерностью пространства-времени и гомотопическим типом пространств V и W . Поэтому ясно, что **не всякому топологическому солитону может отвечать какое-либо солитонное решение самой модели**. Однако знание спектра топологических солитонов позволяет определить множество гомотопически неэквивалентных классов всевозможных солитонных решений в модели.

Приведем примеры некоторых солитонных моделей, начав с размерности $d = 1$. В этом случае пара $(D^1, \partial D^1)$ — отрезок с выделенными концами.

Модель кинков

Это двумерная вещественная скалярная модель. В этой модели $V = \mathbb{R}$, W — точки ± 1 в \mathbb{R} , и топологические солитоны — это гомотопические классы отображений отрезка D^1 в \mathbb{R} таких, что концы отрезка переходят в ± 1 . Поскольку пространство \mathbb{R} стягиваемо, ясно, что гомотопические классы рассматриваемых отображений определяются отображениями границы D^1 в точки ± 1 . Нетрудно проверить, что таких классов всего четыре. Два из них ($\varphi(\infty) = \varphi(-\infty)$) соответствуют вакуумному состоянию, а два других ($\varphi(\infty) = -\varphi(-\infty)$) — солитонным решениям — *кинкам*.

Пусть теперь в этой модели φ — комплексное поле или пусть оно снабжено внутренним индексом a , так чтобы пространства V и W были связными. Например, если φ — комплексное поле, то $V = W = S^1$. Тогда множество $\pi(D^1, S^1)$ содержит только один элемент. Однако это не означает, что в такой модели нет солитонных решений. Например, когда поле φ вещественно, это те же кинки. Но непрерывной деформацией они могут быть переведены (эволюционировать) в вакуумное состояние, что можно рассматривать как предпосылку неустойчивости солитонных решений в этой модели. Такие солитоны называются *нетопологическими*.

Модель синус-Гордона

Рассмотрим скалярную 2-мерную полевую модель с потенциалом

$$U(\varphi) = g(1 - \cos \varphi).$$

Множество вакуумных состояний, когда $U(\varphi_n^{(0)}) = 0$, в данном случае счетно:

$$\varphi_n^{(0)} = 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В этой модели $V = \mathbb{R}$ и $W = \mathbb{Z}$. Множество топологических солитонов этой модели счетно и параметризуется парой чисел

$$m = \frac{1}{2\pi} \varphi(\infty), \quad n = \frac{1}{2\pi} \varphi(-\infty),$$

в которые отображаются концы отрезка D^1 . В частности, для $m = \pm 1$, $n = 0$ солитонные решения имеют вид

$$\varphi(x) = 4 \operatorname{arctg} [\exp\{\pm(x - x_0)\}]. \quad (3.10)$$

Эти решения топологически неэквивалентны. Можно считать, что они относятся друг к другу как солитон и *антисолитон*.

Рассмотрим теперь солитоны в пространствах с размерностью $d > 1$. Используя теорему вириала, нетрудно показать, что в этих размерностях в скалярных моделях с потенциалами $U(\varphi)$ отсутствуют статические локализованные решения (хотя топологические солитоны существуют).

Хорошими кандидатами на наличие солитонных решений оказались калибровочные модели. простейшим примером которых является модель Нильсена—Олесена.

Модель Нильсена—Олесена

Это модель скалярной электродинамики в $(2 + 1)$ -мерном пространстве-времени с функцией Лагранжа

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} g^2 (\varphi^2 - a^2)^2, \quad (3.11)$$

где $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$. Вакуумные поля модели удовлетворяют следующим уравнениям:

$$F_{\mu\nu} = 0, \quad D_\mu \varphi = 0, \quad \varphi^2 = a^2. \quad (3.12)$$

Их решения имеют вид

$$\varphi = a \exp(i\alpha(x)), \quad A_\mu = \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x). \quad (3.13)$$

Они являются также решениями уравнений поля

$$\begin{aligned} D_\mu D^\mu \varphi &= g^2 (\varphi^2 - a^2) \varphi, \\ \partial^\nu F_{\mu\nu} &= \frac{i}{2} e (\varphi^* D_\mu \varphi - \varphi (D_\mu \varphi)^*). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Калибровочными преобразованиями вакуумные решения (3.13) могут приведены к виду $\varphi = a$, $A_\mu = 0$. Однако, когда поля (3.13) используются в качестве граничных условий для поиска локализованных решений уравнений (3.14), **они не должны подвергаться калибровочным преобразованиям**. Причем, поскольку определяющим в паре (φ, A) вакуумных полей (3.13) является поле φ , топологические солитоны можно классифицировать по гомотопическим классам именно полей φ .

Пространством значений V этих полей является комплексная плоскость \mathbb{R}^2 , а пространством значений W вакуумных полей — окружность S^1 в V . Поэтому топологические солитоны модели представляются элементами гомотопической группы

$$\pi_2(\mathbb{R}^2, S^1, \cdot) = \pi_1(S^1, \cdot) = \mathbb{Z}.$$

Класс $n \in \mathbb{Z}$ включает отображение $S^1 \rightarrow S^1$, при котором первая окружность n раз “обертывается” вокруг второй окружности. Для гладких отображений n совпадает со степенью отображения $S^1 \rightarrow S^1$, например,

$$\theta_2 = \exp(in\theta_1).$$

Для нахождения солитонного решения уравнений (3.14) выберем калибровку, в которой $A_0 = 0$, а в качестве граничных условий — вакуумную асимптотику на пространственной бесконечности. Введем полярные координаты (r, θ) . Выберем в качестве граничных условий при $r \rightarrow \infty$ вакуумные решения вида

$$\varphi = a \exp(in\theta), \quad A_r = 0, \quad A_\theta = \frac{n}{er}.$$

Солитонные решения ищутся в форме

$$\varphi(r, \theta) = F(r) \exp(in\theta), \quad A_0 = A_r = 0, \quad A_\theta = A(r).$$

При произвольном a дифференциальные уравнения для $F(r)$ и $A(r)$ аналитического решения не имеют, но численные расчеты подтверждают существование несингулярного решения с асимптотическим поведением:

$$\begin{aligned} A_0 = A(r) &\rightarrow \frac{n}{er} + \frac{A}{\sqrt{r}} \exp(-ear), \\ F(r) &\rightarrow a + F \exp\left(-\sqrt{2}gar\right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где A, F — константы. Заметим, что решения имеют “конечный размер”, поскольку при возрастании r они экспоненциально быстро приближаются к вакуумной асимптотике.

Модель Нильсена—Олесена является 2-мерным (по пространственной размерности) релятивистским аналогом модели Гинзбурга—Ландау поля куперовских пар в сверхпроводниках, когда температура ниже критической, сверхпроводящая система симметрична вдоль оси z , и солитонные решения (3.15) отвечают возникающим в такой системе трубкам тока.

Можно рассмотреть модель (3.11) при $d = 3$, т. е. в реальном пространстве-времени. Однако, поскольку

$$\pi(S^2, S^1) = \pi_2(S^1) = 0,$$

топологические солитоны в такой модели отсутствуют. В поисках солитонных решений в $(3 + 1)$ -мерном пространстве-времени следует обратиться к неабелевым калибровочным моделям.

Модель Полякова—Г'Хуфта

Это $SU(2)$ калибровочная модель изотриплета скалярных полей φ^a , $a = 1, 2, 3$, с функцией Лагранжа

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \varphi^a)(D^\mu \varphi^a) - \frac{\lambda}{4} (\varphi^a \varphi^a - a^2)^2, \\ D_\mu \varphi^a &= \partial_\mu \varphi^a + g \varepsilon^{abc} A_\mu^b \varphi^c. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Вакуумные поля модели удовлетворяют тем же условиям (3.12), что и в модели Нильсена—Олесена. В частности, $\varphi^a \varphi^a = a^2$, откуда следует, что пространство значений вакуумных полей W представляет собой сферу S^2 в изопространстве $V = \mathbb{R}^3$. В результате топологические солитоны модели образуют группу $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$.

Модель обладает статическим солитонным решением при $n = 1$, которое в калибровке $A_0^a = 0$ ищется в виде

$$\varphi^a = \frac{x^a}{r} \varphi(r), \quad A_i^a = \varepsilon^{aij} x^j A(r) \quad (3.17)$$

с асимптотикой

$$\varphi(r) \rightarrow a, \quad A(r) \rightarrow \frac{1}{gr}. \quad (3.18)$$

В пределе $\lambda \rightarrow 0$ решение можно получить в аналитической форме

$$\varphi(r) = \frac{a}{\text{th}(gar)} - \frac{1}{ar}, \quad A(r) = \frac{1}{gr} - \frac{a}{\text{sh}(gar)}. \quad (3.19)$$

Используя гомотопическую классификацию, можно сделать и некоторые общие выводы о возможном спектре солитонов в 4-мерных моделях в зависимости от их свойств симметрии.

Пусть G — группа всех глобальных преобразований симметрий модели. Пусть $\varphi(x)$ — некоторое вакуумное поле. Тогда для любого $g \in G$ поле $g\varphi(x)$ — тоже вакуумное. Это означает, что если $w_0 \in W$, то для любого $g \in G$ элемент $w = gw_0$ тоже принадлежит W , и $W = G/H$, где H — подгруппа G , оставляющая инвариантным элемент w_0 . Она называется *стабилизатором* w_0 . Например, стабилизатором элемента $w = gw_0$ является подгруппа gHg^{-1} . Если $H \neq G$, группа G не оставляет инвариантным ни один элемент из W и, следовательно, ни одно вакуумное состояние.

Если пространство V стягиваемо, то спектр топологических солитонов модели определяется элементами гомотопической группы $\pi_2(G/H, \cdot)$. Если H — связная подгруппа топологической группы G , то $G \rightarrow G/H$ — расслоение Серра со слоем H . Для такого расслоения имеет место точная последовательность гомотопических групп

$$\dots \rightarrow \pi_2(G) \rightarrow \pi_2(G/H) \rightarrow \pi_1(H) \rightarrow \pi_1(G) \rightarrow \dots$$

Если G — группа Ли, то $\pi_2(G) = 0$ и гомоморфизм

$$\pi_2(G/H) \rightarrow \pi_1(H)$$

— вложение. Поэтому для существования топологических солитонов, в частности, необходимо, чтобы $\pi_1(H) \neq 0$, т. е. чтобы группа H не сводилась к единичному элементу, не была дискретна или односвязна. Группа H не должна быть инвариантной подгруппой Ли в G , поскольку в этом случае G/H — группа Ли и $\pi_2(G/H) = 0$. Например, если G — абелева, то всякая ее подгруппа является инвариантной и топологические солитоны в абелевой калибровочной модели при $d = 3$, как мы отмечали на примере модели Нильсена—Олесена, отсутствуют.

Для определения спектра топологических солитонов полезно также отметить, что если группа Ли G односвязна (т. е. $\pi_1(G) = 0$), то вложение

$$\pi_2(G/H) \rightarrow \pi_1(H)$$

является также проекцией и, следовательно, $\pi_2(G/H) = \pi_1(H)$.

§ 3. Гомологии и когомологии

Гомологии комплексов

Основные тополого-алгебраические характеристики, применяемые в физических моделях, определяются теориями гомологий и когомологий.

Существуют различные теории гомологий, но для них всех характерна следующая алгебраическая конструкция. Пусть

$$B = \{B_p, \partial_p, p = 0, \pm 1, \dots\}$$

— семейство абелевых групп B_p и гомоморфизмов

$$\partial_p : B_p \rightarrow B_{p-1}$$

таких, что $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$. Последнее условие эквивалентно утверждению, что образ $\text{Im } \partial_{p+1}$ гомоморфизма ∂_{p+1} , т. е. $\partial_{p+1}B_{p+1}$, содержится в ядре $\text{Ker } \partial_p$ отображения ∂_p , т. е. в $\partial_p^{-1}(0 \in B_{p-1})$. Проиллюстрируем это рисунком 7.

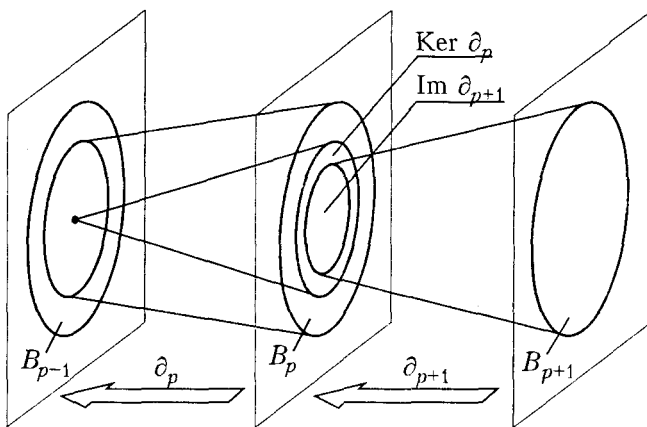


Рис. 7

Семейство B можно представить в виде последовательности

$$\dots \xleftarrow{\partial_{p-1}} B_{p-1} \xleftarrow{\partial_p} B_p \xleftarrow{\partial_{p+1}} B_{p+1} \xleftarrow{\dots}, \quad (3.20)$$

в которой композиция любых двух последовательных морфизмов равна нулю. Такая последовательность называется *цепным комплексом*. Элементы группы B_p комплекса называются p -мерными *цепями*, из них элементы из $\text{Ker } \partial_p$ называются p -мерными *циклами*, а элементы из $\text{Im } \partial_{p+1}$ — p -мерными *границами*. Поскольку ∂_p — гомоморфизм, $\text{Im } \partial_{p+1}$ — подгруппа группы $\text{Ker } \partial_p$ и определена фактор-группа

$$H_p(B) = \text{Ker } \partial_p / \text{Im } \partial_{p+1},$$

которая называется p -мерной *группой гомологии комплекса B* . Два цикла из B_p принадлежат одному и тому же смежному классу из $H_p(B)$ тогда и только тогда, когда их разность есть некоторая p -граница.

Из теорий гомологий в физических приложениях нам понадобятся только так называемые *сингулярные гомологии*.

Пусть X — n -мерное дифференцируемое ориентируемое многообразие. Определим следующий цепной комплекс $B(X)$. Рассмотрим ориентируемые компактные p -мерные подмногообразия M многообразия X^n . Выберем p -цепями комплекса $B(X)$ всевозможные формальные конечные суммы $M = \sum k_i M_i$ с числовыми коэффициентами k_i . Они образуют бесконечную свободную группу $B_p(X)$ относительно сложения. Причем считается, что $(-M)$ — это многообразие M с обратной ориентацией. Введем оператор ∂ взятия *ориентированной границы* компактного многообразия, считая по определению

$$\partial \left(\sum_i k_i M_i \right) = \sum_i k_i \partial M_i.$$

Он отображает $B_p(X)$ в $B_{p-1}(X)$.

ПРИМЕР 3.3.1. Пусть M — полый ограниченный цилиндр в \mathbb{R}^3 , изображенный на рис. 8.

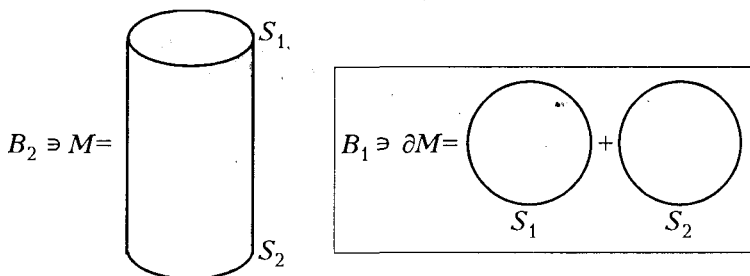


Рис. 8

Его границей является несвязное объединение двух окружностей $S_1 \cup S_2$, образующих края цилиндра, а ориентированной границей ∂M — формальная сумма этих окружностей, наделенных определенной ориентацией. \square

ПРИМЕР 3.3.2. Рассмотрим теперь отображение ρ этого цилиндра в тор T^2 , получаемое отождествлением его краев (рис. 9).

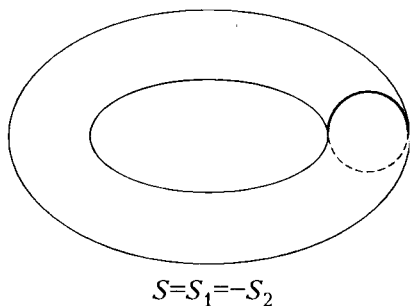


Рис. 9

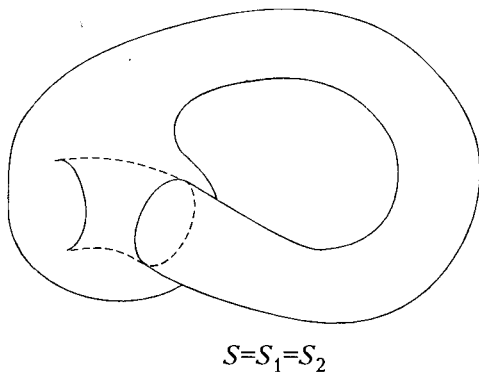


Рис. 10

Подчеркнем, что $\rho(M)$ как образ многообразия с границей — это не тор, а тор с границей S . Однако его ориентированная граница

$$\partial\rho(M) = S_1 + S_2 = S - S = 0.$$

\square

ПРИМЕР 3.3.3. Пусть ρ' — отображение цилиндра M в бутылку Клейна K^2 в \mathbb{R}^4 , получаемое тоже отождествлением его краев (рис. 10). Хотя сама бутылка Клейна — неориентируемое многообразие, $\rho'(M)$ является ориентируемым многообразием с границей S и ориентируемой границей

$$\partial\rho'(M) = S_1 + S_2 = 2S.$$

\square

Группы гомологий комплекса $B(X) = \{M^p, \partial\}$ называются *группами ориентируемых бордизмов* $\Omega_p(X, K)$. Подчеркнем, что они зависят от числового кольца K , из которого берутся коэффициенты k_i . Так, в Примере 3.3.3 окружность S на бутылке Клейна, будучи циклом $\partial S = 0$, является границей

$$S = \partial(1/2\rho'(M)),$$

если коэффициенты k_i принимают значения в поле рациональных чисел, и S не есть граница, если $K = \mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел.

Группы $\Omega_p(X, K)$ являются гомотопическими инвариантами, т. е. они одни и те же для гомотопически эквивалентных пространств X и X' . Однако группы бордизмов оказываются не совсем удобными характеристиками, поскольку могут быть нетривиальными даже для стягиваемого пространства (точки). Дело в том, что эти группы определяются по всем возможным замкнутым подмногообразиям, например, вложенным в \mathbb{R}^n , и среди них могут найтись такие, которые сами не являются границами.

Чтобы более точно характеризовать структуру самого пространства X , можно, подобно тому как это делается при определении гомотопических групп, выбрать какой-либо “эталонный” класс подмногообразий. В теории сингулярных гомологий это — образы всевозможных непрерывных отображений в топологическое пространство X стандартных p -мерных полиэдров (симплексов).

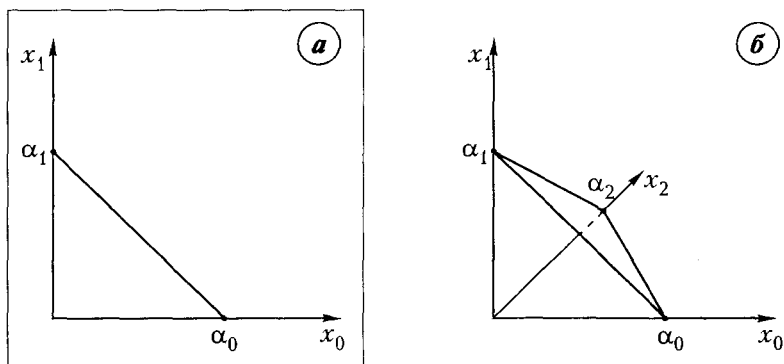


Рис. 11

Сингулярные гомологии

Рассмотрим евклидово пространство \mathbb{R}^{p+1} , наделенное декартовой системой координат. Отметим на каждой координатной оси x_i точку α_i с координатой 1. Проведем через все эти точки гиперплоскость

$$x^0 + \dots + x^p = 1$$

в \mathbb{R}^{p+1} . *Стандартным p -мерным симплексом* σ^p называется пересечение этой гиперплоскости с положительным ортантом $\{x^i \geq 0\}$. Такой симплекс представляет собой выпуклый p -мерный полиэдр с вершинами $[\alpha_0 \dots \alpha_p]$. В частности,

$\sigma^0 = [\alpha_0]$ — это точка;

$\sigma^1 = [\alpha_0 \alpha_1]$ — это отрезок (рис. 11, а);

$\sigma^2 = [\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2]$ — правильный треугольник (рис. 11, б);

$\sigma^3 = [\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]$ — тетраэдр.

Граница p -мерного симплекса $\sigma^p = [\alpha_0 \dots \alpha_p]$ образована $(p-1)$ -мерными гранями — симплексами

$$\sigma_i^{p-1} = [\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p],$$

где $\hat{\alpha}_i$ означает, что вершина α_i удалена. Ориентированная граница симплекса

$$\sigma^p = [\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p]$$

есть формальная линейная комбинация его граней вида

$$\partial\sigma^p = \sum_i (-1)^i [\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p] = \sum_i (-1)^i \sigma_i^{p-1}.$$

Например,

$$\partial[\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2] = [\alpha_1 \alpha_2] - [\alpha_0 \alpha_2] + [\alpha_0 \alpha_1].$$

Прямым вычислением можно убедиться, что $\partial\partial\sigma^p = 0$.

Пусть X — любое топологическое пространство. *Сингулярными p -мерными симплексами* называются пары (σ^p, f) , где

$$f: \sigma^p \rightarrow X$$

— непрерывное отображение стандартного p -мерного симплекса σ^p в пространство X , т. е. наглядно образы всевозможных непрерывных отображений p -мерных полиэдров в X . *Сингулярной p -мерной цепью* называется формальная конечная сумма

$$c_p = \sum_i k_i (\sigma_i^p, f_i)$$

сингулярных симплексов с коэффициентами k_i из числового кольца K . В дальнейшем, допуская некоторую вольность, мы будем отождествлять сингулярный симплекс (σ, f) с образом $f(\sigma)$ в X .

Граница сингулярного симплекса задается как формальная сумма

$$\partial f(\sigma^p) = \partial(\sigma^p, f) = \sum_i (-1)^i (\sigma_i^{p-1}, f \downarrow \sigma_i^{p-1}) = \sum_i (-1)^i f(\sigma_i^{p-1}) \quad (3.21)$$

образов граней σ_i^{p-1} стандартного симплекса σ^p при отображении f . Граница сингулярной цепи, как и выше, имеет по определению вид

$$\partial c_p = \sum_i k_i \partial f_i(\sigma_i^p)$$

и удовлетворяет условию $\partial\partial c_p = 0$. В частности, если образ полиэдра $f(\sigma^p)$ — многообразие, то оператор границы (3.21) совпадает с оператором взятия ориентированной границы многообразия.

Сингулярные p -мерные цепи образуют группу C_p относительно операции формальной суммы, и оператор ∂ — гомоморфизм. Группы сингулярных цепей C_p и гомоморфизм ∂ составляют цепной комплекс (3.20), группы гомологий которого называются *сингулярными гомологиями* $H_p(X, K)$ пространства X с коэффициентами в кольце K . Группы сингулярных гомологий обычно определяются с коэффициентами в \mathbb{Z} , \mathbb{R} , \mathbb{C} . Часто под группами сингулярных гомологий понимают именно группы с целочисленными коэффициентами из \mathbb{Z} . Мы будем их обозначать просто $H_p(X)$, а весь набор $\{H_p(X)\}$ как $H_*(X)$.

Элементами группы гомологий $H_p(X)$ являются классы эквивалентности p -мерных сингулярных циклов (это цепи такие, что $\partial c_p = 0$) с точностью до границы ($c_p = \partial c_{p+1}$). Примером сингулярного p -цикла в топологическом пространстве X служит p -мерная сфера S^p , которая является образом в X p -мерного полиэдра, все грани которого обращаются при отображении в X в точку.

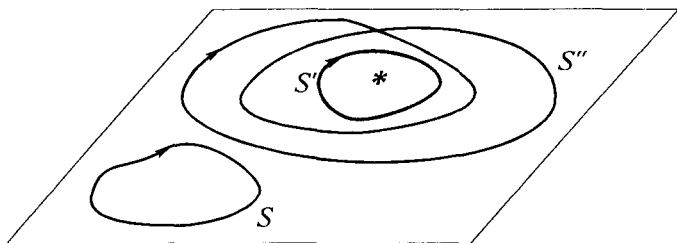


Рис. 12

ПРИМЕР 3.3.4. Пусть $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ — плоскость без точки. На рис. 12 кривыми S, S', S'' изображены представители трех классов эквивалентности 1-мерных сингулярных циклов в X . Цикл S является границей и его класс эквивалентности соответствует нулю группы $H_1(X)$. Цикл S'' эквивалентен циклу $2S'$, и можно проверить, что любой цикл в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ эквивалентен некоторому циклу nS' , $n \in \mathbb{Z}$, так что $H_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$. \square

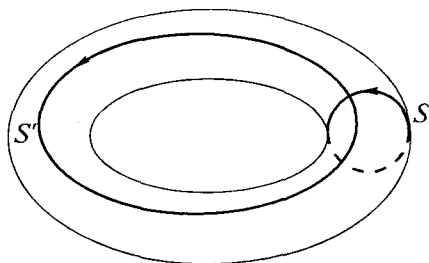


Рис. 13

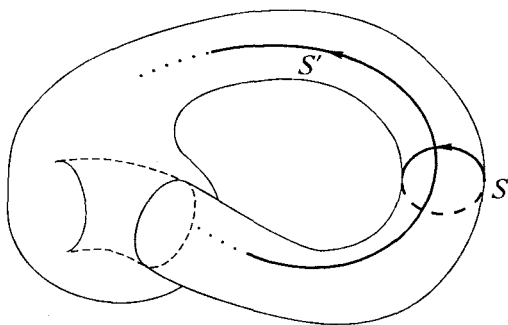


Рис. 14

ПРИМЕР 3.3.5. На торе T^2 всякий 1-мерный цикл эквивалентен циклу

$$nS + mS', \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

(рис. 13) и $H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. \square

ПРИМЕР 3.3.6. На бутылке Клейна K^2 всякий 1-мерный цикл эквивалентен циклу

$$nS + mS', \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

но (рис. 14) цикл $2S$ является границей, т. е. эквивалентен $0S$. Поэтому $H_1(K^2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$. \square

ПРИМЕР 3.3.7. Пусть $X = S^2$ — сфера. Очевидно, что $H_1(S^2) = 0$. Рассмотрим $H_2(S^2)$. Примером ненулевого 2-мерного цикла на S^2 является сама сфера S^2 . Примеры других неэквивалентных 2-мерных циклов на S^2 могут быть получены отображениями f сферы S^2 на $X = S^2$, различающимися степенью отображения f , и $H_2(S^2) = \mathbb{Z}$. \square

Отметим важное преимущество сингулярных гомологий в сравнении, например, с бордизмами. Поскольку граница (3.21) сингулярного симплекса $f(X)$ в топологическом пространстве X определяется, грубо говоря, как образ

$$\partial f(\sigma) = f(\partial\sigma)$$

границы стандартного симплекса в \mathbb{R}^n , построение такой границы в X и тем самым задание цепного комплекса не требует какой-либо добавочной структуры на X , например структуры многообразия, как в случае бордизмов. Поэтому **сингулярные гомологии могут быть определены для любого топологического пространства**. В частности, если X ориентируемое многообразие, имеется эпиморфизм групп бордизмов $\Omega_p(X, \mathbb{Q})$ на группы гомологий $H_p(X, \mathbb{Q})$ с рациональными коэффициентами. Это означает, что всякий сингулярный цикл в ориентируемом многообразии X , будучи умноженным на некоторое рациональное число, представим подмногообразием в X .

Приведем некоторые свойства *групп сингулярных гомологий* $H_n(X, K)$.

Они абелевы.

Образующими элементами группы $H_0(X, K)$ являются компоненты линейной связности пространства X и для 1-связного пространства $H_0(X, K) = K$.

Если X — стягиваемое пространство, $H_p(X, K) = 0$, $p > 0$.

Если X^n — замкнутое связное n -мерное многообразие, тогда:

$$H_p(X^n, K) = 0 \text{ при } p > n;$$

$$H_n(X^n, K) = K, \text{ если } X^n \text{ ориентируемо};$$

$$H_n(X^n) = 0, \text{ если } X^n \text{ неориентируемо.}$$

ПРИМЕР 3.3.8. Гомологии *сфер*:

$$H_0(S^n) = H_n(S^n) = \mathbb{Z};$$

$$H_p(S^n) = 0, \quad p \neq 0, n.$$

\square

ПРИМЕР 3.3.9. Гомологии *проективных пространств*:

$$H_0(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$$

$$H_n(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} 0, & n = 2l, \\ \mathbb{Z}_2, & n = 2l + 1; \end{cases}$$

$$H_p(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} 0, & p = 2l \\ \mathbb{Z}_2, & p = 2l + 1, 0 < p < n. \end{cases}$$

\square

Группы гомологий, с которыми приходится иметь дело в приложениях, обладают конечным числом образующих элементов и поэтому изоморфны прямой сумме циклических и свободных групп. Если группа гомологий содержит *циклическую подгруппу* (т. е.

такой элемент h , что $h^k = 1$ для некоторого натурального k), то говорят, что она содержит *кручение*, например, группа

$$H_1(K^2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$$

из Примера 3.3.6 и группы

$$H_{2l+1}(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$$

из Примера 3.3.9.

Как уже отмечалось (см. Примеры 3.3.3, 3.3.6), **класс эквивалентности цикла может зависеть от выбора кольца коэффициентов K** . Например, если группа

$$H_1(K^2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$$

имеет два образующих элемента, то группа

$$H_2(K^2, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$

имеет один образующий элемент. В случае $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

$$H_p(X, \mathbb{Q}) = H_p(X) \otimes \mathbb{Q},$$

$$H_p(X, \mathbb{R}) = H_p(X) \otimes \mathbb{R}.$$

Напомним, что *тензорным произведением двух абелевых групп $A \otimes B$* называются всевозможные конечные суммы вида

$$\sum_i a_i \otimes b_i, \quad a_i \in A, b_i \in B,$$

при условии, что

$$(a_1 + a_2) \otimes (b_1 + b_2) = a_1 \otimes b_1 + a_2 \otimes b_1 + a_1 \otimes b_2 + a_2 \otimes b_2.$$

Можно показать, что тензорное произведение любой конечной группы на группу \mathbb{Q} или \mathbb{R} равно нулю. Отсюда, в частности, следует, что группы гомологий $H_p(X, \mathbb{Q})$ и $H_p(X, \mathbb{R})$ не содержат кручения.

Сравнивая гомотопические группы и группы сингулярных гомологий для плоскости без точки (см. Примеры 3.1.4 и 3.3.4) и для сфер (см. Примеры 3.1.5 и 3.3.8), можно предположить наличие некоторой связи между ними. Существует *гомоморфизм Гуревича*

$$h_n : \pi_n(X) \rightarrow H_n(X).$$

При $n = 1$ его ядром является *коммутант группы $\pi_1(X)$* (т. е. подгруппа, порождаемая элементами вида $a^{-1}b^{-1}ab$ из $\pi_1(X)$), и, если $\pi_1(X)$ коммутативна, она изоморфна $H_1(X)$. Если $\pi_i(X) = 0$ для всех $i < n$ ($n > 1$), гомоморфизм h_n является изоморфизмом, а h_{n+1} — эпиморфизмом.

Непрерывное отображение топологических пространств $f : X \rightarrow Y$ порождает гомоморфизм групп сингулярных гомологий

$$f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$$

и они, как и гомотопические группы, являются гомотопическими инвариантами, т. е. изоморфны для гомотопически эквивалентных пространств.

Если группы гомологий $H_p(X, \mathbb{R})$ конечнопорожденные и нетривиальны для не более чем конечного числа значений p , можно ввести числовые гомотопически инвариантные характеристики пространства X — числа Бетти

$$b_p = \dim H_p(X, \mathbb{R})$$

и эйлерову характеристику

$$\chi(X) = \sum_p (-1)^p b_p.$$

Для пространств, гомотопически эквивалентных конечным клеточным разбиениям определенного класса (конечным CW -пространствам), эйлерова характеристика приобретает наглядный смысл

$$\chi(X) = \sum_p (-1)^p \gamma_p,$$

где γ_p — число p -мерных клеток разбиения. Например, эйлерова характеристика сфер

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n.$$

Когомологии

Двойственной к гомологиям конструкцией являются когомологии. Пусть B — цепной комплекс (3.20) и K — числовое кольцо. Обозначим B^p абелеву группу всех гомоморфизмов $f^p : B_p \rightarrow K$ и введем гомоморфизм

$$d^p : B^p \rightarrow B^{p+1},$$

определяемый следующим образом:

$$d^p f^p = (-1)^{p+1} f^p \partial_{p+1} : B_{p+1} \rightarrow K.$$

Легко убедиться, что

$$d^{p+1} d^p f^p = -f^p \partial_{p+1} \partial_{p+2} = 0$$

для всех $f^p \in B^p$. Таким образом, последовательность

$$\dots \xrightarrow{d^{p-1}} B^p \xrightarrow{d^p} B^{p+1} \xrightarrow{d^{p+1}} \dots \quad (3.22)$$

определяет комплекс абелевых групп, который называется *коцепным комплексом*. Элементы c^p группы B^p называются *p -мерными коцепями*, элементы из $\text{Ker } d^p \subset B^p$ (т. е. такие, что $d^p c^p = 0$) называются *p -мерными коциклами*, а элементы из $\text{Im } d^{p-1} \subset B^p$ (т. е. такие, что $c^p = d^{p-1} c^{p-1}$) — *p -мерными кограницами*. Фактор-группы

$$\text{Ker } d^p / \text{Im } d^{p-1},$$

элементами которых являются классы эквивалентности p -мерных коциклов с точностью до кограниц, называются *группами когомологий H^p комплекса (3.22)*.

Когомологиями, двойственными сингулярным гомологиям, являются *когомологии де Рама* внешних дифференциальных форм на многообразиях. Пусть

$$\Omega(X) = \bigoplus_p \Omega^p(X)$$

— градуированная алгебра внешних дифференциальных форм на n -мерном многообразии X . Оператор внешнего дифференцирования определяет гомоморфизм

$$d : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1},$$

такой, что $dd = 0$. Это наделяет алгебру Ω структурой коцепного комплекса

$$0 \xrightarrow{\text{in}} \mathbb{R} \xrightarrow{\text{in}} \Omega^0 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^p \xrightarrow{d} \Omega^{p+1} \longrightarrow \dots \quad (3.23)$$

Он называется *комплексом де Рама*. Его p -мерными коцепями являются p -формы σ , коциклами — замкнутые формы, а кограницами — точные формы. Группы когомологий этого комплекса именуются *группами когомологий де Рама* $H^p(X^n)$ дифференциальных форм на многообразии X^n . Они образованы классами эквивалентности замкнутых форм, разность которых является точной формой, т. е. σ и σ' считаются эквивалентными, если $\sigma' = \sigma + d\sigma''$. В частности, группа $H^0(X^n)$ есть линейное пространство, размерность которого равна числу компонент связности многообразия X^n . Очевидно также, что $H^p(X^n) = 0$, $p > n$.

ПРИМЕР 3.3.10. Если многообразие X^n стягиваемое, $H^p(X^n) = 0$, $p > 0$. Это является выражением известной *леммы Пуанкаре*, гласящей, что **в евклидовом пространстве всякая замкнутая форма является точной**. В частности, если $X = \mathbb{R}^3$ и σ — 1-форма (ковекторное поле), условие замкнутости означает, что $\text{rot } \sigma = 0$, откуда получается известное следствие, что $\sigma = \text{grad } \varphi$, где φ — некоторая вещественная функция на X . Напротив, на нестягиваемом многообразии могут существовать неградиентные векторные поля, ротор которых равен 0. Примером такого поля на плоскости без точки $X^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ является

$$\sigma = \left(\sigma_\rho = 0, \sigma_\alpha = \frac{\Phi}{\rho} \right) = \left(\sigma_x = \frac{\Phi y}{x^2 + y^2}, \sigma_y = \frac{-\Phi x}{x^2 + y^2} \right), \quad (3.24)$$

где Φ — константа, записанное соответственно в полярных (ρ, α) и декартовых координатах с началом в точке $\{0\}$. □

Двойственность групп когомологий де Рама $H^*(X)$ многообразия X и групп сингулярных гомологий $H_*(X, \mathbb{R})$ устанавливается билинейной формой — интегрированием замкнутых p -форм σ^p по p -мерным циклам c_p , реализуемым подмногообразиями X :

$$\langle \sigma^p | c_p \rangle = \int_{c_p} \sigma^p. \quad (3.25)$$

При этом в силу теоремы Стокса

$$\begin{aligned} \langle \sigma^p + d\sigma^{p-1} | c_p \rangle &= \int_{c_p} (\sigma^p + d\sigma^{p-1}) = \int_{c_p} \sigma^p + \int_{\partial c_p} \sigma^{p-1} = \int_{c_p} \sigma^p = \langle \sigma^p | c_p \rangle, \\ \langle \sigma^p | c_p + \partial c_{p+1} \rangle &= \int_{c_p + \partial c_{p+1}} \sigma^p = \int_{c_p} \sigma^p + \int_{c_{p+1}} d\sigma^p = \int_{c_p} \sigma^p = \langle \sigma^p | c_p \rangle, \end{aligned}$$

т. е. билинейная форма (3.25) зависит только от кохомологического класса σ^p и гомологического класса c_p , а тем самым определяет билинейную форму

$$\langle | \rangle : H^p(X) \otimes H_p(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

где \otimes означает тензорное произведение векторных пространств. Таким образом, имеет место *теорема двойственности де Рама*.

ТЕОРЕМА 3.3.1. Группа кохомологий де Рама $H^p(X)$ отождествляется при помощи билинейной формы (3.25) с пространством линейных форм на $H_p(X, \mathbb{R})$, и следовательно, $H^p(X)$ и $H_p(X, \mathbb{R})$ изоморфны как вещественные векторные пространства. \square

Отсюда, в частности, следует, что, как и сингулярные гомологии, кохомологии де Рама являются гомотопическими инвариантами. Например, через них выражается *эйлерова характеристика многообразия*

$$\chi(X) = \sum_p (-1)^p \dim H^p(X).$$

Заметим, что группы сингулярных гомологий $H_p(X, \mathbb{R})$ можно было бы, не прибегая к громоздким геометрическим конструкциям, определить просто как пространства, дуальные к $H^p(X)$. Однако таким способом нельзя однозначно восстановить целочисленные группы гомологий $H_p(X)$, а только с точностью до кручения.

В случае, когда X — замкнутое (т. е. компактное без границы) ориентируемое многообразие, для групп кохомологий $H^*(X)$ (они конечнопорожденные) и гомологий $H_*(X, \mathbb{R})$ имеет место также *двойственность Пуанкаре*. Ее можно реализовать следующей билинейной формой:

$$Q(\sigma^p, \sigma^{n-p}) = \int_X \sigma^p \wedge \sigma^{n-p},$$

которая, как легко проверить, зависит только от кохомологических классов форм σ^p и σ^{n-p} и является, тем самым, билинейной формой на группах кохомологий

$$Q(,) : H^p(X) \otimes H^{n-p}(X) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.26)$$

Это определяет изоморфизм $H^p(X)$ и $H^{n-p}(X)$ и в силу двойственности де Рама изоморфизм $H_p(X, \mathbb{R})$ и $H_{n-p}(X, \mathbb{R})$.

В частности, отсюда следует соотношение $b_p = b_{n-p}$ для чисел Бетти замкнутого ориентируемого многообразия X , и, если размерность X нечетна, эйлерова характеристика X равна 0.

Двойственность Пуанкаре

$$H_p(X, \mathbb{R}) = H_{n-p}(X, \mathbb{R})$$

имеет место и для компактных многообразий с краем. Следствием является то, что, если X^n такое многообразие, тогда

$$\chi(\partial X^n) = (1 + (-1)^n) \chi(X^n).$$

В частности, эйлерова характеристика границы всегда четна.

Билинейная форма (3.26) приводит к еще одной числовой гомотопически инвариантной характеристике — *сигнатуре многообразия*. Пусть $n = 4l$ и $p = 2l$, тогда форма $Q(,)$

является симметричной на вещественном векторном пространстве $H^{2l}(X^n)$ и может быть приведена к диагональному виду. Сигнатура замкнутого ориентированного многообразия определяется как сигнатура этой формы (разность между числом положительных и отрицательных диагональных элементов). Заметим, что она **зависит от ориентации**.

Важным примером теории кохомологий являются также кохомологии со значениями в пучках. Их описание приведено в Приложении В. Для гладкого (паракомпактного) многообразия X имеет место изоморфизм

$$H^p(X) = H^p(X, \mathbb{R}) \quad (3.27)$$

групп кохомологий де Рама и групп кохомологий $H^p(X, \mathbb{R})$ пространства X с коэффициентами в постоянном пучке \mathbb{R} . Этот изоморфизм является ключом к применению методов алгебраической топологии в теории поля, поскольку **позволяет выразить тополого-алгебраические характеристики расслоений, представляемые элементами групп кохомологий**

$$H^p(X, \mathbb{Z}) \subset H^p(X, \mathbb{R})$$

с коэффициентами в постоянном пучке $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, через кохомологические классы де Рама дифференциальных форм, построенных из форм кривизны связностей на расслоениях.

§ 4. Эффект Ааронова—Бома

Вакуумные калибровочные поля

Следуя критериям вакуумного поля классической полевой модели, *вакуумными* называются калибровочные поля, имеющие всюду нулевую напряженность.

Если форма напряженности F калибровочного поля A равна нулю в некоторой стягиваемой области U пространства X , то поле A в этой области представимо в виде

$$A = g(x) dg^{-1}(x), \quad (3.28)$$

где $g(x)$ — некоторый элемент группы $G(U)$ функций на U со значениями в G . Отсюда следует, что **на стягиваемой области вакуумное калибровочное поле всегда может быть устранено калибровкой**, т. е. приведено к виду $A = 0$.

Это перестает быть справедливым для всего пространства X , если оно не стягиваемо. Например, группа кохомологий де Рама $H^1(X)$ такого пространства необязательно тривиальна, и на них могут существовать калибровочные поля, напряженность которых всюду равна нулю, но сами они не устранимы калибровкой. Они вызывают эффекты типа Ааронова—Бома и квантования магнитного потока — образование флаксонов. Рассмотрим абелев случай электромагнитного поля.

В классической механике заряженных тел в уравнения движения зарядов входят только компоненты тензора напряженности электромагнитного поля, а его потенциал рассматривается как нефизическая величина, которая не проявляется в ненаблюдаемых эффектах. В квантовой механике и теории поля электромагнитный потенциал A_μ непосредственно содержится в уравнениях движения в составе оператора обобщенного импульса

$$i(\partial_\mu - ieA_\mu),$$

однако и здесь вопрос о наблюдаемости потенциала A остается до конца не ясным.

Чтобы выделить эффекты, обусловленные не напряженностью, а потенциалом электромагнитного поля, казалось бы, можно рассмотреть процессы, например, рассеяния в

электромагнитном поле, напряженность которого равна нулю. Такие эффекты — *эффекты Ааронова—Бома* — были предсказаны и экспериментально исследовались. Однако, как уже отмечалось, поле A , не устранимое калибровкой, может иметь нулевую напряженность (не будем касаться проблемы практического создания такого поля) только в некоторой нестягиваемой области, на границе которой напряженность поля обязательно отлична от нуля. В какой мере оба эти обстоятельства — топологическая нетривиальность области U , где $F = 0$, и граничные условия $F \neq 0$ на ∂U — сказываются на эффектах Ааронова—Бома? Существует мнение, что физически значимыми являются не локальные (в точке) значения потенциала A , а только калибровочно-инвариантные величины — интегралы от потенциала A по всевозможным замкнутым контурам, которые в случае стягивания контуров в точку выражаются через локальные значения напряженности поля.

Поскольку вакуумные калибровочные поля могут существовать только на топологически нетривиальных многообразиях, в их описании и классификации должны участвовать глобальные топологические характеристики этих многообразий.

