

УДК 551, 556

*В. Ю. Богомолов<sup>1,2</sup>, В. М. Степаненко<sup>2</sup>*<sup>1</sup>Институт мониторинга климатических и экологических систем Сибирского отделения Российской академии наук (ИМКЭС СО РАН)<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

## Сравнение турбулентных замыканий в одномерной модели водоема

В рамках одномерных моделей озера наиболее распространенными турбулентными замыканиями являются  $k - \varepsilon$  модель и замыкание Хендерсон–Селлерс. В силу большого различия в вычислительной сложности и других математических свойствах между этими параметризациями возникает вопрос о точности численного решения уравнений модели водоема. Для анализа точности численного решения и скорости его сходимости при различных вариантах  $k - \varepsilon$  замыкания и параметризации Хендерсон–Селлерс, а также оценки правильности воспроизведения основных физических механизмов перемешивания в водоеме в данной работе были проведены численные эксперименты для идеализированных течений и для конкретного озера. Численные эксперименты показали, что модель с замыканием  $k - \varepsilon$  может давать гладкое решение только с шагом по времени  $\Delta t < 450$  с, а сходимость достигается при  $\Delta t < 100$  с, в то же время модель с параметризацией Хендерсон–Селлерс достигает сходимости с шагом по времени  $\Delta t = 3600$  с. При этом при использовании обоих замыканий модель качественно воспроизводит распределение температуры с глубиной в сравнении с данными измерений.

**Ключевые слова:** одномерная модель водоема, турбулентное замыкание, численные эксперименты.

*V. Yu. Bogomolov<sup>1,2</sup>, V. M. Stepanenko<sup>2</sup>*<sup>1</sup>Institute of Monitoring of Climatic and Ecological Systems of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences<sup>2</sup>Educational Institution of Higher Education M. V. Lomonosov Moscow State University

## Comparison of turbulent closures in a one-dimensional lake model

The turbulence closures mostly used in one-dimensional lake models are  $k - \varepsilon$  closure and Henderson–Sellers diffusivity. As these closures are very different in underlying physics and mathematical properties, they lead to contrasting numerical stability and computational efficiency of a lake model as a whole. This study presents the performance of the one-dimensional model LAKE using the abovementioned turbulence parameterizations in idealized vertical mixing scenarios and concrete lake simulations. Our results demonstrate that  $k - \varepsilon$  closure allows for a smooth solution at timesteps  $\Delta t < 450$  s, while the convergence of numerical scheme is attained at  $\Delta t < 100$  s. In contrast, convergence of the lake model scheme using Henderson–Sellers diffusivity is achieved if  $\Delta t < 3600$  s, resulting in drastic reduction of the lake model runtime as compared to using  $k - \varepsilon$  parameterization. At the same time, the correctness of simulation results obtained by both schemes is very similar.

**Key words:** one-dimensional lake model, turbulent closure, numerical experiments.

## 1. Введение

Активное развитие технологий кластерных вычислений и рост мощностей суперкомпьютеров привели к тому, что разрешение моделей Земной системы будет составлять около  $0.25^{\circ}$ – $0.5^{\circ}$  ( $25$ – $50$  км). При таком разрешении многие ранее подсеточные объекты на земной поверхности, такие как водоемы, реки, болота и т.д., становятся крупномасштабными структурами и должны описываться явно.

Одной из составляющих деятельного слоя суши являются внутренние водоемы, играющие важную роль в формировании локальных погодных условий и во многом определяющие специфические особенности климата над прилегающей территорией. Прежде всего это обусловлено существенной разницей между температурой поверхности озера и температурой поверхности окружающей его суши. Эта разница наблюдается почти всегда, за исключением случаев, когда и озера, и почва покрыты снегом. Существенно отличие между водными объектами и сушей и в других термо- и аэродинамических характеристиках поверхности, таких как шероховатость и альбедо. Все это приводит к значительной пространственной неоднородности турбулентных и радиационных потоков на поверхности, особенно в регионах, где высока плотность количества озер, например, на Западно-Сибирской низменности. Контраст в потоках энергии на границе земля–вода имеет суточный цикл, приводящий к местной атмосферной циркуляции вдоль берегов крупных озер во время безледного периода. В умеренной климатической зоне наличие крупных водоемов изменяет теплообмен в приземном слое воздуха на сезонном временном масштабе. В течение лета водоемы, прогреваемые коротковолновой солнечной радиацией, накапливают тепло, а в течение осени выделяют это тепло, вследствие больших градиентов температуры и влажности между поверхностью водоема и воздухом. Тепло, выделяющееся с поверхности озер в конце осени и в начале зимы, часто приводит к развитию горизонтальных конвективных ячеек в пограничном слое атмосферы в условиях холодного атмосферного вторжения – классический сценарий, тщательно изученный в районе Великих американских озер (например, [1]). Эти примеры ясно показывают важность реалистичного представления озер в моделях численного прогноза погоды и в моделях Земной системы.

Современный этап развития схем деятельного слоя суши в моделях Земной системы характеризуется усложнением параметризаций гидрологических процессов. Описание многих процессов, связанных с движением и фазовыми переходами воды (перенос и фазовые переходы влаги в почве, процессы формирования и развития снежного покрова, движение и транспирация влаги в растениях), присутствует в этих моделях сравнительно давно. В параметризациях водоемов [2], [3], [4], [5] основной упор делается на термодинамику взаимодействия с атмосферой, а моделирование скорости течения (имеется не во всех параметризациях) служит для адекватного воспроизведения вертикального турбулентного теплообмена внутри водоема. Потоки явного скрытого тепла и импульса служат граничным условием для атмосферных моделей, поэтому от моделей водоемов требуется, в первую очередь, точность расчета этих величин. Однако адекватное воспроизведение вертикального профиля температуры в водоеме также имеет большое значение, поскольку температура является ключевым фактором развития экосистем, которые могут оказывать влияние на атмосферные процессы. Так, в последнее десятилетие заметное внимание уделяется эмиссии метана с внутренних водоемов, в частности, термокарстовых озер [6]. Усиление образования метана при участии соответствующих микроорганизмов может быть обусловлено повышением температуры грунта, вызванным потеплением климата.