ПРИМЕР 3.4.1. Пусть $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{\rho = 0\}$ — 3-мерное пространство \mathbb{R}^3 без оси z (в цилиндрических (ρ, α, z) или декартовых координатах). Рассмотрим на нем электромагнитный потенциал A , аналогичный (3.24) из Примера 3.3.10:

$$A = \frac{\Phi}{2\pi} d\alpha = \frac{\Phi y}{x^2 + y^2} dx - \frac{\Phi x}{x^2 + y^2} dy. \quad (3.29)$$

Напряженность этого поля $F = dA$ во всех точках X равна нулю, и поле A является градиентным

$$A = df, \quad f = \frac{\Phi\alpha}{2\pi}, \quad (3.30)$$

на всякой стягиваемой области пространства X , например, при $0 < \varepsilon < \alpha < 2\pi - \varepsilon$, но не на всем X . Форма (3.29) является представителем некоторого ненулевого элемента группы когомологий де Рама $H^1(X) = \mathbb{R}$ пространства X . Элементы этой группы, будучи представленными формами (3.29), отличаются друг от друга коэффициентами Φ и могут быть параметризованы ими $[\Phi] \in H^1(X)$, так что будет выполняться групповая операция

$$[\Phi] + [\Phi'] = [\Phi + \Phi'].$$

В классе обобщенных функций поле (3.29) может быть продолжено на все пространство \mathbb{R}^3 . В этом случае при вычислении напряженности поля (3.29) в точках $\rho = 0$ ($x = y = 0$) следует придерживаться особых правил дифференцирования функций, имеющих полюс. Они таковы, что выполняется формула Стокса

$$\int_{\partial S} A = \int_0^{2\pi} A_{\alpha\rho} d\alpha = \int_S F\rho d\rho d\alpha = \Phi, \quad (3.31)$$

где S — круг в плоскости $z = 0$ с центром в точке $\rho = 0$. Откуда находим

$$F = \Phi\delta(x)\delta(y) dx \wedge dy = \frac{\Phi}{2} \delta(\rho^2) d\rho \wedge d\alpha, \quad (3.32)$$

т. е. вдоль оси z имеется ненулевое магнитное поле H_z , поток которого (3.31) равен Φ . Подобные сосредоточенные магнитные потоки называются *флаксонами*. \square

Поле (3.29) из Примера 3.4.1 может быть создано бесконечно длинным и бесконечно тонким соленоидом, магнитный поток внутри которого равен Φ . Эффекты Ааронова—Бома в большинстве работ рассчитываются именно для этого поля, хотя оно — недосяжимая идеализация. Идеализацией является как раз бесконечная длина соленоида. Поле A бесконечно длинного соленоида конечного радиуса b в области $\rho > b$ совпадает с вакуумным полем (3.29), а будучи продолженным на все пространство \mathbb{R}^3 , имеет вид

$$A_\alpha(\rho) = \frac{1 - \theta(\rho - b)}{\rho} \int_0^\rho H(\rho') \rho' d\rho' d\alpha + \frac{\Phi}{2\pi\rho} \theta(\rho - b), \quad (3.33)$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

— ступенчатая функция,

$$H_\rho = 0, \quad H_z = H(\rho)\theta(b - \rho), \quad H_\alpha = 0 \quad (3.34)$$

— поле внутри соленоида, а

$$\Phi = 2\pi \int_0^b H(\rho) d\rho$$

— его поток. Поле (3.33) порождается током

$$j_\rho = j_z = 0, \quad j_\alpha(\rho) = \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{dH}{d\rho} (1 - \theta(\rho - b)) + H(b)\delta(\rho - b) \right].$$

Можно показать, что любой ток вида

$$\vec{j} = (0, j_\alpha(\rho), 0),$$

сосредоточенный в некоторой цилиндрической области $\mathbb{R} \times U$, вне этой области порождает вакуумное электромагнитное поле.

Другим примером возникновения вакуумного электромагнитного поля является ситуация, когда в нестягиваемой области реализуется вакуумное решение какой-либо квантовой или полевой модели, например, Гинзбурга—Ландау или Нильсена—Олесена.

ПРИМЕР 3.4.2. Пусть в пространстве \mathbb{R}^3 в области $\rho > b$ реализуется решение

$$\varphi(\alpha) = a \exp\left(-\frac{i\alpha\Phi}{2\pi e}\right), \quad A_\alpha = \frac{\Phi}{2\pi\rho}, \quad A_\rho = A_z = 0 \quad (3.35)$$

вакуумных уравнений (3.12). Поскольку волновая функция $\varphi(\alpha)$ должна быть однозначной (т. е. $\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha + 2\pi)$), амплитуда Φ поля A в самосогласованном решении (3.35), в отличие от поля в примере 3.4.1, не произвольна, а принимает дискретные значения

$$\Phi = 2\pi n e, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

□

Решения вида (3.35) реализуются в кольцевом сверхпроводнике и приводят к тому, что магнитный поток

$$\int_0^{2\pi} A_\alpha(\rho) \rho d\alpha = 2\pi n e$$

через отверстие кольца принимает только дискретный набор значений. Это известный в физике сверхпроводников эффект *квантования магнитного потока*.

Рассмотрим теперь общее математическое условие существования вакуумных калибровочных полей. Оно сводится к утверждению, что множество классов калибровочно эквивалентных вакуумных калибровочных полей группы G на связном паракомпактном многообразии X находится во взаимно однозначном соответствии с множеством классов сопряженных в G гомоморфизмов фундаментальной группы $\pi_1(X)$ многообразия X в группу G (напомним, что элементы a и a' группы называются сопряженными в G , если существует такой элемент $g \in G$, что $ga = a'g$). Поясним, как возникает это соответствие.

Пусть λ — расслоение над связной паракомпактной базой X со структурной группой G , наделенное связностью A . Выберем некоторую точку $x \in X$ и рассмотрим параллельные переносы слоя $\pi^{-1}(x)$ вдоль всевозможных замкнутых путей γ , начинающихся и заканчивающихся в точке x (пути должны быть кусочно гладкими, и это вносит немало сложностей, на которых мы не будем останавливаться). Каждому такому переносу будет соответствовать некоторый изоморфизм g_γ слоя $\pi^{-1}(x)$ на себя. Множество Γ_x замкнутых путей γ наделено структурой группы, и, как это следует из свойств параллельного переноса, соответствие $\gamma \rightarrow g_\gamma$ является гомоморфизмом группы Γ_x в группу изоморфизмов слоя $\pi^{-1}(x)$. Образ этого гомоморфизма K_x называется *группой голономии связности* в точке $x \in X$. Группы голономии K_x в разных точках изоморфны, поэтому можно говорить об абстрактной группе голономии K .

Группа Γ_x содержит инвариантную подгруппу Γ_x^0 , состоящую из путей γ , стягиваемых в точку x . При гомоморфизме $\Gamma_x \rightarrow K_x$ подгруппа Γ_x^0 отображается в подгруппу $K_x^0 \subset K_x$, именуемую *ограниченной группой голономии в точке $x \in X$* , и соответственно определен гомоморфизм фактор-группы

$$\Gamma_x / \Gamma_x^0 = \pi_1(X, x)$$

на фактор-группу K_x / K_x^0 . Далее, **имеется изоморфизм группы голономии K_x на подгруппу структурной группы G** . Действительно, пусть λ_G — главное расслоение. Фиксируем элемент $p \in \pi_p^{-1}(x)$ и всякому $g_\gamma(p)$ сопоставим элемент $g \in G$, такой, что $g_\gamma(p) = pg$. Обозначим K_p образ K_x в G при таком сопоставлении. Если выбрать другой элемент $p' \in \pi_p^{-1}(x)$, такой, что $p' = pg_0$, $g_0 \in G$, то подгруппы K_p и $K_{p'}$ сопряжены в G , т. е.

$$K_{p'} = g_0^{-1} K_p g_0.$$

Таким образом, связность A определяет гомоморфизмы группы замкнутых путей Γ_x на подгруппы группы G , сопряженные в G .

ПРИМЕР 3.4.3. Рассмотрим $U(1)$ -расслоение, в слоях которого группа $U(1)$ действует как группа умножений на фазовый множитель $\exp(i\alpha)$. Пусть iA — локальная 1-форма связности на этом расслоении ($I = i$ — генератор группы $U(1)$ в данном представлении). Дифференциальное условие параллельного переноса $U(1)$ -связностью iA имеет вид

$$Dv = (d + iA(x))v = 0, \quad (3.36)$$

где v — элемент слоя $\pi^{-1}(x)$. Проинтегрируем это уравнение вдоль некоторого пути γ . Пусть $v(\sigma)$ — сечение $U(1)$ -расслоения вдоль пути $\gamma([0, 1])$, получаемое параллельным переносом элемента $v(\gamma(0))$. Тогда условие (3.36) принимает вид дифференциального уравнения

$$\frac{dv(\sigma)}{d\sigma} + iA_\mu(\gamma(\sigma)) \frac{dx^\mu(\sigma)}{d\sigma} v(\sigma) = 0. \quad (3.37)$$

Подчеркнем, что, поскольку A — локальная 1-форма связности, уравнения (3.36) и (3.37) определены отдельно на каждой карте атласа расслоения. Если путь γ уместается на одной карте, то решением уравнения (3.37) является

$$v(\sigma) = v(0) \exp\left(-i \int_0^\sigma A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma\right).$$

Отсюда получаем, что при параллельном переносе вдоль пути γ элемент $v \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ умножается на фазовый множитель:

$$v(\gamma(1)) = g_\gamma v(\gamma(0)) = \exp\left(-i \int_\gamma A\right) v(\gamma(0)). \quad (3.38)$$

Если путь γ пересекает несколько карт, то его можно представить как композицию путей γ_i , уместающихся на каждой карте, для каждого из которых справедливо выражение (3.38). Но при переходе с карты на карту надо учесть функции перехода $\rho_{i, i+1}$. В результате, преобразование параллельного переноса g_γ вдоль такого пути имеет вид

$$g_\gamma = \exp\left(-i \int_{\gamma_k} A\right) \rho_{k-1, k} \dots \rho_{23} \exp\left(-i \int_{\gamma_2} A\right) \rho_{12} \exp\left(-i \int_{\gamma_1} A\right). \quad (3.39)$$

В дальнейшем мы сохраним для g_γ запись (3.38), подразумевая учет функций перехода $\rho_{i, i+1}$ при взятии интеграла A . Фиксируем точку $x \in X$ и ограничимся замкнутыми путями из группы Γ_x . Тогда множество преобразований g_γ , $\gamma \in \Gamma_x$, образует группу голономии K_x с групповой операцией

$$g_\gamma g_{\gamma'} = \exp\left(-i \int_\gamma A\right) \exp\left(-i \int_{\gamma'} A\right) = \exp\left(-i \int_\gamma A - i \int_{\gamma'} A\right) = \exp\left(-i \int_{\gamma\gamma'} A\right) = g_{\gamma\gamma'}.$$

В слое главного $U(1)$ -расслоения отображение параллельного переноса представляет собой сдвиг группового параметра

$$a \rightarrow (a + a_\gamma) \bmod 2\pi, \quad a_\gamma = - \int_\gamma A, \quad (3.40)$$

и отображение

$$\gamma \rightarrow a_\gamma \bmod 2\pi$$

есть гомоморфизм Γ_x на группу голономии K_a — подгруппу структурной группы $U(1)$. Поскольку $U(1)$ коммутативна, $K_a = K_{a'}$. \square

Пусть связность A плоская, т. е. ее кривизна F во всех точках равна нулю. Тогда ограниченные группы голономии K_p^0 и K_x^0 тривиальны. Это следует из теорем, что группа голономии K_p^0 является связной подгруппой Ли группы G и что ее алгебра Ли определяется значениями, принимаемыми формой кривизны связности A в точках многообразия X . Мы проиллюстрируем этот факт с помощью следующей конструкции, подобные которой широко применяются для приближенных расчетов в калибровочных моделях на решетках.

ПРИМЕР 3.4.4. Всякий стягиваемый в точку x путь γ можно представить как образ границы квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ при некотором его отображении f в X . Разобьем квадрат на $m \times m$ клеток и обозначим $\lambda(i, j)$ отмеченный на нем путь. Образ этого пути $\gamma(i, j)$ в пространстве X при отображении f называется *лассо*. Тогда легко проверить, что путь γ может быть представлен как композиция таких лассо

$$\gamma(m, m) \dots \gamma(1, m) \dots \gamma(m, 2) \dots \gamma(1, 2) \dots \gamma(m, 1) \dots \gamma(1, 1). \quad (3.41)$$

Пусть теперь число элементов разбиения неограниченно возрастает. Тогда вклад каждого лассо в оператор параллельного переноса имеет вид

$$g^{-1} \exp \left(\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \Delta S^{\mu\nu} \right) g,$$

где g — оператор параллельного переноса вдоль петли лассо, F — кривизна в некоторой точке внутри петли лассо, а ΔS — элемент площади петли лассо. Если $F = 0$ во всех точках, g_γ — тождественное преобразование. \square

Когда связность плоская, ограниченная группа голономии тривиальна и гомоморфизм фундаментальной группы $\pi_1(X, x)$ на K_x/K_x^0 превращается в гомоморфизм на K_x , а тем самым определены гомоморфизмы $\pi_1(X, x)$ на сопряженные подгруппы структурной группы G .

ПРИМЕР 3.4.5. Рассмотрим тривиальное $U(1)$ -расслоение над пространством $\mathbb{R}^3 \setminus \{\rho = 0\}$ из Примера 3.4.1 и на нем плоскую связность, задаваемую формой (3.29). Интеграл от этой формы по стягиваемому контуру равен нулю. Чтобы это показать, представим, следуя конструкции из Примера 3.4.4, стягиваемый путь как композицию лассо $\gamma(i, j)$, таких, что петля каждого лассо принадлежит стягиваемой области в X . Тогда в каждой такой области форма (3.29) является точной и интеграл от формы A вдоль петли каждого лассо, а тем самым вдоль каждого лассо и, следовательно, вдоль рассматриваемого пути γ равен 0. Таким образом, интеграл от формы (3.29) по замкнутому пути γ зависит только от гомотопического класса этого пути. Выберем в качестве представителя каждого класса $n \in \mathbb{Z} = \pi_1(X)$ путь γ_n — n оборотов по окружности $\rho = \text{const}$ в плоскости $z = \text{const}$. Тогда

$$\int_{\gamma_n} A = \Phi n,$$

и, согласно (3.40), имеется гомоморфизм группы $\pi_1(X)$ на подгруппу группы $U(1)$, состоящую из элементов $U(1)$ с параметрами

$$a_n = (\Phi n) \bmod 2\pi, \quad \dot{n} = 0, \quad \pm 1, \dots$$

Как видим, два вакуумных поля (3.29) задают один и тот же гомоморфизм.

$$\pi_1(X) \rightarrow U(1),$$

если их коэффициенты Φ и Φ' отличаются на $2\pi k$. Но такие поля связаны калибровочным преобразованием

$$\frac{i\Phi}{2\pi\rho} = \frac{i\Phi'}{2\pi\rho} + e^{-ik'\alpha} \frac{1}{\rho} \partial_\alpha e^{ik\alpha}. \quad (3.42)$$

□

ПРИМЕР 3.4.6. Расслоениями, связность на которых всегда плоская, являются накрытия. В этом случае всякий путь, выходящий из точки $x \in X$, допускает единственный возможный накрывающий путь, выходящий из каждой точки $p \in \pi^{-1}(x)$. Поэтому группа Γ_x единственным образом порождает группу голономии K_p на накрытии. При этом пути, выходящие из p и накрывающие гомотопные пути из Γ_x , должны оканчиваться в одной и той же точке из $\pi^{-1}(x)$. Действительно, пути, оканчивающиеся в разных точках дискретного слоя $\pi^{-1}(x)$, не могут быть стянуты друг в друга. В частности, пути, выходящие из p и накрывающие стягиваемые пути из Γ_x , оканчиваются в самой точке p . Отсюда следует, что группу голономии K_p на накрытии порождает гомотопическая группа $\pi_1(X, \pi(p))$, и, если накрытие допускает структурную группу G , имеется гомоморфизм $\pi_1(X, \pi(p)) \rightarrow G$. □

Пусть теперь, обратно, задан гомоморфизм $\pi_1(X)$ в G с ядром N . Можно показать, что над X существует главное расслоение λ_N , структурной группой которого (она же группа голономии) является $\pi_1(X)/N$. Поэтому над X можно построить расслоение λ со структурной группой G , редуцированной к $\pi_1(X)/N$, которое ассоциировано с λ_N , т. е. имеет атлас Ψ_0 , чьими функциями перехода являются постоянные функции со значениями в образе $\pi_1(X)$ в G .

Зададим локальную 1-форму связности A , которая в атласе Ψ_0 имеет вид $A = 0$. Это можно сделать, так как все функции $\rho_{ij} = \text{const}$ и

$$A_i = \rho_{ij} A_j \rho_{ij}^{-1} + \rho_{ij} d\rho_{ij}^{-1} = 0,$$

если $A_j = 0$. Хотя в атласе Ψ_0 форма связности $A = 0$, это не означает, что группа голономии связности тривиальна, поскольку при параллельном переносе слои будут преобразовываться под действием функций перехода атласа Ψ_0 (см. выражение (3.39)). При переходе к другому атласу форма A примет вид

$$A_i = g_i dg_i^{-1},$$

а ее форма кривизны остается равной нулю во всех точках.

Атлас Ψ_0 задан не однозначно, а с точностью до калибровочных изоморфизмов g_i , сохраняющих функции перехода атласа Ψ_0 . Если в другом таком атласе Ψ'_0 определить форму связности $A' = 0$, то при переходе к атласу Ψ_0 получим

$$A'_i = g_i dg_i^{-1},$$

т. е. A и A' связаны калибровочным преобразованием. Таким образом, гомоморфизм $\pi_1(X)$ в G определяет вакуумное калибровочное поле с точностью до калибровочной эквивалентности.

ПРИМЕР 3.4.7. Пусть X — то же пространство, что и в Примере 3.4.5, $G = U(1)$ и задан гомоморфизм

$$\pi_1(X) = \mathbb{Z} \ni n \rightarrow a = (\pi n) \bmod 2\pi \in U(1).$$

Построим над X тривиальное $U(1)$ -расслоение, как в Примере 3.4.5, и зададим его атлас

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= \{U_1, U_2, \rho_{12}, \rho_{21}\}, \\ U_1 &= \left\{ \rho, 0 < \alpha_1 < \frac{3\pi}{2}, z \right\}, \quad U_2 = \left\{ \rho, \pi < \alpha_2 < \frac{5\pi}{2}, z \right\}, \\ U_1 \cap U_2 &= V_1 \cup V = \left\{ \pi < \alpha_1 = \alpha_2 < \frac{3\pi}{2} \right\} \cup \left\{ 0 < \alpha_1 = \alpha_2 - 2\pi < \frac{\pi}{2} \right\}, \\ \rho_{12}(x) &= 1, \quad x \in V_1, \quad \rho_{21}(x) = -1, \quad x \in V_2.\end{aligned}$$

Определим в атласе Ψ_0 локальную 1-форму связности $A = 0$. Однако ее группа голономии не тривиальна, поскольку при параллельном переносе вдоль пути γ_n (см. Пример 3.4.5) в результате n -кратного действия функций перехода ρ_{12} и ρ_{21} , согласно (3.39), получаем $g_\gamma = (-1)^n$. Перейдем калибровочным преобразованием

$$g_1 = \exp\left(-i \frac{\alpha_1}{2}\right), \quad g_2 = \exp\left(-i \frac{\alpha_2}{2}\right),$$

к атласу

$$\Psi = \{U_1, U_2, \rho'_{12}, \rho'_{21}\}$$

с тождественными функциями перехода

$$\begin{aligned}\rho'_{12} &= g_1 \rho_{12} g_2^{-1} = \exp\left(-i \frac{\alpha_1}{2}\right) \exp\left(i \frac{\alpha_1}{2}\right) = 1, \\ \rho'_{21} &= g_2 \rho_{21} g_1^{-1} = \exp\left(-i \frac{(\alpha_1 + 2\pi)}{2}\right) (-1) \exp\left(i \frac{\alpha_1}{2}\right) = 1.\end{aligned}$$

В этом атласе поле A принимает вид (3.29):

$$A_1 = g_1 dg_1^{-1} = A_2 = g_2 dg_2^{-1} = \frac{i}{2} d\alpha.$$

□

При совершении калибровочных преобразований в моделях на нестягиваемых топологических пространствах надо, однако, проявлять осторожность. Дело в том, что **такие преобразования не всегда оставляют инвариантными интегральные величины**. Проиллюстрируем это опять на примере абелева калибровочного поля. Пусть X — снова пространство $\mathbb{R}^3 \setminus \{\rho = 0\}$, λ — тривиальное $U(1)$ -расслоение над X и

$$\Psi = \{U_1, U_2, \rho_{12} = \rho_{21} = 1\}$$

— его атлас с тождественными функциями перехода, как в Примерах 3.4.5 и 3.4.7. Рассмотрим калибровочное преобразование

$$g = \exp(in\alpha).$$

Оно определено на всем пространстве X , поскольку

$$g(\alpha_1) = g(\alpha_2), \quad \alpha_1 = \alpha_2 \in V_1, \quad \alpha_1 + 2\pi = \alpha_2 \in V_2,$$

и устанавливает калибровочную эквивалентность (3.42), например, между полями $A = 0$ и $A' = in d\alpha$. Однако интеграл по нестягиваемому замкнутому контуру γ_1 от формы A

равен нулю, а от формы A' равен $i2\pi n$. Причина в том, что форма $g(\alpha)dg^{-1}(\alpha)$, на которую изменяется 1-форма связности A при таком калибровочном преобразовании, не является точной, поскольку

$$g(\alpha_1)dg^{-1}(\alpha_1) = in d\alpha_1 = in d\alpha_2 = g(\alpha_2)dg^{-1}(\alpha_2),$$

но $\alpha_1 \neq \alpha_2$. В частности, в Примере 3.4.2 поля $A = 0$ и $A' = ind\alpha$ приводят к различным значениям магнитного потока 0 и $-2\pi ne$.

Для описания таких эффектов, как образование флаксонов и квантование магнитного потока, необходимо рассматривать вакуумные электромагнитные поля с учетом их когомологической эквивалентности. Сделаем это, привлекая понятие относительных гомотологий и когомологий.

Относительные гомотологии и когомологии

Пусть Y — топологическое пространство, а X — его подпространство. Тогда группы сингулярных цепей $C_k(X)$ лежат в группах $C_k(Y)$. Назовем *группой относительных цепей* фактор-группу

$$C_k(Y, X) = C_k(Y)/C_k(X).$$

Элементами $C_k(Y, X)$ являются классы \tilde{c}_k , состоящие из k -цепей c_k в Y , отличающиеся на k -цепи в X . Граничный оператор ∂ переводит $C_k(X)$ в $C_{k-1}(X)$, поэтому он определяет некоторый граничный оператор

$$C_k(Y, X) \rightarrow C_{k-1}(Y, X).$$

Как и раньше, определим *относительные циклы*, для которых $\partial\tilde{c}_k = 0$ (это классы k -цепей c_k в Y , имеющие границы ∂c_k в X), и *относительные границы*

$$\tilde{c}_k = \partial\tilde{c}_{k+1}$$

(это классы k -цепей c_k в Y , отличающиеся от границ $c_k = \partial c_{k+1}$ в Y на некоторую k -цепь в X). *Группой относительных гомотологий* $H_k(Y, X)$ называется фактор-группа относительных k -циклов по относительным k -границам. Как и для гомотопических групп, для *групп гомотологий пары* (Y, X) имеет место *точная последовательность*

$$\dots \rightarrow H_k(X) \rightarrow H_k(Y) \rightarrow H_k(Y, X) \rightarrow H_{k-1}(X) \rightarrow \dots \quad (3.43)$$

ПРИМЕР 3.4.8. Если Y — стягиваемое пространство, то $H_k(Y) = 0$, $k > 0$. Тогда точная последовательность (3.43) разбивается на короткие последовательности

$$0 \rightarrow H_{k+1}(Y, X) \rightarrow H_k(X) \rightarrow 0, \quad k > 0.$$

Откуда следует, что

$$H_{k+1}(Y, X) = H_k(X), \quad k > 0.$$

□

Аналогично относительным гомотологиям можно определить *относительные когомологи*. Пусть X — подмногообразие многообразия Y . Рассмотрим гомоморфизм ограничения k -форм

$$\Omega^k(Y) \rightarrow \Omega^k(X).$$

Ядро этого гомоморфизма называется *группой относительных k -мерных коцепей* $\Omega^k(Y, X)$ пары (Y, X) . Она состоит из k -форм σ^k на Y , которые на $X \subset Y$ равны нулю. Будем обозначать такие формы $\bar{\sigma}^k$. На $\Omega^*(Y, X)$ действует тот же оператор внешнего дифференцирования d , что и на $\Omega^*(Y)$, и определены *относительные коциклы* и *кограницы*, представляемые замкнутыми ($d\bar{\sigma}^k = 0$) и точными ($\bar{\sigma}^k = d\bar{\sigma}^{k-1}$) формами. При этом *относительный коцикл является и обычным коциклом, но относительный коцикл, будучи обычной границей* (т. е. $\bar{\sigma}^k = d\sigma^{k-1}$), *может не быть относительной границей*, т. е. не найдется нулевая на X форма $\bar{\sigma}^{k-1}$, такая, что $\bar{\sigma}^k = d\bar{\sigma}^{k-1}$.

Группами относительных когомологий $H^k(Y, X)$ называются фактор-группы замкнутых k -форм $\bar{\sigma}^k$ по относительным k -границам. Как и для групп гомологий, для групп когомологий пары (Y, X) имеет место *точная последовательность*

$$\dots \longrightarrow H^k(Y, X) \longrightarrow H^k(Y) \longrightarrow H^k(X) \longrightarrow H^{k+1}(Y, X) \longrightarrow \dots \quad (3.44)$$

ПРИМЕР 3.4.9. Если Y — стягиваемое пространство, то $H^k(Y) = 0$, $k > 0$. Тогда точная последовательность (3.44) разбивается на короткие последовательности

$$0 \longrightarrow H^k(X) \longrightarrow H^{k+1}(Y, X) \longrightarrow 0, \quad k > 0.$$

Откуда следует, что

$$H^{k+1}(Y, X) = H^k(X), \quad k > 0.$$

□

Применим эти конструкции к интересующему нас случаю вакуумных электромагнитных полей. Пусть Y — многообразие, некоторое подмногообразие которого X допускает вакуумное электромагнитное поле. Тогда группа относительных когомологий $H^2(Y, X)$ определяет множество типов магнитных полей в $Y \setminus X$, образующих флаксоны.

Поток такого поля $\bar{\sigma}^2$ (это коцикл в $\Omega^2(Y, X)$) через поверхность \bar{c}_2 в Y , граница которой принадлежит X (\bar{c}_2 — цикл в $C_2(Y, X)$), определяется интегралом

$$\Phi = \int_{\bar{c}_2} \bar{\sigma}^2,$$

который зависит только от класса относительных когомологий $H^2(Y, X)$ формы $\bar{\sigma}^2$ и класса относительных гомологий $H_2(Y, X)$ поверхности \bar{c}_2 . Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{\bar{c}_2} \bar{\sigma}^{2'} &= \int_{\bar{c}_2} (\bar{\sigma}^2 + d\bar{\sigma}^1) = \int_{\bar{c}_2} \bar{\sigma}^2 + \int_{\partial\bar{c}_2 \subset X} \bar{\sigma}^1 = \int_{\bar{c}_2} \bar{\sigma}^2, \\ \int_{\bar{c}_2'} \bar{\sigma}^2 &= \int_{\bar{c}_2 + \partial\bar{c}_3 + \Delta} \bar{\sigma}^2 = \int_{\bar{c}_2} \bar{\sigma}^2 + \int_{\partial\bar{c}_3} \bar{\sigma}^2 + \int_{\Delta} \bar{\sigma}^2 = \int_{\bar{c}_2} \bar{\sigma}^2 + \int_{\bar{c}_3} d\bar{\sigma}^2 = \int_{\bar{c}_2} \bar{\sigma}^2. \end{aligned}$$

Если Y — стягиваемое пространство (например, $Y = \mathbb{R}^3$, а X — конфигурация, образованная сверхпроводником), то всякая замкнутая форма $\bar{\sigma}^2$ является точной на Y , т. е. $\bar{\sigma}^2 = d\sigma^1$, где σ^1 — замкнутая форма при ограничении на X . Тогда значение интеграла

$$\Phi = \int_{\bar{c}_2} \sigma^2 = \int_{\bar{c}_2} d\sigma^1 = \int_{\partial\bar{c}_2 \subset X} \sigma^1 \quad (3.45)$$

определяется классом когомологий $H^1(X)$ формы σ^1 и классом гомологий $H_1(X)$ контура $\partial\tilde{c}_2$. Это является следствием изоморфизмов

$$H^{k+1}(Y, X) = H^k(X), \quad H_{k+1}(Y, X) = H_k(X)$$

для стягиваемого пространства Y . Частным случаем равенства (3.45), когда

$$Y = \mathbb{R}^3, \quad X = \mathbb{R}^3 \setminus \{\rho = 0\},$$

служит выражение для магнитного потока (3.32) в Примере 3.4.1.

Можно заметить, что, приведя общее математическое описание вакуумных калибровочных полей, рассмотрение конкретных моделей мы ограничились случаем только абелева поля. Дело в том, что вакуумные калибровочные поля на пространствах с абелевой группой $\pi_1(X)$ не могут порождать неабелеву группу голономии K в силу изоморфизма $\pi_1(X) = K$, а пространства с некоммутативными фундаментальными группами устроены довольно сложно. Одним из простейших примеров таких пространств является плоскость с ручкой, или, что эквивалентно, тор без точки (рис. 15), где пути a_1, a_2, b связаны соотношением $a_1 = ba_2b^{-1} \neq a_2$.

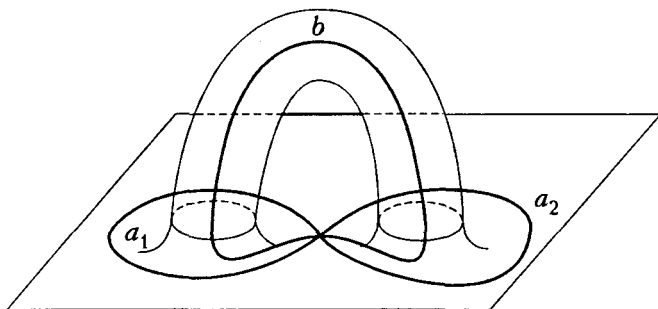


Рис. 15

Можно рассмотреть калибровочную модель неабелевой группы G на пространстве X с коммутативной группой $\pi_1(X)$. Однако вакуумные калибровочные поля группы G на таком пространстве фактически будут калибровочными полями некоторой абелевой подгруппы группы G . Например, в ряде работ исследовался эффект Ааронова—Бома в модели

$$X = \mathbb{R}^3 \setminus \{\rho = 0\}, \quad G = SU(2)$$

($SU(2)$ — группа преобразований изоспина). Выбором калибровки вакуумное калибровочное поле в этой модели может быть приведено к виду

$$A_\rho = A_z = 0, \quad A_\alpha = \frac{i\Phi}{2\pi\rho} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т. е. представляет собой калибровочное поле абелевой подгруппы $U(1)$ группы $SU(2)$, состоящей из матриц

$$\exp(i\alpha)\tau_3 = \begin{pmatrix} \exp(i\alpha) & 0 \\ 0 & -\exp(i\alpha) \end{pmatrix}.$$

В заключение отметим, что в моделях вакуумных калибровочных полей, как и в солитонных моделях, рассматривались тривиальные расслоения. Более того, само наличие плоской связности предполагает если не тривиальность, то редукцию структурной группы расслоения к дискретной подгруппе. Это следует из того, что если расслоение со структурной группой G над связной паракомпактной базой допускает связность, абстрактная группа голономии которой изоморфна подгруппе K , то структурная группа расслоения редуцирована к этой подгруппе. Обратное неверно, например, тривиальность расслоения не накладывает ограничений на группу голономии.

Перейдем теперь к рассмотрению тополого-алгебраических характеристик, которые, в отличие от уже использовавшихся для вакуумных калибровочных полей и солитонов, вызваны именно нетривиальностью расслоений, описывающих ту или иную полевую систему.

§ 5. Характеристические классы расслоений

Классификационная теорема

Большинство топологических чисел и зарядов, фигурирующих в полевых моделях, представляют собой тополого-алгебраические характеристики, описывающие различные классы ассоциированных расслоений. Поэтому обратимся к задаче классификации расслоений с данной структурной группой G над топологическим пространством X .

В общем виде эта задача решается *классификационной теоремой*, которая устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами ассоциированных расслоений над X и гомотопическими классами отображений базы X в некоторое специальное классифицирующее пространство, зависящее только от структурной группы.

Обозначим $S(X, G)$ множество классов ассоциированных расслоений над топологическим пространством X со структурной топологической группой G . Рассмотрим действие на это множество операций сужения структурной группы и индуцирования.

Пусть G' — подгруппа группы G . Тогда вложение $G' \rightarrow G$ порождает естественное вложение множества $S(X, G')$ в множество $S(X, G)$, образами которого являются классы расслоений над X , структурная группа которых редуцирована к подгруппе G' . В частности, если база X паракомпактна, G — группа Ли, а G' — ее максимальная компактная подгруппа, то

$$S(X, G) = S(X, G'),$$

поскольку в этом случае структурная группа расслоений над X всегда редуцирована к G' .

ПРИМЕР 3.5.1. Укажем важные для физических приложений случаи совпадения

$$S(X, G) = S(X, G' \subset G),$$

когда

$$\begin{aligned} G &= GL(n, \mathbb{C}), & G' &= U(n); \\ G &= GL(n, \mathbb{R}), & G' &= O(n); \\ G &= GL^+(n, \mathbb{R}), & G' &= SO(n); \\ G &= SO(3, 1), & G' &= SO(3). \end{aligned}$$

□

Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Для всякого расслоения λ над Y оно индуцирует расслоение $f^*\lambda$ над X . Оно наследует структурную группу G расслоения λ .

Поэтому отображение f порождает морфизм

$$f^* : S(Y, G) \rightarrow S(X, G).$$

Для клеточных пространств и паракомпактных пространств морфизмы f^* зависят только от гомотопического класса отображений f и тем самым определяют морфизм

$$\pi(X, Y) \rightarrow S(X, G).$$

Если бы нашлось такое пространство Y , что отображения $f : X \rightarrow Y$ индуцируют биекцию $\pi(X, Y)$ на $S(X, G)$, это позволило бы описать множество $S(X, G)$ классов G -расслоений над X . Для клеточных пространств X такое пространство существует.

Расслоение Λ со структурной группой G , типичным слоем V и базой $\text{bs } \Lambda = X_\Lambda$ называется *универсальным*, если:

а) для всякого расслоения λ с клеточной базой X и слоем V существует такое непрерывное отображение $f : X \rightarrow X_\Lambda$, что расслоение $f^* \Lambda$ эквивалентно λ ;

б) всякие два непрерывные отображения f_1 и f_2 клеточного пространства в X_Λ , индуцирующие эквивалентные расслоения $f_1^* \Lambda$ и $f_2^* \Lambda$, гомотопны.

База универсального расслоения Λ со структурной группой G одновременно является базой универсальных расслоений со структурной группой G и всевозможными другими типичными слоями и в этом смысле не зависит от типичного слоя. Она называется *классифицирующим пространством* группы G .

Теорема, устанавливающая существование классифицирующих пространств, называется *классификационной теоремой*.

ТЕОРЕМА 3.5.1. Для всякой топологической группы G существует топологическое пространство $B(G)$, являющееся классифицирующим для всех расслоений со структурной группой G над клеточными пространствами X , т. е.

$$S(X, G) = \pi(X, B(G)).$$

□

Из классификационной теоремы следует, что для данной группы G множество $S(X, G)$ зависит только от гомотопического типа пространства X и является тем самым гомотопическим инвариантом. Это и позволяет решать задачу классификации расслоений методами алгебраической топологии. Для некоторых типов топологических групп G классификационная теорема справедлива для расслоений не только с клеточной базой.

ПРИМЕР 3.5.2. Чтобы проиллюстрировать действие классификационной теоремы, приведем классификацию расслоений с дискретной структурной группой G . Главное расслоение λ с дискретной структурной группой образует накрытие (см. Пример 3.4.6). Рассмотрим для этого расслоения, как и в Примере 3.1.10, точную последовательность гомотопических групп (3.5), которая распадается на короткие точные последовательности (3.6) и (3.7). При этом в случае главного расслоения проекция (3.9) — это гомоморфизм фундаментальной группы через порождаемую ею группу голономии K_p (см. Пример 3.4.6) на G как на структурную группу. Отсюда следует, что $K_p = G$ и образ $\pi_1(\text{tl } \lambda, p)$ в $\pi_1(X, \pi(p))$ при мономорфизме (3.8) — это некоторая подгруппа N группы $\pi_1(X, \pi(p))$. Таким образом, для существования над связным пространством X расслоения со структурной группой G необходимо, чтобы в $\pi_1(X, \cdot)$ существовала такая инвариантная подгруппа N , что фактор-группа $\pi_1(X, \cdot)/N$ изоморфна G . Для широкого класса пространств X , например, связных *локально стягиваемых* (когда всякая окрестность

точки содержит стягиваемую окрестность), это условие является достаточным. Классифицирующим пространством $B(G)$ дискретной группы G является, например, связное локально стягиваемое пространство с гомотопическими группами

$$\pi_1(B(G)) = G, \quad \pi_n(B(G)) = 0, \quad n > 1.$$

Действительно, в этом случае гомотопический тип отображения $X \rightarrow B(G)$ определяется только ядром гомоморфизма

$$\pi_1(X, \cdot) \rightarrow \pi_1(B(G), \cdot) = G.$$

□

Для физических приложений наибольший интерес представляют дифференцируемые векторные расслоения над паракомпактными многообразиями со структурными группами $GL(n, \mathbb{C})$ или $GL(n, \mathbb{R})$, редуцированными соответственно к $U(n)$ и $O(n)$. Классифицирующими пространствами этих групп служат

$$B(U(n)) = \lim_{N \rightarrow \infty} G(n, N; \mathbb{C}),$$

$$B(O(n)) = \lim_{N \pm \infty} G(n, N; \mathbb{R}),$$

где $G(n, N; \mathbb{C})$ и $G(n, N; \mathbb{R})$ — многообразия Грассмана n -мерных плоскостей в \mathbb{C}^N и \mathbb{R}^N . Знание классифицирующих пространств позволяет классифицировать $U(n)$ - и $O(n)$ -расслоения над многообразиями (и над более широким классом пространств) с помощью характеристических классов — элементов групп когомологий $H^*(X, \mathbb{Z})$ со значениями в постоянном пучке \mathbb{Z} (см. Приложение В).

Мы в основном будем иметь дело со следующими *характеристическими классами*:

классами Чженя $c_i \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$ для $U(n)$ -расслоений;

классами Понтрягина $p_i \in H^{4i}(X, \mathbb{Z})$ для $O(n)$ -расслоений;

классом Эйлера $e \in H^n(X, \mathbb{Z})$ для $SO(n)$ -расслоений;

классами Штифеля—Уитни $w_i \in H^i(X, \mathbb{Z}_2)$ для касательных расслоений.

Классы Чженя

Начнем с классов Чженя $U(n)$ -расслоений. Возможны различные пути описания классов Чженя и определения их свойств. Воспользовавшись вложением

$$H^*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{R})$$

(по модулю кручения) и изоморфизмом $H^*(X, \mathbb{R})$ и групп когомологий де Рама $H^*(X)$ (см. Приложение В), мы будем строить классы Чженя как классы когомологий некоторых форм на X .

Пусть A — комплексная $(k \times k)$ -матрица и $P(A)$ — полином из компонент матрицы A . Полином $P(A)$ называется *характеристическим*, если

$$P(A) = P(gAg^{-1})$$

для всех $g \in GL(k, \mathbb{C})$. Если A имеет собственные значения $\{a_1, \dots, a_k\}$, то $P(A)$ представляет собой симметричную функцию этих значений. Обозначим $S_j(a)$ следующий симметричный полином от a_i степени j :

$$S_j(a) = \sum_{i_1 < \dots < i_j} a_{i_1} \dots a_{i_j}. \quad (3.46)$$

Тогда $P(A)$ представим как полином

$$P(A) = b_0 + b_1 S_1(a) + b_2 dS_2(a) + \dots$$

от $S_j(a)$, $j = 1, \dots, k$.

ПРИМЕР 3.5.3. $\det(\hat{1} + A)$, где $\hat{1}$ — единичная матрица, является характеристическим полиномом и

$$\det(\hat{1} + A) = 1 + S_1(a) + S_2(a) + \dots + S_k(a).$$

□

Пусть $P(A)$ — характеристический полином. Подставим в него вместо A матрично-значную 2-форму кривизны (напряженности) F некоторой связности на дифференцируемом векторном расслоении со структурной группой. Тогда, как можно показать, так называемая *характеристическая форма* $P(F)$ обладает следующими свойствами:

а) $P(F)$ — замкнутая форма, т. е. $dP(F) = 0$;

б) $P(F) - P(F')$, где F и F' — формы кривизны двух любых связностей на расслоении, является точной формой.

Последнее означает, что **характеристический полином, взятый от различных форм кривизны на данном расслоении, имеет один и тот же кохомологический класс де Рама**, который тем самым может служить характеристикой этого расслоения. Это действительно так, и характеристические классы расслоений представляются кохомологическими классами характеристических полиномов от форм кривизны на расслоении.

Пусть λ — комплексное векторное расслоение над n -мерным многообразием X со структурной группой $GL(k, \mathbb{C})$ и F — форма кривизны на λ . *Полной формой Чженя* называется следующий характеристический полином от F :

$$c(F) = \det \left(\hat{1} + \frac{i}{2\pi} F \right) = 1 + c_1(F) + c_2(F) + \dots \quad (3.47)$$

Составляющие его $2i$ -формы $c_i(F)$ называются *формами Чженя* и являются полиномами степени i от F :

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \\ c_1 &= \frac{i}{2\pi} \text{Tr} F, \\ c_2 &= \frac{1}{8\pi^2} \{ \text{Tr}(F \wedge F) - \text{Tr} F \wedge \text{Tr} F \}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Все формы Чженя $c_i(F)$ замкнуты, и их кохомологические классы отождествляются с характеристическими классами Чженя расслоения λ , будучи образами $c_i(\lambda) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$ при отображении

$$H^*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{R}) = H^*(X).$$

ПРИМЕР 3.5.4. Построим полную форму Чженя (3.47) от формы кривизны на $U(1)$ -расслоении λ_n над сферой S^2 :

$$\begin{aligned} c &= \det \left(\hat{1} + \frac{i}{2\pi} F \right) = 1 + c_1(F), \\ c_1(F) &= \frac{i}{2\pi} \text{Tr} F = -\frac{n}{4\pi} \sin \theta d\theta \wedge d\varphi. \end{aligned} \quad (3.49)$$

□

ПРИМЕР 3.5.5. Запишем полную форму Чженя для $SU(2)$ -расслоения над многообразием X^4 . Форма кривизны на таком расслоении имеет вид

$$F = -\frac{i\tau_a}{2}F^a, \quad \text{Tr } F = 0,$$

где τ_a — матрицы Паули. Тогда

$$\begin{aligned} c(F) &= \det \left(\hat{1} + \frac{1}{4\pi} \tau_a F^a \right) = 1 + c_1(F) + c_2(F), \\ c_1(F) &= 0, \\ c_2(F) &= \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr}(F \wedge F) = -\frac{1}{(4\pi)^2} F_a \wedge F_a. \end{aligned} \quad (3.50)$$

□

Представление классов Чженя формами Чженя позволяет легко получить свойства этих классов:

$$\begin{aligned} \text{A1)} \quad c_i(\lambda) &= 0, \quad 2i > n = \dim X; \\ \text{A2)} \quad c_i(\lambda) &= 0, \quad i > k; \\ \text{A3)} \quad c(\lambda \oplus \lambda') &= c(\lambda)c(\lambda'); \\ \text{A4)} \quad c_1(L \otimes L') &= c_1(L) + c_1(L'), \end{aligned} \quad (3.51)$$

где L, L' — линейные (1-мерные) $U(1)$ -расслоения.

Отметим также, что если $f^*\lambda$ — индуцированное отображением $f: X \rightarrow Y$ расслоение, то

$$c(f^*\lambda) = f^*c(\lambda),$$

где

$$f^*: H^*(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{Z})$$

— порождаемый отображением f гомоморфизм групп когомологий.