Одномерные модели водоема в силу вычислительной простоты хорошо подходят для климатических задач, в которых рассматриваются большие территории, большое количество водоемов и приходится проводить длительные численные эксперименты [2].

В рамках развития климатического моделирования к модели водоема выдвигаются требования к вычислительной эффективности, физической адекватности всех её параметризаций и возможности использования грубых шагов по времени, т.е. порядка 1 часа. Также появляются требования к универсальности данной модели для разных климатических зон.

Требование вычислительной экономичности, приводящее к ограничению шагов по пространству и по времени в модели водоема, вынуждает исследовать чувствительность численного решения и его сходимости в модели при варьировании этих шагов на примере идеализированных течений, демонстрирующих роль отдельных ключевых механизмов теплообмена в водоеме, и на реальных объектах с дальнейшим сравнением с данными измерений.

## 2. Методология

В настоящей работе используется одномерная модель озера LAKE 2.0 [7]. В ней трехмерные уравнения для скалярных величин и скорости усредняются по горизонтали для водоема произвольной формы, однако здесь эта форма для простоты будет задана параллелепипедом. В модели вертикальный профиль температуры находится как решение уравнения притока тепла, в отличие, например, от наиболее распространенной двухслойной модели FLake [4]. При этом, в отличие от модели Хостетлера [3] и основанного на модели Хостетлера программного кода CLM-LISSS4 [8], в модели LAKE реализован биогеохимический блок [7, 9], который воспроизводит продукцию и эмиссию газов  $\text{CH}_4$  и  $\text{CO}_2$  в атмосферу.

В отличие от модели Хостетлера и CLM-LISSS4, турбулентные коэффициенты теплопроводности и вязкости в модели LAKE находятся по формуле Колмогорова [14]:

$$\nu = C_e \frac{k^2}{\varepsilon}, \nu_T = C_{e,T} \frac{k^2}{\varepsilon},$$

где  $C_e$  и  $C_{e,T}$  – эмпирические константы (см. табл. 4 в Приложении 1), турбулентная кинетическая энергии (ТКЭ)  $k$  и скорость ее диссипации  $\varepsilon$  находятся на основе турбулентного замыкания  $k - \varepsilon$  (см. Приложение 1). Данное турбулентное замыкание широко распространено при решении задач технической и геофизической гидродинамики. В моделях геофизической гидродинамики, в частности, были показаны границы ее применимости и численной устойчивости при включении в дискретную трехмерную систему семи уравнений Рейнольдса ([10], см. также работу [11]).

В настоящей работе в модель LAKE 2.0 была добавлена параметризация теплопроводности Хендерсон–Селлерс [12] (см. Приложение 2) для устойчиво стратифицированных озер совместно со схемой конвективного перемешивания водоема при неустойчивой стратификации [13].

В стандартной  $k - \varepsilon$  модели коэффициент в формуле Колмогорова считается константой. Однако при стратификации, отличной от безразличной, более физически обоснованно считать данный коэффициент функцией стратификации и сдвига скорости; такие функции предложены, например, в работах Кануто и соавт. [15], Гальперина и соавт. [7] (см. табл. 4 в Приложении 1).

Для анализа точности численного решения и скорости его сходимости при различных вариантах замыкания  $k - \varepsilon$  и в параметризации Хендерсон–Селлерс, а также для оценки правильности воспроизведения в модели основных физических механизмов перемешивания авторами работы был проведен ряд численных экспериментов как для идеализированных течений, так и для реальных озер.

Необходимым условием сходимости конечно-разностного решения системы дифференциальных уравнений к точному является стремление к нулю нормы разницы конечно-разностных решений с различным пространственно-временным разрешением при стремлении шагов по времени и пространству к нулю.

Конечно-разностная схема модели LAKE 2.0 – схема Кранка–Николсон с центральными разностями по пространству. Она консервативна по всем первым моментам и по энергии среднего течения. Перенос энергии между средним течением и ТКЭ в схеме реализуется аналогично переносу в исходной дифференциальной постановке.

### 3. Эксперимент Като–Филлипса для $k - \varepsilon$ модели

Рассматривается идеализированный сценарий ветрового перемешивания водоема, следующий в своей постановке классическому лабораторному эксперименту [17]. В этом эксперименте перемешанный слой, индуцируемый постоянным касательным напряжением на поверхности, проникает в линейно стратифицированную жидкость. Лабораторные данные роста глубины перемешанного слоя  $D_m$  со временем  $t$  хорошо аппроксимирует следующая формула [18]:

$$D_m(t) = 1.05u_s^*N_0^{-1/2}t^{1/2}, \quad (1)$$

где  $u_s^*$  – скорость трения на поверхности, а постоянная  $N_0$  – частота Брента–Вяйсяля начального профиля температуры  $T$  (плотности).

В рамках данного идеализированного эксперимента проведены исследования чувствительности численного решения к пространственному и временному разрешению и сходимости при различных вариантах расчета коэффициента Колмогорова в  $k - \varepsilon$  замыкании (табл. 2) и возможности воспроизведения заглупления перемешанного слоя как одного из важнейших параметров правильного воспроизведения состояния водоемов.

Эксперимент проводился с использованием модели ЛАКЕ, настроенной для данного эксперимента. На нижней и верхней границе был задан нулевой поток тепла. Начальный профиль температуры задавался как линейный:

$$T(z) = \alpha z + \beta$$

с параметрами  $\alpha = -3$  К/м,  $\beta = 333$  К, где ось  $z$  направлена вдоль вектора силы тяжести. Начальная скорость течения полагалась равной нулю и глубина водоема задана 20 м. Параметр Кориолиса принимался равным 0. Следуя работам [19, 20], используем следующие значения параметров:

$$u_s^* = 3 \cdot 10^{-3} \text{ мс}^{-1} \quad \text{и} \quad N_0 = 5.5 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}.$$

Для каждого из подвидов турбулентного замыкания  $k - \varepsilon$  проводились две группы численных экспериментов (табл. 1) с варьированием шага по времени  $\Delta t^k$  и с фиксированным количеством уровней по вертикали  $M$ , а также с варьируемым количеством уровней по вертикали  $M^k$ , но с фиксированным шагом по времени  $\Delta t$ .

Т а б л и ц а 1

**Пространственное и временное разрешение в двух группах численных экспериментов**

Аббревиатура группы	Фиксируемый параметр пространственно-временного разрешения	Варьируемый параметр пространственно-временного разрешения	Диапазон индексов эксперимента
Гр.1. $k$	$\Delta t = 25$ с	$M^k = 10; 20; 40; 80; 160; 320; 640$	$k = 1..7$
Гр.2. $k$	$M = 40$	$\Delta t^k = 3600; 1800; 900; 450; 225; 100; 50; 25$ с	$k = 1..8$

Согласно сформулированному необходимому условию сходимости численного решения в каждой группе экспериментов сходимость оценивалась по стремлению к нулю среднеквадратического отклонения  $\sigma^{k,k+1}$  поля температуры  $T^k$  относительно поля  $T^{k+1}$  ( $k$  – номер эксперимента):

$$\sigma^{k,k+1} = \sqrt{\frac{1}{M \cdot N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (T_{i,j}^k - T_{i,j}^{k+1})^2},$$

здесь  $M$  – количество уровней сетки,  $N$  – количество шагов по времени.

### 3.1. Результаты эксперимента

Для того чтобы проверить сходимость решения на больших временах в модели необходимо задать такую глубину водоема, чтобы перемешанный слой длительное время развивался, не достигая дна. Поэтому при заданном градиенте температуры ее значение на поверхности становится неправдоподобно высоким для реальных водоемов (60 °С), хотя такую же стратификацию по плотности (частоту Брента–Вяйсяля) можно задать и распределением по вертикали солёности.

Среднеквадратическое отклонение между результатами экспериментов Гр.1.3 и Гр.1.4 составляет около 0.26 °С, как видно из рис. 1, что в практическом смысле можно считать удовлетворительной мерой сходимости, т.к. оно близко к погрешности измерений температуры гидрометеорологическими приборами. При этом в эксперименте Гр.1.1 ( $\Delta t = 25$  с,  $H^1 = 10$ ) для всех вариантов замыкания  $k - \varepsilon$  имеет место существенная ошибка в глубине перемешанного слоя относительно аналитического решения [18] (рис. 4).

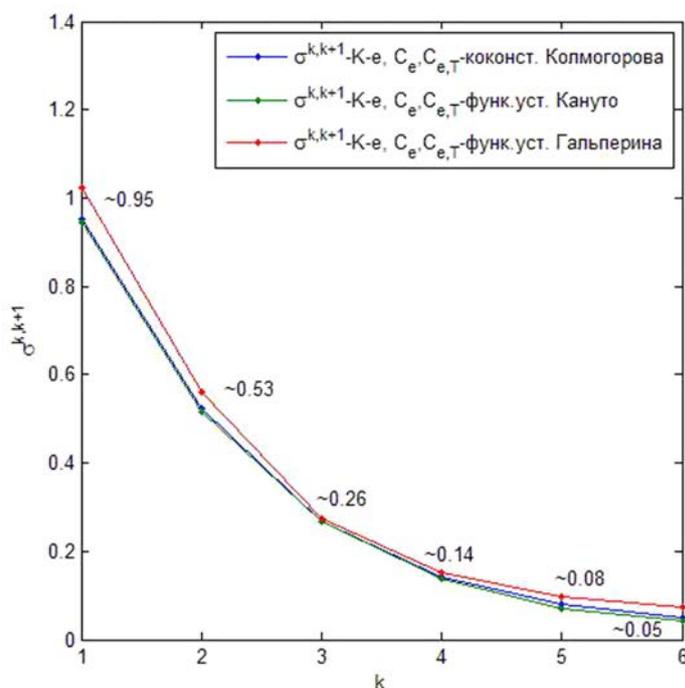


Рис. 1. Среднеквадратическое отклонение для группы экспериментов Гр.1.k, где узел 1 по оси абсцисс соответствует среднеквадратическому отклонению между экспериментами Гр.1.1 и Гр.1.2 и так далее

Как видно из рис. 2 (характерного для всех трех вариантов замыкания  $k - \varepsilon$ ), при достаточно высоком вертикальном разрешении глубина перемешанного слоя и распределение температуры близки к аналитическому решению для эволюции глубины перемешанного слоя (1). Только в случае функций устойчивости Гальперина глубина перемешанного слоя меньше аналитической оценки на  $\approx 1$  м (5%).

Эксперименты Гр.1 показывают, что модель водоема с замыканием  $k - \varepsilon$ , начиная с эксперимента Гр.1.4 ( $M = 40$ , при шаге сетки  $\frac{H}{M} \leq 0.5$  м), рассчитывает глубину перемешанного слоя, близкую к аналитическому решению.

В экспериментах Гр.2.1 ( $\Delta t = 3600$  с), Гр.2.2 ( $\Delta t = 1800$  с) Гр.2.4 ( $\Delta t = 450$  с) поведение изотерм характеризует потерю точности решения при таких шагах по времени для неявной схемы решения системы уравнений модели (рис. 3).