Эффективно использовать это свойство и свойство (A3) позволяет следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.5.2. Для всякого главного $U(k)$ -расслоения λ над многообразием X существует пространство Y и непрерывное отображение $f: Y \rightarrow X$, такие, что:

- $f^*\lambda$ есть сумма Уитни $U(1)$ -расслоений;
- $f^*: H^*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(Y, \mathbb{Z})$ — вложение. □

Она дает возможность в целом ряде случаев выражать классы Чженя гладких $U(k)$ -расслоений через классы Чженя $U(1)$ -расслоений, или на примере этих случаев исследовать общие свойства классов Чженя. Это называется *принципом расщепления*. Согласно этому принципу

$$c(\lambda) = c(L_1 \oplus \dots \oplus L_k) = c(L_1) \cdots c(L_k) = (1 + a_1) \cdots (1 + a_k), \quad (3.52)$$

где $a_i = c_1(L_i)$ — класс Чженя расслоения L_i . Из (3.52) находим

$$c_1 = \sum_i a_i;$$

$$\begin{aligned}
 c_2 &= \sum_{i_1 < i_2} a_{i_1} a_{i_2}, \\
 c_j &= \sum_{i_1 < \dots < i_j} a_{i_1} \dots a_{i_j}.
 \end{aligned}
 \tag{3.53}$$

Выражение (3.53) идентично выражению (3.46), и это не случайно, поскольку a_i представляют собой компоненты диагонализированной формы кривизны

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & & \\ & \ddots & \\ & & F_k \end{pmatrix}, \quad a_j = \frac{i}{2\pi} F_j,$$

на расслоении $L_1 \oplus \dots \oplus L_k$.

ПРИМЕР 3.5.6. Пусть λ^* — дуальное к λ расслоение. Тогда, согласно принципу расщепления,

$$c(\lambda^*) = c(L_1^*) \cdots c(L_k^*) = (1 + a_1^*) \cdots (1 + a_k^*).$$

Поскольку переход к операторам и генераторам группы $U(1)$ в дуальном представлении состоит в операции комплексного сопряжения, т. е. $F^* = -F$, имеет место соотношение $a_i^* = -a_i$. Откуда легко получить свойство классов Чженя дуального расслоения

$$c_i(\lambda^*) = (-1)^i c_i(\lambda).
 \tag{3.54}$$

□

Если база X расслоения λ — замкнутое n -мерное многообразие, из форм Чженя можно составить n -формы и рассмотреть их интегралы по многообразию X . Значения последних будут зависеть только от кохомологических классов форм Чженя. Тем самым они оказываются характеристическими для данного расслоения λ . Например, для $n = 4$ имеется два таких числа Чженя

$$C_2 = \int_X c_2, \quad C_1^2 = \int_X c_1 \wedge c_1.
 \tag{3.55}$$

Отметим, что, поскольку классы Чженя являются элементами целочисленных групп кохомологий, числа Чженя оказываются целыми.

ПРИМЕР 3.5.7. В случае $U(1)$ -расслоения λ_n над S^2 из Примера 3.5.4 получаем число Чженя

$$C_1 = \int_{S^2} c_1 = -\frac{n}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -n.
 \tag{3.56}$$

Оно действительно является характеристическим для расслоения λ_n , поскольку расслоения λ_n с различными n не эквивалентны между собой и число n параметризует классы эквивалентности $U(1)$ -расслоений над S^2 . Показательно, что для тривиального расслоения λ_0 число Чженя (3.56) равно нулю. □

Для $U(k)$ -расслоений, помимо классов Чженя, могут быть определены и другие характеристические классы, выражаемые через классы Чженя.

Характер Чженя $\text{ch}(\lambda)$ задается характеристическим полиномом

$$\text{ch}(A) = \text{Tr} \exp \left(\frac{i}{2\pi} A \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \text{Tr} \left(\frac{i}{2\pi} A \right)^m \quad (3.57)$$

и обладает свойствами

$$\begin{aligned} \text{ch}(\lambda \oplus \lambda') &= \text{ch}(\lambda) + \text{ch}(\lambda'), \\ \text{ch}(\lambda \otimes \lambda') &= \text{ch}(\lambda) \cdot \text{ch}(\lambda'). \end{aligned}$$

Его выражение через классы Чженя можно установить, используя принцип расщепления:

$$\begin{aligned} \text{ch}(\lambda) &= \text{ch}(L_1 \oplus \dots \oplus L_k) = \text{ch}(L_1) + \dots + \text{ch}(L_k) = \exp a_1 + \dots + \exp a_k = \\ &= k + \sum_i a_i + \frac{1}{2} \sum_i a_i^2 + \dots = k + \sum_i a_i + \frac{1}{2} \left[\left(\sum_i a_i \right)^2 - 2 \sum_{i_1 < i_2} a_{i_1} a_{i_2} \right] + \dots = \\ &= k + c_1(\lambda) + \frac{1}{2} [c_1^2(\lambda) - 2c_2(\lambda)] + \dots \end{aligned}$$

Класс Тодда $U(k)$ -расслоения следующим образом определяется через классы Чженя, используя принцип расщепления:

$$\text{td}(\lambda) = \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{1 - \exp(-a_i)} = 1 + \frac{1}{2} c_1 + \frac{1}{12} (c_1^2 + c_2) + \dots \quad (3.58)$$

Он обладает свойством

$$\text{td}(\lambda \oplus \lambda') = \text{td} \lambda \cdot \text{td} \lambda'.$$

Классы Понтрягина

Перейдем теперь к характеристическим классам вещественного k -мерного векторного расслоения λ , имеющего структурную группу $O(k)$.

Опишем классы Понтрягина такого расслоения когомологическими классами компонент характеристического полинома

$$p(F) = \det \left(\hat{1} - \frac{1}{2\pi} F \right) = 1 + p_1 + p_2 + \dots \quad (3.59)$$

от формы кривизны F на λ , принимающей значения в алгебре Ли $O(k)$. Поскольку в представлении на \mathbb{R}^k генераторы $O(k)$ таковы, что

$$(I)^a_b = -(I)^b_a,$$

в разложении (3.59) отличны от нуля компоненты только четной по F степени, и, таким образом, $p_j \in H^{4j}(X)$. Классы Понтрягина обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \text{Б1)} \quad p_i(\lambda) &= 0, \quad 4i > n = \dim X; \\ \text{Б2)} \quad p_i(\lambda) &= 0, \quad 2i > k; \\ \text{Б3)} \quad p(\lambda \oplus \lambda') &= p(\lambda) + p(\lambda'). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Отметим, что, в отличие от комплексного случая, хотя характеристические классы расслоений со структурными группами $O(k)$ и $GL(k, \mathbb{R})$ совпадают ($GL(k, \mathbb{R})$ всегда

редуцирована к $O(k)$, характеристические формы для них, вообще говоря, различны. Например, если F — форма кривизны, принимающая значения в алгебре Ли $gl(k, \mathbb{R})$, то в разложении (3.57) могут возникнуть компоненты нечетной степени по F . Поэтому во избежание недоразумений **характеристические формы, отвечающие классам Понтрягина, следует строить только из $O(k)$ - или $O(k - q, q)$ -значных форм кривизны.**

ПРИМЕР 3.5.8. Рассмотрим касательное расслоение над многообразием X^4 . Для него имеется единственный класс Понтрягина $p_1 \in H^4(X)$, характеристическая форма для которого может быть построена из формы кривизны F некоторой римановой метрики на X :

$$p_1 = -\frac{1}{8\pi^2} \text{Tr} F \wedge F = -\frac{1}{8\pi^2} (F)_b^a \wedge (F)_a^b.$$

□

Аксиоматически классы Понтрягина $O(k)$ -расслоений могут быть введены через классы Чженя $U(k)$ -расслоений. Для этого воспользуемся следующими коммутативными диаграммами вложений:

$$\begin{array}{ccc} U(k) & \longrightarrow & O(2k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ GL(k, \mathbb{C}) & \longrightarrow & GL(2k, \mathbb{R}) \end{array}, \tag{3.61}$$

$$\begin{array}{ccc} O(k) & \longrightarrow & U(k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ GL(k, \mathbb{R}) & \longrightarrow & GL(k, \mathbb{C}) \end{array}. \tag{3.62}$$

В диаграмме (3.61) горизонтальные стрелки обозначают вложения, получающиеся, если линейное преобразование пространства \mathbb{C}^k с комплексными координатами z^1, \dots, z^k представить как линейное преобразование вещественного пространства \mathbb{R}^{2k} с координатами x^1, \dots, x^{2k} , положив

$$z^i = x^i + ix^{k+i}.$$

В диаграмме (3.62) горизонтальные стрелки обозначают вложения, получающиеся, если матрицы с вещественными коэффициентами рассматривать как частный случай матриц с комплексными коэффициентами.

Диаграмма (3.62) определяет вложение

$$\varphi : S(X, O(k)) \rightarrow S(X, U(k)),$$

и для $O(k)$ -расслоений над X положим

$$p_i(\lambda) = (-1)^i c_{2i}(\varphi(\lambda)), \quad p(\lambda) = \sum_i p_i(\lambda). \tag{3.63}$$

Элементы $p_i(\lambda) \in H^{4i}(X, \mathbb{Z})$ называются i -ми классами Понтрягина, а $p(\lambda)$ — *полным классом Понтрягина* расслоения λ . Их образами в когомологиях де Рама $H^*(X)$ являются

классы Понтрягина, определяемые через характеристический полином (3.59). Заметим, однако, что для классов Понтрягина (3.63) свойство (Б2) верно по модулю элементов порядка 2 в $H^*(X, \mathbb{Z})$.

Диаграмма (3.61) определяет вложение

$$\rho : S(X, U(k)) \rightarrow S(X, O(2k)),$$

а композиция $\varphi\rho$ — цепочку вложений

$$S(X, U(k)) \rightarrow S(X, O(2k)) \rightarrow S(X, U(2k)).$$

Таким образом, если λ есть $U(k)$ -расслоение над X , то $\rho(\lambda)$ есть $O(2k)$ -расслоение над X , а $\varphi(\rho(\lambda))$ — это $U(2k)$ -расслоение над X . При этом элемент $A \in U(k)$ в комплексных координатах z^i пространства \mathbb{C}^k вложениями

$$U(k) \rightarrow O(2k) \rightarrow U(2k)$$

переводится в элементы

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} \operatorname{Re} A & -\operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im} A & \operatorname{Re} A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^* \end{pmatrix}$$

в вещественных координатах

$$x^i = \operatorname{Re} z^i, \quad x^{k+i} = \operatorname{Im} z^i$$

пространства \mathbb{R}^{2k} и в комплексных координатах

$$z^i = x^i + ix^{k+i}, \quad z^{k+i} = x^i - ix^{k+i}$$

пространства \mathbb{C}^{2k} .

Поскольку элемент A унитарен, матрица A^* совпадает с транспонированной обратной матрицей. Следовательно, расслоение $\varphi\rho(\lambda)$ является суммой Уитни расслоения λ и дуального расслоения λ^* , и согласно свойству (А3) имеем

$$c(\varphi\rho(\lambda)) = c(\lambda)c(\lambda^*).$$

Отсюда, используя (3.63) и (3.54), получаем соотношение

$$\sum_i (-1)^i p_i(\rho(\lambda)) = c(\varphi\rho(\lambda)) = c(\lambda)c(\lambda^*) = \left[\sum_i c_i(\lambda) \right] \left[\sum_j (-1)^j c_j(\lambda) \right] \quad (3.64)$$

между классами Чженя $U(k)$ -расслоения λ и классами Понтрягина $O(2k)$ -расслоения $\rho(\lambda)$. Используем это соотношение в следующей конструкции.

Классами Понтрягина $p_i(X)$ вещественного многообразия X называются классы Понтрягина касательного расслоения TX .

Пусть многообразие X ориентировано и $\dim X = 2m$. Пусть структурная группа $GL(2m, \mathbb{R})$ касательного расслоения TX допускает редукцию к образу вложения $GL(m, \mathbb{C})$ в $GL(2m, \mathbb{R})$, т. е. расслоение TX имеет структуру некоторого $GL(m, \mathbb{C})$ -расслоения (*почти комплексную структуру*), т. е. ассоциировано с некоторым $GL(m, \mathbb{C})$ -расслоением. Тогда *классами Чженя такого вещественного многообразия X^{2m}* называются классы Чженя расслоения TX как $GL(m, \mathbb{C})$ -расслоения, т. е.

$$c_i(X) = c_i(\rho(TX)).$$

Отсюда, используя соотношение (3.64), определяем связь между классами Понтрягина и классами Чженя многообразия с почти комплексной структурой

$$\sum_i (-1)^i p_i(X) = \left[\sum_i c_i(X) \right] \left[\sum_j (-1)^j c_j(X) \right].$$

В частности,

$$p_1 = c_1^2 - 2c_2, \quad p_2 = c_2^2 - 2c_1c_3 + 2c_4, \quad (3.65)$$

или, используя принцип расщепления,

$$p_1 = \sum_i a_i^2, \quad p_2 = \sum_{i_1 < i_2} a_{i_1}^2 a_{i_2}^2.$$

ПРИМЕР 3.5.9. Многообразием с почти комплексной структурой является всякое пространственно-временное многообразие X^4 . Это 4-мерное ориентируемое многообразие, на котором задана некоторая псевдориманова метрика g . Такая метрика существует тогда и только тогда, когда структурная группа $GL(4, \mathbb{R})$ -расслоения TX^4 редуцирована к группе Лоренца. Группа Лоренца $SO(1, 3)$, как известно, принадлежит образу группы $SL(2, \mathbb{C})$ в $GL^+(4, \mathbb{R})$ ($SL(2, \mathbb{C})$ является двулистным накрытием над $SO(1, 3)$). Редуциция структурной группы расслоения TX^4 к группе Лоренца означает, что TX^4 ассоциировано с некоторым $SL(2, \mathbb{C})$ -расслоением, а следовательно, с $SU(2)$ -расслоением. Поэтому наряду с классом Понтрягина $p_1(X^4)$ пространственно-временного многообразия X^4 определены его классы Чженя $c_1(X^4)$ и $c_2(X^4)$, связанные с $p_1(X^4)$ соотношением (3.65). Однако, поскольку класс Чженя c_1 для $SU(2)$ -расслоений равен нулю (см. Пример 3.5.5), класс $c_1(X^4)$ тоже равен нулю. \square

Если структурная группа $O(k)$ -расслоения λ редуцирована к $SO(k)$, для такого расслоения определен класс Эйлера $e(\lambda)$. Он может быть построен аксиоматически как элемент группы $H^k(X, \mathbb{Z})$, обладающий следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \text{B1)} \quad & 2e(\lambda) = 0, \quad \text{если } k \text{ нечетно;} \\ \text{B2)} \quad & e(f^* \lambda) = f^* e(\lambda); \\ \text{B3)} \quad & e(\lambda \oplus \lambda') = e(\lambda)e(\lambda'); \\ \text{B4)} \quad & e(\lambda) = c_1(\lambda), \quad \text{если } k = 2. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Последнее свойство обусловлено изоморфизмом групп $SO(2)$ и $U(1)$.

Установим теперь связь класса Эйлера с классами Понтрягина и Чженя. Пусть λ — $U(k)$ -расслоение над X и $\rho(\lambda)$ — $SO(2k)$ -расслоение над X . Тогда, применяя принцип расщепления и свойства (B3) и (B4), получаем

$$\begin{aligned} e(\rho(\lambda)) &= e(\rho(L_1) \oplus \dots \oplus \rho(L_k)) = e(\rho(L_1)) \cdots e(\rho(L_k)) = \\ &= c_1(L_1) \cdots c_1(L_k) = a_1 \cdots a_k = c_k(\lambda). \end{aligned} \quad (3.67)$$

В свою очередь, из (3.64) следует, что

$$p_k(\rho(\lambda)) = \check{c}_k^2(\rho(\lambda)),$$

и, таким образом, для всякого $SO(2k)$ -расслоения

$$e(\lambda) = [p_k(\lambda)]^{1/2}. \quad (3.68)$$

Исходя из этого соотношения, можно построить характеристическую форму Эйлера для $SO(2k)$ -расслоений. Из свойства (B.1) следует, что форма Эйлера для $SO(2k+1)$ -расслоений должна быть когомологична нулю.

ПРИМЕР 3.5.10. Пусть X^4 — ориентируемое многообразие. Тогда структурная группа касательного расслоения TX^4 редуцирована к $SO(4)$. Определим форму Эйлера для TX^4 , выбрав в качестве F форму кривизны R некоторой римановой метрики на X^4 . Воспользуемся соотношением (3.68), найдя

$$p_2 = \left[\frac{1}{32\pi^2} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd} \right]^2$$

из разложения (3.59). В результате

$$e(F) = \frac{1}{32\pi^2} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd} \quad (3.69)$$

□

Заметим, что при смене ориентации X^4 форма Эйлера меняет знак.

В заключение укажем еще на классы Штифеля—Уитни $w_i \in H^i(X, \mathbb{Z}_2)$ касательного расслоения над многообразием X . Так, многообразие X является ориентируемым тогда и только тогда, когда $w_1 = 0$, а если X допускает почти комплексную структуру,

$$w_{2i+1} = 0, \quad w_{2i} = c_i \pmod{2}.$$

В отличие от ранее рассмотренных характеристических классов классы Штифеля—Уитни не представимы как когомологические классы каких-либо характеристических форм.

§ 6. Инстантоны

Инстантонами называются регулярные решения классических уравнений Янга—Миллса в евклидовом пространстве-времени, на которых функционал действия принимает конечное значение. Интерес к решениям уравнений различных полей (не только в калибровочной теории) в 4-мерном пространстве M с метрикой евклидовой сигнатуры $\delta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, +1, +1, +1)$ связан с их интерпретацией при квантовании как процессов туннелирования между состояниями, разделенными классическим барьером. Мы ограничимся здесь простейшими инстантонами для группы $SU(2)$.

Пусть

$$A(x) = A_\mu dx^\mu = A_\mu^a t_a dx^\mu$$

— 1-форма связности на $SU(2)$ -расслоении над M . Удобно выбрать базис t_a алгебры Ли группы $SU(2)$ в виде антиэрмитовых 2×2 -матриц

$$t_a = -\frac{i}{2} \tau_a, \quad a = 1, 2, 3,$$

где τ_a — матрицы Паули; t_a удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} t_a t_b - t_b t_a &= \varepsilon_{abc} t_c, \\ t_a t_b + t_b t_a &= -\frac{1}{2} \delta_{ab} \hat{1}, \\ \text{Tr}(t_a t_b) &= -\frac{1}{2} \delta_{ab}. \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

Отметим, что t_a являются образующими элементами алгебры так называемых *кватернионов* Q , которые можно представить как 2×2 -матрицы вида

$$Q = Q_0 \sigma^0 + Q_1 \sigma^1 + Q_2 \sigma^2 + Q_3 \sigma^3 = Q_\mu \sigma^\mu, \quad (3.71)$$

где σ^μ — обобщенные матрицы Паули

$$\sigma^0 = 1, \quad \sigma^a = -2t^a, \quad a = 1, 2, 3,$$

а Q_μ — комплексные числа. *Вещественные кватернионы* имеют действительные коэффициенты Q_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, а подалгебра чисто *мнимых кватернионов*, для которых $Q_0 = 0$, совпадает с алгеброй Ли группы $SU(2)$.

Сопряженным к Q кватернионом считается $\bar{Q} = Q^\dagger$. При этом

$$\bar{\sigma}^0 = \sigma^0 = 1 \quad \bar{\sigma}^a = -\sigma^a = 2t^a, \quad a = 1, 2, 3,$$

и имеют место следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu &= \delta_{\mu\nu} \hat{1} + \overset{(-)}{\eta}_{\lambda\mu\nu} \sigma^\lambda, \\ \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu &= \delta_{\mu\nu} \hat{1} + \overset{(+)}{\eta}_{\lambda\mu\nu} \sigma^\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

где $\overset{(\pm)}{\eta}$ — так называемые *тензоры т'Хуфта*

$$\left. \begin{aligned} \overset{(-)}{\eta}_{\lambda\mu\nu} &= \delta_{\lambda\mu} \delta_{0\nu} - \delta_{\lambda\nu} \delta_{0\mu} + \varepsilon_{0\lambda\mu\nu}, \\ \overset{(+)}{\eta}_{\lambda\mu\nu} &= \delta_{\lambda\nu} \delta_{0\mu} - \delta_{\lambda\mu} \delta_{0\nu} + \varepsilon_{0\lambda\mu\nu}, \end{aligned} \right\} \quad (3.73)$$

а $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ — полностью антисимметричный тензор Леви—Чивита в евклидовом пространстве, т. е. $\varepsilon_{0123} = \varepsilon^{0123} = 1$. Легко установить, что $\overset{(\pm)}{\eta}_{0\mu\nu} = 0$ и существенными компонентами являются только $\overset{(\pm)}{\eta}_{a\mu\nu}$, $a = 1, 2, 3$. Причем

$$\left. \begin{aligned} \overset{(\pm)}{\eta}_{ab0} &= -\overset{(\pm)}{\eta}_{a0b} = \mp \delta_{ab}, \\ \overset{(\pm)}{\eta}_{abc} &= \varepsilon_{abc}, \quad a, b, c = 1, 2, 3, \end{aligned} \right\} \quad (3.74)$$

а из (3.73) следует *самодуальность* (*антисамодуальность*) тензоров т'Хуфта:

$$\overset{(\pm)}{\eta}_{a\mu\nu} = \pm \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \overset{(\pm)}{\eta}_a^{\alpha\beta} \quad (3.75)$$

Из (3.72) легко получить

$$\bar{Q}Q = Q\bar{Q} = \det Q \cdot \hat{1} = Q_\mu Q^\mu \cdot \hat{1},$$

и следовательно, для всякого ненулевого кватерниона определен обратный элемент

$$Q^{-1} = \bar{Q}(Q_\mu Q^\mu)^{-1}.$$

Множество кватернионов единичной длины $\bar{Q}Q = 1$ образует группу (относительно матричного умножения), которая изоморфна группе $SU(2)$. В дальнейшем мы будем часто

использовать этот факт, представляя матрицы калибровочных преобразований $g \in SU(2)$ кватернионами (3.71). Также $SU(2)$ -калибровочное поле A_μ можно рассматривать как чисто мнимое кватернионное поле на M .

Рассмотрим модель евклидова янг-милсовского поля A_μ без источников. Его функционал действия

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \operatorname{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = \int d^4x \frac{1}{4} F_{\alpha\mu\nu} F_{\alpha}^{\mu\nu} \quad (3.76)$$

является положительно определенным, и поэтому, для того чтобы он был конечным, калибровочное поле должно достаточно быстро убывать на бесконечности, т. е.

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (3.77)$$

Поскольку M — евклидово пространство, из (3.77), как и в солитонных моделях, получаем, что калибровочный потенциал для поля с конечным действием есть чистая калибровка (вакуумное калибровочное поле)

$$A_\mu(x) \rightarrow g \partial_\mu g^{-1}, \quad g(x) \in SU(2), \quad (3.78)$$

на бесконечности $|x| \rightarrow \infty$.

Бесконечность в M будем описывать как сферу S_∞^3 с радиусом $R = x_\mu x^\mu \rightarrow \infty$, рассматривая ее как границу евклидова пространства $\partial M = S_\infty^3$. Тогда (3.77)—(3.78) задают граничные условия для конфигураций калибровочного поля на M .

Поля на ∂M определяются отображениями

$$g : S_\infty^3 \rightarrow SU(2),$$

все множество которых распадается на классы гомотопически эквивалентных калибровочных преобразований. Поскольку $SU(2) \approx S^3$, гомотопическая группа

$$\pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z},$$

и классы эквивалентности полей на границе можно характеризовать целым числом $n \in \mathbb{Z}$. Последнее естественно ввести как степень отображения $S^3 \rightarrow S^3$.

Для этого перейдем в M к 4-мерным сферическим координатам

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= r \cos \chi, & x^1 &= r \sin \chi \sin \theta \sin \varphi, \\ x^2 &= r \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, & x^3 &= r \sin \chi \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (3.79)$$

Тогда координаты на S_∞^3 (при $r = R \rightarrow \infty$) задаются углами

$$0 \leq \chi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (3.80)$$

Обозначим $y^1 = \chi$, $y^2 = \theta$, $y^3 = \varphi$.

Аналогично введем параметризацию матриц $g \in SU(2)$, рассматриваемых как вещественные единичные кватернионы

$$g = g_\mu \sigma^\mu, \quad g_\mu g^\mu = 1,$$

посредством трех углов

$$\hat{y}^i = \{\hat{\chi}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}\}, \quad i = 1, 2, 3,$$

таким образом, что

$$\begin{aligned} g_0 &= \cos \hat{\chi}, & g_1 &= \sin \hat{\chi} \sin \hat{\theta} \sin \hat{\varphi}, \\ g_2 &= \sin \hat{\chi} \sin \hat{\theta} \cos \hat{\varphi}, & g_3 &= \sin \hat{\chi} \cos \hat{\theta}. \end{aligned}$$

Тогда произвольное $SU(2)$ -калибровочное преобразование можно записать в виде

$$\left(\begin{array}{c|c} \cos \hat{\chi} + i \sin \hat{\chi} \cos \hat{\theta} & \sin \hat{\chi} \sin \hat{\theta} e^{-i\hat{\varphi}} \\ \hline -\sin \hat{\chi} \sin \hat{\theta} e^{-i\hat{\varphi}} & \cos \hat{\chi} - i \sin \hat{\chi} \cos \hat{\theta} \end{array} \right). \quad (3.81)$$

На границе S_∞^3 евклидова пространства M функции $\hat{y}(y)$ определяют отображение $S^3 \rightarrow S^3$, степень которого $\deg \hat{y}(y)$ показывает, сколько раз координаты \hat{y}^i пробегают интервалы (3.80), т. е.

$$n = \deg \hat{y}(y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\Sigma} d^3 \hat{y} \sin^2 \hat{\chi} \sin \hat{\theta} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{S_\infty^3} d^3 y \sin^2 \hat{\chi} \sin \hat{\theta} |J|, \quad (3.82)$$

где $J = \det \left(\frac{\partial \hat{y}^i}{\partial y^j} \right)$ — якобиан отображения $\hat{y}(y)$, а Σ — область интегрирования по переменным \hat{y} . Отметим, что степень $n = 1$ имеет тождественное отображение $\hat{\chi} = \chi$, $\hat{\theta} = \theta$, $\hat{\varphi} = \varphi$, тогда как произвольное значение n достигается отображением

$$\hat{\chi} = \chi, \quad \hat{\theta} = \theta, \quad \hat{\varphi} = n\varphi$$

(т. е. сфера S_∞^3 “накручивается” n раз на $S^3 \approx SU(2)$ вокруг оси $x^3 = z$).

Пользуясь (3.81), выпишем в явном виде соответствующие $SU(2)$ -матрицы. Для отображения с $n = 1$ имеем

$$g \stackrel{(1)}{=} \frac{\sigma^\mu x_\mu}{(x_\nu x^\nu)^{\frac{1}{2}}} = \left(\begin{array}{c|c} \cos \chi + i \sin \chi \cos \theta & \sin \chi \sin \theta e^{i\varphi} \\ \hline -\sin \chi \sin \theta e^{-i\varphi} & \cos \chi - i \sin \chi \cos \theta \end{array} \right), \quad (3.83)$$

а в случае произвольного n (когда $\varphi = n\varphi$)

$$g \stackrel{(n)}{=} (g)^{(1)n}.$$

Аналогичное n -кратное “накручивание” может иметь место вокруг любой другой оси, например, при отображениях $\hat{\chi} = n\chi$, $\hat{\theta} = \theta$, $\hat{\varphi} = \varphi$ или $\hat{\chi} = \chi$, $\hat{\theta} = n\theta$, $\hat{\varphi} = \varphi$. Степень $n = 0$ получается, когда вся сфера S_∞^3 отображается в одну точку из $SU(2)$, например, при $\hat{\chi} = 0$, $\hat{\theta} = \hat{\theta}$, $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}$. Тогда соответствующая $SU(2)$ -матрица $g = 1$.

Как известно, степень отображения является гомотопическим инвариантом, поэтому произвольное $SU(2)$ -преобразование с заданным n можно получить из описанных выше примеров посредством гомотопии.

Формула (3.82) определяет топологический инвариант n для случая, когда матрица $SU(2)$ параметризуется углами \hat{y}^i согласно (3.81), а граничная сфера S_∞^3 описывается координатами (3.79). Перепишем (3.82) в инвариантной форме, которая не зависит ни от выбора параметризации на группе $SU(2)$, ни от координат в M . Для этого заметим, что из (3.81) можно получить

$$g^+ = g^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \cos \hat{\chi} - i \sin \hat{\chi} \cos \hat{\theta} & -\sin \hat{\chi} \sin \hat{\theta} e^{i\hat{\varphi}} \\ \hline \sin \hat{\chi} \sin \hat{\theta} e^{-i\hat{\varphi}} & \cos \hat{\chi} + i \sin \hat{\chi} \cos \hat{\theta} \end{array} \right),$$

откуда после несложных вычислений находим

$$\sin^2 \hat{\chi} \sin \hat{\theta} = \frac{1}{2} \text{Tr}[(g\partial_1 g^{-1})(g\partial_2 g^{-1})(g\partial_3)], \quad (3.84)$$

где мы обозначили

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial \hat{y}^i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Подставляя (3.84) и выражение для якобиана

$$J = \varepsilon^{ijk} \frac{\partial \hat{y}^1}{\partial y^i} \frac{\partial \hat{y}^2}{\partial y^j} \frac{\partial \hat{y}^3}{\partial y^k}$$

в (3.82), получаем

$$n = \frac{1}{12\pi^2} \int_{S_\infty^3} d^3 y \varepsilon^{ijk} \text{Tr}[(g\partial_i g^{-1})(g\partial_j g^{-1})(g\partial_k g^{-1})], \quad (3.85)$$

где фактор $\frac{1}{6}$ учитывает 3! одинаковых членов под интегралом в (3.85). Принимая во внимание $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon^{0ijk}$, выводим из (3.85) искомое инвариантное выражение

$$n = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S_\infty^3} d\sigma_\mu \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}[(g\partial_\nu g^{-1})(g\partial_\alpha g^{-1})(g\partial_\beta g^{-1})], \quad (3.86)$$

где $d\sigma_\mu$ — элемент поверхности S_∞^3 , $\mu, \nu, \alpha, \beta = 0, \dots, 3$. Оно имеет один и тот же вид в любых координатах пространства M .

Полезно доказать следующее свойство аддитивности величины (3.86). Обозначим

$$I^\mu[g] = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}[(g\partial_\nu g^{-1})(g\partial_\alpha g^{-1})(g\partial_\beta g^{-1})].$$

Несложно убедиться, что для $g = g_1 g_2$ имеет место тождество

$$I^\mu[g_1 g_2] = I^\mu[g_1] + I^\mu[g_2] - 3\partial_\nu \{ \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}[(g_1 \partial_\alpha g_1^{-1})(g_2 \partial_\beta g_2^{-1})] \}.$$

Тогда, поскольку из (3.86) следует

$$n[g] = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S_\infty^3} d\sigma_\mu I^\mu[g],$$

находим, что для композиции калибровочных преобразований степени отображений складываются:

$$n[g_1 g_2] = n[g_1] + n[g_2]. \quad (3.87)$$

Вернемся теперь к калибровочным полям на M . Согласно (3.78) поведение поля на бесконечной сфере S_∞^3 описывается калибровочным преобразованием $g(x)$, $x \in S_\infty^3$. Следовательно, конфигурация поля на границе характеризуется целым числом — *топологическим зарядом* (3.85). Это число n классифицирует калибровочные поля и внутри S_∞^3 , т. е. на всем пространстве M . Действительно, пусть поля A_μ и A'_μ на M

характеризуются бесконечности числами n и $n' \neq n$. Тогда они принадлежат разным гомотопическим классам, т. е. их нельзя непрерывным образом деформировать друг в друга, поскольку это приводило бы к гомотопии соответствующих калибровочных преобразований на S_∞^3 , а это невозможно в силу $n' \neq n$.

Данный факт можно установить иначе, переписав выражение (3.86) в виде интеграла по M от характеристической формы Чженя c_2 . Для этого заметим, что форма

$$c_2 = \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr}(F \wedge F)$$

является внешним дифференциалом $c_2 = dC$ от так называемого *вторичного характеристического класса Чженя—Саймонса*

$$C = \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr} \left(A \wedge F - \frac{1}{3} A \wedge A \wedge A \right). \quad (3.88)$$

Интеграл от формы $-c_2$ по шару D^3 внутри сферы S_∞^3 называется *индексом Понтрягина* (числом Чженя q многообразия D^3 с границей), и с помощью (3.88) по теореме Стокса находим

$$q = - \int_M c_2 = - \int_{\partial M} C = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S_\infty^3} \text{Tr}(g dg^{-1}) \wedge (g dg^{-1}) \wedge (g dg^{-1}); \quad (3.89)$$

где учтено, что $F = 0$ и $A = g dg^{-1}$ на S_∞^3 . Сравнивая (3.89) с (3.86), получаем $q = n$. Таким образом, топологический заряд инстантонных решений является целочисленным и равен степени отображения

$$g(x) : S_\infty^3 \rightarrow SU(2).$$

Поскольку классы Чженя являются топологическими инвариантами, для произвольных локальных деформаций поля δA внутри S_∞^3 вариация $\delta c_2 = 0$.

Полезно записать приведенные выше величины в координатах на M :

$$c_2 = \frac{1}{32\pi^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} d^4x, \quad \frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \partial_\mu J^\mu,$$

где векторное поле

$$J^\mu = \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \text{Tr} \left(A_\alpha F_{\beta\gamma} - \frac{2}{3} A_\alpha A_\beta A_\gamma \right) \quad (3.90)$$

является дуальным к 3-форме Чженя—Саймонса C (с точностью до постоянного множителя).

Прежде чем приступить к рассмотрению простейших инстантонных решений, необходимо сделать важное замечание. Мы определяли инстантон как регулярное решение уравнений Янга—Миллса. Регулярность в данном случае понимается как существование на M гладкой 2-формы F напряженности калибровочного поля, что гарантирует возможность вычисления действия S и топологического заряда q на таких решениях. При этом 1-форма потенциала A , которая не считается в отличие от F физической наблюдаемой, не обязательно существует всюду внутри S_∞^3 . Однако условия конечности действия и регулярности F приводят к тому, что в точках сингулярности A напряженность F должна обращаться в 0, т. е. потенциал имеет вид чистой калибровки $A \sim g dg^{-1}$ с некоторой сингулярной в данной точке x матрицей $g(x)$.

Выше при выводе (3.89) мы предполагали, что A , так же как и F , регулярен всюду на M . Если учесть сделанное замечание, то приходим к выводу, что форма C также может не существовать всюду на M , в отличие от формы c_2 , которая не содержит A . Поэтому, применяя в (3.89) теорему Стокса, надо включить в границу ∂M не только бесконечную сферу S_∞^3 , но и поверхность Σ , являющуюся объединением сфер малого радиуса, внутри которых содержатся сингулярные точки A , т. е.

$$q = - \int_M c_2 = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S_\infty^3} \text{Tr} (gdg^{-1} \wedge gdg^{-1} \wedge gdg^{-1}) + \frac{1}{24\pi^2} \int_\Sigma \text{Tr} (\bar{g}d\bar{g}^{-1} \wedge \bar{g}d\bar{g}^{-1} \wedge \bar{g}d\bar{g}^{-1}), \quad (3.91)$$

где $A \sim \bar{g}d\bar{g}^{-1}$ на сфере Σ (или объединении сфер), имеющей исчезающе малый радиус вокруг сингулярной точки.

Формула (3.91) делает возможным использование всюду в M произвольных калибровочных преобразований, что часто упрощает вычисления.

С одной стороны, с помощью (сингулярного в общем случае) калибровочного преобразования

$$A \rightarrow g_1 A g_1^{-1} + g_1 d g_1^{-1}$$

всегда можно сделать поле A регулярным всюду внутри S_∞^3 . Тогда последний член в (3.91) равен нулю (т. е. приходим к (3.89)), и тем самым q целиком определяется нетривиальным поведением калибровочного поля на границе S_∞^3 .

С другой стороны, калибровочным преобразованием (тоже в общем случае сингулярным) любое A на M можно привести к виду, когда на бесконечности $A \sim g_0 d g_0^{-1}$, где g_0 — некоторая фиксированная матрица, например $g_0 = 1$. Тогда допустимо стянуть S_∞^3 в точку и перейти к компактификации M как 4-мерной сферы S^4 . При этом нетривиальное значение q будет полностью определяться вторым слагаемым в (3.91), т. е. поведением калибровочного поля внутри S_∞^3 , или, эквивалентно, структурой расслоения над S^4 . Последнее (замена плоского M на S^4) удобно тем, что база расслоения становится компактным многообразием. Причем в силу конформной инвариантности действия (3.76) компактифицированное M не только гомеоморфно, но и изометрично S^4 , что легко устанавливается посредством стереографической проекции.

Перейдем к построению инстантонных решений. В общем случае задача их получения довольно сложна. Здесь мы ограничимся исследованием некоторых простейших решений.

Условие стационарности действия (3.76) приводит к уравнениям Янга—Миллса

$$\nabla_\mu F_a^{\mu\nu} = \partial_\mu F_a^{\mu\nu} + \varepsilon_{abc} A_b^c F_a^{\mu\nu} = 0.$$

Для решений этих уравнений с конечным действием имеет место асимптотика (3.78). Предположим, что асимптотическое калибровочное преобразование характеризуется индексом $n = 1$, т. е. задается матрицей (3.83). Обозначим $\hat{x}^\mu = x^\mu (x_\nu x^\nu)^{-1/2}$, так что $\hat{x}_\mu \hat{x}^\mu = 1$; тогда $g(x) = \hat{x}_\mu \sigma^\mu$. Будем искать инстантонное решение в виде

$$A = f(x^\mu) g^{(1)} d g^{(1)-1}, \quad (3.92)$$

где функция $f(x^\mu)$ обладает на бесконечности $|x| \rightarrow \infty$ асимптотикой $f \rightarrow 1$. Анзац (3.92) еще не означает, что индекс Понтрягина по данной конфигурации равен 1, так как f может иметь сингулярности внутри S_∞^3 . Проиллюстрируем это для сферически симметричного случая.

Пусть $f = f(x^2)$, $x^2 = x_\mu x^\mu$ и $A = A_\mu^\alpha t_\alpha dx^\mu$. С учетом

$$g dg^{-1} = \frac{x^\mu}{x^2} \sigma^a \eta_{\alpha\mu\nu}^{(-)} dx^\nu$$

(см. (3.72)) найдем коэффициенты $SU(2)$ связности

$$A_\mu^\alpha = h(x^2) \eta_{\alpha\mu\nu}^{(-)} x^\nu, \quad (3.93)$$

где введено обозначение $h = 2fx^{-2}$. Вычисление тензора напряженности

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + \varepsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

для калибровочного поля (3.93) упрощается при использовании тождества

$$\varepsilon^{abc} \eta_{b\mu\alpha} \eta_{c\nu\beta} = \delta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}^a - \delta_{\mu\beta} \eta_{\alpha\nu}^a - \delta_{\alpha\nu} \eta_{\mu\beta}^a + \delta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu}^a, \quad (3.94)$$

где η — любой из тензоров т'Хуфта (3.73). В результате находим

$$F_{\mu\nu}^\alpha = (h^2 x^2 - 2h) \eta_{\mu\nu}^\alpha + (h^2 + 2h') x^\alpha \left(x_\mu \eta_{\nu\alpha}^{(-)} - x_\nu \eta_{\mu\alpha}^{(-)} \right), \quad (3.95)$$

где штрих обозначает производную по x^2 .

Подстановка (3.94), (3.95) в уравнения Янга—Миллса приводит к дифференциальному уравнению

$$x^2(2h'' - h^3) + 3(2h' + h^2) = 0. \quad (3.96)$$

Мы не станем искать общее решение данного нелинейного уравнения. Однако легко проверить, что (3.96) удовлетворяют следующие три функции:

$$h_{(S)}(x) = \frac{1}{x^2}, \quad (3.97)$$

$$h_{(R)}^{(+)}(x) = \frac{2}{x^2 + c}, \quad (3.98)$$

$$h_{(R)}^{(-)} = \frac{2c'}{(x^2 + c')x^2}, \quad (3.99)$$

где c и c' — произвольные константы. Исследуем свойства этих решений.

Решение (3.97) не является регулярным. Для него имеем $f(S) = \frac{1}{2}$ и

$$A = \frac{1}{2} g dg^{-1}.$$

Хотя последнее равенство напоминает чистую калибровку, однако таковой не является, что видно из выражения для напряженности

$$F_{\mu\nu}^\alpha = -\frac{1}{x^2} \left\{ \eta_{\mu\nu}^\alpha + \hat{x}^\alpha (\eta_{\nu\alpha}^\alpha \hat{x}_\mu - \eta_{\mu\alpha}^\alpha \hat{x}_\nu) \right\}.$$

Действие S для такого поля расходится как в нуле, так и на бесконечности, и следовательно, $h_{(S)}$ не дает нам искомого инстантонного решения. Примечателен, однако, сам факт существования таких простых (кулоновского типа) точных решений нелинейных уравнений Янга—Миллса.

Анализ решения (3.98) начнем со случая $c = 0$. Тогда

$$h_{(R)} = \frac{2}{x^2}, \quad f_{(R)} = 1,$$

и калибровочный потенциал есть в точности чистая калибровка

$$A_\mu = {}^{(i)}g \partial_\mu {}^{(i)}g^{-1}.$$

Как следствие, $F_{\mu\nu}^\alpha = 0$ всюду на M и действие конечно (равно нулю), т. е. это — инстантон. При этом форма Понтрягина тривиальна $c_2 = 0$, и значит, $q = 0$. Последнее никак не противоречит тому, что A_μ характеризуется на бесконечности калибровочным преобразованием g с индексом $n = 1$, так как поле A_μ^α сингулярно в $x^\mu = 0$. Задав Σ как сферу малого радиуса вокруг начала координат, получаем из (3.91), что $q = 1 + (-1) = 0$ в полном согласии с $c_2 = 0$.

Пусть теперь $c \neq 0$, тогда

$$f_{(R)} = \frac{x^2}{x^2 + c}.$$

При $c < 0$ как потенциал (3.93), так и напряженность поля (3.95) имеют сингулярности на сфере $x^2 = -c$. В результате действие S расходится и это — не инстантон. Однако при $c = \lambda^2 > 0$ поле всюду регулярно в M и описывается следующим потенциалом и тензором напряженности:

$$A = \frac{x^2}{x^2 + \lambda^2} {}^{(i)}g d {}^{(i)}g^{-1}, \quad A_\mu^\alpha = \frac{2}{x^2 + \lambda^2} \eta_{\mu\nu}^{(-)} \alpha^\nu, \quad (3.100)$$

$$F_{\mu\nu}^\alpha = -\frac{4\lambda^2}{(x^2 + \lambda^2)^2} \eta_{\mu\nu}^{(-)} \alpha^\mu. \quad (3.101)$$

Таким образом, применима формула (3.89), и находим индекс Понтрягина $q = n = 1$. Полученное решение называется *инстантоном Белавина—Полякова—Шварца—Тюпкина* (БПШТ). Нетрудно убедиться, что для него действие конечно и $S = 8\pi^2$.

Рассмотрим некоторые свойства инстантона БПШТ. Во-первых, из (3.101) становится понятным, почему он называется инстантоном: поле $F_{\mu\nu}^\alpha$ имеет максимум в $x^\mu = 0$ и быстро спадает с ростом $|x|$, т. е. решение локализовано, причем как в пространстве, так и в мнимом времени. Параметр λ задает значение максимума поля. Далее, уравнения Янга—Миллса инвариантны относительно трансляций координат $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$. Поэтому потенциал

$$A = \frac{(x - x_1)^2}{(x - x_1)^2 + \lambda^2} {}^{(i)}g_1 d {}^{(i)}g_1^{-1}, \quad (3.102)$$

где

$${}^{(i)}g_1 = \frac{(x^\mu - x_1^\mu) \sigma_\mu}{|x - x_1|},$$

и $x_1^\mu = \text{const}$, также является решением уравнений Янга—Миллса и описывает инстантон, расположенный в точке с координатами x_1^μ . Можно показать, что найденное таким образом 5-параметрическое семейство (3.102) (параметры суть числа λ , x_1^μ) является наиболее общим инстантонным решением с зарядом $q = 1$.

Вообще, из физических соображений можно ожидать, что инстантон с произвольным q будет описываться полевой конфигурацией с выраженными максимумами в $|q|$

точках пространства времени $x_1^\mu, \dots, x_{|q|}^\mu$ и быстрым убыванием при удалении от x_i^μ , $i = 1, \dots, |q|$. Нетрудно подсчитать полное число параметров, задающих такую конфигурацию: это $4|q|$ координат x_i^μ максимумов, $|q|$ параметров типа λ_i , задающих значения максимумов, и еще $3|q|$ параметров, определяющих “направление” вектора напряженности $F_{\mu\nu}^a$ (по индексу $a = 1, 2, 3$) в изотопическом пространстве в каждом из максимумов. Итого получили $8|q|$ параметров, но из них надо вычесть 3, отвечающих глобальному калибровочному преобразованию, при котором, очевидно, не меняется физика конфигурации. Таким образом, подсчет показывает, что общее q -инстантонное решение уравнений Янга—Миллса зависит от $8|q| - 3$ произвольных параметров.