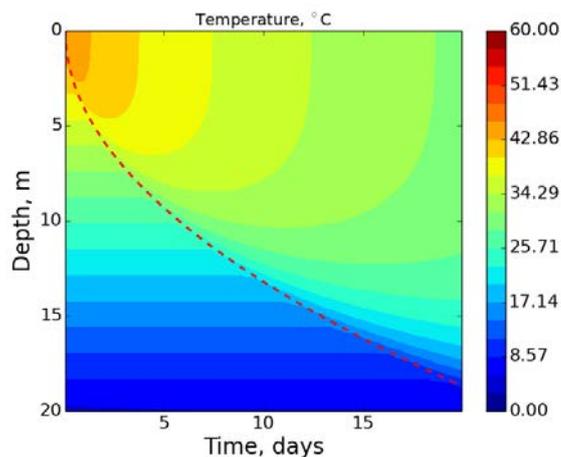


Рис. 2. Поле температуры в эксперименте Гр 1.7,  $\Delta t = 25$ ,  $H^7 = 640$ , характерное для замыкания  $k - \varepsilon$

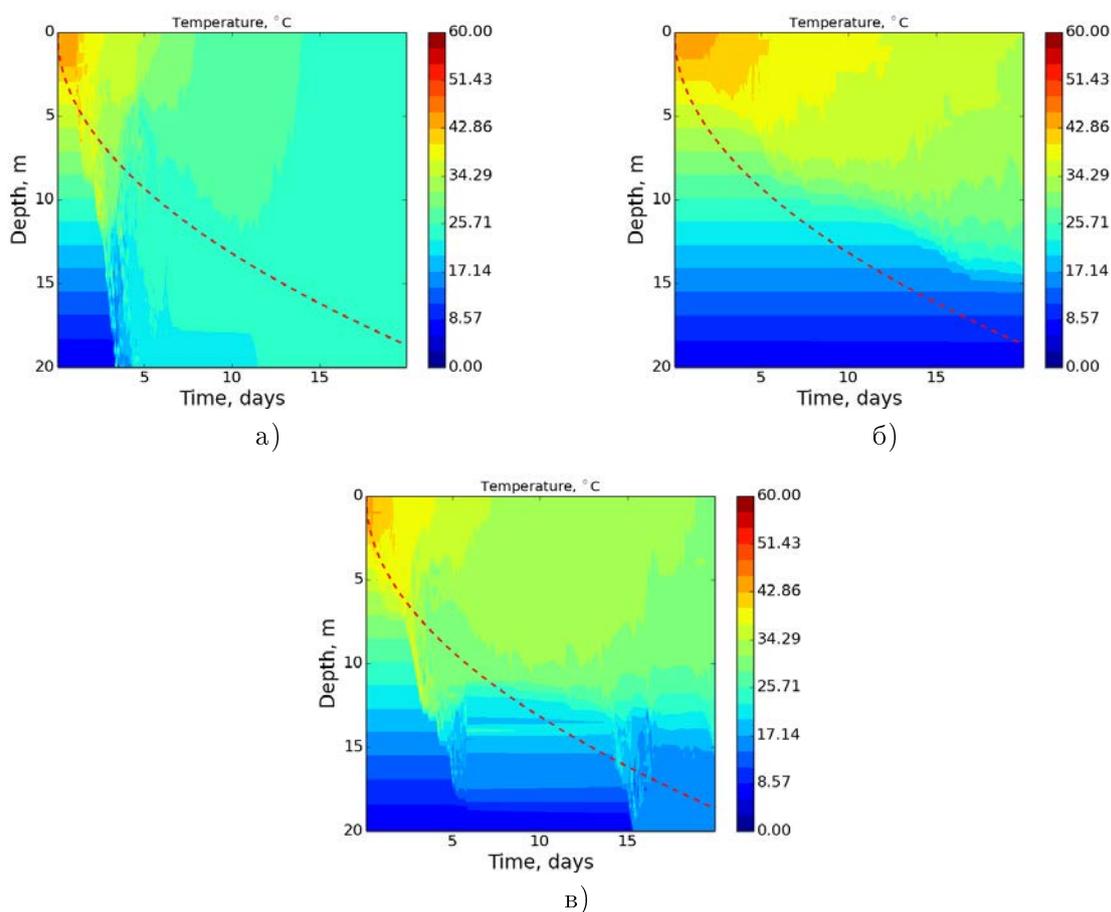


Рис. 3. Поле температуры в экспериментах Като–Филлипа группы Гр.2.1 с моделью LAKE при использовании  $k - \varepsilon$  замыкания: а) с  $C_l$  и  $C_{l,T}$  как эмпирическими константами; б) с  $C_l$  и  $C_{l,T}$  как функциями устойчивости Кануто; в) с  $C_l$  и  $C_{l,T}$  как функциями устойчивости Гальперина

Для экспериментов Гр.2.5, Гр.2.6, Гр.2.7 Гр.2.8 получается достаточно точное решение для температуры, близкое к решению, изображенному на рис. 2. При этом из рис. 4. видно, что решение с приемлемой точностью достигается при шаге по времени  $\Delta t = 100$  с.

Таким образом, эксперименты Гр.2 показали, что в случае устойчивой стратификации при постоянном напряжении ветра модель с замыканием  $k - \varepsilon$  (со всеми вариантами ко-

эффицентов Колмогорова) может давать гладкое решение только с шагом по времени  $\Delta t < 450$  с, а сходимость достигается при  $\Delta t < 100$  с.

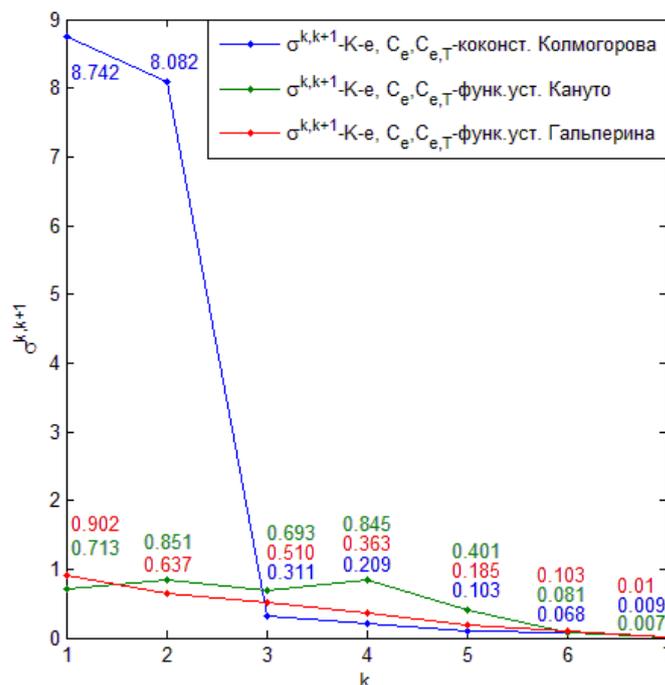


Рис. 4. Среднеквадратическое отклонение для группы экспериментов Гр.2.k, где узел 1 по оси абсцисс соответствует среднеквадратическому отклонению между экспериментами Гр.2.1 и Гр.2.2 и так далее

#### 4. Эксперимент с реальным атмосферным форсингом для модели LAKE с параметризацией Хендерсон–Селлерс и $k - \varepsilon$ моделью

Эксперимент для озера Куйваярви (Финляндия; глубина – 12.5 м) проведен с атмосферным форсингом из данных измерений, выполненных университетом Хельсинки с 1.05.2013 по 10.11.2013 [21]. Для модели LAKE с параметризацией Хендерсон–Селлерс проводились две группы численных экспериментов (табл. 2): в первой группе варьировался шаг по времени  $\Delta t^k$  и фиксировалось количество уровней по вертикали  $M$ ; во второй группе изменялось количество уровней по вертикали  $M^k$ , а шаг по времени  $\Delta t$  принимался постоянным.

Т а б л и ц а 2

##### Шкала пространственного и временного разрешения двух групп численных экспериментов

Аббревиатура группы	Фиксируемый параметр пространственно-временного разрешения	Варьируемый параметр пространственно-временного разрешения	Диапазон индексов эксперимента
Гр.1.k	$\Delta t = 25$ с	$M^k = 12; 24; 48; 96; 192$	$k = 1..5$
Гр.2.k	$M = 40$	$\Delta t^k = 3600; 1800; 900; 450; 225; 100; 50$ с	$k = 1..7$

#### 4.1. Результаты эксперимента

Результаты эксперимента для Гр.2 с моделью ЛАКЕ, включающей параметризацию Хендерсон–Селлерс, показали очень слабую чувствительность конечно-разностной схемы модели ЛАКЕ к варьированию шага по времени (рис. 5а). Варьирование шага по пространству в экспериментах Гр.1 показало, что модель в такой конфигурации чувствительна к шагу по времени характерном для эксперимента Гр1.1 ( $M = 12$ ). При уменьшении пространственного шага модель вела себя, как и в случае экспериментов для Гр.2 (рис. 5б).

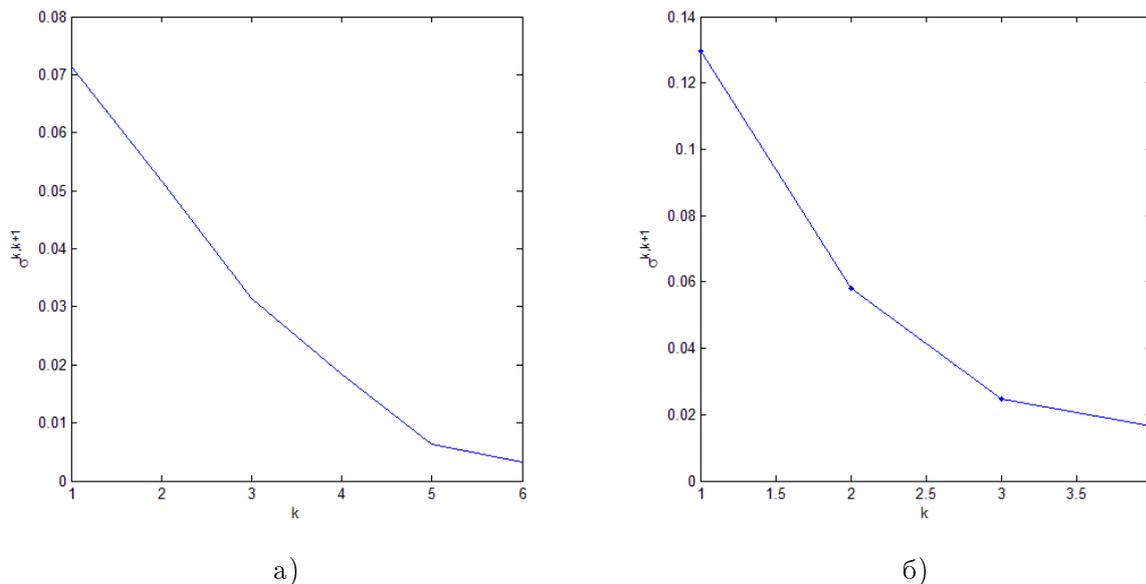


Рис. 5. Среднеквадратическое отклонение полей температуры в экспериментах с реальным атмосферным форсингом для группы экспериментов: а) Гр.2. $k$ , где абсциссе 1 соответствует среднеквадратическое отклонение между экспериментами Гр.2.1 и Гр.2.2 и так далее; б) Гр.1. $k$ , где абсциссе 1 соответствует среднеквадратическое отклонение между экспериментами Гр.1.1 и Гр.1.2 и так далее

Эксперименты группы Гр.2. (различные варианты задания  $C_l, C_{l,T}$ ) для модели ЛАКЕ с  $k - \epsilon$  замыканием показали, что неустойчивость численного решения имеет место при  $\Delta t > 450$  с. Для экспериментов Гр.2.4 и Гр.2.5 характерно распределение температуры, показанное на рис. 6.