Другим важным свойством инстантона БПШТ является то, что напряженность поля оказывается антисамодуальным тензором

$$F_{\mu\nu} = \pm F_{\mu\nu}^* = \pm \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (3.103)$$

где знак минус отвечает решению (3.100) с $q = +1$, а знак плюс соответствует $q = -1$. Это следует из свойств тензоров т’Хуфта (3.75). Уравнение (3.103) называется *уравнением самодуальности*. Оно играет фундаментальную роль в построении общих инстантонных решений. Действительно, используя тождество

$$(F_{\mu\nu} \pm F_{\mu\nu}^*)^2 = 2F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \pm \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta},$$

действие (3.76) при фиксированном q можно оценить снизу $S \geq \mp 8\pi^2 q$, и минимумы действия, на которых достигается равенство $S = 8\pi^2 |q|$, реализуются на самодуальных и антисамодуальных конфигурациях, удовлетворяющих (3.103). Более того, в силу тождества Бианки

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \nabla_\nu F_{\alpha\beta} = 0$$

любое решение (3.103) автоматически является решением уравнений Янга—Миллса $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$. Таким образом, задача получения инстантонов естественно сводится к рассмотрению уравнений самодуальности. Это приводит к значительным техническим упрощениям, поскольку (3.103) суть уравнения первого порядка в отличие от уравнений Янга—Миллса.

Важным следствием свойства самодуальности инстантонных полей является то (см. (3.103)), что тензор энергии-импульса

$$T_\nu^\mu = -\text{Tr}(F^{\mu\alpha} F_{\nu\alpha}) + \frac{1}{4} \text{Tr}(F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}) \delta_\nu^\mu = 0$$

тождественно равен нулю на инстантонных конфигурациях. Данный факт обуславливает важную роль инстантонов в структуре вакуума калибровочных полей.

Поле 1-инстантона (3.102) регулярно всюду внутри S_∞^3 , а нетривиальное значение топологического заряда $q = 1$ объясняется его поведением на бесконечности. Перейдем, однако, к так называемой *сингулярной калибровке*

$$A' = gAg^{-1} + g dg^{-1}$$

с помощью преобразования $g = g_1^{-1}$. Нетрудно видеть, что в этой калибровке

$$A' = \frac{\lambda^2}{(x - x_1)^2 + \lambda^2} g_1^{-1} dg_1, \quad (3.104)$$

на бесконечности $A' \sim g dg_1 = 0$, тогда как в $x = x_1$, потенциал сингулярен и имеет вид чистой калибровки $A' \approx g_1^{-1} dg_1$. При этом по прежнему $q = +1$, только это значение обеспечивается теперь вторым слагаемым в правой части (3.91) — интегралом по сфере Σ вокруг сингулярности.

Калибровка (3.104) удобна тем, что M можно компактифицировать до S^4 , отображая S_∞^3 с помощью стереографической проекции в один из полюсов S^4 . Кроме того, в данной калибровке легче строить мультиинстантонные решения. Переходя к компонентной записи $A' = A_\mu^{\prime\alpha} t_\alpha dx^\mu$, находим для (3.104):

$$A_\mu^{\prime\alpha} = -\frac{2\lambda^2 \overset{(+)}{\eta}_{\mu\nu}^\alpha (x^\nu - x_1^\nu)}{(x - x_1)^2 [(x - x_1)^2 + \lambda^2]} = -\overset{(+)}{\eta}_{\mu\nu}^\alpha \partial^\nu \ln \left(1 + \frac{\lambda^2}{(x - x_1)^2} \right). \quad (3.105)$$

Хотя в формуле (3.105) появился самодуальный тензор т'Хуфта η (ср. с (3.100)—(3.101)), данное поле остается антисамодуальным, как и (3.102). В этом можно убедиться, дуализуя соответствующий тензор напряженности:

$$F_{\mu\nu}^{\prime\alpha} = -\frac{4\lambda^2}{[(x - x_1)^2 + \lambda^2]} \left\{ \overset{(+)}{\eta}_{\mu\nu}^\alpha + \frac{2(x^\alpha - x_1^\alpha)}{(x - x_1)^2} \left[(x_\mu - x_{1\mu}) \overset{(+)}{\eta}_{\nu\alpha}^\alpha - (x_\nu - x_{1\nu}) \overset{(+)}{\eta}_{\mu\alpha}^\alpha \right] \right\}.$$

Прежде чем выписать мультиинстантонные решения, обратимся к решению (3.99). Сравнивая его с (3.105) (и полагая $\lambda^2 = c'$), обнаруживаем, что (3.99) представляет собой самодуальный инстантон в сингулярной калибровке с $q = -1$. Таким образом, сферически симметричный анзац (3.91)—(3.93) позволил нам одновременно получить все инстантонные решения с низшими значениями топологического заряда $q = 0, +1, -1$ (3.97)—(3.99).

Обозначим

$$\Phi = 1 + \frac{\lambda^2}{(x - x_1)^2}.$$

Тогда инстантон БПШТ в сингулярной калибровке имеет вид

$$A_\mu^\alpha = -\overset{(+)}{\eta}_{\mu\nu}^\alpha \partial^\nu \ln \Phi \quad (3.106)$$

(пока мы всего лишь переписали еще раз (3.105), опустив штрих и переобозначив выражение под логарифмом). Подставляя (3.106) в уравнение Янга—Миллса, находим

$$\nabla_\mu F_\alpha^{\mu\nu} = \overset{(+)}{\eta}_{\alpha\nu}^{\mu\nu} \left[\partial_\mu (\Phi^{-1} \square \Phi) + 2\partial_\mu (\ln \Phi) \Phi^{-1} \square \Phi \right],$$

и эта величина обращается в нуль в силу того, что введенная скалярная функция удовлетворяет уравнению

$$\Phi^{-1} \square \Phi = 0.$$

Однако (3.107) имеет более общее решение, а именно:

$$\Phi = 1 + \sum_{i=1}^q \frac{\lambda_i^2}{(x + x_i^2)}, \quad (3.108)$$

где $\lambda_i, x_i^\mu, i = 1 \dots, q$ — это $5q$ постоянных интегрирования. Потенциал (3.106), (3.108) называется *мультиинстантонным решением т'Хуфта*. Оно является естественным обобщением 1-инстантонного БПШТ и описывает конфигурацию с q максимумами поля в точках x_1^μ, \dots, x_q^μ . Параметры λ_i задают значения этих максимумов.

Решение г'Хуфта сингулярно в точках $x = x_i$. Однако напряженность поля всюду регулярна, и сингулярности потенциала могут быть ликвидированы калибровочным преобразованием. Чтобы убедиться в этом, перепишем (3.106), (3.108) на языке форм

$$A = \sum_{i=1}^q \frac{\lambda_i^2}{\Phi(x - x_i)^2} g_i^{(1)-1} d g_i^{(1)}, \quad g_i^{(1)} = \frac{\sigma_\mu(x^\mu - x_i^\mu)}{\Phi(x - x_i)^2} g_i^{(1)-1} d g_i^{(1)}. \quad (3.109)$$

Анализ показывает, что на бесконечности $A \sim 0$, а в сингулярных точках потенциал A есть чистая калибровка

$$A(x_i) \sim g_i^{(1)-1} d g_i^{(1)}.$$

Используя это в (3.91), получаем, что нетривиальный топологический заряд возникает из второго интеграла в (3.91) по поверхности Σ , которая в данном случае является объединением сфер малого радиуса вокруг x_i^μ . Тем самым $5q$ -параметрическое решение г'Хуфта (3.106), (3.108), (3.109) имеет инстантонный заряд q .

В заключение покажем, что сингулярные решения г'Хуфта действительно могут быть устранены калибровочным преобразованием. Без ограничения общности рассмотрим случай $q = 2$. Обозначим в (3.109)

$$a_i(x) = \frac{\lambda_i^2}{\Phi(x - x_i)^2}, \quad i = 1, 2.$$

При $x \rightarrow x_1$, очевидно, имеем $a_1 \rightarrow 1$, $a_2 \rightarrow 0$ тогда как при $x \rightarrow x_2$ аналогично $a_1 \rightarrow 0$, $a_2 \rightarrow 1$. При $x \rightarrow \infty$ получаем $a_i \rightarrow 0$. Будем искать калибровочное преобразование в виде $g = g_2 g_* g_1$, где g_* — некоторая постоянная $SU(2)$ -матрица. Тогда для преобразованного потенциала $A' = g A g^{-1} + dg g^{-1}$ находим

$$A' = (1 - a_1 - a_2) g d g^{-1} + a_1 g_2^{(1)} d g_2^{(1)-1} + a_2 g_2 g_* g_1 g_2^{-1} d (g_2 g_1^{-1} g_*^{-1} g_2^{-1}). \quad (3.110)$$

Отмеченное выше поведение $a_i(x)$ обуславливает, что при $x \rightarrow \infty$ потенциал ведет себя как чистая калибровка $A \sim g d g^{-1}$; при $x \rightarrow x_1$ он регулярен

$$A' \Big|_{x \rightarrow x_1} \sim g_2^{(1)} d g_2^{(1)-1},$$

а при $x \rightarrow x_2$ особенности A' описываются последним членом в (3.110). Однако регулярность A' в $x = x_2$ можно обеспечить, выбрав постоянную матрицу

$$g_*^{-1} = g_1(x_2) = \frac{\sigma_\mu(x_1^\mu - x_2^\mu)}{|x_1 - x_2|}.$$

Таким образом, окончательно получаем, что A' регулярен всюду внутри S_∞^3 , а нетривиальное значение топологического заряда $q = 2$ теперь объясняется поведением на бесконечности $A' \sim g d g^{-1}$. В силу свойства (3.87) имеем $n[g] = n[g_2 g_* g_1] = 2$. Аналогично строятся калибровочные преобразования, устраняющие сингулярности потенциала г'Хуфта для произвольного q .

§ 7. Магнитные монополи

Перейдем теперь к рассмотрению классической калибровочной теории в физическом пространстве-времени Минковского. Как и в предыдущем параграфе, мы ограничимся случаем калибровочной группы $G = SU(2)$, однако к полям Янга—Миллса A_μ^a добавим хиггсовский сектор, обеспечивающий спонтанное нарушение калибровочной симметрии.

Скалярное хиггсовское поле Φ^a преобразуется по закону

$$\delta\Phi^a = -f_{bc}^a \varepsilon^c \Phi^b$$

относительно $G = SU(2)$ и описывается хиггсовским потенциалом

$$V(\Phi) = \frac{\lambda}{4} (\Phi^a \Phi_a - a^2)^2. \quad (3.111)$$

Здесь и далее $a, b, c, \dots = 1, 2, 3$ и, как обычно, $f_{abc} = \varepsilon_{abc}$ — структурные константы и $\varepsilon^a(x)$ — инфинитезимальные параметры преобразований.

Как уже отмечалось, важную роль играют решения классических уравнений поля, на которых функционал энергии конечен. Последний определяется как интеграл по 3-пространству от компоненты T_0^0 тензора энергии-импульса системы. Для рассматриваемой модели симметричный (метрический) тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_\nu^\mu = -F_\alpha^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda}^\alpha + \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu F_{\alpha\beta}^\alpha F_{\alpha\beta}^\alpha + V(\Phi) \delta_\nu^\mu + (D_\nu \Phi)^a (D^\mu \Phi)_a - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu (D_\lambda \Phi^a)(D^\lambda \Phi_a). \quad (3.112)$$

Получаем

$$T_0^0 = V(\Phi) + \frac{1}{2} [(F_{0i}^a)^2 + (F_{ij}^a)^2 + (D_0 \Phi)^2 + (D_i \Phi)^2],$$

где $i, j, \dots = 1, 2, 3$, и суммирование по этим индексам проводится без их поднятия (метрика Минковского $\eta_{\mu\nu}$ не участвует). Видно, что $T_0^0 \geq 0$ и функционал энергии

$$E = \int d^3x T_0^0$$

конечен только в том случае, если на бесконечности $T_0^0 \rightarrow 0$. Последнее выполняется тогда и только тогда, когда

$$F_{\mu\nu}^a \rightarrow 0, \quad D_\mu \Phi^a \rightarrow 0, \quad V(\Phi) \rightarrow 0 \quad (3.113)$$

при $|x| \rightarrow \infty$.

Классические уравнения поля для системы Янга—Миллса—Хиггса имеют вид

$$D_\nu F_a^{\mu\nu} = J_a^\mu, \quad (3.114)$$

$$(D_\mu D^\mu \Phi)^a = -\lambda \Phi^a (\Phi^b \Phi_b - a^2), \quad (3.115)$$

где

$$J_a^\mu = g f_{abc} (D^\mu \Phi)^c \Phi^b. \quad (3.116)$$

Полевые конфигурации, задаваемые равенствами

$$\left. \begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= 0, \\ (D_\mu \Phi)^a &= 0, \quad V(\Phi) = \frac{\lambda}{4}(\Phi^a \Phi_a - a^2)^2 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.117)$$

являются решениями уравнений (3.114)—(3.115) и имеют наименьшую энергию $E = 0$. В соответствии с терминологией, введенной в первой главе, будем называть такие конфигурации вакуумными. Более специально, калибровочные поля, удовлетворяющие (3.117), назовем янг-миллсовским вакуумом, а скалярные полевые конфигурации, являющиеся решениями (3.117), будем именовать хиггсовским вакуумом.

Тривиальное состояние

$$\Phi^a = 0, \quad A_\mu^a = 0,$$

вакуумным не является, и поэтому для выяснения физического содержания модели поля следует разложить в ряд в окрестности настоящего вакуума, например

$$\Phi^a = a\delta_3^a, \quad A_\mu^a = 0.$$

Переходя к калибровке

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a + \psi \end{pmatrix}, \quad (3.118)$$

получаем лагранжиан модели в виде

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^3 \bar{G}^{\mu\nu 3} + \frac{1}{2} a^2 g^2 W_\mu \bar{W}^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \psi)(\partial^\mu \psi) - \lambda a^2 \psi^2 + L_{\text{вз}}, \quad (3.119)$$

где

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a, \quad W_\mu = A_\mu^1 + iA_\mu^2, \quad G_{\mu\nu} = D_\mu W_\nu - D_\nu W_\mu, \quad D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^3,$$

и $L_{\text{вз}}$ есть лагранжиан взаимодействия, содержащий кубические и более высокой степени инварианты из ψ и W .

Таким образом, мы видим, что данная теория описывает массивную хиггсовскую скалярную частицу ψ с массой $m = a\sqrt{\lambda}$, комплексное массивное векторное поле W_μ с массой $M = ag$, а также безмассовое векторное поле A_μ^3 . Легко убедиться, что модель (3.119) инвариантна относительно калибровочных преобразований

$$A_\mu^3 \rightarrow A_\mu^3 - \frac{1}{g} \partial_\mu \varepsilon, \quad W_\mu \rightarrow e^{i\varepsilon} W_\mu, \quad (3.120)$$

и, следовательно, можно отождествить A_μ^3 с электромагнитным полем. При этом хиггсовские частицы оказываются нейтральными, тогда как векторные бозоны W_μ несут заряд $\pm g$.

Группа $H(X)$ преобразований (3.120) является подгруппой исходной калибровочной группы $G(X)$. Обычно H называется группой *точной* (или *остаточной*) симметрии, до которой спонтанно нарушается G .

Обратимся теперь к общему анализу решений классических уравнений поля (3.115)—(3.116). Условие конечности энергии приводит к нетривиальному поведению полей на бесконечности (3.113), они стремятся к своим вакуумным значениям. Особенно важна

асимптотика хиггсовских полей, поскольку она определяет топологический заряд, позволяющий классифицировать решения с конечной энергией.

Границей 3-пространства (т. е. сечения M^4 с фиксированным временем t) является бесконечно удаленная сфера S_∞^2 . В сферических координатах r, χ, θ она задается значением $r = \infty$, а углы $y^1 = \chi, y^2 = \theta$ определяют положение произвольной точки на границе. Хиггсовское поле Φ^a принимает на S_∞^2 вакуумные значения (3.117) и, следовательно, принадлежит сфере $\Phi^2 = a^2$ в изотопическом пространстве. Введем для описания граничных конфигураций удобные координаты в изотопическом пространстве типа сферических углов:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(\infty, \chi, \theta) &= a \sin Y_1 \sin Y_2, \\ \Phi_2(\infty, \chi, \theta) &= a \cos Y_1 \sin Y_2, \\ \Phi_3(\infty, \chi, \theta) &= a \cos Y_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.121)$$

где $Y_{1,2}$ — функции от χ, θ ($Y = Y(y)$). Произвольное калибровочное преобразование $g \in G(X)$ переводит ($\Phi' = g\Phi$) одну граничную вакуумную конфигурацию в другую. Последняя, однако, гомотопически эквивалентна исходной при g и Φ , гладких всюду в 3-пространстве. Действительно, без ограничения общности можно считать, что $g(x=0) = 1$, поскольку координаты r, χ, θ всегда можно задать так, чтобы начало совпадало с точкой в которой $g = 1$. Тогда функция

$$F(t, \chi, \theta) = g\left(\frac{t}{1-t}, \chi, \theta\right) \Phi(\infty, \varphi, \theta)$$

является искомой гомотопией, так как она равна при $t = 0$ исходной граничной конфигурации $\Phi(\infty, \chi, \theta)$, а при $t = 1$ совпадает с

$$\Phi'(\infty, \chi, \theta) = g(\infty, \chi, \theta)\Phi(\infty, \chi, \theta).$$

Подгруппа $H \subset G$ преобразований, оставляющих вакуум инвариантным, состоит из вращений вокруг оси, задаваемой углами Y_1, Y_2 в изотопическом пространстве. Таким образом, многообразие хиггсовских вакуумов имеет вид

$$G/H = S^2, \quad G = SU(2), \quad H = U(1).$$

Отображения сфер $S_\infty^2 \rightarrow S^2$, которые задают хиггсовские поля на границе, классифицируются элементами гомотопической группы

$$\pi_2(S^2) = \pi_2(G/H) = \mathbb{Z}.$$

Соответствующий целочисленный заряд N можно определить как степень отображения $Y(y)$:

$$N = \deg Y(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty^2} d^2y \sin Y_2 \left| \frac{d(Y_1, Y_2)}{d(y_1, y_2)} \right|. \quad (3.122)$$

Используя (3.121), нетрудно привести введенную величину к явно ковариантному виду

$$N = \frac{1}{8\pi a^3} \int_{S_\infty^2} ds_i \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{abc} \Phi^a \partial_j \Phi^b \partial_k \Phi^c, \quad (3.123)$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$ — индексы произвольных 3-координат в пространстве и ds_i — элемент площади границы S_∞^2 .

Можно доказать эквивалентность (3.111) и (3.113) и инвариантность топологического заряда относительно произвольных инфинитезимальных преобразований хиггсовских полей $\Phi^a \rightarrow \Phi + \delta\Phi^a$.

Конкретное решение классических уравнений (3.114)—(3.116) с фиксированным значением топологического заряда не инвариантно относительно полной калибровочной группы $G(X)$. Этот факт аналогичен квантовому механизму спонтанного нарушения симметрии, при котором основное состояние (вакуум) не инвариантно относительно группы симметрий теории. Исходя из этой аналогии, **определим подгруппу $H \subset G$, точной симметрии как группу преобразований, сохраняющих граничную вакуумную конфигурацию решений.** Выше при исследовании физического содержания модели мы уже отмечали, что $H = U(1)$ связана с существованием безмассового калибровочного поля ("фотона"). Сформулируем теперь этот результат, полученный в частной калибровке (3.118), более строго.

Ввиду того что g обозначает в данном разделе калибровочную константу связи, матрицы $SU(2)$ калибровочных преобразований будем обозначать

$$\omega(x) = \exp(t_a u^a(x)), \quad (3.124)$$

где u^a — произвольные функции на M^4 , а t_a — генераторы $SU(2)$. Изовекторное хиггсовское поле удобно рассматривать как элемент алгебры Ли $su(2)$ ($\Phi = \Phi^a t_a$), на который калибровочная группа действует посредством присоединенного представления

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \text{ad}_\omega \Phi = \omega \Phi \omega^{-1}. \quad (3.125)$$

Как обычно, калибровочное поле $A_\mu = A_\mu^a t_a$ есть элемент алгебры Ли $su(2)$ с законом преобразования

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1} + \frac{1}{g} \omega \partial_\mu \omega^{-1}. \quad (3.126)$$

Тогда ковариантная производная поля Φ может быть записана в виде

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + g[A_\mu, \Phi] = \partial_\mu \Phi + g \text{ad}_{A_\mu} \Phi, \quad (3.127)$$

а различные инварианты, построенные из скалярных полей, можно представить как следы матричных произведений, например,

$$\Phi^2 = \Phi^a \Phi_a = -2 \text{Tr}(\Phi \Phi).$$

Группа $H(X)$ точной симметрии модели состоит из матриц

$$h(x) = \exp(f \widehat{\Phi}) = \exp(f \widehat{\Phi}^a t^a), \quad (3.128)$$

где $f(x)$ — произвольная функция на M^4 и $\widehat{\Phi}^a = \Phi^a / \Phi^2$. Очевидно, что $h \in H(X) \subset G(X)$ и

$$\Phi' = h \Phi h^{-1} = \Phi,$$

так что хиггсовский вакуум (граничные конфигурации $\Phi^a(\infty, \chi, \theta)$) инвариантен относительно (3.128). Преобразования из $H(X)$ параметризуются одной функцией $f(x)$, а их генераторами являются $\Phi = \Phi^a t_a$. Рассмотрим поле

$$A_\mu = A_\mu^a \widehat{\Phi}_a = -2 \text{Tr}(A_\mu \widehat{\Phi}). \quad (3.129)$$

Оно является абелевым калибровочным полем, отвечающим группе точной симметрии модели, и может быть отождествлено с электромагнитным полем. Относительно (3.128) поле A_μ преобразуется по закону

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{2}{g} \text{Tr} [(h^{-1} \partial_\mu h) \widehat{\Phi}] = A_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu f. \quad (3.130)$$

Калибровочное поле A_μ с градиентным законом преобразования (3.130) является корректным обобщением поля A_μ^3 (с законом преобразования (3.120)) на случай калибровки, отличной от (3.118). Нетрудно также построить обобщение поля W_μ . С этой целью в каждой точке $x \in M^4$ выберем пару изовекторов e_1^α и e_2^α , которые совместно с Φ^α образуют ортогональный базис во внутреннем пространстве. Определим теперь, аналогично (3.129), поля $A_\mu^\alpha e_1^\alpha$ и $A_\mu^\alpha e_2^\alpha$ и рассмотрим их закон преобразований относительно (3.128). Имеем

$$\text{Tr}(A'_\mu e) = \text{Tr}(A_\mu h^{-1} e h) + \frac{1}{g} \text{Tr} [(h \partial_\mu h^{-1}) e],$$

и ввиду ортогональности $e_{1,2}^\alpha \Phi_\alpha = 0$ получим

$$\begin{aligned} e_1^\alpha A'_\mu{}^\alpha &= e_1^\alpha A_\mu^\alpha \cos f + e_2^\alpha A_\mu^\alpha \sin f, \\ e_2^\alpha A'_\mu{}^\alpha &= -e_1^\alpha A_\mu^\alpha \sin f + e_2^\alpha A_\mu^\alpha \cos f. \end{aligned}$$

Таким образом, комплексное поле

$$W_\mu = e_1^\alpha A_\mu^\alpha + i e_2^\alpha A_\mu^\alpha \quad (3.131)$$

под действием группы H испытывает фазовое преобразование

$$W_\mu \rightarrow W'_\mu = e^{if} W_\mu,$$

т. е. описывает заряженные частицы, взаимодействующие посредством A_μ .

Итак, суммируем некоторые выводы. В модели Янга—Миллса—Хиггса со спонтанным нарушением симметрии до $H = U(1)$ существует сектор, связанный с абелевым калибровочным полем A_μ группы точных симметрий. Можно поэтому предположить, что на больших расстояниях эта система будет обнаруживать (в конкретных классических решениях) “электромагнитные” свойства. Что касается нейтрального хиггсовского поля Φ и заряженного векторного поля W_μ , то наличие у них массы (вследствие механизма Хиггса) позволяет ожидать их нетривиального поведения только на масштабах длин порядка m^{-1} и M^{-1} . На больших расстояниях Φ и W_μ быстро стремятся к своим вакуумным значениям. Точные решения уравнений поля (3.114)—(3.116), рассмотренные ниже, полностью подтверждают эти качественные выводы. Однако, прежде чем мы приведем конкретные решения, необходимо уточнить описание электромагнитных свойств модели.

Электромагнитное поле в модели Полякова—т’Хуфта

В теории Максвелла наблюдаемыми физическими величинами являются электрическое и магнитные поля, составляющие тензор напряженности $F_{\mu\nu}$. Определим аналогичный объект в описанной выше модели. Нетрудно видеть, что $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ не подходит

на роль тензора напряженности, так как меняется при калибровочных преобразованиях по закону

$$\partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \frac{2}{g} \partial_\mu \text{Tr} [(\omega^{-1} \partial_\nu \omega) \widehat{\Phi}] - \frac{2}{g} \partial_\nu \text{Tr} [(\omega^{-1} \partial_\mu \omega) \widehat{\Phi}]. \quad (3.132)$$

Последние два слагаемых исчезают при $\omega = h$ в силу (3.130), однако в общем случае $\omega \in G(X)$ они отличны от нуля. Это означает, что $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ не является наблюдаемой величиной. Однако в теории присутствуют также хиггсовские поля, и с их помощью неинвариантные члены в (3.132) можно скомпенсировать.

Действительно, рассмотрим величину

$$\text{Tr} (\widehat{\Phi} \partial_\mu \widehat{\Phi} \partial_\nu \widehat{\Phi}) = -\frac{1}{4} \varepsilon_{abc} \widehat{\Phi}^a \partial_\mu \widehat{\Phi}^b \partial_\nu \widehat{\Phi}^c.$$

Этот тензор антисимметричен по μ, ν и имеет закон преобразования (относительно $\widehat{\Phi} \rightarrow \widehat{\Phi}' = \omega \widehat{\Phi} \omega^{-1}$):

$$\text{Tr} (\widehat{\Phi}' \partial_\mu \widehat{\Phi}' \partial_\nu \widehat{\Phi}') = \text{Tr} (\widehat{\Phi} \partial_\mu \widehat{\Phi} \partial_\nu \widehat{\Phi}) + \frac{1}{2} \partial_\nu \text{Tr} [(\omega \partial_\mu \omega^{-1}) \widehat{\Phi}] - \frac{1}{2} \partial_\mu \text{Tr} [(\omega \partial_\nu \omega^{-1}) \widehat{\Phi}].$$

Следовательно тензор

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \frac{4}{g} (\widehat{\Phi} \partial_\mu \widehat{\Phi} \partial_\nu \widehat{\Phi}) \quad (3.133)$$

является калибровочно инвариантным относительно $G(X)$. Эту физическую наблюдаемую (введенную впервые в несколько иной форме г'Хуфтом) мы и отождествим в модели Янга—Миллса—Хиггса с электромагнитным полем.

Хорошо известно, что система уравнений Максвелла в вакууме

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu*} = 0, \quad (3.134)$$

где $F_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$, симметрична относительно так называемых преобразований дуальности $F_{\mu\nu}^* \leftrightarrow F_{\mu\nu}$, т. е. замены электрического поля $E_i = F_{i0}$ на магнитное

$$B^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk}, \quad (3.135)$$

и наоборот. Однако в присутствии источников, описываемых электрическим током j^μ , система (3.134) перестает быть дуально симметричной, поскольку первая половина уравнений Максвелла модифицируется:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (3.136)$$

Магнитный заряд

Дирак заметил, что можно восстановить дуальную симметрию полных уравнений, если предположить существование в природе магнитных зарядов, которые порождают магнитный ток k^μ так, что вторая половина уравнений приобретает вид

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} = k^\nu. \quad (3.137)$$

Из (3.136)—(3.137) видно, что оба тока имеют нулевую дивергенцию

$$\partial_\mu j^\nu = 0 = \partial_\mu k^\mu \quad (3.138)$$

так, что соответствующие заряды

$$e = \int d^3x j^0, \quad \mu = \int d^3x k^0$$

сохраняются во времени. Интегрируя временные компоненты уравнений (3.136)—(3.137), с помощью теоремы Гаусса можно выразить полные электрический e и магнитный μ заряды через потоки соответственно электрического и магнитного полей через пространственную границу S_∞^2 :

$$e = \int d^3x \operatorname{div} \mathbf{E} = \int_{S_\infty^2} ds_i E^i, \quad (3.139)$$

$$\mu = \int d^3x \operatorname{div} \mathbf{B} = \int_{S_\infty^2} ds_i B^i. \quad (3.140)$$

Основной трудностью теории Дирака является тот факт, что левая часть (3.137) тождественно обращается в 0, если существует всюду регулярный вектор-потенциал A_μ , для которого

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Поэтому в присутствии магнитных зарядов потенциал A_μ с необходимостью должен быть сингулярным. Причем его сингулярности расположены на луче, начинающемся на магнитном заряде и уходящем в бесконечность. Все сказанное относится, однако, к стандартной теории Максвелла, в которой источники — точечные частицы и энергия классических решений бесконечна.

Возвращаясь к модели Янга—Миллса—Хиггса, отметим, что электромагнитный сектор в ней является частью более общей нелинейной системы (3.114)—(3.116). При этом группа $H = U(1)$ возникает как подгруппа точной симметрии в рамках механизма спонтанного нарушения $G = SU(2)$ симметрии, что позволяет определить эффективное электромагнитное поле, описываемое потенциалом A_μ (3.129) и тензором напряженности $F_{\mu\nu}$ (3.133). Калибровочно инвариантный тензор (3.133) в отличие от теории Максвелла не есть просто “ковариантный ротор” от 4-потенциала, и тем самым магнитный ток k^μ и магнитный заряд μ полевых конфигураций системы Янга—Миллса—Хиггса с необходимостью нетривиальны.

Найдем электрический и магнитный токи в рассматриваемой неабелевой модели. Для этого согласно (3.136)—(3.137) требуется вычислить дивергенцию тензора (3.133), а также дуального к нему тензора $F_{\mu\nu}^*$. Преобразуем сначала (3.133). Используя определение (3.129), нетрудно видеть, что

$$F_{\mu\nu} = \widehat{\Phi}_a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{g} \varepsilon_{abc} \widehat{\Phi}^a D_\mu \widehat{\Phi}^b D_\nu \widehat{\Phi}^c. \quad (3.141)$$

Подставляя (3.141) в (3.136)—(3.137), получим следующие явные выражения для токов

$$j^\nu = (\partial_\mu \widehat{\Phi}^a) \left(F_a^{\mu\nu} + \frac{1}{g} \varepsilon_{abc} \widehat{\Phi}^b D^\mu D^\nu \widehat{\Phi}^c \right), \quad (3.142)$$

$$k^\nu = \frac{1}{2g} \varepsilon^{\nu\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{abc} D_\alpha \widehat{\Phi}^a D_\beta \widehat{\Phi}^b D_\gamma \widehat{\Phi}^c. \quad (3.143)$$

Формулы (3.142)—(3.143) определяют распределение и динамику (эффективных) источников электромагнитного поля через $SU(2)$ калибровочные и хиггсовские поля. В частности, рассмотрим случай, когда модель (3.120) находится в хиггсовском вакууме, т. е. имеет место (3.117). Тогда из (3.142)—(3.143) вытекает, что

$$F_{\mu\nu} = \widehat{\Phi}_a F_{\mu\nu}^a, \quad k^\mu = j^\mu = 0.$$

Таким образом, в хиггсовском вакууме $SU(2)$ калибровочное поле имеет одну компоненту (отвечающую “нейтральному” направлению в изотопическом пространстве, которое связано с генератором $U(1)$ ненарушенной симметрии), и эта компонента является свободным электромагнитным полем, удовлетворяющим уравнениям Максвелла в вакууме. Последний результат имеет большое значение, поскольку выше было установлено, что точные решения уравнений поля (3.114)—(3.116) (с конечной энергией) нетривиальны только в областях с размерами порядка m^{-1} или M^{-1} , а всюду в M^4 вне этих областей полевые конфигурации близки к хиггсовскому вакууму. На больших расстояниях отличие от вакуума экспоненциально мало, и следовательно, “издали” полевая конфигурация модели Янга—Миллса—Хиггса будет выглядеть как система электрических и магнитных зарядов, порождающих (почти) максвелловское электромагнитное поле.

Найдем магнитный заряд произвольного распределения полей модели. Подставляя (3.143) в (3.140), получим

$$\mu = -4\pi \frac{N}{g}$$

в силу (3.123). Таким образом, топологический инвариант (3.123), классифицирующий решения с конечной энергией, в сущности есть магнитный заряд полевой конфигурации. Учитывая, что константа связи g в данной модели пропорциональна электрическому заряду (так как W несет $\pm g$), перепишем полученное соотношение в виде

$$\frac{\mu g}{4\pi} = -N, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.144)$$

Эта формула является известным *условием квантования зарядов*, которые Дирак получил в своей теории магнитных монополей из квантово-механических соображений. Примечательно, что в модели Янга—Миллса—Хиггса квантование зарядов имеет классическое топологическое происхождение. Для большей строгости уточним, что условие Дирака отличается от (3.144) дополнительным множителем $\frac{1}{2}$ справа, однако последний нетрудно восстановить, если учесть, что заряд g не является минимальным. Можно показать, что минимальный заряд равен половине от g .

Модель Полякова—Г'Хуфта

Исследуем теперь точные решения уравнений поля (3.114)—(3.116). Покажем сначала существование решений с произвольным значением топологического (магнитного) заряда. С этой целью рассмотрим конфигурации, которые всюду в M^4 находятся в хиггсовском вакууме (3.117). Таковыми, например, являются

$$\left. \begin{aligned} \Phi^a &= (a \sin(N\chi) \sin \theta, a \cos(N\chi) \sin \theta, a \cos \theta), \\ A_\mu^a &= -\frac{1}{g a^2} \varepsilon^{abc} \Phi_b \partial_\mu \Phi_c, \end{aligned} \right\} \quad (3.145)$$

где χ, θ — обычные сферические углы. На бесконечности S_∞^2 функции $Y_{1,2}(y)$ (см. (3.121)) имеют простой вид

$$Y_1 = N\chi, \quad Y_2 = \theta,$$

и топологический заряд (3.122)—(3.123) равен N . Легко убедиться, что (3.145) являются решениями уравнений (3.114)—(3.116). При этом напряженность $SU(2)$ калибровочного поля принимает вид

$$F_{\mu\nu}^a = -\frac{1}{ga^2} \varepsilon^{abc} \partial_\mu \Phi_b \partial_\nu \Phi_c, \quad (3.146)$$

и подставляя сюда независимые от времени хиггсовские поля (3.145), находим, что не-тривиальны только магнитные компоненты

$$F_{ij}^a = -\frac{N}{g} \widehat{\Phi}_a \varepsilon_{ijk} \frac{x^k}{r^3}. \quad (3.147)$$

Таким образом, электромагнитное поле (3.141) есть

$$F_{ij} = -\frac{N}{g} \varepsilon_{ijk} \frac{x^k}{r^3},$$

и для компонент магнитного поля (3.134) получим

$$\mathbf{B} = -\frac{N}{g} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (3.148)$$

Сферически симметричное решение (3.148) является *магнитным монополем* с зарядом $\mu = -4\pi \frac{N}{g}$ в полном согласии с (3.144). Этот монополю является точечным и находится в начале координат. Поэтому функционал энергии расходится на решениях (3.145)—(3.148). Отметим, что точечные монополи (3.148) присутствуют в теории Дирака (3.136)—(3.137), однако там присутствуют также сингулярные нити, на которых 4-потенциал A_μ не существует. Качественная особенность решения (3.145)—(3.148) заключается в том, что $U(1)$ потенциал (3.129) для него тождественно равен нулю, а электромагнитный тензор (3.133) порождается хиггсовскими полями.

Получение регулярных решений с конечной энергией для произвольного N сталкивается с трудностями. В частности, это связано с тем, что такие конфигурации не являются сферически симметричными.

Продемонстрируем, однако, существование $N = 1$ монополей. Основная идея построения таких решений довольно проста. Рассмотрим опять сингулярные конфигурации (3.145), которые при $N = 1$ имеют следующий вид:

$$\Phi^a = a \frac{x^a}{r}, \quad A_r^a = \frac{1}{g} \varepsilon_{a ij} \frac{x^j}{r^2}, \quad A_0^a = 0. \quad (3.149)$$

Заметим, что поля (3.149) инвариантны относительно одновременных $SO(3)$ вращений декартовых пространственных координат x^i и внутренних координат в изотопическом пространстве. Будем искать $N = 1$ решения с конечной энергией в классе регулярных $SO(3)$ -симметричных конфигураций (3.17), для которых (3.149) на пространственной бесконечности имеет асимптотику (3.18). Очевидным $SO(3)$ -симметричным обобщением (3.17) является анзац

$$\Phi^a = \frac{H(r)}{gr^2} x^a, \quad A_i^a = [1 - K(r)] \varepsilon_{ij}^a \frac{x^j}{gr^2}, \quad A_0^a = 0. \quad (3.150)$$

Условия регулярности в $r = 0$ и асимптотика (3.18) при $r \rightarrow \infty$ фиксируют поведение функций H и K на границах:

$$\left. \begin{aligned} H(r) &\leq O(agr), & K(r) &\leq 1 + O(agr), & r &\rightarrow 0, \\ H(r) &\rightarrow agr, & K(r) &\rightarrow 0, & r &\rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (3.151)$$

Подстановка (3.150) в уравнения поля (3.114)—(3.116) приводит к системе нелинейных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} r^2 K'' &= K[H^2 + K^2 - 1], \\ r^2 H'' &= H \left[2K^2 + \frac{\lambda}{g^2} (H^2 - g^2 a^2 r^2) \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.152)$$

где штрихом обозначается производная по радиусу r .

Нетрудно видеть, что в анзаце (3.150) эффективный $U(1)$ потенциал (3.129) тождественно равен нулю ($A_\mu = 0$). Электромагнитный тензор (3.133), (3.141) благодаря вкладу хиггсовских полей имеет вид

$$F_{i0} = 0, \quad F_{ij} = -\frac{1}{g} \varepsilon_{ijk} \frac{x^k}{r^3}.$$

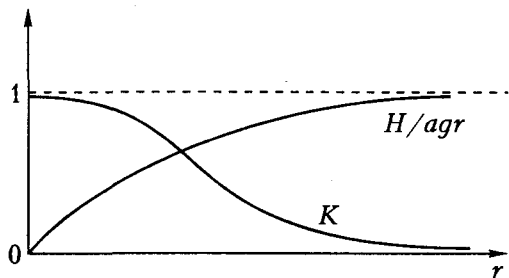


Рис. 16

Решение системы (3.152), удовлетворяющее граничным условиям (3.151), существует, хотя его нельзя выразить в элементарных функциях.

Оценим поведение полей на бесконечности. На основе асимптотики (3.141) при $r \rightarrow \infty$ функции $K(r)$ и $h(r) = H(r) - agr$ являются малыми, так что в (3.152) можно пренебречь нелинейными членами. В этом приближении

$$K'' \approx (ga)^2 K = M^2 K, \quad h'' \approx 2\lambda a^2 h = m^2 h \quad (3.153)$$

и для хиггсовских и калибровочных полей получаем ожидаемую асимптотику

$$\Phi^a \approx \frac{ax^a}{r} \left(1 - O\left(\frac{e^{-mr}}{r}\right) \right), \quad A_i^a \approx \frac{1}{g} \varepsilon_{ij}^a \frac{x^j}{r^2} \left(1 - O(e^{-Mr}) \right).$$

В полном согласии с проведенным ранее анализом физического содержания модели массивные поля имеют нетривиальное поведение только на расстояниях порядка M^{-1} и m^{-1} .

Уравнение Богомольного

Монополь т'Хуфта—Полякова имеет магнитный заряд

$$\mu = -\frac{1}{4\pi g},$$

и электрически нейтрален ($e = 0$, поскольку $j^\mu = 0$ для статических конфигураций (3.150)), а его энергия E конечна. Величину E можно найти численным интегрированием, причем она существенным образом зависит только от отношения $\frac{\lambda}{g^2}$, а именно:

$$E = \frac{4\pi a}{g} f\left(\frac{\lambda}{g^2}\right),$$

где f — гладкая функция такая, что $f \geq 1$, и равенство достигается только в 0 ($f(0) = 1$). Последнее реализуется при $\lambda = 0$ и заслуживает отдельного рассмотрения.

Прежде всего заметим, что при $\lambda = 0$ уравнения поля (3.114)—(3.116) тождественно удовлетворяются на решениях следующей системы:

$$F_{ij}^a = \pm \varepsilon_{ijk} D^k \Phi^a, \quad F_{0j}^a = 0, \quad (3.154)$$

где хигсовские и калибровочные поля не зависят от времени. Уравнение (3.154) называется *уравнением Богомольного*. Мы по-прежнему будем считать, что на бесконечности поля стремятся к своим вакуумным значениям (3.117). Поскольку такая асимптотика вытекает из требования конечности энергии, которая для статистических полей в калибровке $A_0^a = 0$ имеет вид

$$E = \int d^3x \left\{ V(\Phi) + \frac{1}{2} \left[(D_i \Phi)^2 + \frac{1}{2} (F_{ij}^a)^2 \right] \right\},$$

условие обращения в нуль константы λ следует понимать как *предельный переход* $\lambda \rightarrow 0$, который называется *пределом Прасада—Зоммерфельда*. Убедимся, что в данном пределе энергия достигает своего минимального значения на уравнении Богомольного. Для этого выпишем очевидную оценку интеграла (3.155) снизу:

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x \left\{ V(\Phi) + \frac{1}{4} (F_{ij}^a \mp \varepsilon_{ijk} D^k \Phi^a)^2 \pm \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{ij}^a D_k \Phi_a \right\} \geq \\ &\geq \pm \int d^3x \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} D_k (F_{ij}^a \Phi_a) = \pm \int ds_i \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{ij}^a \Phi_a = \pm \mu a. \end{aligned} \quad (3.156)$$

Таким образом, ввиду (3.144) в $N = 1$ секторе для энергии имеем неравенство

$$E \geq \frac{4\pi a}{g}$$

(откуда, кстати, следует, что введенная выше функция $f\left(\frac{\lambda}{g^2}\right) \geq 1$). Равенство в (3.156), на котором реализуется минимум энергии, достигается для $\lambda = 0$ в уравнении Богомольного (3.154).

Решение в $N = 1$ топологическом секторе можно выписать в элементарных функциях. Подставив (3.150) в (3.154), получим систему

$$rK' = \pm KH, \quad rH' = H \pm (K^2 - 1). \quad (3.157)$$

Отсюда находим

$$H = \frac{\pm \beta r}{\text{sh}(\beta r)}, \quad K = -1 + \beta r \text{cth}(\beta r), \quad (3.158)$$

где β — произвольная константа интегрирования.

Наше рассмотрение ограничилось $SU(2)$ моделью Джорджи—Глэшоу и простейшими решениями уравнений поля. Поэтому в заключение сделаем несколько замечаний о возможных обобщениях. Во-первых, (3.150) не является самым общим $SO(3)$ -симметричным анзацем в $N = 1$ топологическом секторе. Для нулевой компоненты калибровочного поля решение можно искать в виде

$$A_0^a = J(r) \frac{x^a}{gr^2}.$$

Найденное точное решение системы уравнений для функций K , H , J (обобщающий (3.152)) описывает так называемый дион — объект, обладающий как магнитным, так и электрическим зарядами. При этом $\mu = -\frac{1}{4\pi g}$, а e произволен.

В реалистических моделях с более общими калибровочными группами также существуют монополи. Соответствующий топологический инвариант (магнитный заряд) классифицирует гомотопически неэквивалентные вакуумные конфигурации хиггсовских полей на пространственной бесконечности S_∞^2 . Для связных полупростых групп G спонтанное нарушение симметрии до подгруппы $H \subset G$ обеспечивается в моделях Большого объединения хиггсовскими полями, многообразия вакуумов которых изоморфно G/H . Множество монополярных решений тем самым определяются гомотопической группой $\pi_2(G/H)$, изоморфной ядру естественного отображения фундаментальных групп $\pi_1(H) \rightarrow \pi_1(G)$, индуцируемого вложением $H \subset G$. Для односвязных групп $\pi_2(G/H) \approx \pi_1(H)$, и следовательно, монополи будут с необходимостью возникать в моделях с группой ненарушенных симметрий, содержащей электромагнитную группу $U(1)$. Точные монополярные решения в таких моделях можно построить с помощью вложения $SU(2)$ монополя Полякова—т'Хуфта.