В экспериментах Гр.2.6 и Гр.2.7 удалось воспроизвести близкое к измеренному поле температуры (рис. 7).

В ходе численных экспериментов измерялось также время счета модели на персональном компьютере  $t$  (табл. 3).

Для сравнения с измеренным пространственно-временным распределением температуры использовались данные экспериментов с параметрами  $\Delta t = 25$  с,  $M = 48$  для модели с ЛАКЕ с  $k - \epsilon$  замыканием (с различными вариантами  $C_l, C_{l,T}$ ) и  $\Delta t = 3600$  с,  $M = 48$  с параметризацией Хендерсон–Селлерс.

Результаты приведенных экспериментов с моделью ЛАКЕ с замыканием  $k - \epsilon$  (при разном задании коэффициентов Колмогорова) с реальным атмосферным форсингом приводят к таким же выводам об условиях сходимости численного решения, что и в экспериментах Като–Филлипса. Приемлемая точность решения достигается при  $\Delta t \leq 50$  с. Эксперименты с моделью ЛАКЕ при использовании параметризации Хендерсон–Селлерс показали, что приемлемая точность решения достигается при значительно более грубых шагах как по пространству, так и по времени.

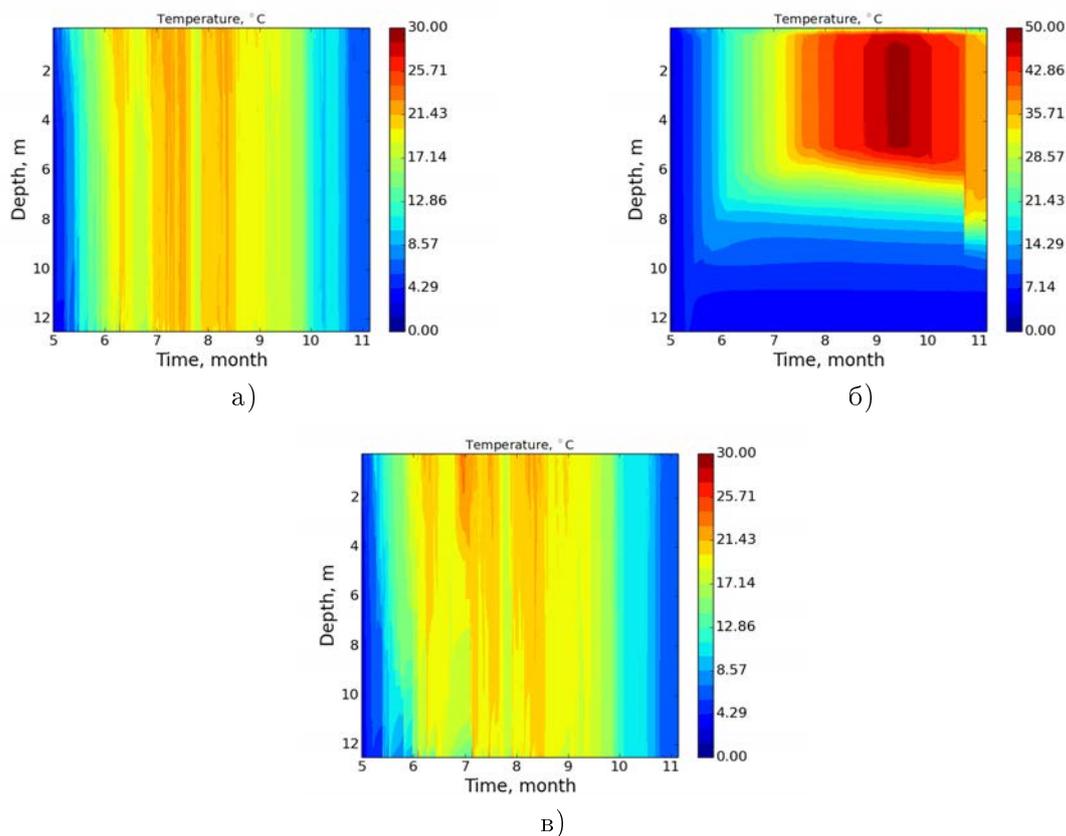


Рис. 6. Поле температуры в экспериментах Гр.2.4 ( $\Delta t = 450$  с) и Гр.2.5 ( $\Delta t = 225$  с) с реальным атмосферным форсингом для оз. Куйваярви: Коэффициенты формулы Колмогорова  $C_l$  и  $C_l(l, T)$  заданы как: а) эмпирические константы Колмогорова; б) функции устойчивости Кануто; в) функции устойчивости Гальперина

Сравнение с данными измерений (рис. 7б) показывает, что модель с параметризацией Хендерсон–Селлерс (рис. 7а) качественно воспроизводит распределение температуры с глубиной, а также динамику перемешанного слоя, незначительно занижая его глубину в среднем на 1 м, кроме октября и ноября, для которых она значительно занижает глубину на 2.5–3 метра. Кроме того, в августе модель не воспроизводит скачок в заглублении перемешанного слоя, связанный, по-видимому, с сильным ветровым напряжением и выхолаживанием поверхности. Тем не менее эти отклонения не сказываются существенно на качестве воспроизведения температуры поверхности водоема.