Геометрии пространства-времени

В настоящее время можно выделить три основных круга калибровочных моделей, описывающих геометрию пространства-времени. Это калибровочная теория самой гравитации, многомерные модели Калуца—Клейна и теория супергравитации. Здесь мы сосредоточим внимание только на краевых элементах этих теорий. В теории гравитации это — нарушение пространственно-временных симметрий, обусловленное принципом эквивалентности и присутствием фермионной материи. В моделях Калуца—Клейна — математическое доказательство того, что метрика многомерного пространства может быть выражена через метрику и калибровочные потенциалы на пространственно-временном многообразии. В теории супергравитации это — определение суперпространства.

§ 1. Гравитация

В теории гравитации, если не касаться проблемы гравитационных сингулярностей, пространство-время обычно предполагается 4-мерным ориентируемым многообразием X^4 , удовлетворяющим тем условиям, которые мы договорились требовать от многообразий. Будем называть его *мировым многообразием* (world manifold). Оно становится пространственно-временным многообразием, когда наделено дополнительной структурой $(3+1)$ -разбиения, которая не присуща ему автоматически. Геометрия мирового многообразия — это геометрия его касательного и кокасательного расслоений TX и T^*X , ассоциированных с *главным расслоением линейных реперов* LX из Примера 1.7.7 со структурной группой $GL(4, \mathbb{R})$. Сама по себе эта геометрия, однако, не очень богата.

Во-первых, касательное и кокасательное расслоения могут быть наделены общей линейной связностью K из Примера 1.6.3, которая ассоциирована с некоторой связностью на главном расслоении LX . Во-вторых, структурная группа $GL(4, \mathbb{R})$ расслоения LX всегда редуцируема к своей максимальной компактной подгруппе $O(4)$. Согласно Теореме 1.7.4 отсюда следует, что всегда существует глобальное сечение g^R ассоциированного с LX фактор-расслоения

$$LX/O(4) \rightarrow X^4. \quad (4.1)$$

Типичный слой этого расслоения изоморфен пространству римановых билинейных форм в \mathbb{R}^4 , приводимых общими линейными преобразованиями к евклидовой метрике. Следовательно глобальное сечение g^R расслоения (4.1) — это *риманова метрика* на многообразии X^4 . Таким образом мировое многообразие X^4 всегда может быть наделено римановой метрикой. Однако риманова метрика и общая линейная связность — это не те объекты, которыми оперирует теория гравитации.

В дальнейшем предположим для упрощения, что ориентация мирового многообразия X^4 фиксирована и, чтобы не вводить новых обозначений, будем понимать под LX

главное расслоение линейных ориентируемых реперов со структурной группой

$$GL_4 = GL^+(4, \mathbb{R})$$

4×4 -матриц с положительным детерминантом.

Теория гравитации описывает круг явлений, суть которых состоит в так называемом спонтанном нарушении пространственно-временных симметрий. Физической первопричиной такого нарушения симметрий является фермионная материя. Дело состоит в том, что:

- группой симметрий фермионной материи служит группа Лоренца;
- как следует из структуры уравнения Дирака, эта группа не является внутренней;
- фермионные поля не допускают других преобразований из группы GL_4 , кроме лоренцевских и еще растяжений.

На геометрическом языке это означает, что фермионные поля на мировом многообразии описываются сечениями расслоений со структурной группой Лоренца и, поскольку эта группа не является внутренней, такие расслоения должны быть ассоциированы тем или иным образом с главным расслоением LX , структурной группой которого является группа GL_4 . Эту возможность и обеспечивает гравитационное поле.

Предлагаются различные спинорные модели для фермионной материи. Однако все пока известные фермионные частицы описываются дираковскими спинорными полями. Эти поля представляются сечениями спинорных расслоений, типичным слоем которых является пространство дираковских спиноров, и, чтобы они описывали реальные фермионы, на них должен быть определен оператор Дирака.

Есть разные способы введения дираковских спиноров. Мы будем следовать их алгебраическому определению, исходя из алгебры Клиффорда.

Пусть M — пространство Минковского с метрикой Минковского η . Построим тензорную алгебру

$$A_M = \bigoplus_n M^n, \quad M^0 = \mathbb{R}, \quad M^{n>0} = \bigotimes^n M,$$

моделируемую над векторным пространством M . Рассмотрим фактор этой алгебры по двустороннему идеалу, порождаемому элементами вида

$$e \otimes e' + e' \otimes e - 2\eta(e, e') \in A_M, \quad e \in M,$$

т. е. при переходе к фактору такие элементы приравниваются нулю. Комплексифицируем этот фактор и тогда получим комплексную алгебру Клиффорда $C_{1,3}$. Пространство Минковского M является подпространством этой алгебры. В свою очередь спинорным пространством или более полно пространством дираковских спиноров называется некоторый минимальный левый идеал V алгебры Клиффорда $C_{1,3}$, на который эта алгебра действует левыми умножениями. В частности, имеет место представление

$$\gamma : M \otimes V \rightarrow V \tag{4.2}$$

элементов пространства Минковского $M \subset C_{1,3}$ дираковскими γ -матрицами V :

$$\widehat{e}^a(v^A) = \gamma(e^a \otimes v^A) = \gamma^a{}_B v^B,$$

где

$$\{e^a, a = 0, 1, 2, 3\}, \quad \eta_{00} = -\eta_{11} = -\eta_{22} = -\eta_{33} = 1,$$

— фиксированный базис M и $\{v^A\}$ — базис V .

Заметим, что выбор того или иного минимального левого идеала алгебры Клиффорда в качестве спинорного пространства не однозначен, но фиксируется заданием стандартной формы матриц Дирака γ^a в представлении (4.2).

Рассмотрим преобразования, сохраняющие представление (4.2). Это пары (l, l_s) преобразований Лоренца пространства Минковского M и обратимых элементов l_s алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_{1,3}$ таких, что

$$lM = l_s M l_s^{-1}, \\ \gamma(lM \otimes l_s V) = l_s \gamma(M \otimes V).$$

Элементы l_s образуют *группу Клиффорда*, действие которой на пространстве Минковского M однако не является эффективным. Поэтому обычно ограничиваются рассмотрением ее подгруппы $L_s = SL(2, \mathbb{C})$, которую мы будем называть *спинорной группой*. Имеет место соотношение

$$L = SO(1, 3) = L_s / \mathbb{Z}_2,$$

где $SO(1, 3)$ — *связная группа Лоренца*. Матрицы представления l этой группы на пространстве Минковского M удовлетворяют условиям

$$\det l = 1, \quad l^0_0 > 0.$$

Генераторы спинорной группы L_s , действующей на спинорном пространстве V , принимают вид

$$I_{ab} = \frac{1}{4} [\gamma_a, \gamma_b].$$

При этом следует иметь в виду, что, поскольку

$$(I_{ab})^+ \neq -I_{ab},$$

стандартная эрмитова билинейная форма

$$(v, v) = v^+ v$$

на V не является L_s -инвариантной. В то же время справедливы соотношения

$$(\gamma^0)^+ = \gamma^0, \quad (\gamma^0 \gamma^a)^+ = \gamma^0 \gamma^a, \quad (I_{ab})^+ \gamma_0 = -\gamma_0 I_{ab}.$$

Поэтому в качестве L_s -инвариантной метрики на спинорном пространстве V следует выбрать билинейную форму

$$a(v, v) = v^+ \gamma^0 v. \quad (4.3)$$

Рассмотрим теперь расслоение над мировым многообразием X^4 , слоями которого служат алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_{1,3}$. Его подрасслоениями являются *спинорное расслоение* $S_M \rightarrow X^4$ и *расслоение* $Y_M \rightarrow X^4$ на пространства Минковского образующих элементов алгебр Клиффорда $\mathbb{C}_{1,3}$. Для них определен послойный морфизм

$$\gamma_M : Y_M \times S_M \rightarrow S_M$$

представления элементов расслоения Y_M матрицами Дирака на элементах спинорного расслоения S_M . Чтобы сечения спинорного расслоения S_M могли описывать *дираковские фермионные поля*, в частности, чтобы на них был задан оператор Дирака, расслоение Y_M должно быть изоморфно кокасательному расслоению T^*X над X^4 . Это имеет место, если структурная группа кокасательного расслоения T^*X и ассоциированного с ним главного расслоения LX редуцируема к группе Лоренца L и Y_M ассоциировано с одним из его редуцированных подрасслоений L^hX со структурной группой L , т. е.

$$Y_M = M^hX = (L^hX \times M)/L = T^*X. \quad (4.4)$$

В этом случае спинорное расслоение S_M ассоциировано с L_s -главным расслоением P_h , накрывающим L^hX :

$$S_M = S_h = (P_h \times V)/L_s. \quad (4.5)$$

Для такой редукции существуют топологические препятствия, но мы их обсудим позже.

Согласно Теореме 1.7.4 имеет место взаимно однозначное соответствие между редуцированными главными L -подрасслоениями L^hX расслоения LX и глобальными сечениями h расслоения

$$\Sigma := LX/L \rightarrow X^4, \quad (4.6)$$

типичным слоем которого служит фактор-пространство GL_4/L . Следуя принципам геометрического подхода к теории поля, естественно попытаться связать с h какое-либо физическое поле.

Групповое пространство GL_4 диффеоморфно многообразию $\mathbb{R}P^3 \times S^3 \times \mathbb{R}^{10}$, а групповое пространство L — это $\mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}^3$. Фактор-пространство GL_4/L диффеоморфно $S^3 \times \mathbb{R}^7$ и представляет собой 2-листное накрытие пространства $\mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}^7$ пространства билинейных форм в \mathbb{R}^4 , приводимых общими линейными преобразованиями к метрике Минковского η . Отсюда следует, что расслоение Σ (4.6) изоморфно двулистному накрытию ассоциированного с LX расслоения Σ_g псевдоримановых билинейных форм в касательных пространствах к X^4 . Глобальным сечением расслоения Σ_g является *псевдориманова метрика* g на мировом многообразии X^4 , отождествляемая в эйнштейновской теории гравитации с гравитационным полем. Следовательно сечение h расслоения Σ тоже эквивалентным образом описывает гравитационное поле. Мы будем называть его *тетрадным полем* (tetrad field).

Таким образом *гравитационное поле* представляет собой своего рода хиггсовское поле, отвечающее спонтанному нарушению пространственно-временных симметрий. Оно обеспечивает необходимое условие существования дираковских фермионных полей на мировом многообразии.

Если забыть про фермионные поля, нарушение симметрий в теории гравитации является прямым следствием принципа эквивалентности. Будучи сформулированным в геометрических терминах, *принцип эквивалентности* постулирует возможность существования лоренцевских инвариантов на мировом многообразии X^4 . Для этого необходимо, чтобы имела место редукция структурной группы GL_4 главного расслоения LX и ассоциированных с ним расслоений к группе Лоренца L . В этом случае согласно Теореме 1.7.3 существуют атласы этих расслоений с лоренцевскими функциями перехода так, что при переходах с карты на карту лоренцевские инварианты, заданные в таком атласе, сохраняются.

Действительно, пусть дано тетрадное поле h . Рассмотрим Ψ^h атлас главного расслоения LX , задаваемый некоторым семейством локальных сечений $\{z_i^h\}$ расслоения LX , принимающих значения в редуцированном подрасслоении L^hX . Именно о таком атласе

говорится в Теореме 1.7.3. Его функции перехода принимают значения в группе Лоренца L . Будем обозначать ассоциированные с ним атласы ассоциированных расслоений тем же символом Ψ^h . В частности, легко убедиться, что во всяком таком атласе Ψ^h сечение h представляется семейством функций $f_h(z_\xi(x))$, принимающих значения в центре фактор-пространства GL_4/L , а соответствующая псевдориманова метрика g — метрическими функциями, совпадающими с метрикой Минковского η . Поля h и g , записанные в атласе Ψ^h , таким образом дают пример лоренцевских инвариантов, о которых говорит принцип эквивалентности.

Заметим, что в физической интерпретации задание атласа расслоения LX означает фиксацию некоторой системы отсчета, когда в каждой точке x мирового многообразия X^4 восстанавливается репер (тетраду) $z_\xi(x)$ касательных векторов, определяющий локальную систему отсчета в этой точке. В частности, традиционная обобщевариантная формулировка теории гравитации подразумевает выбор только голономных систем отсчета. Хотя остается проблема, как реализовать такие системы отсчета реальными физическими приборами. В этом смысле можно сказать, что всякое гравитационное поле h само определяет некоторое семейство собственных систем отсчета Ψ^h , в которых его метрические функции сводятся к метрике Минковского.

Существенно, что собственные атласы Ψ^h тетрадного поля h в общем случае не являются голономными. Поэтому, если заданы атлас Ψ^h и некоторый голономный атлас $\Psi^T = \{\psi_\xi^T\}$ расслоения LX , тетрадное поле h можно представить семейством GL_4 -значных тетрадных функций

$$\begin{aligned} h_\xi &= \psi_\xi^T \circ z_\xi^h, \\ dx^\lambda &= h_a^\lambda(x) h^a, \end{aligned} \quad (4.7)$$

которые описывают преобразования между базисами $\{dx^\lambda\}$ и $\{h^a\}$ слоев кокасательного расслоения T^*X , соответствующими атласам Ψ^T и Ψ^h . В частности, получаем известное соотношение

$$g^{\mu\nu} = h_a^\mu h_b^\nu \eta^{ab}. \quad (4.8)$$

Ясно, что тетрадное поле h представляется тетрадными функциями $h_a^\lambda(x)$ неоднозначно, а с точностью до калибровочных лоренцевских преобразований, действующих на их индексы a , что отвечает произволу в выборе атласа Ψ^h .

Пусть задано тетрадное гравитационное поле h , а $M^h X$ и S_h — соответственно расслоение на пространства Минковского (4.4) и спинорное расслоение (4.5). Определено послыное представление

$$\gamma_h: T^*X \otimes S_h = (P_h \times (M \otimes V)) / L_s \rightarrow (P_h \times \gamma(M \otimes V)) / L_s = S_h, \quad (4.9)$$

$$\widehat{dx}^\lambda = \gamma_h(dx^\lambda) = h_a^\lambda(x) \gamma^a,$$

кокасательных векторов к многообразию X^4 матрицами Дирака γ на элементах спинорного расслоения S_h . Говорят, что глобальные сечения спинорного расслоения S_h описывают дираковские фермионные поля на многообразии X^4 в присутствии гравитационного поля h . Действительно, пусть A_h — связность на спинорном расслоении S_h , ассоциированная с некоторой связностью на главном расслоении $L^h X$, и

$$\begin{aligned} D &: J^1 S_h \rightarrow T^*X \otimes_{S_h} V S_h, \\ D &= (y_\lambda^A - A^{ab}{}_\lambda(x) I_{ab}{}^A{}_B y^B) dx^\lambda \otimes \partial_A, \end{aligned}$$

— соответствующий ковариантный дифференциал. Тогда композиция $\gamma_h \circ D$ представляется собой дифференциальный оператор первого порядка на спинорном расслоении S_h :

$$\mathcal{D}_h = \gamma_h \circ D : J^1 S_h \rightarrow T^* X \otimes_{S_h} V S_h \rightarrow V S_h, \quad (4.10)$$

$$\dot{y}^A \circ \mathcal{D}_h = h_c^\lambda \gamma^{cA}{}_B (y_\lambda^B - A^{ab}{}_\lambda I_{ab}{}^A{}_B y^B).$$

Это *оператор Дирака*. Здесь использовано то обстоятельство, что вертикальное касательное расслоение $V S_h$ допускает каноническое вертикальное расщепление

$$V S_h = S_h \times S_h,$$

и γ_h в выражении (4.10) — это поднятие

$$\begin{aligned} \gamma_h : T^* X \otimes_{S_h} V S_h &\rightarrow V S_h, \\ \gamma_h(h^a \otimes \dot{y}^A \partial_A) &= \gamma^{aA}{}_B \dot{y}^B \partial_A, \end{aligned}$$

на $V S_h$ морфизма (4.9).

Суть спонтанного нарушения пространственно-временных симметрий, обусловленного гравитационным полем, состоит в том, что для разных гравитационных полей h и h' представления γ_h и $\gamma_{h'}$ не эквивалентны.

Из вида оператора Дирака (4.10) следует, что в общем случае гравитационное взаимодействие описывается парами (h, A_h) тетрадного гравитационного поля h и лоренцевской связности A_h , которая интерпретируется в духе калибровочной теории как калибровочный гравитационный потенциал.

Заметим, что вследствие условия эквивариантности всякая связность A_h на редуцированном подрасслоении $L^h X$ может быть однозначно продолжена до связности Γ_h на всем главном расслоении LX . При этом ковариантные производные тетрадного поля h и соответствующего метрического поля g относительно связностей, ассоциированных с Γ_h , равны нулю. Обратно, связность Γ на главном расслоении LX редуцируема к связности на его лоренцевском подрасслоении $L^h X$ тогда и только тогда, когда сечение h является интегральным сечением ассоциированной с Γ связности на расслоении Σ . Таковую связность мы будем называть *лоренцевской связностью*. Не каждая связность на LX является лоренцевской. Если задана псевдориманова метрика g , всякая *общая линейная связность* Γ допускает разложение

$$\Gamma = \{ \} + S + C \quad (4.11)$$

на символы Кристоффеля $\{ \}$ метрики g , *тензор конторсии* S и *тензор неметричности* C . В голономном атласе они даются следующими координатными выражениями:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\nu\mu} &= \{ \alpha\nu\mu \} + S_{\alpha\nu\mu} + C_{\alpha\nu\mu}, \\ \{ \alpha\nu\mu \} &= \{ \alpha\mu\nu \} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\nu\mu}), \\ S_{\alpha\nu\mu} &= -S_{\nu\alpha\mu} = (\Omega_{\alpha\nu\mu} + \Omega_{\mu\nu\alpha} + \Omega_{\nu\mu\alpha} + C_{\mu\alpha\nu} - C_{\mu\nu\alpha}), \\ \Omega_{\alpha\nu\mu} &= -\Omega_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2} (\Gamma_{\alpha\nu\mu} - \Gamma_{\alpha\mu\nu}), \\ \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\alpha\nu\mu} - \Gamma_{\nu\alpha\mu} &= -2C_{\alpha\nu\mu}, \end{aligned}$$

где Ω — кручение связности Γ . В частности, если связность — лоренцевская, ее разложение относительно соответствующей псевдоримановой метрики g включает только символы Кристоффеля и тензор кручения. При переходе от голономного атласа к атласу Ψ^h , задаваемому тетрадными функциями h_a^λ , имеем соотношение

$$\partial_\lambda h_a^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} h_a^\nu - \Gamma^b_{a\lambda} h_b^\mu = 0.$$

Если Γ — лоренцевская связность, редуцируемая к связности A_h на $L^h X$, то

$$\Gamma^{ab}_{\lambda} = 2A^{ab}_{\lambda}, \quad \Gamma^{ab}_{\lambda} = -\Gamma^{ba}_{\lambda},$$

где A^{ab}_{λ} — коэффициенты локальной 1-формы связности A_h .

В отсутствии фермионной материи, в качестве гравитационных величин можно использовать метрическое поле g и тензор кручения Ω , который входит в разложение (4.11) лоренцевской связности Γ на LX .

Нарушение симметрий в теории гравитации приводит не только к появлению гравитационного поля, но и индуцирует пространственно-временную структуру на мировом многообразии X^4 .

Если структурная группа главного расслоения LX редуцируема к группе Лоренца L , последняя в свою очередь всегда редуцируема к своей максимальной компактной подгруппе $SO(3)$. Это означает, что:

- всякое редуцированное расслоение $L^h X$ содержит главное редуцированное подрасслоение $L^h_0 X$ со структурной группой $SO(3)$;
- существует атлас Ψ^h расслоения LX и ассоциированных расслоений с $SO(3)$ -значными функциями перехода;
- всегда существует глобальное сечение расслоения

$$L^h X / SO(3) \rightarrow X^4,$$

которое может быть представлено нигде не нулевой *тетрадной 1-формой*

$$h^0 = h^0_\mu dx^\mu \quad (4.12)$$

на X^4 .

Более того, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} GL_4 & \longrightarrow & SO(4) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L & \longrightarrow & SO(3) \end{array} \quad (4.13)$$

редукции структурных групп расслоения LX .

Редукция структурной группы L к $SO(3)$, в частности, позволяет задать глобальное поле $(\gamma_h \circ h^0)(x) = \gamma^0$ матриц Дирака γ^0 и построить послынную L -инвариантную метрику (4.3) в спинорном расслоении S_h .

В то же время тетрадная форма (4.12) выделяет 3-мерное ориентируемое подрасслоение FX касательного расслоения TX над X^4 , которое задается соотношением

$$t \lrcorner h^0(x) = 0, \quad t \in F_x X.$$

Его слои $F_x X$ являются пространственно-подобными подпространствами касательных пространств $T_x X$ относительно псевдоримановой метрики g , ассоциированной с h . В результате может быть осуществлено $(3 + 1)$ -разбиение

$$TX = FX \oplus T^0 X \quad (4.14)$$

касательного расслоения на 3-мерное пространственно-подобное подрасслоение FX и ортогональное ему (относительно g) 1-мерное времени-подобное дополнение $T^0 X$. Такое разбиение определяет на мировом многообразии X^4 пространственно-временную структуру, ассоциированную с данным гравитационным полем h , превращая X^4 в пространственно-временное многообразие. При этом расслоение $T^0 X$ указывает направление локального времени в каждой точке $x \in X^4$.

Более того, следствием коммутативности диаграммы (4.13) является следующая известная теорема.

ТЕОРЕМА 4.1.1. Для всякого гравитационного поля g на мировом многообразии X^4 и ассоциированного с ним пространственно-временного разбиения (4.14) с производящей формой h^0 (4.12) существует риманова метрика g^R такая, что

$$g^R = 2h^0 \otimes h^0 - g.$$

□

Риманова метрика g^R из Теоремы 4.1.1 индуцирует согласованную с g функцию расстояния на пространственно-временном многообразии X^4 , которая превращает X^4 в метрическое топологическое пространство. Его топология эквивалентна топологии многообразия на X^4 . Однако для одного и того же гравитационного поля g , но разных пространственно-временных разбиений (4.14) мы имеем разные ассоциированные римановы метрики и разные функции расстояний на X^4 . В физической интерпретации это означает, что в разных пространственно-временных системах отсчета наблюдатели должны наблюдать разные римановы свойства пространства-времени. Известное изменение видимых размеров тел при переходе к движущейся системе отсчета иллюстрирует это явление.

Выше уже отмечалось, что существуют топологические препятствия для редукции структурной группы главного расслоения линейных реперов LX к группе Лоренца и следовательно для существования гравитационного поля, а также спинорной и пространственно-временной структур на многообразии X^4 . Рассмотрим эти препятствия.

Многообразия X^4 классифицируются по следующим характеристическим классам своих касательных расслоений:

- первый класс Понтрягина $p_1(X) \in H^4(X, \mathbb{Z})$,
- класс Эйлера $e(X) \in H^4(X, \mathbb{Z})$ при фиксированной ориентации X^4 ,
- классы Штифеля—Уитни $w_i(X) \in H^i(X, \mathbb{Z}_2)$, $i \leq 2$.

Здесь $H^i(X, \mathbb{Z})$ и $H^i(X, \mathbb{Z}_2)$ обозначают группы симплициальных кохомологий.

Отметим сразу, что, поскольку многообразие X^4 является ориентируемым, класс Штифеля—Уитни $w_1(X)$ равен нулю, или более точно является нулевым элементом группы $H^1(X, \mathbb{Z}_2)$.

Существенно, что, благодаря гомоморфизмам групп симплициальных когомологий $H^*(X, \mathbb{Z})$ в группы $H^*(X, \mathbb{R})$ когомологий Де Рама внешних дифференциальных форм на X^4 класс Понтрягина p_1 и класс Эйлера e могут быть представлены когомологическими классами соответствующих характеристических форм:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{1}{8\pi^2} \text{Tr}(R \wedge R) = \frac{1}{8\pi^2} R^{ab} \wedge R_{ab}, \\ e &= \frac{1}{32\pi^2} \varepsilon_{abcd} R^{ab} \wedge R^{cd}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Заметим, что в этих выражениях должна использоваться 2-форма кривизны R линейной связности Γ на TX , принимающая значения только в алгебре Ли $so(4-k, k)$ ортогональной группы или одной из псевдоортогональных групп:

$$R = \frac{1}{2} R^{ab} I_{ab}, \quad I_{ab} = -I_{ba}.$$

В частности, это может быть кривизна какой-либо римановой связности или лоренцевской связности, если последняя существует на TX .

Если X^4 компактное многообразие, интегрированием характеристических форм (4.15) мы получаем число Понтрягина

$$P_1 = \int_X p_1$$

и эйлерову характеристику

$$\chi = \int_X e$$

многообразия X^4 .

Спинорные расслоения S над X^4 со структурной группой L_s классифицируются по классам Чженя $c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$, $i \leq 2$. При этом, так как структурная группа L_s всегда редуцируема к своей максимальной компактной подгруппе $SU(2)$, класс Чженя $c_1(E)$ спинорного расслоения совпадает с нулевым элементом группы $H^2(X, \mathbb{Z})$.

Классы Чженя совпадают с когомологическими классами характеристических форм Чженя

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{i}{2\pi} \text{Tr} R = 0, \\ c_2 &= \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr}(R \wedge R) = -\frac{1}{32\pi^2} R^{ab} \wedge R_{ab}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

где R — 2-форма кривизны связности A на расслоении S . Она дается выражением

$$R = \frac{1}{2} F^{ab} I_{ab},$$

где I_{ab} — генераторы группы L_s на двумерном комплексном пространстве.

Поскольку существует включение

$$GL_4 \rightarrow GL(4, \mathbb{C}),$$

касательное расслоение TX можно считать ассоциированным с некоторым комплексным расслоением $T^c X$ со структурной группой $GL(4, \mathbb{C})$ так, что имеет место соотношение

$$p_1(X) = -c_2(T^c X).$$

Пусть теперь структурная группа касательного расслоения TX редуцирована к группе Лоренца и S — спинорное расслоение, ассоциированное с TX . Тогда расслоение $T^c X$ ассоциировано с тензорным произведением $S \otimes S^*$ и выполняются соотношения

$$\begin{aligned} p_1(X) &= -c_2(T^c X) = -4c_2(S), \\ w_2(X) &= 0. \end{aligned}$$

Причем, первое соотношение можно получить непосредственно из равенства характеристических форм (4.15) и (4.16), если форма $p_1(X)$ подсчитана в случае лоренцевской связности, ассоциированной со связностью на спинорном расслоении S .

Следующая теорема суммирует топологические условия на многообразии X^4 , чтобы оно допускало гравитационное поле, дираковское фермионное поле и пространственно-временное разбиение (4.14).

ТЕОРЕМА 4.1.2. Указанные выше структуры существуют на некомпактных многообразиях X^4 , если их касательные расслоения тривиальны, и на компактных многообразиях X^4 , если их эйлерова характеристика и классы Штифеля—Уитни $w_{1,2}$ равны нулю, а число Понтрягина P_1 кратно 48. \square

§ 2. Многомерная гравитация

Первая модель многомерной гравитации — *модель Калуца—Клейна* — была предложена в 20-е годы как совместное геометрическое описание гравитации и электромагнетизма. Ее главным атрибутом является 5-мерное пространство X^5 с координатами $(x^A, A = 0, 1, 2, 3; 5)$ и метрикой

$$g^{AB} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -g^\mu \\ -g^\nu & 1 + g^\lambda g_\lambda \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Компоненты метрики g^{AB} предполагаются независимыми от координаты x^5 , а на волновые функции в 5-мерном пространстве накладывается условие цикличности по координате x^5 , т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x^5} &= im\Psi, \\ \Psi &= \psi(x^0, \dots, x^3) \exp(imx^5), \end{aligned} \quad (4.18)$$

при целом m .

Это означает, что пространство X^5 представляет собой прямое произведение

$$X^4 \times S^1$$

4-мерного пространства-времени и окружности S^1 с циклической координатой x^5 . При этом выражение (4.17) для метрики g^{AB} и выражение (4.18) для волновых функций ψ на X^5 через метрику $g^{\mu\nu}$ и функции ψ на X^4 составляют условия проекции физических, геометрических и других объектов на пространстве X^5 в пространство-время X^4 . Например, волновое уравнение

$$\square\Psi = 0$$

на пространстве X^5 приводится на пространстве X^4 к уравнению Прока

$$(\square - m^2)\psi = 0,$$

а уравнения Эйнштейна для метрики g^{AB} — к уравнениям Эйнштейна для метрики $g^{\mu\nu}$ и уравнениям Максвелла для величин g^μ , которые в модели Калуца—Клейна интерпретируются как электромагнитный потенциал.

Все эти моменты присутствуют и в обобщенных *многомерных* моделях гравитации, когда на $(4 + d)$ -мерном пространстве компоненты метрики с индексами высших размерностей, как оказалось, соответствуют калибровочным потенциалам на 4-мерном пространственно-временном многообразии. Это соответствие и стало главной причиной широкого внимания к многомерным моделям как одного из путей объединения гравитации с другими фундаментальными взаимодействиями. Мы посвятим настоящий параграф обоснованию этого ключевого пункта, а именно доказательству следующего факта.

Если G — компактная группа преобразований многообразия E с изоморфными орбитами в E , тогда существует взаимно однозначное соответствие между G -инвариантными метриками на E и тройками (γ, A, h) метрики γ на пространстве орбит M группы G в E , калибровочных полей A группы N/H , где H — стабилизатор точки в E и N — нормализатор подгруппы H в G , и некоторых скалярных полей h , характеризующих внутреннюю геометрию орбит.

Пусть E — многообразие, на котором задано правое действие компактной связной группы Ли G , т. е.

$$G \ni g : E \ni q \mapsto qg \in E.$$

Для всякой точки $q \in E$ обозначим $G(q)$ орбиту группы G в E , проходящую через q , а посредством H_q — стабилизатор точки q . Для точек q и q' , принадлежащих одной и той же орбите, подгруппы H_q и $H_{q'}$ сопряжены в G , а значит изоморфны. Для точек, принадлежащих разным орбитам, это, вообще говоря, не так. Однако в дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда стабилизаторы всех точек $q \in E$ сопряжены с некоторой стандартной подгруппой H в G .

Нормализатором подгруппы H в G называется максимальная подгруппа N группы G такая, что H является в N *инвариантной подгруппой (нормальным делителем)*, т. е.

$$N = \{g \in G : gH = Hg\}.$$

Рассмотрим правое фактор-пространство G/H и фактор-группу N/H . На G/H определено правое действие группы G по правилу

$$g' : G/H \ni [g] \mapsto [g]g' = [gg'] \in G/H, \quad (4.19)$$

где

$$[g] = [gh], \quad h \in H,$$

обозначает правый класс смежности элемента g из G . Зададим левое действие

$$n : G/H \ni [g] \mapsto [ng] \in G/H \quad (4.20)$$

группы N на G/H . Оно перестановочно с правым действием G на G/H :

$$n([g]g') = n[gg'] = [nng'] = [ng]g' = (n[g])g'.$$

Более того, действие (4.20) зависит только от класса смежности $[n]$ элемента n в N/H :

$$nh'[g] = n[h'g],$$

т. е. сводится к действию

$$[n][g] = [ng] \quad (4.21)$$

фактор-группы N/H на G/H .

Рассмотрим главное расслоение $P_{N/H}$ со структурной группой N/H над базой M и ассоциированное с ним расслоение $Y_{G/H}$ с типичным слоем G/H , на котором определено правое действие группы G :

$$g' : (q, [g])/(N/H) \mapsto (q, [gg'])/(N/H), \quad (4.22)$$

где $q \in P_{N/H}$ и действие группы N/H на

$$P_{N/H} \times (G/H)$$

имеет вид

$$[n] : (q, [g]) \mapsto (q[n], [n]g) = (q[n], [ng]).$$

Поскольку правое действие (4.19) группы G на G/H и левое действие (4.21) группы N/H на G/H перестановочны, действие (4.21) группы G на $P_{G/H}$ является послойным. На каждом слое, как на своей орбите, группа G действует транзитивно, но не свободно (поскольку центр фактор-пространства G/H имеет своим стабилизатором подгруппу H).

Существует вложение $P_{N/H}$ на подмногообразии в $P_{G/H}$. Оно осуществляется отображением

$$\gamma : P_{N/H} \ni q \mapsto (q, [\widehat{1}])/(N/H) \in P_{G/H}.$$

Причем, если $q \neq q'$, то $\gamma(q) \neq \gamma(q')$, поскольку центр $[\widehat{1}]$ фактор-пространства G/H не имеет стабилизатора в N/H и

$$(q[n], [\widehat{1}])/(N/H) = (q, [n])/(N/H) \neq (q, [\widehat{1}])/(N/H).$$

Используем все приведенные конструкции для доказательства следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4.2.1. Пусть E — многообразие, на котором задано правое действие группы G такое, что стабилизаторы всех точек из E сопряжены с некоторой подгруппой H в G . Пусть M — множество орбит группы G в E . Тогда E имеет структуру расслоения $\pi : E \rightarrow M$ над M с типичным слоем G/H и структурной группой N/H . \square

Выделим в E подпространство точек, стабилизатором которых является подгруппа H :

$$Q = \{q \in E : qH = q\}.$$

Заметим, что, если $q \in Q$, то $qg \in Q$ тогда и только тогда, когда $g \in N$, поскольку

$$qgH = qHg = qg$$

лишь при $g \in N$. В силу этого свойства на Q определено правое действие N/H и оно свободно. Это превращает Q в главное (N/H) -расслоение $P_{N/H}$ с базой M . Зададим отображение

$$Q \times G/H \ni (q, [g]) \mapsto qg \in E.$$

Оно обладает свойством

$$(q[n], [n]^{-1}g) \mapsto qg, \quad [n] \in N/H,$$

и задает на E структуру ассоциированного с $P_{N/H}$ расслоения с типичным слоем G/H . Все описанные конструкции и отображения могут быть сделаны гладкими.

Рассмотрим теперь индуцируемые H , N и N/H разбиения алгебры Ли \mathcal{G} группы G . Пусть H — компактная связная подгруппа Ли группы G . Обозначим $(,)$ невырожденную G -инвариантную билинейную форму на алгебре \mathcal{G} , на которой G действует по присоединенному представлению $\text{ad } G$. Пусть \mathcal{H} — алгебра Ли группы H и \mathcal{H}_H — ее ортогональное дополнение в \mathcal{G} . Причем, поскольку

$$(\mathcal{H}_H, H) = ((\text{ad } H)(\mathcal{H}_H), (\text{ad } H)(H)) = ((\text{ad } H)(\mathcal{H}_H), H) = 0,$$

имеем

$$(\text{ad } H)(\mathcal{H}_H) = \mathcal{H}_H.$$

Алгебра \mathcal{H} и ее ортогональное дополнение \mathcal{H}_H образуют разбиение

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \mathcal{H} + \mathcal{H}_H, \\ [\mathcal{H}, \mathcal{H}_H] &\subset \mathcal{H}_H, \end{aligned} \tag{4.23}$$

алгебры Ли \mathcal{G} . Так же как алгебра Ли \mathcal{G} отождествляется с касательным пространством к многообразию группы Ли G в единице группы, векторное пространство \mathcal{H}_H , наделенное действием $\text{ad } H$, может быть отождествлено с касательным пространством к многообразию G/H в его центре.

Аналогичное разбиение имеет место для алгебры Ли \mathcal{N} группы N :

$$\mathcal{N} = \mathcal{H} + \mathcal{K}_H,$$

где \mathcal{K}_H — ортогональное дополнение \mathcal{H} в \mathcal{N} и

$$[\mathcal{H}, \mathcal{K}_H] \subset \mathcal{K}_H.$$

В то же время, поскольку H — инвариантная подгруппа N , имеем

$$[\mathcal{H}, \mathcal{K}_H] \subset \mathcal{H}.$$

Отсюда следует, что $\{\mathcal{H}, \mathcal{K}_H\} = 0$, и ортогональное дополнение \mathcal{K}_H образует подпространство векторов в касательном пространстве \mathcal{H}_H к G/H , инвариантных относительно действия подгруппы H . Более того,

$$[\mathcal{K}_H, \mathcal{K}_H] \subset \mathcal{K}_H,$$

и поэтому \mathcal{K}_H является подалгеброй Ли в \mathcal{N} , которая может быть отождествлена с алгеброй Ли группы $K = N/H$.

Введем также ортогональное дополнение \mathcal{F}_N алгебры Ли \mathcal{N} в \mathcal{G} :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \mathcal{N} + \mathcal{F}_N, & [\mathcal{N}, \mathcal{F}_N] &\subset \mathcal{F}_N, \\ \mathcal{F}_H &= \mathcal{K}_H + \mathcal{F}_N, & [\mathcal{K}, \mathcal{F}_N] &\subset \mathcal{F}_N, \\ \mathcal{G} &= \mathcal{K} + \mathcal{K}_H + \mathcal{F}_N. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Фиксируем в алгебре Ли \mathcal{G} базис I_A :

$$[I_A, I_B] = c_{AB}^D I_D,$$

согласованный с разбиением (4.24), т.е.

$$\begin{aligned} I_A &= \{I_i, I_\alpha : I_i \in \mathcal{K}, I_\alpha \in \mathcal{F}_H\}, \\ I_\alpha &= \{I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2} : I_{\alpha_1} \in \mathcal{K}_H, I_{\alpha_2} \in \mathcal{F}_H\}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Обозначим $\Lambda_B^A(q)$ морфизмы присоединенного представления G на \mathcal{G} . Тогда для $n \in N$ матрица $\Lambda(n)$ имеет следующий вид

$$\Lambda(n) = \begin{pmatrix} \Lambda_i^j(n) & 0 \\ 0 & \Lambda_\alpha^\beta(n) \end{pmatrix},$$

где $\Lambda_i^j(n)$ — матрицы представления N на \mathcal{K} , а $\Lambda_\alpha^\beta(n)$ — матрицы представления N на $(\mathcal{K}_H + \mathcal{F}_N)$.

Обозначим τ_A фундаментальное поле на E , отвечающее генератору I_A группы преобразований G на E :

$$\tau_A(q) = \frac{d}{ds} (q \exp(sI_A))|_{s=0}. \quad (4.26)$$

Поскольку имеется гомоморфизм алгебры Ли \mathcal{G} в алгебру Ли векторных полей на E , образом которого являются фундаментальные поля, получаем

$$[\tau_A, \tau_B](q) = c_{AB}^D \tau_D(q), \quad q \in E. \quad (4.27)$$

Векторы $\tau_A(q)$ в $q \in E$ касательны к линиям, вдоль которых переносится точка q под действием преобразований $\exp(tI_A)$ при малых параметрах t . Поэтому все они лежат в вертикальном пространстве $V_q E$ к E в точке q , т.е. в подпространстве, касательном к слою E_x , $x \in M$, расслоения $P_{N/H}$, проходящего через точку $q \in E$ (к орбите $G(q) = E_{\pi(q)}$ в E). В частности, поскольку

$$\dim V_q E = \dim G - \dim H < \dim G,$$

система векторов $\{\tau_A(q)\}$ не является линейно независимой в $V_q E$.

Из определения (4.26) следует, что поля τ_i (см. обозначения (4.25)) исчезают на подмногообразии Q в E , поскольку $qE = q$, $q \in Q$, тогда как векторы $\{\tau_\alpha(q)\}$ линейно независимы в точках $q \in Q$, а векторы τ_{α_1} касательны к Q . Следовательно $\{\tau_\alpha(q)\}$ линейно независимы и в некоторой окрестности U подмногообразия Q в E так, что

$$[\tau_\alpha, \tau_\beta](q) = f_{\alpha\beta}^\gamma \tau_\gamma(q), \quad q \in U. \quad (4.28)$$

Сравнивая (4.28) с (4.27), получаем, что

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}^{\gamma}(q)\tau_{\gamma}(q) &= c_{\alpha\beta}^A\tau_A(q), & q \in U, \\ f_{\alpha\beta}^{\gamma}(q) &= c_{\alpha\beta}^{\gamma}, & q \in Q. \end{aligned}$$

Беря от обеих частей этого равенства коммутатор с полем τ_{δ} в точках подмногообразия Q , находим

$$\tau_{\delta}(f_{\alpha\beta}^{\gamma})(q) = c_{\alpha\beta}^A c_{\delta A}^{\gamma} - c_{\alpha\beta}^{\mu} c_{\delta\mu}^{\gamma} = c_{\alpha\beta}^i c_{\delta i}^{\gamma}. \quad (4.29)$$

Из (4.26) также следует (с учетом $\tau_i(q) = 0$, $q \in Q$), что

$$\tau_{\alpha}(qn) = \Lambda_{\alpha}^{\beta}(n)\tau_{\beta}(q), \quad q \in Q, \quad n \in N. \quad (4.30)$$

Рассмотрим теперь G -инвариантную метрику g на E , т. е. производные Ли метрики g вдоль полей τ_A равны 0. Покажем, что g определяет следующие объекты:

- G -инвариантную метрику h_x на каждом слое E_x ;
- G -инвариантное распределение горизонтальных пространств $H_q E$, $q \in E$, на E , или эквивалентно связность на главном расслоении $P_{N/H}$;
- метрику γ на M .

Обратно, метрика g однозначно восстанавливается по указанным выше величинам.

Метрика g на E задает скалярное произведение двух вертикальных векторов и тем самым индуцирует G -инвариантную метрику h_x на каждом слое E_x . Эту метрику достаточно знать в какой-либо одной точке $q \in E_{x=\pi(q)}$ слоя E_x , из которой, используя ее G -инвариантность, она может быть перенесена во все точки слоя E_x . Выберем некоторое локальное сечение $\sigma : M \rightarrow Q$ главного расслоения $P_{N/H}$, определяющее карту этого и ассоциированного с ним расслоений в окрестности $x \in M$, и будем задавать метрику h_x ее значением

$$h(x) = g(\sigma(x))$$

в точке $q = \sigma(x) \in Q$. В качестве базисов вертикальных касательных пространств $V_q E$ в точках $q \in Q$ можно выбрать линейно независимые векторы $\{\tau_{\alpha}(q)\}$. В таком базисе метрика $h(x)$ имеет компоненты

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(q) = g_q(\tau_{\alpha}(q), \tau_{\beta}(q)).$$

При переходе к другому локальному сечению

$$\sigma'(x) = \sigma(x)n(x), \quad n(x) \in N,$$

используя закон преобразований (4.30), получаем

$$h'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(qn) = \Lambda_{\alpha}^{\mu}(n)\Lambda_{\beta}^{\nu}(n)g_{\mu\nu}(q) = \Lambda_{\alpha}^{\mu}(n)\Lambda_{\beta}^{\nu}(n)h_{\mu\nu}.$$

В частности, если $n \in H \subset N$, то $\sigma = \sigma'$ и

$$h_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha}^{\mu}(n)\Lambda_{\beta}^{\nu}(n)h_{\mu\nu}, \quad (4.31)$$

т. е. матрица $h_{\alpha\beta}(x)$ является H -инвариантной. Причем, поскольку $[\mathcal{H}, \mathcal{K}_H] = 0$ и матрицы $\Lambda_\alpha^\mu(n)$, $n \in H$, имеют вид

$$\Lambda_\alpha^\mu = \begin{pmatrix} \delta_{\alpha_1}^{\mu_1} & 0 \\ 0 & \Lambda_{\alpha_2}^{\mu_2} \end{pmatrix},$$

из условия (4.31) можно получить ограничения на форму матрицы $h_{\alpha\beta}$, а именно:

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} h_{\alpha_1\beta_1} & 0 \\ 0 & h_{\alpha_2\beta_2} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что векторы $\tau_{\alpha_1}(q)$ и $\tau_{\alpha_2}(q)$, $q \in Q$, ортогональны относительно метрики g , а тем самым векторы τ_{α_2} ортогональны подмногообразию Q .

Обозначим $H_q E$ ортогональное относительно метрики g дополнение в касательном пространстве $T_q E$ к E в точке $q \in E$ вертикального пространства $V_q E$. В частности, пространства $H_q E$ в точках $q \in Q$ ортогональны векторам τ_{α_2} , а значит являются касательными к подмногообразию Q . Прямая сумма $H_q E$ и пространства $V_q Q$, натянутого на векторы $\tau_{\alpha_1}(q)$, касательные к слою $Q_{x=\pi(q)}$, образует касательное пространство к Q в точках $q \in Q$. Поскольку метрика g является G -инвариантной, распределение $H_q E$ тоже G -инвариантно, т. е.

$$(H_q E)a = H_{q_a} E, \quad a \in G.$$

Тем самым распределение $H_q E$ при ограничении на многообразии Q удовлетворяет всем требованиям к распределению горизонтальных подпространств на главном расслоении $Q = P_{N/H}$, и, следовательно, вводит некоторую связность на $P_{N/H}$.

Метрика γ на M задается следующим образом. Пусть t, t' — два касательных вектора к M в точках $x \in M$. Выберем произвольную точку q в слое E_x над x и определим

$$\gamma_x(t, t') = g_q(t_q^H, t_q'^H), \quad (4.32)$$

где t_q^H и $t_q'^H$ — поднятия t и t' в горизонтальное пространство $H_q E$. В силу G -инвариантности метрики g это определение не зависит от выбора точки q .

Обратно, предположим известными метрику γ на M , распределение $H_q E$, $q \in Q$, и G -инвариантную метрику h_x на слоях E_x . Возьмем произвольные два вектора $t_q, t_q' \in T_q E$. Пусть $q_0 \in Q$ — точка такая, что $q = q_0 a$ для некоторого элемента $a \in G$, векторы $\pi^*(t_q)$ и $\pi^*(t_q')$ — проекции t_q и t_q' на $T_{\pi(q)} M$ и векторы t_q^H и $t_q'^H$ — поднятия $\pi^*(t_q)$ и $\pi^*(t_q')$ в горизонтальное векторное пространство $H_{q_0} E$. Тогда векторы

$$t_q - t_q^H a, \quad t_q' - t_q'^H a$$

— вертикальные и метрика g может быть определена следующим образом;

$$g_q(t_q, t_q') = \gamma_x(\pi(t_q), \pi(t_q')) + h_x(t_q - t_q^H a, t_q' - t_q'^H a). \quad (4.33)$$

Например, пусть $q \in Q$ и векторы t_q, t_q' — горизонтальные. Тогда второй член в выражении (4.33) отсутствует и оно сводится к выражению (4.32). Если векторы t_q, t_q' имеют только вертикальные составляющие, то

$$\pi^*(t_q) = \pi^*(t_q') = 0,$$

и выражение (4.33) воспроизводит определение метрики h_x .

Перепишем выражение (4.33) для метрики g в компонентах. Пусть $\{x^\mu\}$ — некоторая локальная система координат на многообразии M и $\{e_\mu(q)\}$ — горизонтальные поднятия векторов ∂_μ в $H_q E$. Векторы $\{e_\mu(q), \tau_\alpha(q)\}$ образуют базис касательного пространства $T_q E$ к E в точках подмногообразия Q и некоторой его окрестности U . Поскольку векторы $e_\mu(q)$ и $\tau_\alpha(q)$ ортогональны относительно метрики g , последняя в базисе $\{e_\mu(q), \tau_\alpha(q)\}$ имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} \gamma_{\mu\nu}(x) & 0 \\ 0 & g_{\alpha\beta}(x, y) \end{pmatrix},$$

где

$$(x, y) \in M \times (G/H)$$

— локальная система координат

$$q = [\sigma(x)]_y, \quad x = \pi(q),$$

на E , определяемая локальным сечением σ главного расслоения Q , и

$$g_{\mu\nu}(x, y) = g(e_\mu(q), e_\nu(q)) = \gamma(\partial_\mu, \partial_\nu) = \gamma_{\mu\nu}(x).$$

Выразим теперь e_μ через ∂_μ . В локальной системе координат

$$(x, a) \in M \times (N/H), \quad q = [\sigma(x)]_a, \quad a \in N/H,$$

определяемой сечением σ на Q , форма связности \bar{A} на Q в точках $q = (x, \hat{1})$ имеет вид

$$\bar{A} = -A_\mu^{\alpha_1}(x) I_{\alpha_1} dx^\mu + I_{\alpha_1} d\tau^{\alpha_1}.$$

Из условия $\bar{A}(e_\mu) = 0$ находим

$$e_\mu(x, \hat{1}) = \partial_\mu + A_\mu^{\alpha_1}(x) \tau_{\alpha_1}(x, \hat{1}).$$

Тогда, учитывая, что

$$g_{\alpha\beta}(\sigma(x)) = g_{\alpha\beta}(x, \hat{1}) = h_{\alpha\beta}(x),$$

выражение (4.33) для метрики g в точках $q = (x, \hat{1})$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} g &= \gamma^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu + h^{\alpha\beta} \tau_\alpha \otimes \tau_\beta = \\ &= \gamma^{\mu\nu} (\partial_\mu + A_\mu^{\alpha_1} \tau_{\alpha_1}) \otimes (\partial_\nu + A_\nu^{\beta_1} \tau_{\beta_1}) + h^{\alpha\beta} \tau_\alpha \otimes \tau_\beta = \\ &= \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu + \gamma^{\mu\nu} A_\mu^{\alpha_1} \tau_{\alpha_1} \otimes \partial_\nu + \gamma^{\mu\nu} A_\nu^{\beta_1} \partial_\mu \otimes \tau_{\beta_1} + \\ &\quad + (h^{\alpha_1\beta_1} + \gamma^{\mu\nu} A_\mu^{\alpha_1} A_\nu^{\beta_1}) \tau_{\alpha_1} \otimes \tau_{\beta_1} + h^{\alpha_2\beta_2} \tau_{\alpha_2} \otimes \tau_{\beta_2}. \end{aligned}$$

Это означает, что в точках $q = (x, \hat{1}) \in Q \subset E$ в базисе $\{\partial_\mu, \tau_{\alpha_1}(x, \hat{1})\}$ контравариантные компоненты G -инвариантной метрики g на E имеют вид

$$g(x, \hat{1}) = \begin{pmatrix} \gamma^{\mu\nu} & \gamma^{\mu\nu} A_\mu^{\alpha_1} & 0 \\ \gamma^{\mu\nu} A_\nu^{\beta_1} & h^{\alpha_1\beta_1} + \gamma^{\mu\nu} A_\mu^{\alpha_1} A_\nu^{\beta_1} & 0 \\ 0 & 0 & h^{\alpha_2\beta_2} \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Таким образом она выражается через:

- компоненты метрики $\gamma^{\mu\nu}$ на “пространстве-времени” M (хотя надо подчеркнуть, что существование на E инвариантной метрики с наперед заданной сигнатурой не гарантировано);
- калибровочные потенциалы $A_\mu^{\alpha'}$ группы N/H на M ;
- мультиплет скалярных полей $h^{\alpha\beta}$ — компоненты метрики во “внутреннем” пространстве G/H .

Приведем еще выражение для скалярной кривизны метрики g на E :

$$R = R_\gamma + h^{\beta\beta'} \left(\frac{1}{2} c_{\alpha\beta}^\gamma c_{\beta'\gamma}^\alpha - \frac{1}{4} h^{\alpha\alpha'} h_{\gamma\gamma'} c_{\alpha\beta}^\gamma c_{\alpha'\beta'}^{\gamma'} + c_{\gamma\beta}^{\alpha'} c_{\beta'\alpha'}^\gamma - c_{\alpha\beta}^\alpha c_{\gamma\beta'}^\gamma \right) - \frac{1}{4} F^{\alpha\mu\nu} F_{\alpha\mu\nu} - \nabla_\mu (h^{\alpha\beta} D^\mu h_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} (D_\mu h_{\alpha\gamma} D^\mu h_{\alpha\delta} + D_\mu h_{\alpha\beta} D^\mu h_{\gamma\delta}), \quad (4.35)$$

которая выражается через ковариантные производные ∇_μ и кривизну R_γ метрики γ на M , ковариантные производные D_μ и напряженность F калибровочных потенциалов A группы N/H и метрику h на G/H .

Выражения типа (4.34) и (4.35) составляют математическую основу многомерных объединенных моделей типа Калуца—Клейна.

§ 3. Супергравитация

Одним из перспективных кандидатов на объединение фундаментальных взаимодействий, включая гравитацию, является теория суперсимметрий и супергравитации. Введение суперсимметрий основывается на том, что классические поля образуют \mathbb{Z}_2 -градуированную суперкоммутативную алгебру E , т. е.

$$\phi \otimes \phi' = -\phi' \otimes \phi,$$

когда ϕ и ϕ' — только фермионные (нечетные) элементы E , и

$$\phi \otimes \phi' = \phi' \otimes \phi$$

в остальных случаях. На этой алгебре, кроме обычных симметрий, могут быть заданы преобразования суперсимметрий, переводящие бозонные и фермионные поля друг в друга.

Рассмотрим линейные операторы, действующие на алгебре E . На множестве этих операторов также можно задать \mathbb{Z}_2 -градуировку, полагая четными (соотв. нечетными) операторы, не меняющие (соотв. меняющие на противоположную) четность элементов из E .

Введение нечетных операторов на \mathbb{Z}_2 -градуированной алгебре полей E приводит к обобщению понятия алгебры Ли. Элементами алгебры Ли являются генераторы I четных преобразований, которые действуют на тензорные произведения полей по закону

$$I(\phi \otimes \phi') = I(\phi) \otimes \phi' + \phi \otimes I(\phi'). \quad (4.36)$$

Определим действие на тензорное произведение полей генераторов нечетного преобразования Q . Пусть ϕ и ϕ' — нечетные элементы E . Тогда, чтобы удовлетворить условию

$$Q(\phi \otimes \phi') = -Q(\phi' \otimes \phi),$$

надо по аналогии с (4.36) положить

$$Q(\phi \otimes \phi') = Q(\phi) \otimes \phi' - \phi \otimes Q(\phi').$$

Таким образом при перестановке нечетного генератора с нечетным элементом из E появляется множитель -1 .

Рассмотрим теперь действие четных операторов QQ' и $Q'Q$:

$$\begin{aligned} QQ'(\phi \otimes \phi') &= (QQ')(\phi) \otimes \phi' + (-1)^{|\phi|+1} Q(\phi) \otimes Q'(\phi') + \\ &\quad + (-1)^{|\phi|} Q'(\phi) \otimes Q(\phi') + \phi \otimes (QQ')(\phi'), \\ Q'Q(\phi \otimes \phi') &= (Q'Q)(\phi) \otimes \phi' + (-1)^{|\phi|+1} Q'(\phi) \otimes Q(\phi') + \\ &\quad + (-1)^{|\phi|} Q(\phi) \otimes Q'(\phi') + \phi \otimes (Q'Q)(\phi'), \end{aligned} \quad (4.37)$$

где $|\phi|$ обозначает четность элемента ϕ . Действие (4.37) отличается от действия (4.36) четного генератора I алгебры Ли. Как видно из выражения (4.37), нужным образом будет действовать антикоммутиатор

$$[Q, Q'] = QQ' + Q'Q,$$

который и представляет собой генератор некоторого четного преобразования.

Таким образом рассмотрение нечетных операторов на \mathbb{Z}_2 -градуированной алгебре полей E приводит к обобщению конструкции алгебры Ли до супералгебры Ли.

Супералгеброй Ли называется \mathbb{Z}_2 -градуированное векторное пространство

$$L = L^0 \oplus L^1,$$

с заданной на нем билинейной операцией $[\cdot, \cdot]$, удовлетворяющей следующим условиям

$$\begin{aligned} [I, I'] &= (-1)^{|I||I'|+1} [I', I], \\ [I, [I', I'']] &= [[I, I'], I''] + (-1)^{|I||I'|} [I', [I, I'']]. \end{aligned}$$

Четная часть L^0 супералгебры Ли L является алгеброй Ли, а коммутатор

$$[L^0, L^1] \subset L^1$$

задает представление алгебры Ли

$$L^0 : L^1 \rightarrow L^1$$

на пространстве нечетной части L^1 супералгебры Ли. Это позволяет классифицировать полупростые супералгебры Ли, используя классификацию Картана алгебр Ли.

Линейные представления супералгебр Ли реализуются в \mathbb{Z}_2 -градуированных векторных пространствах

$$V^{n,m} = V^0 \oplus V^1 = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m.$$

При этом четные генераторы не меняют четность элемента пространства представления, т. е. имеют вид

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где A — $(n \times n)$ -матрицы и B — $(m \times m)$ -матрицы.

Подчеркнем, что супералгебра Ли является алгеброй над полем \mathbb{R} , т. е. ее коэффициенты — вещественные числа. Однако переход к групповым нечетным преобразованиям требует расширения числового поля до алгебры Грассмана Λ . Это вызвано следующим обстоятельством.

Пусть g — оператор линейного нечетного преобразования в алгебре E . Естественно потребовать, чтобы действие g на тензорное произведение полей имело обычный вид

$$g(\phi \otimes \phi') = g(\phi) \otimes g(\phi'). \quad (4.38)$$

Пусть ϕ и ϕ' — нечетные элементы алгебры E . Тогда

$$g(\phi \otimes \phi') = -g(\phi' \otimes \phi) = -g(\phi') \otimes g(\phi). \quad (4.39)$$

Сравнивая (4.38) и (4.39), видим, что элементы $g(\phi)$ и $g(\phi')$ также нечетны, что противоречит предположению, что g меняет четность.

Это противоречие можно устранить, расширяя поле \mathbb{R} до алгебры Грассмана Λ и заменяя супералгебру Ли на алгебру Ли, являющуюся ее Λ -оболочкой.

Алгеброй Грассмана Λ называется ассоциативная алгебра над полем \mathbb{R} (или \mathbb{C}) с единицей, обладающая канонической системой из l образующих

$$\chi^{i_1}, \dots, \chi^{i_k}, \quad \chi^i \chi^j + \chi^j \chi^i = 0.$$

Алгебра Грассмана является суперкоммутативной алгеброй. Ее четная (соотв. нечетная) часть Λ^0 (соотв. Λ^1) образована всевозможными линейными комбинациями произведений четного (соотв. нечетного) числа образующих. Имеется вложение поля \mathbb{R} в Λ на $\mathbb{R}\hat{1}$, где $\hat{1}$ — единица алгебры Λ . Базис алгебры Λ как вещественного векторного пространства образуют элементы вида

$$\chi^{i_1} \dots \chi^{i_k}, \quad i_1 < \dots < i_k, \quad k = 0, 1, \dots, l,$$

где $[i_1, \dots, i_k]$ — всевозможные упорядоченные наборы чисел от 0 до l и $\chi^0 = \hat{1}$. Размерность этого пространства равна 2^l .

Расширение поля \mathbb{R} до алгебры Грассмана означает переход от векторных пространств над \mathbb{R} к Λ -модулям, т. е. к тем же линейным пространствам, но с коэффициентами из Λ . При этом \mathbb{Z}_2 -градуированное векторное пространство $V^{n,m}$ над \mathbb{R} превращается в \mathbb{Z}_2 -градуированный Λ -модуль, в котором четность элемента λv ($\lambda \in \Lambda$, $v \in V^{n,m}$) дается суммой

$$|\lambda v| = (|\lambda| + |v|) / \text{mod } 2$$

четностей элементов λ и v . Например, четная часть Λ -модуля имеет вид

$$(\Lambda^0 \otimes V^0) \oplus (\Lambda^1 \otimes V^1). \quad (4.40)$$

Она называется *грассмановой Λ -оболочкой* \mathbb{Z}_2 -градуированного векторного пространства $V^{n,m}$ и представляет собой, с одной стороны, Λ^0 -модуль, а с другой стороны, $2^{l-1}(n+m)$ -мерное вещественное векторное пространство

$$\left(\mathbb{R}^{2^{l-1}} \otimes \mathbb{R}^n \right) \oplus \left(\mathbb{R}^{2^{l-1}} \otimes \mathbb{R}^m \right). \quad (4.41)$$

В частности, взятие Λ -оболочки от супералгебры Ли делает все ее элементы четными и превращает ее в алгебру Ли. Генерируемые элементами этой алгебры, например посредством экспоненциального отображения

$$\lambda I \mapsto \exp(\lambda I), \quad |\lambda| = |I|,$$

групповые преобразования также являются четными. Это элементы супергруппы Ли.

Среди супералгебр Ли, действующих на \mathbb{Z}_2 -градуированной алгебре классических полей, особое место занимает супералгебра Пуанкаре $(L_{ab}, P_\mu, Q_A, Q_{B'})$, которая (не выписывая коммутаторы лоренцевских генераторов L_{ab}) задается соотношениями

$$\begin{aligned} [Q_A, Q_{B'}] &= 2\sigma^\mu_{AB'} P_\mu, \\ [P_\mu, P_\nu] &= 0, \\ [Q_A, Q_B] &= [Q_{A'}, Q_{B'}] = 0, \\ [P_\mu, Q_A] &= [P_\mu, Q_{B'}] = 0, \end{aligned} \quad (4.42)$$

где A и B' — индексы 2-компонентных (непунктирных и пунктирных) вейлевских спиноров, $\sigma^{1,2,3}$ — матрицы Паули и $\sigma^0 = -1$. Дело в том, что эта супералгебра оставляет инвариантным совместный функционал действия бозонного и фермионного полей, хотя и путем введения вспомогательного поля.

Например, пусть ϕ — скалярное поле, а ψ_A — вейлевское спинорное поле и $F_{AB} = -F_{BA}$ — вспомогательное псевдоскалярное поле. Представление супералгебры (4.42) на мультиплете

$$(\phi, \psi_A, F_{AB})$$

выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_A \phi &= \sqrt{2} \psi_A, & Q_{B'} \phi &= 0 \\ Q_A \psi_B &= \sqrt{2} F_{AB}, & Q_{B'} \psi_C &= i\sqrt{2} \sigma^\mu_{CB'} \partial_\mu \phi, \\ Q_A F_{BC} &= 0, & Q_{B'} F_{AC} &= i\sqrt{2} \sigma^\mu_{CB'} \partial_\mu \psi_A, \end{aligned} \quad (4.43)$$

Введение вспомогательного поля необходимо, чтобы антикоммутатор $[Q_A, Q_{B'}]$ сводился к генераторам трансляций P_μ . Легко проверить, что супералгебра (4.42) в представлении (4.43) оставляет инвариантным функционал действия

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (i\partial_\mu \bar{\psi} \sigma^\mu \psi + \phi^* \square \phi + F^* F).$$

Инвариантность этого функционала в общем случае, однако, нарушается при переходе к неинфинитезимальным калибровочным суперпреобразованиям Пуанкаре.

Чтобы функционал действия оставался инвариантным относительно конечных трансляций, надо предположить, что последние сопровождаются также преобразованиями координатного пространства

$$x^\mu \mapsto x^\mu + a^\mu(x).$$

Однако в рамках супергруппы Пуанкаре преобразования трансляций могут возникать в результате суперпозиции преобразований с нечетными генераторами Q :

$$\begin{aligned} \exp(\lambda^A Q_A) \exp(\lambda^{B'} Q_{B'}) &= \exp\left(\lambda^A Q_A + \lambda^{B'} Q_{B'} + \frac{1}{2} [\lambda^A Q_A, \lambda^{B'} Q_{B'}] + \dots\right) \\ &= \exp\left(\lambda^A Q_A + \lambda^{B'} Q_{B'} + \lambda^A \lambda^{B'} \sigma^\mu_{AB'} P_\mu + \dots\right). \end{aligned}$$

Это означает, что координатное пространство X , реализующее представление группы трансляций, необходимо расширить до пространства, допускающего представление супергруппы Пуанкаре.

Таковым могло бы быть суперпространство, параметризуемое как обычными координатами x , так и “спинорными” координатами θ , на котором супералгебра Пуанкаре реализовывалась бы операторами вида

$$Q_A = \frac{\partial}{\partial \theta^A} - i\sigma^\mu{}_{AB'}\theta^{B'} \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

$$Q_{B'} = \frac{\partial}{\partial \theta^{B'}} - i\sigma^\mu{}_{AB'}\theta^A \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Однако строгое математическое описание такого суперпространства оказалось серьезной проблемой. По-видимому, наиболее удовлетворительно она разрешается в рамках формализма супермногообразий и суперрасслоений. Этот формализм является непосредственным градуированным обобщением (путем замены поля действительных чисел \mathbb{R} на алгебру Грассмана Λ) обычной теории дифференцируемых многообразий и расслоений. Такое обобщение может быть построено, если на алгебре Λ ввести банахову структуру, превращая ее в нормированное евклидово топологическое пространство.

Банаховой алгеброй называется алгебра с нормой, удовлетворяющей следующим условиям:

$$\|\widehat{1}\| = 1,$$

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|.$$

Банахова структура может быть задана на алгебре Грассмана с помощью нормы

$$\lambda = \sum_{k=0}^l \sum_{(i_1 \dots i_k)} a_{i_1 \dots i_k} \chi^{i_1 \dots i_k}, \quad a_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R}, \quad (4.44)$$

$$\|\lambda\| = \sum_{k=0}^l \sum_{(i_1 \dots i_k)} |a_{i_1 \dots i_k}|.$$

Такая норма индуцирует на Λ топологию 2^l -мерного вещественного евклидова пространства.

Алгебраическая структура Λ может быть реализована также вещественными матрицами, а именно, алгебра Грассмана Λ изоморфна подалгебре алгебры $(2^l \times 2^l)$ -мерных вещественных треугольных матриц, строящихся по следующему правилу.

Обозначим I упорядоченный набор $(i_1 \dots i_k)$. Пусть $J \subset I$, т. е. I содержит в себе все элементы из J . Обозначим $I - J$ набор из тех элементов I , которые не входят в J . Аналогично, если $I \cap J = \emptyset$, обозначим $I + J$ набор, состоящий из элементов как I , так и J . Пусть $(I|J)$ — четность перестановки при упорядочивании множества $i_1 \dots i_k j_1 \dots j_n$. Поставим в соответствие элементу

$$\lambda = \sum_I a_I \chi^I, \quad \chi^I = \chi^{i_1} \dots \chi^{i_k}$$

алгебры Λ матрицу с компонентами

$$A_{IJ} = (-1)^{(I|J-I)} a_{J-I}, \quad I \subset J,$$

$$A_{IJ} = 0, \quad I \cap J \neq I. \quad (4.45)$$

Например, если $l = 2$, произвольный элемент из Λ имеет вид

$$\lambda = a_0 + a_1\chi^1 + a_2\chi^2 + a_{12}\chi^1\chi^2$$

и ему отвечает матрица

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_{12} \\ 0 & a_0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что умножение элементов λ из алгебры Грассмана Λ соответствует произведению сопоставляемых этим элементам вещественных матриц (4.45). Это важно, поскольку позволяет представить алгебры и группы Ли с параметрами из алгебры Грассмана как вещественные алгебры и группы Ли.

Суперпространством $B^{n,m}$ размерности (n, m) называется Λ -оболочка (4.40) \mathbb{Z}_2 -градуированного векторного пространства $V^{n,m}$ с базисом $\{v_k\}$, $k = 1, \dots, n + m$, и нормой, индуцируемой нормой (4.44) по правилу

$$\|b\| = \sum_{i=1}^{n+m} \|b^i\|,$$

$$b = (b^1, \dots, b^n, b^{n+1}, \dots, b^{n+m}), \quad b^{k \leq n} \in \Lambda^0, \quad b^{n+k} \in \Lambda^1.$$

Такая норма определяет на $B^{n,m}$ топологию $2^{l-1}(n+m)$ -мерного евклидова пространства. С другой стороны, суперпространство $B^{n,m}$ можно представить как $2^{l-1}(n+m)$ -мерное вещественное векторное пространство (4.41) с базисом $\{e_{I_k}\}$.

Рассматриваются отображения

$$F : B^{n,m} \rightarrow \Lambda,$$

называемые *суперфункциями*. Их супердифференцируемость определяется по аналогии с дифференцируемостью обычных функций на банаховых пространствах. Суперфункция F может считаться r раз *супердифференцируемой* в точке $b \in B^{n,m}$, если для всякого элемента $(b + h)$ из некоторой окрестности $U \in b$ суперфункцию $F(b + h)$ можно представить в виде

$$F(b + h) = F(b) + \sum_{p=1}^r (G^p F)(b, h) + \eta(b, h)\|h\|^p,$$

где $(G^p F)(b, h)$ — полилинейные, кратности p , непрерывные отображения

$$B^{n,m} \mapsto (G^p F)(b, h) \in \Lambda$$

суперпространства $B^{n,m}$ как Λ^0 -модуля в алгебру Λ , а суперфункция $\eta(b, h)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|\eta(b, h)\| \rightarrow 0.$$

Суперфункция F считается r раз супердифференцируемой (класса G^r) в открытой области $U \subset B^{n,m}$, если она r раз супердифференцируема во всех точках $b \in U$. Суперфункция F считается класса G^∞ , если она класса G^r при любом r .

Обозначим $G^\infty(U)$ множество суперфункций класса G^∞ на $U \subset B^{n,m}$. Тогда сопоставление

$$G_h : F(b) \rightarrow (GF)(b, h), \quad b \in U,$$

задает отображение $G^\infty(U)$ в себя, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} G_h(FF') &= G_h(F)F' + FG_h(F'), \\ G_{h'}G_h &= G_hG_{h'}. \end{aligned}$$

Оно представляет собой производную суперфункции F по направлению h . На полиномиальных и аналитических суперфункциях производной по направлению можно придать вид

$$G_h = h^k \frac{\partial}{\partial b^k}, \quad |h^k| = |b^k|,$$

при выполнении условий

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b^k} (FF') &= \frac{\partial}{\partial b^k} (F)F' + (-1)^{|b^k||F|} F \frac{\partial}{\partial b^k} (F'), \\ \frac{\partial}{\partial b^k} \frac{\partial}{\partial b^q} &= (-1)^{|b^k||b^q|} \frac{\partial}{\partial b^q} \frac{\partial}{\partial b^k}. \end{aligned}$$

Поскольку и суперпространство $B^{n,m}$, и алгебра Грассмана \wedge представляют собой также вещественные пространства, суперфункция F может быть задана набором 2^l вещественных функций f_I от $2^{l-1}(n+m)$ действительных переменных y^{I_k} так, что суперанализ во многом аналогичен комплексному анализу. В частности, функции f_I с необходимостью должны удовлетворять некоторым условиям типа Коши—Римана. Одно из них

$$\frac{\partial}{\partial y^{I_k}} f_I = \frac{\partial}{\partial y^{J_k}} f_J.$$

Супермногообразие $M^{n,m}$ размерности (n, m) определяется как банахово многообразие, допускающее атлас

$$\Psi_M = \{U_i, \phi_i : U_i \rightarrow B^{n,m}\},$$

функции перехода которого супердифференцируемы.

По аналогии с обычной дифференциальной геометрией строятся касательные пространства к супермногообразию. Касательный вектор к супермногообразию $M^{n,m}$ в точке $b \in M^{n,m}$ определяется как класс эквивалентных пар

$$(h \in B^{n,m}, \phi_i(b)), \quad b \in U_i,$$

при преобразованиях атласа Ψ_M . В карте $(\phi_i, U_i \ni b)$ он может быть представлен оператором производной по направлению h в точке b на множестве суперфункций $G^\infty(U_i)$, поскольку $G_h = G_{h'}$, если пары (h, ϕ_i) и (h', ϕ'_i) эквивалентны. Множество G_h , когда h пробегает $B^{n,m}$, образует касательное пространство к $M^{n,m}$ в точке b . Оно изоморфно $B^{n,m}$.

Множество касательных пространств к $M^{n,m}$ составляет касательное суперрасслоение — супердифференцируемое расслоение $TM^{n,m}$ над $M^{n,m}$, получаемое склеиванием тривиальных расслоений $U_i \times B^{n,m}$ посредством функций перехода

$$\rho_{ij} : (U_j \times B^{n,m}) \ni (b, h) \mapsto (b, G(\phi_i \phi_j^{-1}))(b, h) \in (U_i \times B^{n,m}),$$

где $G(\phi_i \phi_j^{-1})$ — аналог матрицы Якоби.

Глобальное сечение τ касательного суперрасслоения $TM^{n,m}$ составляет *суперполе* на супермногообразии $M^{n,m}$. Подобно векторному полю на многообразии, суперполе τ на супермногообразии определяет отображение G_τ пространство суперфункций $G^\infty(M^{n,m})$ в себя такое, что для любых $\lambda \in \Lambda^0$, $F, F' \in G^\infty(M^{n,m})$, выполняются условия

$$\begin{aligned} G_\tau(F F') &= G_\tau(F) F' + F G_\tau(F'), \\ G_\tau(\lambda F) &= \lambda G_\tau(F). \end{aligned}$$

Коммутатор двух суперполей

$$[G_\tau, G_{\tau'}] = G_\tau G_{\tau'} - G_{\tau'} G_\tau$$

тоже суперполе, и множество суперполей на супермногообразии образует Λ^0 -модуль, являющийся алгеброй Ли.

Примером супермногообразий и суперполей на них служат супергруппы Ли и супералгебры Ли. *Супергруппой Ли* SG называется группа, допускающая параметризацию грассмановыми величинами, которая превращает групповое пространство в аналитическое супермногообразие. Как и в теории групп Ли, алгебра Ли \mathcal{SG} супергруппы Ли SG определяется как алгебра Ли левоинвариантных суперполей на групповом супермногообразии, т. е. полей, инвариантных относительно преобразований, порождаемых левыми сдвигами $g \mapsto g'g$ на групповом многообразии.

ТЕОРЕМА 4.3.1. Пусть SG — супергруппа Ли размерности (n, m) и \mathcal{G} — алгебра Ли группы SG , рассматриваемой в качестве вещественной группы Ли G размерности $2^{l-1}(n+m)$. Тогда алгебра \mathcal{SG} , рассматриваемая как $2^{l-1}(n+m)$ -мерная алгебра Ли, изоморфна \mathcal{G} . Обратно, пусть A — алгебра Ли, образующая суперпространство размерности (n, m) , и G — $2^{l-1}(n+m)$ -мерная вещественная группа Ли с A в качестве $2^{l-1}(n+m)$ -мерной вещественной алгебры Ли. Тогда на G можно задать структуру супергруппы Ли с алгеброй Ли A . \square

В физических приложениях обычно рассматриваются супергруппы Ли, чьи алгебры Ли представляют собой Λ -оболочки супералгебр Ли.

Как и в случае касательного суперрасслоения, определение *главного суперрасслоения* дословно повторяет определение главного расслоения. Причем, поскольку **супермногообразия, супергруппы Ли и суперрасслоения** представляют собой также **обычные многообразия, группы Ли и расслоения**, ряд теорем для расслоений остается справедливым и для суперрасслоений. Например, если SH — замкнутая суперподгруппа Ли супергруппы Ли SG , то для редукции структурной супергруппы SG главного суперрасслоения к SH необходимо и достаточно существование глобального сечения ассоциированного расслоения на фактор-пространства SG/SH .

Перейдем теперь к *супергравитации*. Рассмотрим супермногообразии $M^{4,4}$. Структурной группой его касательного суперрасслоения $TM^{4,4}$ является супергруппа $L(4, 4)$ всех изоморфизмов суперпространства $B^{4,4}$ — типичного слоя суперрасслоения $TM^{4,4}$. Одной из подгрупп $L(4, 4)$ является супергруппа Ли $OSp(4, 2; 1)$, алгебра Ли которой представляет собой Λ -оболочку супералгебры $osp(4, 2; 1)$. Четной частью супералгебры $osp(4, 2; 1)$ является алгебра Ли

$$so(3, 1) \oplus sp(4),$$

а нечетная часть состоит из 16 генераторов Q_μ^A , ($\mu = 0, 1, 2, 3; A = 1, \dots, 4$). Генераторы Q_μ^A по индексам μ реализуют векторное представление алгебры Лоренца $so(1, 3)$, а по индексам A — фундаментальное представление алгебры Ли $sp(4)$.

Представление алгебры $osp(4, 2; 1)$ на \mathbb{Z}_2 -градуированном пространстве $V^{4,4}$ (\wedge -оболочкой которого является суперпространство $B^{4,4}$) осуществляется матрицами A , удовлетворяющими условию

$$A^t \Gamma + \Gamma A = 0, \quad (4.46)$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \widehat{\eta} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\widehat{\eta}$ — (4×4) -матрица метрики Минковского, $(-\sigma^0)$ — единичная (2×2) -матрица, а операция “ t ” задается по правилу

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} B^T & D^T \\ -C^T & E^T \end{pmatrix},$$

где B, C, D, E — (4×4) -матрицы, а “ T ” — обычное транспонирование. В представлении (4.46) четный сектор пространства $V^{4,4}$ реализует 4-векторное представление алгебры Лоренца $so(1, 3)$, а нечетный сектор — *действительное (майорановское) спинорное* представление алгебры $so(1, 3) \subset sp(4)$ матрицами

$$L_{12} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad L_{31} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{02} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{03} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sigma^0 & 0 \\ 0 & \sigma^0 \end{pmatrix},$$

$$L_{23} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{01} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix},$$

где σ^i — матрицы Паули.

Грассманова оболочка $B^{4,4}$ пространства $L^{4,4}$ реализует представление супергруппы $OSp(4, 2; 1)$, порождаемое представлением супералгебры $osp(4, 2; 1)$. При этом операторы супергруппы $OSp(4, 2; 1)$ сохраняют инвариантной билинейную форму

$$\eta_s(b, b') = x^\mu \Gamma_{\mu\nu} x'^\nu + \theta^A \Gamma_{AB} \theta'^B = x^0 x'^0 - x^1 x'^1 - x^2 x'^2 - x^3 x'^3 + \theta^1 \theta'^1 - \theta^2 \theta'^2 + \theta^3 \theta'^3 - \theta^4 \theta'^4, \quad (4.47)$$

где Γ — матрица (4.46) на элементах

$$b = x^\mu b_\mu + \theta^A b_A$$

суперпространства $B^{4,4}$. Координаты x^μ и θ^A элементов $b \in B^{4,4}$ являются соответственно четными и нечетными элементами алгебры Грассмана, и форма η_s принимает значения в \wedge^0 .

Как и в теории гравитации, потребуем редукцию структурной супергруппы $L(4, 4)$ касательного суперрасслоения $TM^{4,4}$ к $OSp(4, 2; 1)$. Необходимым и достаточным условием такой редукции является существование глобального сечения g_s , ассоциированного с $TM^{4,4}$ расслоения на фактор-пространства

$$L(4, 4)/OSp(4, 2; 1).$$

Это фактор-пространство изоморфно пространству всех билинейных форм на суперпространстве $B^{4,4}$, приводимых к каноническому виду (4.47) преобразованиями из $L(4, 4)$. Таким образом, глобальное сечение g_s может рассматриваться как *суперметрика* на суперногообразии $M^{4,4}$.

Для физических приложений естественно требовать, чтобы супермногообразию включало в себя многообразие. Такое включение индуцируется вложением поля \mathbb{R} в Λ и гомоморфизмом σ алгебры Λ на \mathbb{R} , при котором

$$\sigma\lambda = \sigma \left(\sum_{k=0}^l \sum_{(i_1 \dots i_k)} a_{i_1 \dots i_k} \chi^{i_1} \cdots \chi^{i_k} \right) = a_0.$$

На суперпространстве $B^{n,m}$ отображение имеет вид

$$\sigma : (x^1, \dots, x^n; \theta^1, \dots, \theta^m) \mapsto (\sigma x^1, \dots, \sigma x^n),$$

т. е. суперпространство проектируется на свой четный сектор. При этом у четных координат x сохраняется только вещественная часть.

Однако определение морфизма σ на супермногообразии $M^{n,m}$ сталкивается с трудностью. Действительно, пусть (U, ϕ) и (U', ϕ') — две карты на супермногообразии $M^{n,m}$, пересечение которых несвязно, т. е.

$$U \cap U' = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

Обозначим

$$\phi_{1,2} = \phi|_{V_{1,2}}, \quad \phi'_{1,2} = \phi'|_{V_{1,2}}.$$

Пусть $b_1 \in V_1, b_2 \in V_2$ — два σ -эквивалентных элемента в карте (U, ϕ) , т. е.

$$\sigma\phi_1 b_1 = \sigma\phi_2 b_2.$$

Но эти элементы не обязательно эквивалентны (т. е. $\sigma\phi'_1 b_1 \neq \sigma\phi'_2 b_2$) в карте (U', ϕ') , поскольку в общем случае

$$\sigma\phi'_1 \phi_1^{-1} \sigma \neq \sigma\phi'_2 \phi_2^{-1} \sigma.$$

Супермногообразие $M^{n,m}$ имеет атлас, в котором отношение σ -эквивалентности хорошо определено. Однако фактор-пространство супермногообразия $M^{n,m}$ по этому отношению в общем случае не является даже топологическим многообразием.

Вариационное исчисление и законы сохранения

Существуют разные способы построения дифференциальных законов сохранения в теории поля. Здесь мы изложим один из них, основанный на первой вариационной формуле. Этот подход представляется наиболее универсальным.

Пусть $Y \rightarrow X$ — расслоение, сечения которого s описывают классические поля. Под дифференциальным законом сохранения понимается соотношение

$$\begin{aligned} d(s^*T) &= 0, \\ \frac{d}{dx^\mu} T^\mu &= 0, \end{aligned} \tag{A.1}$$

где сохраняющаяся величина $T = T^\mu(x^\lambda, y^i, y_\mu^i) \omega_\mu$ это горизонтальная $(n - 1)$ -форма на конфигурационном пространстве полей $J^1Y \rightarrow X$.

Равенство (A.1) именуется *сильным законом сохранения*, если оно справедливо для всех сечений s расслоения $Y \rightarrow X$, и оно называется *слабым законом сохранения*, если оно имеет место только на критических сечениях, т. е. на решениях полевых уравнений. Для обозначения такого условного равенства будет использоваться символ “ \approx ”. При этом может случиться, что сохраняющаяся величина T принимает вид

$$T = W + dU,$$

где $W \approx 0$. В этом случае говорят, что она сводится к *суперпотенциалу* U .

В излагаемом нами подходе, дифференциальные законы сохранения связаны с инвариантностью лагранжиана полей относительно той или иной группы симметрий. Суть заключатся в том, что всякая 1-параметрическая группа G_t послонных изоморфизмов расслоения $Y \rightarrow X$ порождает полное проектируемое векторное поле u на Y и обратно. Можно показать, что лагранжиан первого порядка L на конфигурационном пространстве J^1Y инвариантен относительно этих изоморфизмов тогда и только тогда, когда его производная Ли вдоль этого векторного поля равна нулю:

$$\mathbf{L}_u L = 0. \tag{A.2}$$

Пусть дано проектируемое векторное поле

$$u = u^\mu(x) \partial_\mu + u^i(y) \partial_i$$

на расслоении $Y \rightarrow X$ и \bar{u} — его продолжение (1.52) на конфигурационное пространство $J^1Y \rightarrow X$. Рассмотрим производную Ли лагранжиана L вдоль \bar{u} . Имеет место каноническое разложение

$$\mathbf{L}_{\bar{u}} L = d_H T + u_\nu \lrcorner \mathcal{E}_L, \tag{A.3}$$

где \mathcal{E}_L — оператор Эйлера—Лагранжа второго порядка. Это так называемая первая вариационная формула вариационного исчисления.

Она получается в рамках общепринятой формулировки вариационной задачи, когда вариации сечений s расслоения $Y \rightarrow X$ порождаются локальными 1-параметрическими группами преобразований расслоения Y . Оператор Эйлера—Лагранжа \mathcal{E}_L по определению обращается в 0 на критических сечениях расслоения $Y \rightarrow X$, и равенство (A.3) сводится к слабому тождеству

$$s^* \mathbf{L}_u L \approx - \frac{d}{dx^\lambda} [\pi_i^\lambda (u^\mu \partial_\mu s^i - u^i) - u^\lambda \mathcal{L}'] \omega, \quad (\text{A.4})$$

где $\pi_i^\mu = \partial_i^\mu \mathcal{L}'$. Если лагранжиан L удовлетворяет сильному равенству (A.2), слабое тождество (A.4) превращается в закон сохранения тока

$$T^\lambda = \pi_i^\lambda (u^\mu \partial_\mu s^i - u^i) - u^\lambda \mathcal{L}'.$$

Большинство дифференциальных законов сохранения в теории поля может быть получено таким способом, включая законы сохранения энергии-импульса и тождества Нертер.

Пространство струй бесконечного порядка

В целях дальнейшего изложения, приведем основные понятия формализма струй бесконечного порядка.

Пространство струй бесконечного порядка $J^\infty Y$ определяется как проективный предел обратной последовательности

$$X \xleftarrow{\pi} Y \xleftarrow{\pi_0^1} \dots J^{r-1} Y \xleftarrow{\pi_{r-1}^r} J^r Y \xleftarrow{\pi_r^{r+1}} \dots$$

Пространство $J^\infty Y$ наделяется топологией проективного предела и параметризуется координатами

$$(x^\alpha, y^i, \dots, y_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^i, \dots)$$

где $\lambda_1 \dots \lambda_r$ — наборы чисел по модулю перестановок. Хотя оно не является вполне хорошим многообразием, на нем можно задать пучки гладких функций, векторных полей, дифференциальных форм и ввести дифференциальное исчисление.

Векторное поле u^r на многообразии струй $J^r Y$ называется *проектируемым*, если для любого $k < r$ существует векторное поле u^k на $J^k Y \rightarrow X$, такое что

$$u^k \circ \pi_k^r = T\pi_k^r \circ u^r.$$

Касательный морфизм $T\pi_k^r$ отображает проектируемые векторные поля на $J^r Y$ в проектируемые векторные поля на $J^k Y$. Линейное пространство проектируемых векторных полей на $J^\infty Y$ определяется как предел обратной системы проектируемых векторных полей на многообразиях струй конечного порядка. В частности, всякое проектируемое векторное поле

$$u = u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i;$$

на расслоении $Y \rightarrow X$ может быть продолжено до проектируемого векторного поля \bar{u}^r на $J^r Y$ и до проектируемого векторного поля \bar{u}^∞ на $J^\infty Y$. Имеет место его каноническое расщепление

$$\bar{u}^\infty = u_H^\infty + u_V^\infty,$$

$$u_H^\infty = u^\lambda \widehat{\partial}_\lambda^\infty = u^\lambda (\partial_\lambda + y_\lambda^i \partial_i + \dots),$$

$$u_V^\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\partial}_{\lambda_k}^k \dots \widehat{\partial}_{\lambda_1}^1 u_V^i \partial_i^{\lambda_1 \dots \lambda_k},$$

где u_V — вертикальная составляющая канонического расщепления (1.57) векторного поля $\pi_0^{1*} u$, индуцированного на $J^1 Y$ посредством $\pi_0^!$.

Базис внешних дифференциальных форм на $J^\infty Y$ может быть образован из горизонтальных форм dx^λ и так называемых k -контактных форм

$$\widehat{d}y_{\lambda_1 \dots \lambda_k}^i = dy_{\lambda_1 \dots \lambda_k}^i - y_{\lambda_1 \dots \lambda_k \nu}^i dx^\nu.$$

Обозначим $\Omega^{r,k}$ подпространство внешних форм на $J^\infty Y$, натянутое на всевозможные внешние произведения горизонтальных r -форм и k -контактных форм $\widehat{d}y_{\lambda_1 \dots \lambda_k}^i$. Тогда пространство Ω^m внешних m -форм на $J^\infty Y$ допускает каноническое разложение

$$\Omega^m = \Omega^{m,0} \oplus \Omega^{m-1,1} \oplus \dots \oplus \Omega^{0,m}.$$

Обозначим h_k проекцию

$$h_k : \Omega^m \rightarrow \Omega^{m-k,k}.$$

В частности, горизонтальная проекция h_0 представляет собой замену

$$dy_{\lambda_1 \dots \lambda_k}^i \rightarrow y_{\lambda_1 \dots \lambda_k \nu}^i dx^\nu.$$

Эта операция применима и к внешним формам на многообразиях струй конечного порядка $J^r Y$, индуцированным на $J^{r+1} Y$.