Т а б л и ц а 3

**Время, затраченное вычислительной машиной для расчета экспериментов с реальным атмосферным форсингом для оз. Куйваярви**

Параметризация турбулентного обмена	$\Delta t$ с	$M = 24$	$M = 48$	$M = 96$
Хендерсон-Селлерс	3600 с	11 с	16 с	18 с
$k - \varepsilon$	3600 с	–	–	–
Хендерсон-Селлерс	25 с	192 с	247 с	349 с
$k - \varepsilon$	25 с	225 с	313 с	471 с

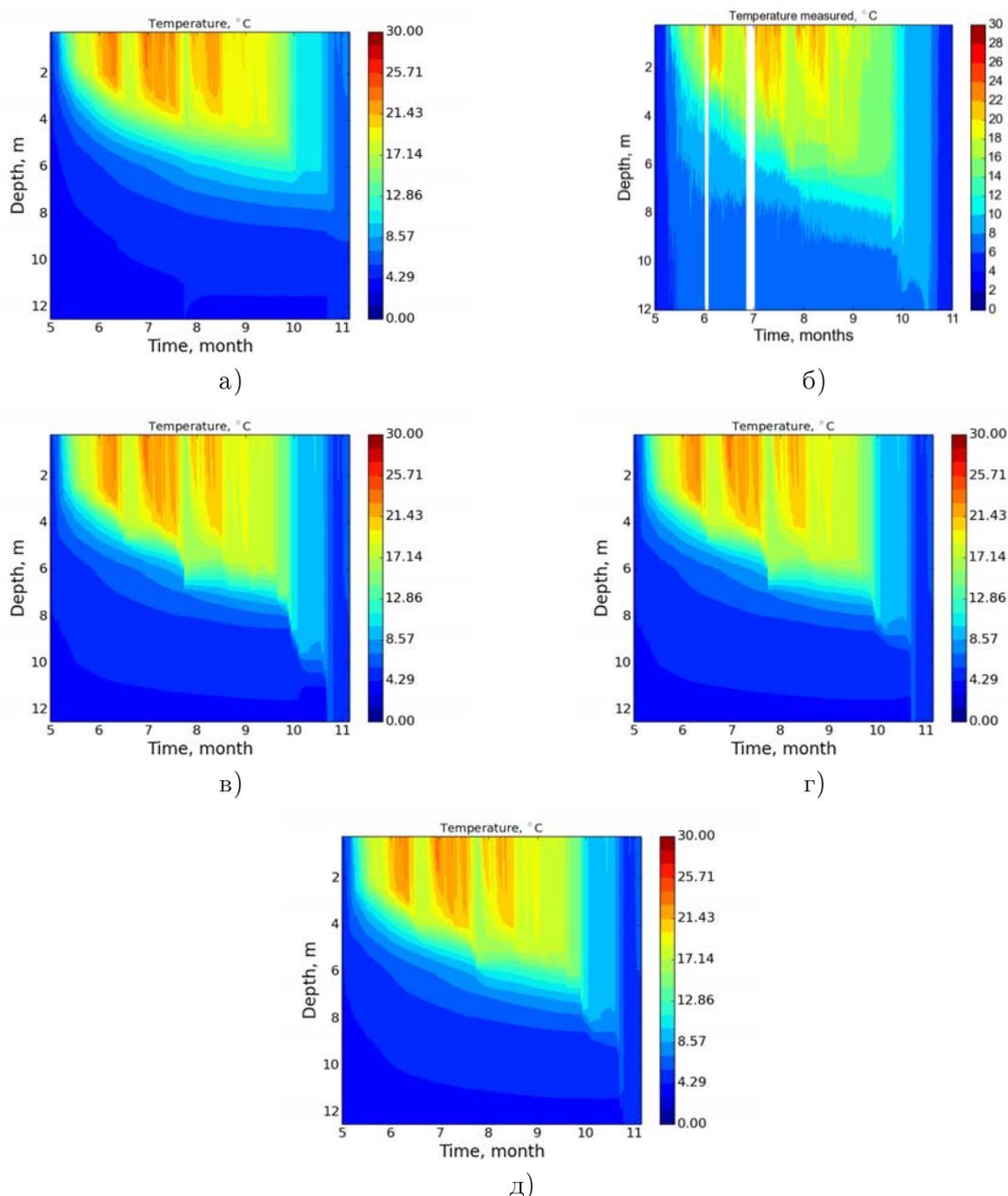


Рис. 7. Распределение температуры по глубине и времени для озера Куйваярви: а) модель LAKE с параметризацией Хендерсон–Селлерс; б) данные измерений; в) LAKE с замыканием  $k-\epsilon$  эмпирическими константами Колмогорова г) LAKE с замыканием  $k-\epsilon$  с функциями устойчивости Кануто; д) LAKE с замыканием  $k-\epsilon$  с функциями устойчивости Гальперина

Модель с замыканием  $k-\epsilon$  с различными вариантами коэффициентов Колмогорова (рис. 7в, 7г, 7д) достаточно качественно воспроизводит измеренное распределение поля температуры, динамику заглубления перемешанного слоя и скачок температуры в августе. Более точно, нежели для параметризации Хендерсон–Селлерс, воспроизводится глубина перемешанного слоя в осенний период. Стоит также отметить, что модель с замыканием  $k-\epsilon$  с функциями устойчивости Гальперина, так же как и для эксперимента Като–Филлипса, занижает глубину перемешанного слоя и сглаживает скачок, характерный для августа.

Эти результаты, а также анализ табл. 3 показывают, что в качестве параметризации для расчета коэффициента турбулентной теплопроводности можно использовать параметризацию Хендерсон–Селлерс и при больших шагах по времени  $\Delta t = 3600$  с, с сокращением

времени счета в 20 раз по сравнению с расчетом для  $\Delta t = 25$  с. Разные версии замыкания  $k - \varepsilon$  воспроизводят фактически одинаковую динамику поля температуры и заглужение перемешанного слоя и в рамках экспериментов эмпирические константы Колмогорова дают такой же или лучший результат, чем математически сложные функции устойчивости Гальперина и Кануто.