Оператор внешнего дифференцирования внешних форм на $J^\infty Y$ тоже раскладывается в сумму

$$d = d_H + d_V \tag{A.5}$$

оператора горизонтального дифференцирования

$$d_H : \Omega^{r,k} \rightarrow \Omega^{r+1,k}$$

и оператора вертикального дифференцирования

$$d_V : \Omega^{r,k} \rightarrow \Omega^{r,k+1},$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$d_H d_H = 0, \quad d_V d_V = 0, \quad d_V d_H + d_H d_V = 0.$$

В координатах эти операторы имеют вид

$$d_H \phi = dx^\mu \wedge \widehat{\partial}_\mu^\infty(\phi),$$

$$\widehat{\partial}_\mu^\infty(\phi \wedge \sigma) = \widehat{\partial}_\mu^\infty(\phi) \wedge \sigma + \phi \wedge \widehat{\partial}_\mu^\infty(\sigma),$$

$$\widehat{\partial}_\mu^\infty(f) = \widehat{\partial}_\mu^\infty f, \quad f \in \Omega^0,$$

$$\widehat{\partial}_\mu^\infty(dx^\lambda) = 0,$$

$$\widehat{\partial}_\mu^\infty(\widehat{d}y_{\lambda_1 \dots \lambda_k}^i) = \widehat{d}y_{\lambda_1 \dots \lambda_k \mu}^i,$$

и

$$d_V f = \sum_{k=0}^{\infty} \partial_i^{\lambda_1 \dots \lambda_k} f \widehat{d}y_{\lambda_1 \dots \lambda_k}^i, \quad f \in \Omega^0,$$

$$d_V dy_{\lambda_1 \dots \lambda_k}^i = -dx^\mu \wedge dy_{\lambda_1 \dots \lambda_k \mu}^i,$$

$$d_V \widehat{d}y_{\lambda_1 \dots \lambda_k}^i = 0.$$

Заметим, что для внешних форм σ на многообразиях струй конечного порядка $J^r Y$ разложение (A.5) принимает вид

$$\pi_r^{r+1*} d\sigma = d_H \sigma + d_V \sigma$$

и имеет место соотношение

$$h_0(d\sigma) = d_H h_0(\sigma). \quad (\text{A.6})$$

Вариационное исчисление

Пусть $Y \rightarrow X$ — расслоение, параметризуемое координатами (x^λ, y^i) , и s обозначает его сечения. Пусть N — некоторое n -мерное компактное подмногообразие X с границей ∂N . Гладкой *вариацией с фиксированной границей* сечения s , определенного на открытой окрестности U подмногообразия N , считается 1-параметрическое семейство сечений s_t на U , таких что $s_{t=0} = s$ на U и $s_t = s$ в некоторой окрестности ∂N . Можно показать, что всегда существует вертикальное векторное поле u на Y , обращающееся в 0 в окрестности $\pi^{-1}(\partial N)$, которое порождает такую вариацию. Оно называется *вариационным векторным полем*.

Пусть задана некоторая n -форма ρ на многообразии струй $J^r Y$. Сечение s расслоения Y называется *критическим сечением* (critical section) вариационной задачи для формы ρ , если для всякого вертикального векторного поля u на расслоении $Y \rightarrow X$, которое обращается в 0 на некоторой окрестности $\pi^{-1}(\partial N)$, имеет место равенство

$$\int_N s^* L_{\bar{u}^r} \rho = 0, \quad (\text{A.7})$$

где $\bar{u}^r = j_0^r u$ обозначает продолжение u на $J^r Y$.

Используя формулу (1.40):

$$s^* L_{\bar{u}^r} \rho = s^* (\bar{u}^r \lrcorner d\rho) + s^* d(\bar{u}^r \lrcorner \rho),$$

можно представить функционал (A.7) в виде

$$\int_N s^* L_{\bar{u}^r} \rho = \int_N s^* (\bar{u}^r \lrcorner d\rho) + \int_{\partial N} s^* (\bar{u}^r \lrcorner \rho). \quad (\text{A.8})$$

Однако разложение (A.8) оказывается не вполне удовлетворительным для получения условий на критические сечения, если первый член в этом разложении зависит от производных векторного поля u и тем самым может давать вклад в интеграл по границе ∂N .

Например, если $L = \mathcal{L}\omega$ — лагранжиан первого порядка на многообразии струй $J^1 Y$ расслоения Y , мы имеем выражение

$$s^* (\bar{u} \lrcorner dL) = s^* [u^i \partial_i \mathcal{L} + \widehat{\partial}_\lambda u^i \partial_i^\lambda \mathcal{L}] \omega,$$

второй член в котором может быть представлен в виде

$$s^* \widehat{\partial}_\lambda u^i \partial_i^\lambda \mathcal{L} \omega = s^* [\widehat{\partial}_\lambda (u^i \partial_i^\lambda \mathcal{L}) \omega - u^i \widehat{\partial}_\lambda (\partial_i^\lambda \mathcal{L}) \omega].$$

Он содержит точную форму $d(s^* u^i \partial_i^\lambda \mathcal{L} \omega_\lambda)$, которую следует учесть в интеграле по границе.

Таким образом, уравнение

$$s^* (\bar{u}^r \lrcorner d\rho) = 0$$

является условием на критические сечения формы ρ на $J^r Y$, если для всякого сечения s форма $s^* (\bar{u}^r \lrcorner d\rho)$ зависит только от компонент векторного поля u , но не их производных. Форма ρ , удовлетворяющая этому требованию, называется *лепажевой формой* (Lepagian form).

Пусть ρ — n -форма на $J^r Y$. Следующие условия эквивалентны.

- Проекция $h_1(\pi_r^{r+1*} d\rho)$ является горизонтальной формой на расслоении струй $J^{r+1} Y \rightarrow Y$, т. е. зависит только от dx^λ и dy^i .
- Для всякого проектируемого векторного поля u^r на $J^r Y$, горизонтальная проекция $h_0(u^r \lrcorner d\rho)$ зависит только от его проекции на Y .
- Для всякого вертикального векторного поля на расслоении струй $J^r Y \rightarrow Y$, имеет место равенство

$$h_0(u^r \lrcorner d\rho) = 0.$$

Лагранжианы, как мы видели выше, не являются в общем случае лепажевыми формами. Можно однако заменить вариационную задачу для лагранжиана L вариационной задачей для соответствующей лепажевой формы ρ_L , называемой *лепажевым эквивалентом* L . Таковой является лепажева форма на $J^{r+k} Y$, удовлетворяющая условию

$$h_0(\rho_L) = \pi_r^{r+k+1*} L$$

и приводящая к равенству

$$\int_N s^* L = \int_N s^* \rho_L.$$

Доказано, что для любого лагранжиана порядка r всегда существуют его лепажевы эквиваленты порядка $2r - 1$. Они образуют аффинное пространство над линейным пространством лепажевых эквивалентов нулевого лагранжиана порядка r . Центром этого аффинного пространства может быть выбрана одна из *форм Картана*, разложимая по контактным формам $\widehat{dy}_{\mu_1, \dots, \mu_k < r}^i$. Заметим, что всякая лепажева форма ρ является лепажевым эквивалентом лагранжиана

$$L = h_0(\rho).$$

Пусть ρ_L — лепажев эквивалент лагранжиана L порядка r . Для всякого проектируемого векторного поля u на расслоении $Y \rightarrow X$ справедливо равенство

$$\mathbf{L}_{\bar{u}^{r+1}} h_0 = h_0 \mathbf{L}_{\bar{u}^r}$$

и имеет место соотношение

$$\pi_r^{2r*} \mathbf{L}_{\bar{u}^r} L = h_0 (\mathbf{L}_{\bar{u}^{2r-1}} \rho_L) = h_0 (\bar{u}^{2r-1} \lrcorner d\rho_L) + h_0 d(\bar{u}^{2r-1} \lrcorner \rho_L), \quad (\text{A.9})$$

называемое *первой вариационной формулой*. Уравнение

$$s^* \bar{u}^{2r-1} \lrcorner d\rho_L = 0, \quad (\text{A.10})$$

выполняемое для всех вертикальных векторных полей u на $Y \rightarrow X$, является условием на критические сечения s вариационной задачи для лагранжиана L . Причем, для всякого такого критического сечения равенство (A.10) остается справедливым и в случае произвольного проектируемого векторного поля на $J^{2r-1}Y$.

Ограничимся теперь рассмотрением лагранжианов первого порядка L и их лепажевых эквивалентов на многообразии струй J^1Y . В этом случае форма Картана Ξ_L определена однозначно и совпадает с формой Пуанкаре—Картана

$$\Xi_L = \mathcal{L}\omega + \pi_i^\lambda \widehat{d}y^i \wedge \omega_\lambda \quad (\text{A.11})$$

лагранжиана L . Общий вид лепажева эквивалента лагранжиана первого порядка L дается выражением

$$\rho_L = \Xi_L - (\widehat{\partial}_\nu c_i^{\mu\nu} \widehat{d}y^i + c_i^{\mu\nu} \widehat{d}y_\nu^i) \wedge \omega_\mu + \chi, \quad (\text{A.12})$$

где $c_i^{\mu\nu} = -c_i^{\nu\mu}$ — антисимметричные локальные функции на Y и χ — некоторая ($k > 1$)-контактная форма на J^1Y .

В случае лагранжианов L первого порядка первая вариационная формула (A.9) принимает вид

$$\pi_1^{2*} \mathbf{L}_\pi L = h_0(\bar{u} \lrcorner d\rho_L) + h_0(d\bar{u} \lrcorner \rho_L) \quad (\text{A.13})$$

для произвольного проектируемого векторного поля u на Y . После простых вычислений получаем

$$\pi_1^{2*} \mathbf{L}_\pi L = u_V \lrcorner \mathcal{E}_L + h_0(d\bar{u} \lrcorner \rho_L), \quad (\text{A.14})$$

где

$$u_V = (u \lrcorner \widehat{d}y^i) \partial_i$$

это вертикальная часть канонического расщепления (1.57) продолжения $\pi_0^{1*}u$ поля u на J^1Y , а

$$\mathcal{E}_L = [\partial_i - (\partial_\lambda + y_\lambda^j \partial_j + y_{\mu\lambda}^j \partial_j^\mu) \partial_i^\lambda] \mathcal{L} dy^i \wedge \omega = \delta_i \mathcal{L} dy^i \wedge \omega \quad (\text{A.15})$$

— оператор Эйлера—Лагранжа второго порядка, ассоциированный с лагранжианом L . Коэффициенты $\delta_i \mathcal{L}$ формы (A.15) называются *вариационными производными* лагранжиана L .

Отсюда следует, что условием на критические сечения s расслоения $Y \rightarrow X$ для вариационной задачи лагранжиана L являются уравнения Эйлера—Лагранжа второго порядка

$$\partial_i \mathcal{L} - (\partial_\lambda + \partial_\lambda s^j \partial_j + \partial_\lambda \partial_\mu s^j \partial_j^\mu) \partial_i^\lambda \mathcal{L} = 0. \quad (\text{A.16})$$

Заметим, что разные лагранжианы L и L' могут иметь один и тот же оператор Эйлера—Лагранжа $\mathcal{E}_L = \mathcal{E}_{L'}$, если они отличаются друг от друга на лагранжиан L_0 , для которого оператор Эйлера—Лагранжа \mathcal{E}_{L_0} равен 0. Можно показать, что необходимым и достаточным условием того, чтобы $\mathcal{E}_{L_0} = 0$, является равенство

$$L_0 = h_0(\epsilon), \quad (\text{A.17})$$

где ϵ — замкнутая n -форма на расслоении Y .

В этой связи важно подчеркнуть, что, поскольку $J^1Y \rightarrow Y$ является аффинным расслоением, когомологии де Рама многообразия J^1Y совпадают с когомологиями де Рама расслоения Y . Это означает, что всякая замкнутая внешняя форма на J^1Y представляет собой сумму замкнутой формы на Y и точной формы на J^1Y .

Законы сохранения

Рассмотрим в лагранжевом формализме первого порядка дифференциальные законы сохранения, исходя из первой вариационной формулы (А.14).

Пусть L — лагранжиан на J^1Y . Тем же символом L мы будем обозначать и его продолжение $\pi_1^{2*}L$ на J^2Y . Пусть u — проектируемое векторное поле на $Y \rightarrow X$ и \bar{u} — его лифт (1.52) на многообразии струй $J^1Y \rightarrow X$.

Запишем первую вариационную формулу (А.14), выбрав в качестве лепажева эквивалента лагранжиана L форму Пуанкаре—Картана Ξ_L (А.11):

$$\mathbf{L}_{\bar{u}}L = u_V \lrcorner \mathcal{E}_L + d_H h_0(u \lrcorner \Xi_L). \quad (\text{А.18})$$

Будучи ограниченным на ядро

$$[\partial_i - (\partial_\lambda + y_\lambda^j \partial_j + y_{\mu\lambda}^j \partial_j^\mu) \partial_i^\lambda] \mathcal{L} = 0$$

оператора Эйлера—Лагранжа (А.15), равенство (А.18) сводится к слабому тождеству

$$\mathbf{L}_{\bar{u}}L \approx d_H h_0(u \lrcorner \Xi_L), \quad (\text{А.19})$$

$$\partial_\lambda u^\lambda \mathcal{L} + [u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i + (\partial_\lambda u^i + y_\lambda^j \partial_j u^i - y_\mu^i \partial_\lambda u^\mu) \partial_i^\lambda] \mathcal{L} \approx \widehat{\partial}_\lambda [\pi_i^\lambda (u^i - u^\mu y_\mu^i) + u^\lambda \mathcal{L}],$$

$$\widehat{\partial}_\lambda = \partial_\lambda + y_\lambda^i \partial_i + y_{\mu\lambda}^i \partial_i^\mu.$$

На решениях s уравнений Эйлера—Лагранжа, слабое тождество (А.19) принимает форму дифференциального закона сохранения

$$s^* \mathbf{L}_{\bar{u}}L \approx d(s^* u \lrcorner \Xi_L), \quad (\text{А.20})$$

который имеет координатный вид (А.4).

Заметим, что в случае выбора другого лепажева эквивалента ρ_L лагранжиана L соответствующее слабое тождество

$$\mathbf{L}_{\bar{u}}L \approx h_0(d\bar{u} \lrcorner \rho_L)$$

отличается от (А.19) на сильное равенство

$$0 = h_0(d\bar{u} \lrcorner \epsilon) = d_H h_0(\bar{u} \lrcorner \epsilon), \quad (\text{А.21})$$

где $\rho_L = \Xi_L + \epsilon$. В физической интерпретации это означает, что разные лепажевы эквиваленты приводят к разным суперпотенциалам в законах сохранения.

Можно также взять лагранжиан L' , отличный от L , но который имеет тот же оператор Эйлера—Лагранжа. И в этом случае слабый закон сохранения отличается от (А.19) на сильное равенство

$$\mathbf{L}_{\bar{u}}h_0(\epsilon) = h_0(d\bar{u} \lrcorner \epsilon), \quad (\text{А.22})$$

где ϵ — некоторая замкнутая форма на Y .

Рассмотрим теперь ситуацию, когда лагранжиан L зависит от фоновых полей. Такой лагранжиан представляет собой форму, индуцированную из некоторого лагранжиана L_{tot} на конфигурационном пространстве всех полей посредством сечений $\phi^A(x)$, описывающих фоновые поля. В присутствии фоновых полей ϕ^A , соответствующие вариационные

производные $\delta_A \mathcal{L}$ в операторе Эйлера—Лагранжа (А.15) не обращаются в 0, и мы получаем правую часть в законе сохранения (А.19) в виде

$$0 \approx (u^A - u^\mu y_\mu^A) \delta_A \mathcal{L} + \widehat{\partial}_\lambda [\pi_A^\lambda (u^A - u^\mu y_\mu^A) + \pi_i^\lambda (u^i - u^\mu y_\mu^i) + u^\lambda \mathcal{L}].$$

Например, многие полевые модели описывают поля в присутствии фоновой метрики g на базе X . В этом случае частные производные $\partial_\lambda \mathcal{L}$ в слабом тождестве (А.19) содержат член

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \partial_\lambda g^{\mu\nu},$$

приводящий к метрическому тензору энергии-импульса полей:

$$t_{\mu\nu} \sqrt{|g|} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}.$$

Важно отметить, что слабое тождество (А.19) линейно по векторному полю u . Поэтому можно рассматривать суперпозицию различных законов сохранения (А.19), отвечающих разным векторным полям u . Например, если u и u' проектируемые векторные поля на расслоении $Y \rightarrow X$, накрывающие одно и то же векторное поле на базе X , их разность $u - u'$ является вертикальным векторным полем на $Y \rightarrow X$. Соответственно разность слабых тождеств (А.19), записанных для u и u' , приведет к слабому тождеству (А.19), получаемому в случае вертикального векторного поля $u - u'$.

В частности, всякое проектируемое векторное поле u на расслоении $Y \rightarrow X$, накрывающее векторное поле τ на базе X представляется суммой вертикального векторного поля на $Y \rightarrow X$ и некоторого поднятия векторного τ на Y .

Отсюда следует, что всякий дифференциальный закон сохранения сводится к суперпозиции закона сохранения, записанного для вертикального векторного поля на расслоении $Y \rightarrow X$, и закона сохранения, отвечающего упомянутому выше лифту на Y векторного поля на X .

Исследуем эти два типа законов сохранения.

Нетеровские законы сохранения

Рассмотрим слабое тождество (А.20), когда u вертикальное векторное поле на расслоении $Y \rightarrow X$. Оно принимает вид

$$s^* \mathbf{L}_{\overline{u}} L \approx \frac{d}{dx^\lambda} T^\lambda, \quad (\text{А.23})$$

$$(u^i \partial_i + \widehat{\partial}_\lambda u^i \partial_i^\lambda) \mathcal{L} \approx \widehat{\partial}_\lambda (\pi_i^\lambda u^i),$$

где величина

$$T = u \lrcorner \Xi_L = \pi_i^\lambda u^i \omega_\lambda \quad (\text{А.24})$$

называется *нетеровским током*, отвечающим вертикальному векторному полю u .

Если лагранжиан L удовлетворяет сильному условию

$$\mathbf{L}_{\overline{u}} L = 0,$$

мы получаем слабый закон сохранения нетеровского тока (А.24):

$$\frac{d}{dx^\lambda} T^\lambda \approx 0.$$

Хорошо известный пример таких законов сохранения дает калибровочная теория.

Пусть $P \rightarrow X$ — главное расслоение со структурной группой Ли G . Напомним, что имеет место взаимно однозначное соответствие между связностями на P и глобальными сечениями расслоения C (1.89), параметризуемого координатами (x^μ, k_μ^m) .

Пусть Y — векторное расслоение (2.24), ассоциированное с $P \rightarrow X$, сечения которого описывают материальные поля в калибровочной теории. В случае ненарушенных симметрий полное конфигурационное пространство калибровочной модели представляет собой прямое произведение

$$J^1 E \times J^1 C. \quad (\text{A.25})$$

Рассмотрим вертикальное векторное поле $u_{\mathcal{L}}$, отвечающее локальной 1-параметрической группе калибровочных изоморфизмов (1.83) расслоения P . На произведении $C \times Y$ оно имеет вид

$$u_{\mathcal{L}} = (u_m^{A\lambda} \partial_\lambda \alpha^m + u_m^A \alpha^m) \partial_A = (\partial_\mu \alpha^m + c_{nl}^m k_\mu^l \alpha^n) \partial_\mu^m + \alpha^m(x) I_m^i \ y^j \partial_i, \quad (\text{A.26})$$

где $\alpha^m(x)$ — локальные функции параметров и A — коллективный индекс.

Лагранжиан L на конфигурационном пространстве (A.25) является калибровочно инвариантным, если для всякого векторного поля $u_{\mathcal{L}}$ (A.26) выполняется сильное равенство

$$\mathbf{L}_{\bar{u}_{\mathcal{L}}} L = 0.$$

В этом случае первая вариационная формула (A.13) приводит к сильному равенству

$$(u_m^A \alpha^m + u_m^{A\mu} \partial_\mu \alpha^m) \delta_A \mathcal{L} + \widehat{\partial}_\lambda [(u_m^A \alpha^m + u_m^{A\mu} \partial_\mu \alpha^m) \partial_A^\lambda \mathcal{L}] = 0,$$

где $\delta_A \mathcal{L}$ — вариационные производные лагранжиана L . В силу произвольности функций $\alpha^m(x)$, это равенство эквивалентно системе сильных равенств

$$u_m^A \delta_A \mathcal{L} + \widehat{\partial}_\mu (u_m^A \partial_A^\mu \mathcal{L}) = 0, \quad (\text{A.27a})$$

$$u_m^{A\mu} \delta_A \mathcal{L} + \widehat{\partial}_\lambda (u_m^{A\mu} \partial_A^\lambda \mathcal{L}) + u_m^A \partial_A^\mu \mathcal{L} = 0, \quad (\text{A.27b})$$

$$u_m^{A\lambda} \partial_A^\mu \mathcal{L} + u_m^{A\mu} \partial_A^\lambda \mathcal{L} = 0. \quad (\text{A.27c})$$

Подставляя (A.27b) и (A.27c) в (A.27a), мы получим известные условия связи на вариационные производные калибровочно инвариантного лагранжиана L :

$$u_m^A \delta_A \mathcal{L} - \widehat{\partial}_\mu (u_m^{A\mu} \delta_A \mathcal{L}) = 0.$$

На решениях уравнений Эйлера—Лагранжа сильные равенства (A.27a)—(A.27c) воспроизводят *тождества Нетер*

$$\widehat{\partial}_\mu (u_m^A \partial_A^\mu \mathcal{L}) \approx 0, \quad (\text{A.28a})$$

$$\widehat{\partial}_\lambda (u_m^{A\mu} \partial_A^\lambda \mathcal{L}) + u_m^A \partial_A^\mu \mathcal{L} \approx 0, \quad (\text{A.28b})$$

$$u_m^{A\lambda} \partial_A^\mu \mathcal{L} + u_m^{A\mu} \partial_A^\lambda \mathcal{L} = 0. \quad (\text{A.28c})$$

Заметим, что с физической точки зрения тождества (A.28a)—(A.28c) представляют собой необходимое и достаточное условие инвариантности закона сохранения

$$\widehat{\partial}_\lambda [(u_m^A \alpha^m + u_m^{A\mu} \partial_\mu \alpha^m) \partial_A^\lambda \mathcal{L}] \approx 0 \quad (\text{A.29})$$

относительно калибровочных преобразований. Это означает, что, если равенство (А.29) выполняется для некоторых калибровочных параметров $\alpha(x)$, оно остается справедливым и при их произвольных вариациях $\alpha + \delta$. При этом, в силу (А.27b) и (А.27c), сохраняющейся нетеровский ток может быть приведен к виду

$$T^\lambda = (u_m^A \alpha^m + u_m^{A\mu} \partial_\mu \alpha^m) \partial_A^\lambda \mathcal{L} = -\alpha^m u_m^{A\lambda} \delta_A \mathcal{L} + \widehat{\partial}_\mu (\alpha^m u_m^{A\mu} \partial_A^\lambda \mathcal{L}),$$

т. е. он сводится к суперпотенциалу

$$T^\lambda \approx \widehat{\partial}_\mu (\alpha^m u_m^{A\mu} \partial_A^\lambda \mathcal{L}).$$

Законы сохранения энергии-импульса

В общем случае векторное поле τ на базе X может быть поднято на расслоение Y только с помощью некоторой связности на $Y \rightarrow X$. Слабое тождество (А.19), записанное для такого векторного поля на Y , приводит к закону сохранения энергии-импульса.

Пусть τ — некоторое векторное поле на X и

$$\tau_\Gamma = \tau \lrcorner \Gamma = \tau^\mu (\partial_\mu + \Gamma_\mu^i \partial_i)$$

— его горизонтальный лифт на Y посредством связности

$$\Gamma = dx^\mu \otimes (\partial_\mu + \Gamma_\mu^i \partial_i)$$

на Y . В этом случае слабое тождество (А.19) принимает вид

$$\begin{aligned} \tau_\mu \tau^\mu \mathcal{L} + [\tau^\mu \partial_\mu + \tau^\mu \Gamma_\mu^i \partial_i + (\partial_\lambda (\tau^\mu \Gamma_\mu^i) + \tau^\mu y_\lambda^j \partial_j \Gamma_\mu^i - y_\mu^i \partial_\lambda \tau^\mu) \partial_i^\lambda] \mathcal{L} - \\ - \widehat{\partial}_\lambda [\pi_i^\lambda (\tau^\mu \Gamma_\mu^i - \tau^\mu y_\mu^i) + \delta_\mu^\lambda \tau^\mu \mathcal{L}] \approx 0 \end{aligned} \quad (\text{А.30})$$

и после некоторых упрощений может быть приведено к равенству

$$\tau^\mu \{ [\partial_\mu + \Gamma_\mu^i \partial_i + (\partial_\lambda \Gamma_\mu^i + y_\lambda^j \partial_j \Gamma_\mu^i) \partial_i^\lambda] \mathcal{L} - \widehat{\partial}_\lambda [\pi_i^\lambda (\Gamma_\mu^i - y_\mu^i) + \delta_\mu^\lambda \mathcal{L}] \} \approx 0.$$

Поскольку это равенство справедливо для любого векторного поля τ на X , оно эквивалентно системе слабых равенств

$$[\partial_\mu + \Gamma_\mu^i \partial_i + (\partial_\lambda \Gamma_\mu^i + y_\lambda^j \partial_j \Gamma_\mu^i) \partial_i^\lambda] \mathcal{L} - \widehat{\partial}_\lambda [\pi_i^\lambda (\Gamma_\mu^i - y_\mu^i) + \delta_\mu^\lambda \mathcal{L}] \approx 0. \quad (\text{А.31})$$

На решениях s уравнений Эйлера—Лагранжа, слабое тождество (А.30) превращается в закон сохранения

$$s^* \mathbf{L}_{\tau_\Gamma} L + \frac{d}{dx^\lambda} [\tau^\mu \mathcal{T}_{\Gamma \mu}^\lambda(s)] \omega \approx 0,$$

который эквивалентен системе слабых равенств

$$[\partial_\mu + \Gamma_\mu^i \partial_i + (\partial_\lambda \Gamma_\mu^i + \partial_\lambda s^j \partial_j \Gamma_\mu^i) \partial_i^\lambda] \mathcal{L} + \frac{d}{dx^\lambda} [\pi_i^\lambda (\partial_\mu s^i - \Gamma_\mu^i) - \delta_\mu^\lambda \mathcal{L}] \approx 0. \quad (\text{А.32})$$

Величина $\mathcal{T}_{\Gamma \mu}^\lambda(s)$ здесь это тензор энергии-импульса, отвечающий данной связности Γ на расслоении $Y \rightarrow X$. Он задается коэффициентами T^*X -значной $(n-1)$ -формы

$$\mathcal{T}_\Gamma(s) = -(\Gamma \lrcorner \mathbf{E}_L) \circ s = [\pi_i^\lambda (\partial_\mu s^i - \Gamma_\mu^i) - \delta_\mu^\lambda \mathcal{L}] dx^\mu \otimes \omega_\lambda$$

на X .

Например, пусть лагранжиан L зависит от фоновой метрики g на базе X . В этом случае закон сохранения (А.32) принимает вид

$$-\tau_\beta^\alpha \sqrt{|g|} \{\beta_{\mu\alpha}\} + [\Gamma_\mu^i \partial_i + (\partial_\lambda \Gamma_\mu^i + \partial_\lambda s^j \partial_j \Gamma_\mu^i) \partial_i^\lambda] \mathcal{L} + \frac{d}{dx^\lambda} [\pi_i^\lambda (\partial_\mu s^i - \Gamma_\mu^i) - \delta_\mu^\lambda \mathcal{L}] \approx 0,$$

где $\{\beta_{\mu\alpha}\}$ — символы Кристоффеля метрики g и

$$t_\beta^\alpha = g^{\alpha\gamma} t_{\gamma\beta}$$

— метрический тензор энергии-импульса. При определенных свойствах симметрии лагранжиана L этот закон сохранения превращается в ковариантный закон сохранения

$$\nabla_\alpha t_\beta^\alpha = 0,$$

где ∇_α обозначает ковариантную производную по связности $\{\beta_{\mu\alpha}\}$.

Рассмотрим теперь слабое тождество (А.30) в вариантах, когда векторное поле τ на базе X поднимается до векторного поля на Y посредством разных связностей Γ и Γ' на $Y \rightarrow X$. Их разность приводит к слабому тождеству

$$[\tau^\mu \sigma_\mu^i \partial_i + (\partial_\lambda (\tau^\mu \sigma_\mu^i) + y_\lambda^j \partial_j (\tau^\mu \sigma_\mu^i)) \partial_i^\lambda] \mathcal{L} - \widehat{\partial}_\lambda [\pi_i^\lambda \tau^\mu \sigma_\mu^i] \approx 0, \quad (\text{А.33})$$

где $\sigma = \Gamma' - \Gamma$ это припаяивающая форма на расслоении $Y \rightarrow X$ и

$$\tau \lrcorner \sigma = \tau^\mu \sigma_\mu^i \partial_i \quad (\text{А.34})$$

— вертикальное векторное поле. Тождество (А.33) это в точности тождество (А.19), записанное для вертикального векторного поля (А.34).

Таким образом можно сделать вывод, что **всякий дифференциальный закон сохранения есть суперпозиция закона сохранения некоторого нетеровского тока и закона сохранения энергии-импульса.**

Энергия-импульс калибровочных полей

Пусть $P \rightarrow X$ — главное расслоение со структурной полупростой группой Ли G и C — расслоение (1.89) с координатами (x^μ, k_μ^m) .

На конфигурационном пространстве $J^1 C$ лагранжиан Янга—Милса калибровочных полей L_{YM} в присутствии фоновой метрики g на базе X задается выражением (2.21).

Для всякого векторного поля τ на X существует поднятие этого поля

$$\tau_B = \tau^\lambda \partial_\lambda + [\tau^\lambda (\partial_\mu B_\lambda^m - c_{ni}^m k_\mu^n B_\lambda^i) + \partial_\mu \tau^\lambda (B_\lambda^m - k_\lambda^m)] \partial_\mu^m \quad (\text{А.35})$$

на расслоение C посредством некоторой связности B на расслоении P . Часть этого выражение в квадратных скобках аналогична выражению для вертикального векторного поля на C , отвечающего калибровочным изоморфизмам. Поэтому производная Ли калибровочно инвариантного лагранжиана L_{YM} вдоль $\bar{\tau}_B$ сводится к

$$L_{\bar{\tau}_B} L_{YM} = (\partial_\lambda \tau^\lambda \mathcal{L}_{YM} + \tau^\lambda \partial_\lambda \mathcal{L}_{YM} - \mathcal{F}_{\mu\nu}^m \partial_\lambda \tau^\mu \pi_m^{\nu\lambda}) \omega.$$

Подставляя это выражение в (А.30), получаем закон сохранения энергии-импульса калибровочных полей в виде

$$\begin{aligned} & \partial_\lambda \tau^\lambda \mathcal{L}_{YM} - \tau^\mu t_\beta^\alpha \sqrt{|g|} \{\beta_{\mu\alpha}\} - \mathcal{F}_{\mu\nu}^m \partial_\lambda \tau^\mu \pi_m^{\nu\lambda} \approx \\ & \approx \widehat{\partial}_\lambda [\pi_m^{\nu\lambda} (\tau^\mu (\partial_\nu B_\mu^m - c_{ni}^m k_\nu^n B_\mu^i) + \partial_\nu \tau^\mu (B_\mu^m - k_\mu^m) - \tau^\mu k_\nu^m) + \delta_\mu^\lambda \tau^\mu \mathcal{L}_{YM}], \end{aligned} \quad (\text{А.36})$$

где

$$t_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} (\pi_m^{\nu\alpha} \mathcal{F}_{\beta\nu}^m - \delta_{\beta}^{\alpha} \mathcal{L}_{YM})$$

— метрический тензор энергии-импульса калибровочных полей.

Для всякого заданного решения A уравнений Янга—Миллса выберем лифт (A.35) векторного поля τ на расслоение C посредством самой связности A . В этом случае закон сохранения энергии-импульса (A.36) на критическом сечении A принимает форму

$$\tau^{\mu} t_{\beta}^{\alpha} \sqrt{|g|} \{\beta_{\mu\alpha}\} \approx \tau^{\mu} \frac{d}{dx^{\lambda}} (\pi_m^{\nu\lambda} F_{\mu\nu}^m - \delta_{\mu}^{\lambda} \mathcal{L}_{YM})$$

и сводится к известному ковариантному закону сохранения

$$\sqrt{|g|} \nabla_{\lambda} t_{\mu}^{\lambda} \approx 0. \quad (A.37)$$

Отметим, что при произвольном выборе связности B , соответствующий закон сохранения энергии-импульса (A.36) отличается от ковариантного закона сохранения (A.37) на нетеровский закон сохранения

$$\widehat{\partial}_{\lambda} (\pi_m^{\nu\lambda} u_{\mathcal{G}}^m) \approx 0,$$

где

$$u_{\mathcal{G}} = (\partial_{\nu} \alpha^m + c_{nl}^m k_{\nu}^l \alpha^n) \partial_m^{\nu},$$

$$\alpha^m = \tau^{\mu} (B_{\mu}^m - A_{\mu}^m),$$

— вертикальное векторное поле на расслоении C , отвечающее его калибровочным изоморфизмам.

Условие общей ковариантности

Рассмотрим теперь класс расслоений $T \rightarrow X$, которые допускают каноническое поднятие векторного поля τ на X . Они называются *геометрическими расслоениями* (bundles of geometric objects).

Пусть $\tau = \tau^{\mu} \partial_{\mu}$ — векторное поле на многообразии X . Существует его каноническое поднятие

$$\widetilde{\tau} = T\tau = \tau^{\mu} \partial_{\mu} + \partial_{\nu} \tau^{\alpha} \dot{x}^{\nu} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\alpha}} \quad (A.38)$$

на касательное расслоение TX над X . Обобщая (A.38), можно построить *канонический лифт* векторного поля на следующие расслоения над X (мы будем обозначать все эти поднятия одним и тем же символом $\widetilde{\tau}$):

- $$\widetilde{\tau} = \tau^{\mu} \partial_{\mu} + [\partial_{\nu} \tau^{\alpha_1} \dot{x}_{\beta_1 \dots \beta_k}^{\nu \alpha_2 \dots \alpha_m} + \dots - \partial_{\beta_1} \tau^{\nu} \dot{x}_{\nu \beta_2 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} - \dots] \frac{\partial}{\partial \dot{x}_{\beta_1 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}}$$

на тензорное расслоение

$$T_m^k X = (\otimes^m TX) \otimes (\otimes^k T^* X);$$

- $$\widetilde{\tau} = \tau^{\mu} \partial_{\mu} + [\partial_{\nu} \tau^{\alpha} k_{\beta\mu}^{\nu} - \partial_{\beta} \tau^{\nu} k_{\nu\mu}^{\alpha} - \partial_{\mu} \tau^{\nu} k_{\beta\nu}^{\alpha} - \partial_{\beta\mu} \tau^{\alpha}] \frac{\partial}{\partial k_{\beta\mu}^{\alpha}}$$

на расслоение C_w общих линейных связностей на X .

Заметим, что векторное поле $\tilde{\tau}$ на геометрическом расслоении T можно считать ассоциированным с некоторой локальной 1-параметрической группой (голономных) изоморфизмов T , индуцированных диффеоморфизмами базы X . В частности, если $T = TX$, это касательные изоморфизмы. Будем называть такие голономные изоморфизмы *общими ковариантными преобразованиями*.

Пусть T — геометрическое расслоение и L — лагранжиан на соответствующем конфигурационном пространстве J^1T . Рассмотрим некоторое векторное поле τ на базе X и его канонический лифт $\tilde{\tau}$ на T . Применим первую вариационную формулу (А.18), чтобы получить соответствующий закон сохранения энергии-импульса. Предположим, что лагранжиан L инвариантен относительно общих ковариантных преобразований, т. е.

$$\mathbf{L}_{\tilde{\tau}} \tilde{\tau} L = 0. \quad (\text{А.39})$$

Подставив это условие в (А.18), мы приходим к слабому закону сохранения

$$0 \approx d_H h_0(\tilde{\tau} \lrcorner \Xi_L). \quad (\text{А.40})$$

При этом можно показать, что сохраняющаяся величина сводится к суперпотенциалу.

Проиллюстрируем этот факт на примере тензорного расслоения $T \rightarrow X$, параметризуемого координатами (x^λ, y^A) с коллективным индексом A . Канонический лифт векторного поля τ на такое расслоение дается выражением

$$\tilde{\tau} = \tau^\lambda \partial_\lambda + u^{A\beta} \partial_\beta \tau^\alpha \partial_A.$$

Если лагранжиан L инвариантен относительно общих ковариантных преобразований, он удовлетворяет сильному условию (А.39), которое в данном случае имеет вид

$$\partial_\alpha (\tau^\alpha \mathcal{L}) + u^{A\beta} \partial_\beta \tau^\alpha \partial_A \mathcal{L} + \widehat{\partial}_\mu (u^{A\beta} \partial_\beta \tau^\alpha) \partial_A^\mu \mathcal{L} - y_\alpha^A \partial_\beta \tau^\alpha \partial_A^\beta \mathcal{L} = 0. \quad (\text{А.41})$$

Это условие справедливо для всех векторных полей τ . Поэтому в силу произвольности функций τ^α равенство (А.41) эквивалентно системе равенств

$$\partial_\lambda \mathcal{L} = 0, \quad (\text{А.42a})$$

$$\delta_\alpha^\beta \mathcal{L} + u^{A\beta} \partial_A \mathcal{L} + \widehat{\partial}_\mu (u^{A\beta} \partial_A^\mu \mathcal{L} - y_\alpha^A \partial_A^\beta \mathcal{L}) = 0, \quad (\text{А.42b})$$

$$u^{A\beta} \partial_A^\mu \mathcal{L} + u^{A\mu} \partial_A^\beta \mathcal{L} = 0. \quad (\text{А.42c})$$

Равенство (А.42b) можно привести к виду

$$\delta_\alpha^\beta \mathcal{L} + u^{A\beta} \delta_A \mathcal{L} + \widehat{\partial}_\mu (u^{A\beta} \partial_A^\mu \mathcal{L}) = y_\alpha^A \partial_A^\beta \mathcal{L}, \quad (\text{А.43})$$

где $\delta_A \mathcal{L}$ — вариационные производные лагранжиана L . Подставив (А.43) и (А.42c) в слабое тождество (А.40), мы получим закон сохранения

$$0 \approx \widehat{\partial}_\lambda [-u^{A\lambda} \delta_A \mathcal{L} \tau^\alpha - \widehat{\partial}_\mu (u^{A\lambda} \partial_A^\mu \mathcal{L} \tau^\alpha)],$$

где сохраняющаяся величина сводится к суперпотенциалу

$$U^{\lambda\mu}(\tau) = -u^{A\lambda} \partial_A^\mu \mathcal{L} \tau^\alpha.$$

Энергия-импульс гравитационного поля

Эйнштейновская теория гравитации и аффинно-метрическая теория гравитации являются полевыми моделями как раз на геометрических расслоениях, и их лагранжианы инвариантны относительно общих ковариантных преобразований. Поэтому к ним можно применить изложенную в предыдущем разделе технику для исследования закона сохранения энергии-импульса гравитационного поля.

Эйнштейновская теория гравитации, где динамическими переменными являются компоненты псевдоримановой метрики, является лагранжевой моделью второго порядка, хотя и вырожденной. Поэтому мы здесь на ней не будем останавливаться. Отметим только, что закон сохранения энергии-импульса гравитационного поля в этой модели, обусловленный инвариантностью гильберт-эйнштейновского лагранжиана относительно общих ковариантных преобразований, имеет вид

$$\frac{d}{dx^\lambda} T^\lambda(\tau) \approx 0, \quad T^\lambda \approx \frac{d}{dx^\lambda} U^{\mu\lambda}(\tau), \quad (\text{A.44})$$

где

$$U^{\mu\lambda}(\tau) = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} (g^{\lambda\nu} \tau_{;\nu}^\mu - g^{\mu\nu} \tau_{;\nu}^\lambda) \quad (\text{A.45})$$

— известный *суперпотенциал Комара*. Символами “ $;$ ” здесь обозначены ковариантные производные по связности Леви-Чивита.

Этот результат обобщается в рамках аффинно-метрической теории гравитации на случай общей линейной связности $K^\alpha{}_{\gamma\mu}$ и произвольного лагранжиана L , инвариантного относительно общих ковариантных преобразований.

Динамическими переменными в *аффинно-метрической теории гравитации* являются *псевдориманова метрика и общая линейная связность* на пространстве-времени X . Мы будем называть их мировой метрикой и мировой связностью.

Пусть $LX \rightarrow X$ — главное расслоение линейных реперов в касательных пространствах к X со структурной группой GL_4 .

Как и в случае калибровочной теории, существует взаимно однозначное соответствие между мировыми связностями и глобальными сечениями расслоения

$$C_w = J^1 LX / GL_4.$$

Обозначим $\Sigma_g \rightarrow X$ расслоение псевдоримановых метрик. Мы будем его отождествлять с открытым подмногообразием тензорного расслоения

$$\sqrt[2]{T^* X} \rightarrow X.$$

Полное *конфигурационное пространство* аффинно-метрической теории гравитации тогда имеет вид

$$J^1 Y = J^1 (\Sigma_g \times_X C_w) \quad (\text{A.46})$$

и параметризуется координатами

$$(x^\lambda, g^{\alpha\beta}, k^\alpha{}_{\beta\lambda}, g^{\alpha\beta}{}_{,\mu}, k^\alpha{}_{\beta\lambda\mu}).$$

Предположим, что лагранжиан L аффинно-метрической теории гравитации на конфигурационном пространстве (A.46) зависит от метрических координат $g^{\alpha\beta}$ и комбинаций типа кривизны

$$R^\alpha{}_{\beta\nu\lambda} = k^\alpha{}_{\beta\lambda\nu} - k^\alpha{}_{\beta\nu\lambda} + k^\alpha{}_{\epsilon\nu} k^\epsilon{}_{\beta\lambda} - k^\alpha{}_{\epsilon\lambda} k^\epsilon{}_{\beta\nu}.$$

В этом случае выполняются соотношения

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k^{\alpha}_{\beta\nu}} &= \pi_{\sigma}^{\beta\nu\lambda} k^{\sigma}_{\alpha\lambda} - \pi_{\alpha}^{\sigma\nu\lambda} k^{\beta}_{\sigma\lambda}, \\ \pi_{\alpha}^{\beta\nu\lambda} &= \partial_{\alpha}^{\beta\nu\lambda} \mathcal{L} = -\pi_{\alpha}^{\beta\lambda\nu}.\end{aligned}$$

Предположим, что L инвариантен относительно общих ковариантных преобразований.

Пусть τ — векторное поле на X . Его канонический лифт на расслоение $\Sigma_g \times C_w$ имеет вид

$$\tilde{\tau} = \tau^{\lambda} \partial_{\lambda} + (g^{\nu\beta} \partial_{\nu} \tau^{\alpha} + g^{\alpha\nu} \partial_{\nu} \tau^{\beta}) \frac{\partial}{\partial g^{\alpha\beta}} + [\partial_{\nu} \tau^{\alpha} k^{\nu}_{\beta\mu} - \partial_{\beta} \tau^{\nu} k^{\alpha}_{\nu\mu} - \partial_{\mu} \tau^{\nu} k^{\alpha}_{\beta\nu} - \partial_{\beta\mu} \tau^{\alpha}] \frac{\partial}{\partial k^{\alpha}_{\beta\mu}}.$$

Для упрощения выражений введем следующие обозначения

$$\tilde{\tau} = \tau^{\lambda} \partial_{\lambda} + (g^{\nu\beta} \partial_{\nu} \tau^{\alpha} + g^{\alpha\nu} \partial_{\nu} \tau^{\beta}) \partial_{\alpha\beta} + (u^{A\beta}_{\alpha} \partial_{\beta} \tau^{\alpha} - u^{A\varepsilon\beta}_{\alpha} \partial_{\varepsilon\beta} \tau^{\alpha}) \partial_A.$$

Поскольку

$$L_{j_0^i \tilde{\tau}} L = 0, \quad (\text{A.47})$$

мы получаем слабый закон сохранения

$$0 \approx \widehat{\partial}_{\lambda} [\partial_A^{\lambda} \mathcal{L} (u^{A\beta}_{\alpha} \partial_{\beta} \tau^{\alpha} - u^{A\varepsilon\beta}_{\alpha} \partial_{\varepsilon\beta} \tau^{\alpha} - y_{\alpha}^A \tau^{\alpha}) + \tau^{\lambda} \mathcal{L}], \quad (\text{A.48})$$

где

$$\begin{aligned}\partial_A^{\lambda} \mathcal{L} u^{A\varepsilon\beta}_{\alpha} &= \pi_{\alpha}^{\varepsilon\beta\lambda}, \\ \partial_A^{\varepsilon} \mathcal{L} u^{A\beta}_{\alpha} &= \pi_{\alpha}^{\gamma\mu\varepsilon} k^{\beta}_{\gamma\mu} - \pi_{\sigma}^{\beta\mu\varepsilon} k^{\sigma}_{\alpha\mu} - \pi_{\sigma}^{\gamma\beta\varepsilon} k^{\sigma}_{\gamma\alpha} = \\ &= \partial_{\alpha}^{\beta\varepsilon} \mathcal{L} - \pi_{\sigma}^{\gamma\beta\varepsilon} k^{\sigma}_{\gamma\alpha}.\end{aligned}$$

В силу произвольности функций τ^{α} равенство (A.47) приводит к сильному равенству

$$\delta_{\alpha}^{\beta} \mathcal{L} + \sqrt{-g} T_{\beta}^{\alpha} + u^{A\beta}_{\alpha} \partial_A \mathcal{L} + \widehat{\partial}_{\mu} (u^{A\beta}_{\alpha}) \partial_A^{\mu} \mathcal{L} - y_{\alpha}^A \partial_A^{\beta} \mathcal{L} = 0. \quad (\text{A.49})$$

При этом величину

$$\sqrt{-g} T_{\beta}^{\alpha} = 2g^{\alpha\nu} \partial_{\nu\beta} \mathcal{L}$$

можно интерпретировать как метрический тензор энергии-импульса мировых связностей.

Подстановкой $y_{\alpha}^A \partial_A^{\beta} \mathcal{L}$ из выражения (A.49) в закон сохранения (A.48) последний приводится к виду

$$\begin{aligned}0 \approx \widehat{\partial}_{\lambda} \left[-\sqrt{-g} T_{\alpha}^{\lambda} \tau^{\alpha} + \partial_A^{\lambda} \mathcal{L} (u^{A\beta}_{\alpha} \partial_{\beta} \tau^{\alpha} - u^{A\varepsilon\beta}_{\alpha} \partial_{\varepsilon\beta} \tau^{\alpha}) - \right. \\ \left. - \partial_A \mathcal{L} u^{A\lambda}_{\alpha} \tau^{\alpha} - \partial_A^{\mu} \mathcal{L} \widehat{\partial}_{\mu} (u^{A\lambda}_{\alpha}) \tau^{\alpha} \right]. \quad (\text{A.50})\end{aligned}$$

Выделим в выражении (A.50) член с компонентами оператора Эйлера—Лагранжа

$$\mathcal{E}_L = (\delta_{\alpha\beta} \mathcal{L} dg^{\alpha\beta} + \delta_{\alpha}^{\gamma\mu} \mathcal{L} dk^{\alpha}_{\gamma\mu}) \wedge \omega.$$

Мы получим

$$0 \approx \widehat{\partial}_\lambda \left[\partial_A^\lambda \mathcal{L} u_\alpha^{A\mu} \partial_\mu \tau^\alpha - \widehat{\partial}_\mu (\partial_A^\mu \mathcal{L} u_\alpha^{A\lambda}) \tau^\alpha + \widehat{\partial}_\mu (\pi_\alpha^{\varepsilon\mu\lambda}) \partial_\varepsilon \tau^\alpha \right] + \\ + \widehat{\partial}_\lambda \left[-2g^{\lambda\mu} \tau^\alpha \delta_{\alpha\mu} \mathcal{L} - u_\alpha^{A\lambda} \tau^\alpha \delta_A \mathcal{L} \right] - \widehat{\partial}_\lambda \left[\widehat{\partial}_\mu (\pi_\alpha^{\nu\mu\lambda} \partial_\nu \tau^\alpha) \right]$$

и затем

$$0 \approx \widehat{\partial}_\lambda \left[-\widehat{\partial}_\mu (\partial_\alpha^{\lambda\mu} \mathcal{L}) \tau^\alpha \right] + \widehat{\partial}_\lambda \left[-2g^{\lambda\mu} \tau^\alpha \delta_{\alpha\mu} \mathcal{L} - \left(k^\lambda_{\gamma\mu} \delta_\alpha^{\gamma\mu} \mathcal{L} - k^\sigma_{\alpha\mu} \delta_\sigma^{\lambda\mu} \mathcal{L} - \right. \right. \\ \left. \left. - k^\sigma_{\gamma\alpha} \delta_\sigma^{\gamma\lambda} \mathcal{L} \right) \tau^\alpha + \delta_\alpha^{\varepsilon\lambda} \mathcal{L} \partial_\varepsilon \tau^\alpha \right] - \widehat{\partial}_\lambda \left[\widehat{\partial}_\mu (\pi_\alpha^{\nu\mu\lambda} (D_\nu \tau^\alpha + \Omega^\alpha_{\nu\sigma} \tau^\sigma)) \right].$$

Закон сохранения (А.48) принимает окончательный вид

$$0 \approx \widehat{\partial}_\lambda \left[-2g^{\lambda\mu} \tau^\alpha \delta_{\alpha\mu} \mathcal{L} - \left(k^\lambda_{\gamma\mu} \delta_\alpha^{\gamma\mu} \mathcal{L} - k^\sigma_{\alpha\mu} \delta_\sigma^{\lambda\mu} \mathcal{L} - k^\sigma_{\gamma\alpha} \delta_\sigma^{\gamma\lambda} \mathcal{L} \right) \tau^\alpha + \right. \\ \left. + \delta_\alpha^{\varepsilon\lambda} \mathcal{L} \partial_\varepsilon \tau^\alpha - \widehat{\partial}_\mu (\delta_\alpha^{\lambda\mu} \mathcal{L}) \tau^\alpha \right] - \widehat{\partial}_\lambda \left[\widehat{\partial}_\mu (\pi_\alpha^{\nu\mu\lambda} (D_\nu \tau^\alpha + \Omega^\alpha_{\nu\sigma} \tau^\sigma)) \right],$$

где сохраняющаяся величина сводится к суперпотенциалу

$$U^{\mu\lambda}(\tau) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K^{\alpha}_{\nu\mu,\lambda}} (D_\nu \tau^\alpha + \Omega^\alpha_{\nu\sigma} \tau^\sigma),$$

называемому обобщенным суперпотенциалом Комара.

Когомологии со значениями в пучках

Начнем с определения предпучка и пучка. *Предпучок* считается заданным на топологическом пространстве X , если каждому открытому множеству $U \subset X$ сопоставлена некоторая абелева группа S_U ($S_\emptyset = 0$), а каждой паре открытых множеств $V \subset U$ сопоставлен гомоморфизм

$$r_V^U : S_U \rightarrow S_V,$$

такой, что

а) $r_U^U = \text{Id}_{S_U}$;

б) $r_W^U = r_W^V r_V^U$ для $W \subset Z \subset U$.

ПРИМЕР В.1. Пусть X — топологическое пространство, S_U — абелева группа по сложению всех непрерывных вещественных функций, определенных на $U \subset X$, а гомоморфизм

$$r_V^U : S_U \rightarrow S_V$$

определяется как сужение их на $V \subset X$. Тогда $S \in \{S_U, r_V^U\}$ — предпучок. \square

Следующая конструкция позволяет каждому предпучку сопоставить специального вида расслоение (накрытие) $(S(X), \pi, X)$, называемое *пучком*.

1. Для каждой точки $x \in X$ обозначим S_x прямой предел абелевых групп S_U , $x \in U$, по отношению к гомоморфизмам r_V^U . По определению это означает, что для каждой открытой окрестности U точки x каждый элемент $s \in S_U$ определяет некоторый элемент $s_x \in S_x$, называемый *ростком* элемента s в точке x . Причем два элемента $s \in S_U$ и $s' \in S'_U$ определяют один и тот же росток тогда и только тогда, когда существует такая окрестность $W \ni x$, что

$$r_W^U s = r_W^{V'} s'.$$

В частности, если s, s' — вещественные функции из Примера В.1, они определяют один и тот же *росток* s_x , если совпадают на некоторой окрестности W точки x .

2. Прямой предел S_x абелевых групп S_U (он называется *стеблем пучка*) является абелевой группой (это **неверно для неабелевых групп**). Пусть $S(X)$ — объединение всех групп S_x , $x \in X$. Введем на этом множестве топологию. Для каждого открытого множества $U \subset X$ и каждого элемента $s \in S_U$ обозначим $S(U)$ подмножество множества $S(X)$, состоящее из всех ростков s_x , $x \in U$, элемента s . Семейство всех множеств $S(U)$ (U пробегает всевозможные открытые множества пространства X , а s пробегает все элементы из S_U) образует базу топологии, вводимой в S .

3. Пусть $\pi : S(X) \rightarrow X$ — отображение, переводящее каждый из стеблей S_x , $x \in X$, в соответствующую точку $x \in X$. Согласно определению топологии в $S(X)$ это отображение непрерывно, и тройка $P = (S(U), \pi, X)$ образует расслоение. Слоем этого

расслоения над точкой $x \in X$ является стебель $S_x = \pi^{-1}(x)$, на котором индуцируется дискретная топология (ее базу составляют сами элементы $s_x \in S_x$).

ПРИМЕР В.2. Пусть X — топологическое пространство и S_U — абелева группа всех постоянных вещественных функций на U . Росток s_x элемента $s \in S_U$, $x \in U$, однозначно определяется значением $s(x)$ в точке x . Стеблем S_x является множество действительных чисел \mathbb{R} , в котором введена дискретная топология. Пучок $P = (S(X), \pi, X)$ называется *постоянным пучком с коэффициентами в \mathbb{R}* . \square

Пучок, порождаемый предпучком из Примера В.1, называется *пучком ростков непрерывных функций*. Соответственно, если X — многообразие, определяется пучок ростков гладких функций.

Два разных предпучка могут порождать один и тот же пучок. Например, тот же пучок ростков непрерывных функций порождается и предпучком только ограниченных функций.

По пучку можно построить предпучок. Обозначим $\Gamma(U, P)$ множество всех сечений расслоения P над $U \subset X$. Оно наделено структурой абелевой группы, нулем которой является нулевое сечение $x \rightarrow 0_x$. Сопоставим каждому открытому множеству $U \subset X$ группы $\Gamma(U, P)$ (при $U = \emptyset$ группу $\Gamma(U, P)$ по определению считаем нулевой) и любым двум открытым множествам U и $V \subset U$ — гомоморфизм

$$r_V^U : \Gamma(U, P) \rightarrow (V, P),$$

относящий каждому сечению пучка P над U его ограничение на V . В результате получим предпучок $\{\Gamma(U, P), r_V^U\}$, называемый *каноническим предпучком* пучка P . Можно показать, что пучок, порождаемый предпучком $\{\Gamma(U, P), r_V^U\}$, совпадает с пучком P .

Для пучка ростков непрерывных функций $\Gamma(U, P)$ — абелева группа непрерывных вещественных функций на U , т. е. $\Gamma(U, P) = S_U$.

Пусть пучок P порожден некоторым предпучком $\{S_U, r_V^U\}$. Сопоставим каждому элементу $s \in S_U$ сечение $h_U(s)$ пучка P над U , сопоставляющее всякой точке $x \in U$ росток s_x в точке x . Это сопоставление $s \rightarrow h_U(s)$ определяет гомоморфизм абелевых групп

$$h_U : S_U \rightarrow \Gamma(U, P).$$

Эти гомоморфизмы перестановочны с гомоморфизмами r_V^U , т. е.

$$r_V^U h_U = h_V r_V^U,$$

и определяют *гомоморфизм предпучка* $\{S_U, r_V^U\}$ в предпучок $\{\Gamma(U, P), r_V^U\}$. В общем случае этот гомоморфизм не является ни мономорфизмом, ни эпиморфизмом.

Прежде чем перейти к когомологиям, рассмотрим точные последовательности предпучков и пучков.

Пусть имеется *последовательность предпучков* над одним и тем же топологическим пространством

$$\dots \rightarrow S^q \rightarrow S^{q+1} \rightarrow S^{q+2} \rightarrow \dots, \quad (\text{B.1})$$

где стрелки обозначают гомоморфизмы пучков. Пусть для каждого $U \subset X$ соответствующая последовательность абелевых групп

$$\dots \rightarrow S_U^q \rightarrow S_U^{q+1} \rightarrow S_U^{q+2} \rightarrow \dots \quad (\text{B.2})$$

является точной, т. е. образ предыдущего гомоморфизма совпадает с ядром последующего. Тогда последовательность (B.1) тоже является точной. При переходе к прямому

пределу свойство точности последовательности сохраняется. Поэтому для каждой точки $x \in X$ индуцируемая последовательностью (В.2) последовательность стеблей

$$\dots \longrightarrow S_x^q \longrightarrow S_x^{q+1} \longrightarrow S_x^{q+2} \longrightarrow \dots, \quad (\text{В.3})$$

тоже является точной. Последовательность (В.3) для каждого x определяет *последовательность пучков*

$$\dots \longrightarrow P^q \longrightarrow P^{q+1} \longrightarrow P^{q+2} \longrightarrow \dots, \quad (\text{В.4})$$

порождаемых предпучками S^q , где стрелки обозначают послойные отображения расслоений, тождественные на базе X и являющиеся гомоморфизмами абелевых групп на слоях. Из точности последовательности (В.3) следует точность последовательности (В.4). Таким образом, **точность последовательности предпучков (В.1) приводит к точности последовательности порождаемых этими предпучками пучков (В.4).**

Последовательность пучков (В.4) индуцирует последовательность групп сечений

$$\dots \longrightarrow \Gamma(U, P^q) \longrightarrow \Gamma(U, P^{q+1}) \longrightarrow \Gamma(U, P^{q+2}) \longrightarrow \dots, \quad (\text{В.5})$$

но важно отметить, что эта последовательность не является, вообще говоря, точной, хотя образует коцепной комплекс, поскольку гомоморфизм

$$P^q \rightarrow 0 \in P^{q+2}$$

индуцирует гомоморфизм

$$\Gamma(U, P^q) \rightarrow 0 \in \Gamma(U, P^{q+2}).$$

Перейдем теперь непосредственно к определению когомологий со значениями в пучках. Пусть S — некоторый предпучок над топологическим пространством X и пусть $\{U_i\}_{i \in I}$ — открытое покрытие X . Определим в качестве *p-мерной коцепи* (покрытия $\{U\}$ с коэффициентами в S) функцию f , сопоставляющую каждой последовательности (i_0, \dots, i_p) индексов из множества I некоторый элемент $f(i_0, \dots, i_p)$ группы

$$S_V, \quad V = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}.$$

Все такие p -мерные коцепи очевидным образом образуют абелеву группу $C^p(\{U\}, S)$ относительно формального сложения, а формула

$$(\delta^p f)(i_0, \dots, i_{p+1}) = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k r_{W^k}^{W^k} (f(i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{p+1})),$$

$$W = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{p+1}}, \quad W_k = U_{i_0} \cap \dots \cap \hat{U}_{i_k} \cap \dots \cap U_{i_{p+1}},$$

определяет гомоморфизм

$$\delta^p : C^p(\{U\}, S) \rightarrow C^{(p+1)}(\{U\}, S).$$

Легко проверить, что

$$\delta^{p+1} \delta^p = 0$$

и определены группы когомологий

$$H^p(\{U\}, S) = \text{Ker } \delta^p / \text{Im } \delta^{p-1}.$$

Эти группы зависят от покрытия $\{U\}$. Пусть покрытие $\{V\}$ вписано в покрытие $\{U\}$ (т. е. если $U_i \cap V_j \neq \emptyset$, то $V_j \subset U_i$). Как можно показать, это индуцирует гомоморфизм

$$H^p(\{U\}, S) \rightarrow H(\{V\}, S)$$

и, беря прямой предел групп $H^p(\{U\}, S)$ по отношению к этим гомоморфизмам, где $\{U\}$ пробегает все покрытия пространства X , получаем определение *групп когомологий* $H^*(X, S)$ пространства X с коэффициентами в предпучке S .

Группами когомологий $H^*(X, P)$ со значениями в пучке P называются группы когомологий со значениями в каноническом пучке $\{\Gamma(U, P), \tau_U^U\}$. Если X — паракомпактное пространство, группы когомологий со значениями в предпучках S , порождающих один и тот же пучок P , изоморфны группам $H^*(X, P)$.

Группа $H^0(X, P)$ по определению изоморфна группе глобальных сечений $\Gamma(X, P)$ пучка P .

Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Для всякого пучка P над Y оно индуцирует пучок (расслоение) f^*P над X и определяет гомоморфизм групп когомологий

$$f^*: H(Y, P) \rightarrow H(X, f^*(P)).$$

Пучок P над паракомпактным пространством X называется *тонким*, если для любого локально конечного открытого покрытия $\{U_i\}$ пространства X существует семейство гомоморфизмов пучков $\{h_i: P \rightarrow P\}$, такое, что:

а) для всякого i найдется замкнутое множество A_i , такое, что $A_i \subset U_i$ и $h_i(S_x) = 0$ для $x \notin A_i$, где S_x — стебель в P над x ;

$$\text{б) } \sum_i h_i(S_x) = \text{Id}_P.$$

ПРИМЕР В.3. Пучок ростков непрерывных вещественных функций на X является тонким. Чтобы это показать, выберем в качестве h_i умножение на функции φ_i , составляющие разбиение единицы для пространства X . Аналогично устанавливается тонкость пучков ростков гладких функций и внешних дифференциальных p -форм на гладком многообразии X . □

ТЕОРЕМА В.1. Группы когомологий $H^p(X, P)$, $p > 0$, паракомпактного пространства X с коэффициентами в тонком пучке P равны нулю. □

Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{h} P_0 \xrightarrow{h^0} P_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow P_p \xrightarrow{h^p} \dots \quad (\text{В.6})$$

над паракомпактным пространством X . Эта последовательность называется *резольвентной пучка* P , если группы когомологий

$$H^q(X, P) = 0, \quad q > 0,$$

для всех q и p (например, когда все пучки P_p тонкие). Последовательность (В.6) определяет коцепной комплекс

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, P) \xrightarrow{h_*} \Gamma(X, P_0) \xrightarrow{h_*^0} \Gamma(X, P_1) \xrightarrow{h_*^1} \dots \quad (\text{В.7})$$

групп глобальных сечений пучков P, P_0, \dots , который, вообще говоря, точен только в членах $\Gamma(X, P)$ и $\Gamma(X, P_0)$. Имеет место следующая важная теорема.

ТЕОРЕМА В.2. Рассмотрим резольвенту (В.6) пучка P над паракомпактным пространством X . Тогда q -я группа когомологий комплекса (В.7) изоморфна группе когомологий $H^q(X, P)$, т. е.

$$H^q(X, P) = \text{Ker } h_*^q / \text{Im } h_*^{q-1}, \quad q > 0, \quad H^0(X, P) = \text{Ker } h_*^0.$$

□

Пусть, в частности, P — постоянный пучок с коэффициентами в \mathbb{R} из Примера В.2 (будем обозначать его R), а P_q — пучки ростков внешних q -форм на гладком многообразии X . Рассмотрим последовательность

$$0 \xrightarrow{\text{in}} R \xrightarrow{\text{in}} P_0 \xrightarrow{d^*} P_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow P_p \xrightarrow{d^*} \dots, \quad (\text{В.8})$$

где d^* — гомоморфизм ростков q -форм, порождаемых внешним дифференцированием форм. Последовательность (В.8) точна, поскольку росток всякой замкнутой формы является и ростком некоторой точной формы. Так как все пучки P_p тонкие, то последовательность (В.8) является резольвентной для P . Она определяет комплекс де Рама

$$0 \xrightarrow{\text{in}} R \xrightarrow{\text{in}} \Omega^0(X) \xrightarrow{d} \Omega^1(X) \longrightarrow \dots$$

внешних дифференциальных форм на X , и в силу предыдущей теоремы получаем изоморфизм

$$H^p(X) = H^p(X, \mathbb{R})$$

групп когомологий де Рама $H^p(X)$ и групп когомологий $H^p(X, \mathbb{R})$ гладкого многообразия X с коэффициентами в постоянном пучке R .

Библиография

- [1] Атья М., Хитчин Н. *Геометрия и динамика магнитных монополей*. М., 1991.
- [2] Березин Ф.А. *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными*. М., 1983.
- [3] Ботт Р., Ту Л. *Дифференциальные формы в алгебраической топологии*. М., 1989.
- [4] Бредон Г. *Теория пучков*. М., 1988.
- [5] Бурбаки Н. *Общая топология. Основные структуры*. М., 1968.
- [6] Виноградов А., Красильщик И., Лычагин В. *Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений*. М., 1986.
- [7] Весс Ю., Беггер Дж. *Суперсимметрия и супергравитация*. М., 1986.
- [8] Бурбаки Н. *Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов*. М., 1975
- [9] Даниэль Д., Виалле С. *Геометрический подход к калибровочным теориям типа Янга—Миллса*, УФН, т.136 (1982) с.377.
- [10] Дольд А. *Лекции по алгебраической топологии*. М., 1976.
- [11] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия. Методы теории гомологий*. М., 1984.
- [12] Зуланке Р., Винтген П. *Дифференциальная геометрия и расслоения*. М., 1975.
- [13] Иваненко Д., Пронин П., Сарданашвили Г. *Калибровочная теория гравитации*. М., 1985.
- [14] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии*. т.1, М., 1981.
- [15] Маклейн С. *Гомология*. М., 1966.
- [16] Манин Ю.И. *Калибровочные поля и комплексная геометрия*. М., 1984.
- [17] Милнор Дж., Сташеф Дж. *Характеристические классы*. М., 1979.
- [18] Раджараман Р. *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля*. М., 1985.
- [19] Рохлин В.А., Фукс Д.Б. *Начальный курс топологии. Геометрические главы*. М., 1977.
- [20] Уорнер Ф. *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*. М., 1987.
- [21] Хирцебрух Ф. *Топологические методы в алгебраической геометрии*. М., 1973.
- [22] Binz E., Sniatycki J. and Fisher H. *Geometry of classical fields* (North-Holland, Amsterdam, 1988).
- [23] Cianci R. *Introduction to supermanifolds* (Bibliopolis, Napoli, 1990).
- [24] Boya L., Cariñena J., J. Mateos. *Homotopy and solitons*, Fortschritte der Physik, v. 26 (1978) p. 175.

- [25] Bryant R., Chern S., Gardner R., Goldschmidt H., Griffiths P. *Exterior differential systems* (Springer-Verlag, Berlin, 1991).
- [26] Coquereaux R. and Jadczyk A. *Riemannian geometry, fiber bundles, Kaluza—Klein theories and all that* (World Scientific, Singapore, 1998).
- [27] Croom F. *Basic concepts of algebraic topology* (Springer—Verlag, Berlin, 1978).
- [28] De Witt B. *Supermanifolds* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984).
- [29] Eguchi T., Gilkey P. and Hanson A. *Gravitation, gauge theories and differential geometry*, Physics Reports, v. 66 (1980) p. 213.
- [30] Greub W., Halperin S. and Vanstone R. *Connections, curvature and cohomology*, vol. I—III (Academic Press, N.-Y., 1972—1976).
- [31] Hitchin N. *On the construction of monopoles*, Comm. Math. Physics, v. 89 (1983) p. 145.
- [32] Kolař I., Michor P., Slovák J. *Natural operations in differential geometry* (Springer-Verlag, Berlin, 1993).
- [33] Lopuszinski J. *An introduction to symmetry and supersymmetry in quantum field theory* (World Scientific, Singapore, 1991).
- [34] Marathe K. and Martucci G. *The mathematical foundations of gauge theories* (North-Holland, Amsterdam, 1992).
- [35] Nash C. *Differential topology and quantum field theory* (Academic Press, N.-Y., 1991).
- [36] Sardanashvily G. *Gauge theories in jet manifolds* (Hadronic Press, Palm Harbor, 1993).
- [37] Sardanashvily G. *Generalized Hamiltonian formalism for field theory* (World Scientific, Singapore, 1995).
- [38] Saunders D. *The geometry of jet bundles* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989).
- [39] *Mechanics, Analysis and Geometry: 200 Years after Lagrange*, ed. M. Francaviglia (Elsevier Science Publishers, 1991).

Предметный указатель

А

- Ааронова–Бома эффект 122
- алгебра банахова 187
 - Грассмана 185
 - Клиффорда 167
 - Ли левая 60
 - — правая 64
- алгебраическая структура 9
- антисолитон 107
- атлас ассоциированный 61
 - главного расслоения 59
 - голономный 25
 - многообразия 15
 - окружности стандартный 18
 - расслоения 24
- атласы эквивалентные многообразия 15
 - — расслоения 24
- аффинно-метрическая теория гравитации 206
- аффинное пространство (см. пространство аффинное)
 - расслоение (см. расслоение аффинное)

Б

- база расслоения 14
- топологии (см. топологии база)
- базис голономный 19, 30
- Бетти число 118
- бордизм 112

В

- вакуум янг-миллсовский 155
- хиггсовский 155
- вакуумное поле 106
 - — калибровочное 121
- вариационная производная 198
 - формула 198
- вариация с фиксированной границей 196
- векторное поле 27
 - — вариационное 196
 - — вертикальное 42
 - — неособое 27
 - — полное 35
 - — проектируемое 42, 194
 - — фундаментальное 37, 78
- вертикальное касательное расслоение 32

- кокасательное расслоение 34
- расщепление (см. расщепление вертикальное)
- вложение 14, 20
- вторая аксиома счетности 7

Г

- Гамильтона оператор (см. оператор Гамильтона)
- уравнение (см. уравнение Гамильтона)
- функция 86
- гамильтониан 82
 - ассоциированный с лагранжианом 87
- гамильтонова связность 82
- гамильтоново векторное поле 86
- геоисан 69
- голономии группа 124
 - — ограниченная 124
- гомеоморфизм 9
- гомологии относительные 130
 - сингулярные 114, 116
 - — проективных пространств 116
 - — сфер 116
- гомологий группа 111
- гомоморфизм Гуревича 117
 - предлучка 210
- гомотопическая группа 101
 - — высшая 101
 - — относительная 103
 - — n -мерная 101
 - эквивалентность 100
 - — слабая 102
- гомотопически обратное отображение 100
- эквивалентные пространства 100
- гомотопический класс 100
- гомотопные отображения 99
- горизонтальная плотность 44
 - проекция 195
 - форма (см. форма горизонтальная)
- горизонтальное расслоение 33
 - расщепление (см. расщепление горизонтальное)
- горизонтальный лифт векторного поля 73
 - — — канонический 204
- гравитационное поле 169
- градуированная суперкоммутативная алгебра 183
- градуированное векторное пространство 184

градуированный Λ -модуль 185

граница 111

— множества 8

— ориентированная 111

— относительная 129

— симплекса 114

— — сингулярного 114

грассманова оболочка 185

группа голономии связности (см. голономии группа)

— гомологий (см. гомологий группа)

— гомотопическая (см. гомотопическая группа)

— калибровочная (см. калибровочная группа)

— Клиффорда 168

— когомологий (см. когомологий группа)

— Ли 16

— — $SO(3)$ 17

— — $SU(2)$ 17

— — $U(1)$ 16

— Лоренца 168

— симметрий внутренних 75

— — точных 155, 157

— спинорная (см. спинорная группа)

— структурная (см. структурная группа расслоения)

— фундаментальная 101

Д

двойственность Пуанкаре 120

— де Рама 120

действие группы свободное 29

— — транзитивное 11

— — эффективное 11

диффеоморфизм 18

— локальный 20

дифференциал внешний

(см. дифференцирование внешнее)

— ковариантный (см. ковариантный дифференциал)

— отображения (см. касательный морфизм)

— $(F-N)$ 41

дифференциальное уравнение 52

дифференциальный оператор 52

дифференцирование вертикальное 195

— внешнее 39

— горизонтальное 195

— Ли (см. производная Ли)

З

закон сохранения 73

— — ковариантный 203

— — сильный 193

— — слабый 193

замыкание множества 8

заряд магнитный 160

— топологический 146

И

изоморфизм расслоений 27

— — главных (см. калибровочный изоморфизм)

иммерсия 20

инстантон 142

— БПШТ 150

интегральное сечение связности 57

инъекция 14

К

калибровка сингулярная 151

калибровочная группа 79

калибровочные преобразования 79

— условия 93

калибровочный изоморфизм 62

— потенциал 75

— принцип 74

Калуца–Клейна модель 175

— — многомерная 176

карта 15

касательное пространство 19

— расслоение 19, 25

касательный морфизм 19, 27

— — вертикальный 32

квантование магнитного заряда 161

— — потока 124

кватернионы 143

— вещественные 143

— мнимые 143

кинк 107

класс гомотопический (см. гомотопический класс)

— Понтрягина (см. Понтрягина класс)

— Тодда 138

— характеристический (см. характеристический класс)

— Чженя (см. Чженя класс)

— Чженя–Саймонса 147

— Штифеля–Уитни 142

— Эйлера (см. Эйлера класс)

— эквивалентности 10

классификационная теорема 133

классическое поле 68

— — вакуумное (см. вакуумное поле)

Клейна бутылка 112

клетка 103

клеточная аппроксимация 103

клеточное пространство 103

— разбиение 103

ковариантная производная 53

ковариантный дифференциал 57

ковекторное поле 30

когомологии де Рама 119

— относительные 129

— с коэффициентами в пучке 212

когомологий группа 118

кограница 118

- относительная 130
- касательное расслоение 30
- коммутант группы 117
- компактификация локально компактного пространства 12
 - прямой 13
- комплекс де Рама 119
- коцепной 118
 - цепной 111
- компонента связности 10
- контрсии тензор 171
- конфигурационное пространство 69
 - — гравитации 206
 - — калибровочных потенциалов 75
 - — материальных полей 77
 - — поля Прока 96
- координат система 16
- координаты голономные 19
 - канонические 81
 - подчиненные вертикальному расщеплению 33
 - производных (см. скоростей)
 - расслоенные 23
 - — аффинные 29
 - скоростей 46
- кощель 118
 - относительная 130
 - с коэффициентами в пучке 211
- коцикл 118
 - относительный 130
- кривизна связности 56
 - припаивающей формы 57
- кручение 117
 - связности 57, 172

Л

- лагранжева плотность (см. лагранжиан)
 - связность 71
- лагранжиан 68
 - материальных полей 77
 - невырожденный (см. регулярный)
 - полурегулярный 89
 - поля Прока 96
 - регулярный 69
 - Янга—Миллса 75
- Лагранжа функция 69
- лассо 126
- Лежандра многообразие 80
 - отображение 80
 - расслоение 80
- лепажев эквивалент лагранжиана 197
- лепажева форма 197
- лист Мебиуса 25

М

- материальное поле 77
- метрика (см. расстояния функция)
 - Минковского 168

- на многообразии 31
- послыонная 30
- псевдориманова 169
- риманова 166
- многообразии 15
 - Грассмана 17
 - Лежандра (см. Лежандра многообразие)
 - мировое 166
 - ориентированное 22
 - ориентируемое 22
 - полисимплектическое (см. полисимплектическое многообразие)
 - пространственно-временное 173
 - струй (см. струй многообразие)
 - топологическое 16
 - Штифеля 18
- множество замкнутое 7
 - ограниченное 11
 - открыто-замкнутое 8
 - открытое 6
 - плотное 8
- моморфизм расслоений 27
- монополь магнитный 162
- морфизм главных расслоений 62
 - импульсный 83
 - касательный (см. касательный морфизм)
 - многообразий 18
 - послыонный 15, 27
 - расслоений (см. послыонный)
 - топологических пространств (см. непрерывное отображение)
 - тривиализации (см. тривиализации морфизм)
- мультиинстантон 152

Н

- накрытие 105
- напряженность калибровочного поля 66
- неметричности тензор 171
- непрерывное отображение 8
- Нетер тождества 79, 201
- нетеровский ток (см. ток симметрии)
- нормализатор подгруппы 176
- нормальный делитель (см. инвариантная подгруппа)
- носитель 13

О

- область 8
 - тривиализации (см. тривиализации область)
- ограниченное множество (см. множество ограниченное)
- окрестностей фундаментальная система 5
- окрестность 5
- оператор Гамильтона 84
 - Дирака 171
 - Эйлера—Лагранжа 70
 - — второго порядка 70

— — первого порядка 70
 орбита группы 11
 ориентация многообразия 22
 отделимость Фреше 12
 отношение 10
 — эквивалентности 10
 отображение Лежандра (см. Лежандра
 отображение)
 — непрерывное (см. непрерывное отображение)
 — открытое 23
 — пары топологических пространств 103
 — пространства с отмеченной точкой 101
 отображения гомотопные (см. гомотопные
 отображения)

П

параллельный перенос 52, 53
 погружение 20
 подгруппа инвариантная 176
 — циклическая 116
 подмногообразие 20
 — вложенное 20
 подпространство топологического пространства 9
 подрасслоение 27
 полисимплектическая структура 81
 — форма 81
 полисимплектическое многообразие 81
 полиэдр 113
 полное семейство гамильтонианов 91
 Понтрягина индекс 147
 — класс 138
 — — многообразия 140
 — — полный 139
 последовательность гомотопических групп пары
 104
 — — — расслоения 105
 — групп гомологий пары 129
 — — когомологий пары 130
 — касательных расслоений 34
 — кокасательных расслоений 34
 — точная 34
 почти комплексная структура 140
 предел Прасада—Зоммерфельда 164
 предпучок 209
 — канонический 210
 преобразование атласов расслоения 24
 — — нечетное 183
 — общее ковариантное 205
 — четное 183
 принцип калибровочный (см. калибровочный
 принцип)
 — расщепления 136
 — эквивалентности 169
 присоединенное представление 61
 проективное пространство 17
 проекция 14, 21

— стереографическая (см. стереографическая
 проекция)
 произведение внешнее расслоений 29
 — — форм 38
 — прямое расслоений 28
 — расслоений 29
 — связностей (см. связностей произведение)
 — тензорное абелевых групп 117
 — топологических пространств 7
 производная ковариантная (см. ковариантная
 производная)
 — Ли 36
 — — внешней формы 42
 — — тангенциально-значной формы 42
 — полная 72
 Прока поле 96
 пространство аффинное 29
 — касательное (см. касательное пространство)
 — классифицирующее 133
 — клеточное (см. клеточное пространство)
 — конфигурационное (см. конфигурационное
 пространство)
 — метрическое 6
 — Минковского 167
 — проективное (см. проективное пространство)
 — расслоенное (см. расслоенное пространство)
 — с отмеченной точкой 101
 — связей 87
 — спинорное (см. спинорное пространство)
 — топологическое (см. топологическое
 пространство)
 — фазовое (см. фазовое пространство)
 Пуанкаре лемма 119
 путь накрывающий 53
 пучок 209
 — алгебр Ли 37
 — внешних форм 38
 — постоянный 210
 — сечений 31
 — тангенциально-значных форм 41
 — тонкий 212

Р

разбиение гамильтониана каноническое 84
 — единицы 13
 — клеточное (см. клеточное пространство)
 — множества 10
 расслоение 24
 — ассоциированное 58, 61
 — аффинное 29
 — векторное 29
 — вертикальное касательное (см. вертикальное
 касательное расслоение)
 — — кокасательное (см. вертикальное
 кокасательное расслоение)
 — геометрическое 204
 — главное 59

- — реперное 63, 167
 - горизонтальное (см. горизонтальное расслоение)
 - групповое 28, 61
 - дифференцируемое 24
 - дуальное 29
 - индуцированное 28
 - касательное (см. касательное расслоение)
 - кокасательное (см. кокасательное расслоение)
 - Лежандра (см. Лежандра расслоение)
 - на алгебры Клиффорда 168
 - на пространства Минковского 168
 - обобщенное аффинное 29
 - редуцированное 62
 - связностей 65
 - со структурной группой (см. структурная группа расслоения)
 - сопряженное 64
 - спинорное (см. спинорное расслоение)
 - струй (см. струй расслоение)
 - тензорное 30
 - универсальное 133
 - расслоений изоморфизм (см. изоморфизм расслоений)
 - мономорфизм (см. мономорфизм расслоений)
 - морфизм (см. морфизм послыйный)
 - произведение (см. произведение прямое расслоений)
 - — внешнее (см. произведение внешнее расслоений)
 - — тензорное (см. произведение тензорное расслоений)
 - свертка (см. свертка расслоений)
 - сумма Уитни (см. сумма Уитни векторных расслоений)
 - расслоения эквивалентные 25
 - расслоенное многообразие 21
 - — локально тривиальное 23
 - — тривиальное 23
 - пространство 14
 - расстояния функция 6
 - расщепление вертикальное 33
 - — для аффинного расслоения 33
 - — для векторного расслоения 33
 - горизонтальное 54
 - — каноническое 49
 - — проектируемого векторного поля 50
 - конфигурационного пространства 92
 - локальное расслоенного многообразия 21, 23
 - фазового пространства 93
 - редукция структурной группы (см. расслоение редуцированное)
 - резольвента пучка 212
 - росток функции 209
 - элемента предпучка 209
- С**
- свертка внешних форм и векторных полей 39
 - расслоений 30
 - связностей произведение 55
 - — тензорное 56
 - связность 53-55
 - аффинная 55
 - гамильтонова (см. гамильтонова связность)
 - дуальная 56
 - лагранжева (см. лагранжева связность)
 - линейная 55
 - — общая 171
 - лоренцевская 171
 - на ассоциированном расслоении 67
 - — главным расслоении 64
 - — расслоении связностей 67
 - сечение 14, 21
 - глобальное 14, 26
 - голономное 48
 - индуцированное 28
 - интегральное (см. интегральное сечение связности)
 - критическое 196
 - локальное 26
 - сигнатура многообразия 120
 - симплекс сингулярный 114
 - стандартный 113
 - система отсчета 170
 - скобки Ли 37
 - (F-N) 41
 - слабое равенство 73
 - слой 14, 23
 - типичный 23
 - солитон 106
 - нетопологический 107
 - топологический 106
 - спинорная группа 168
 - спинорное пространство 167
 - расслоение 168
 - спиноры дираковские 167
 - майорановские 191
 - стабилизатор элемента 110
 - стебель пучка 209
 - степень отображения 22
 - стереографическая проекция 9
 - струй многообразия 46
 - — второго порядка 51
 - — голономное 51
 - — повторное 50
 - — полуголономное 50
 - — k -порядка 51
 - — — повторное 52
 - — — полуголономное 52
 - пространство бесконечного порядка 194
 - расслоение 46
 - струйное продолжение морфизма 47

— — сечения 48
 структурная группа расслоения 58
 струя сечений расслоения 45
 субмерсия 21
 сужение расслоения 28
 сумму Уитни векторных расслоений 29
 супералгебра Ли 184
 — Пуанкаре 186
 супергравитация 190
 супергруппа Ли 190
 — $L(4, 4)$ 190
 — $OSp(4, 2; 1)$ 190
 суперметрика 191
 супермногообразие 189
 суперпотенциал 193
 — Комара 206
 — — обобщенный 208
 суперпространство 188
 суперрасслоение главное 190
 — касательное 189
 суперфункция 188
 — супердифференцируемая 188
 сфера 8
 сюръекция 14

Т

тензор конторсии (см. конторсии тензор)
 — неметричности (см. неметричности тензор)
 — энергии-импульса (см. энергии-импульса тензор)
 тензорное поле 30
 — расслоение (см. расслоение тензорное)
 тензоры t^* Хуфта 143
 — антисамодуальные 143
 — самодуальные 143
 тетрадная форма 172
 — функция 170
 тетрадное поле 169
 ток симметрии 73, 200
 топологии база 7
 — сравнимые 8
 топологическая структура 5
 топологическое пространство 5
 — — векторное 9
 — — вполне несвязное 10
 — — дискретное 6
 — — евклидово 7
 — — компактное 12
 — — локально евклидово 9
 — — локально компактное 12
 — — — счетное в бесконечности 13
 — — отделимое 11
 — — паракомпактное 13
 — — связное 8
 — — стягиваемое 100
 — — хаусдорфово (см. отделимое)
 — — k -связное 102

топология индуцированная 9
 — метрическая 6
 — образа 9
 — подчиненная структуре многообразия 15
 — сильнее 8
 — сильнейшая 8
 — слабее 8
 — слабейшая 8
 точка бесконечно удаленная 12
 — прикосновения 8
 — предельная 12
 точная последовательность
 (см. последовательность точная)
 тривиализации морфизм 24, 25
 — область 24

У

уравнение Богомольного 164
 — Гамильтона 85
 — — алгебраическое 85
 — самодуальности 151
 — Эйлера—Лагранжа алгебраическое 70, 71
 — — второго порядка 70, 71
 — — первого порядка 70, 71

Ф

фазовое пространство 80
 — — калибровочных потенциалов 94
 — — поля Прока 96
 — — электромагнитных потенциалов 95
 фактор по отношению (см. фактор-множество)
 фактор-группа 11
 фактор-множество 11
 фактор-пространство 11
 — левое 11
 — правое 11
 — топологическое 11
 фермионное поле 169, 170
 флаксон 122
 форма векторнозначная 35
 — вертикально-значная горизонтальная 43
 — внешняя 35, 37
 — — горизонтальная 43
 — — замкнутая 39
 — — точная 39
 — — индуцированная 40
 — горизонтальная 42
 — Картана 197
 — Киллинга 76
 — контактная 195
 — лепажева (см. лепажева форма)
 — Лиувилля 43, 85
 — — обобщенная 81
 — полисимплектическая
 (см. полисимплектическая форма)
 — припавивающая 43
 — — каноническая 44

- производящая оператора Эйлера—Лагранжа 70
- Пуанкаре—Картана 69
- пфафова (см. ковекторное поле)
- связности 65
 - — локальная 65
 - симплектическая 43, 85
- тангенциально-значная 35, 40
 - — вертикальная 42
 - — горизонтальная 43
 - — каноническая 41
 - — проектируемая 43
- характеристическая (см. характеристическая форма)
 - Чженя (см. Чженя форма)
 - Эйлера (см. Эйлера форма)
- функция Гамильтона (см. Гамильтона функция)
 - Лагранжа (см. Лагранжа функция)
 - перехода 15, 24, 25
 - эквивариантная 62

- Х**
- характеристическая форма 135
 - характеристический класс 134
 - полином 134
 - хиггсовское поле 63, 154

- Ц**
- цель 111
 - относительная 129
 - сингулярная 114
 - цикл 111
 - относительный 129

- Ч**
- четность элемента 184

- Чженя класс 136
 - — вещественного многообразия 140
 - форма 135
 - — полная 135
 - характер 138
 - число 137
- число Бетти (см. Бетти число)
 - Чженя (см. Чженя число)

Ш

- шар замкнутый 8
 - открытый 7

Э

- Эйлера класс 141
 - форма 142
- эйлерова характеристика 118
 - — многообразия 120
- эквивалентности класс (см. класс эквивалентности)
 - отношение (см. отношение эквивалентности)
- эквивалентность гомотопическая (см. гомотопическая эквивалентность)
- эквивалентные атласы (см. атласы эквивалентные)
 - расслоения (см. расслоения эквивалентные)
- электромагнитное поле 76
- энергии-импульса тензор 73, 202
 - — метрический 203

Я

- ядро послыоного морфизма 34
- Якоби матрица 20
- якобиан 22

Содержание

Введение	3
Глава 1. Дифференциальная геометрия	5
§1. Топологические пространства	5
§2. Многообразия	15
§3. Расслоенные многообразия	23
§4. Дифференциальные формы	35
§5. Многообразия струй	45
§6. Связности на расслоениях	52
§7. Расслоения со структурными группами	58
Глава 2. Геометрическая теория поля	68
§1. Лагранжев формализм	68
§2. Калибровочная теория	74
§3. Гамильтонов формализм	79
§4. Системы со связями	86
<i>Калибровочные потенциалы (94). Электромагнитное поле (95). Поле Прока (96).</i>	
Глава 3. Топологические характеристики в теории поля	99
§1. Гомотопические группы	99
§2. Топологические солитоны	106
<i>Модель кинков (107). Модель синус-Гордона (107). Модель Нильсена—Олесе- на (108). Модель т'Хуфта—Полякова (109).</i>	
§3. Гомологии и когомологии	110
<i>Гомологии комплексов (110). Сингулярные гомологии (113). Когомологии (118).</i>	
§4. Эффект Ааронова—Бома	121
<i>Вакуумные калибровочные поля (121). Относительные гомологии и когомо- логии (129).</i>	
§5. Характеристические классы расслоений	132
<i>Классификационная теорема (132). Классы Чженя (134). Классы Понтряги- на (138).</i>	
§6. Инстантоны	142
§7. Магнитные монополи	154
<i>Электромагнитное поле в модели т'Хуфта—Полякова (158). Магнитный за- ряд (159). Модель т'Хуфта—Полякова (161). Уравнение Богомольного (163).</i>	

Глава 4. Геометрии пространства-времени	166
§1. Гравитация	166
§2. Многомерная гравитация	175
§3. Супèргравитация	183
Приложение А. Вариационное исчисление и законы сохранения	193
<i>Пространство струй бесконечного порядка (194). Вариационное исчисление (196). Законы сохранения (199). Нетеровские законы сохранения (200). Законы сохранения энергии-импульса (202). Энергия-импульс калибровочных полей (203). Условие общей ковариантности (204). Энергия-импульс гравитационного поля (206).</i>	
Приложение В. Когомологии со значениями в пучках	209
Библиография	214
Предметный указатель	216