## 5. Заключение

Эксперимент Като–Филипс, а также эксперименты для озера Куйвоярви показали, что модель с замыканием  $k - \varepsilon$  (со всеми вариантами коэффициентов Колмогорова) может давать гладкое решение только с шагом по времени  $\Delta t < 450$  с, а сходимость достигается при  $\Delta t < 100$  с. При этом результаты сравнения с данными измерений показывают, что модель с параметризацией Хендерсон–Селлерс, так же как с замыканием  $k - \varepsilon$ , качественно воспроизводит распределение температуры с глубиной, а также динамику перемешанного слоя. При этом сходимость численного решения при использовании замыкания Хендерсон–Селлерс достигается при значительно более грубом временном разрешении, чем для замыкания  $k - \varepsilon$ . Эти результаты показывают, что при больших шагах по времени,  $\Delta t = 3600$ , в одномерной модели водоема в качестве параметризации коэффициента турбулентной теплопроводности можно использовать параметризацию Хендерсон–Селлерс, что делает модель водоёма лучше приспособленной для применения в рамках моделей Земной системы, а также моделей прогноза погоды накладывающих ограничение на шаг по времени в параметризациях деятельного слоя суши.

## 6. Приложение 1

Прогностические уравнения для ТКЭ,  $k$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon$  имеют вид

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_m + \frac{\nu}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial z} + S + B - \varepsilon, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_m + \frac{\nu}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon 1} S + c_{\varepsilon 3} B - c_{\varepsilon 2} \varepsilon),$$

$$S = \nu \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right], \quad B = -\frac{g}{\rho_w 0} \nu_T \left( \alpha_T \frac{\partial T}{\partial z} + \alpha_s \frac{\partial s}{\partial z} \right),$$

$$\nu = C_e \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad \nu_T = C_{e,T} \frac{k^2}{\varepsilon},$$

здесь  $\alpha_T(T, s)$  обозначает коэффициент термического расширения,  $\alpha_s(T, s)$  – коэффициент расширения относительно солености  $s$ . Постоянные коэффициенты и функции устойчивости приведены в табл. 4.

Граничные условия для ТКЭ и  $\varepsilon$  задаются одинаково для нижней и верхней границ и записаны выражениями, точными в приближении логарифмического пограничного слоя [21]:

$$\frac{\nu}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \Big|_{z=0,h} = 0, \quad \frac{\nu}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \Big|_{z=0,h} = -C_{e,0}^{3/4} \frac{\nu}{\sigma_\varepsilon} \frac{k^{3/2}}{\kappa z_0^2},$$

где  $C_{e,0} = 0.09$  – постоянный коэффициент Колмогорова для импульса,  $z_0 = 10^{-2}$  м – эмпирический параметр,  $\kappa = 0.38$  – константа Кармана.

Уравнения для горизонтальных компонент импульса имеют вид [7]:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( (\nu + \nu_m) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) + f \bar{v}, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( (\nu + \nu_m) \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) + -f \bar{u},$$

## 7. Приложение 2

Уравнения для параметризации коэффициента турбулентной теплопроводности для термически стратифицированного водоема имеют вид [7]:

Коэффициенты стандартной  $k - \varepsilon$  модели

Константы	
$\sigma_k$	1
$\sigma_\varepsilon$	1.111
$\sigma_{\varepsilon 1}$	1.44
$\sigma_{\varepsilon 2}$	1.92
$\sigma_{\varepsilon 3}$	1.14
Константы Колмогорова [22]	
$C_e$	0.09
$C_{e,T}$	0.072
Константы Колмогорова как функции устойчивости Кануто [15] и как функции устойчивости Гальперина [7]	
$C_e$	Функция устойчивости (стратификации и сдвига скорости) для импульса
$C_{e,T}$	Функция устойчивости (стратификации и сдвига скорости) для скаляров

$$\nu_T = \frac{\kappa u_s^* z}{P_0} e^{-k^* z} (1 + 37 Ri^2)^{-1},$$

где

$$Ri = \frac{-1 + [1 + 40 N^2 \kappa^2 z^2 / (u_s^{*2} e^{-\kappa^* z})]^{1/2}}{20},$$

где  $P_0$  – нейтральное значение турбулентного числа Прандтля,  $z$ , м – глубина,  $N$ ,  $s^{-1}$  – частота Брента–Вяйсяля,  $\kappa$  – константа Кармана,  $k^*$  считается функцией широты и скорости как обобщение аналитического решения Смита [23] для всех широт:

$$k^* = 6.6 \sqrt{\sin(\varphi)} U^{-1.84},$$

где  $\varphi$  – широта,  $U$   $ms^{-1}$  – горизонтальная скорость ветра на высоте 10 м,  $u_s^*$   $ms^{-1}$  – скорость трения на поверхности, которая рассчитывается из предположения, что длина смешения постоянна в экмановском слое, по формуле

$$u_s^* = l u_s(-k^*),$$

$l(z)$ , м – глубина перемешанного слоя,  $u_s$ ,  $ms^{-1}$  – скорость на поверхности.

Расчет идеализированных экспериментов, оценка сходимости и устойчивости выполнены при поддержке гранта РФФИ 17-17-01210 «Исследование процессов взаимодействия атмосферного пограничного слоя умеренных и высоких широт с деятельным слоем суши и водоёмами: разработка параметризаций для моделей Земной системы». Получение данных измерений, сравнение с численными экспериментами выполнены при поддержке проекта IX.138.2.1 программы фундаментальных исследований СО РАН.

## Литература

1. Forbes G.S., Merritt J.M. Mesoscale vortices over the Great Lakes in wintertime // Mon. Wea. Rev. 1984. V. 112. P. 377–381.
2. Bonan G.B. Sensitivity of a GCM simulation to inclusion of inland water surfaces // J. Climate. 1995. V. 8. P. 2691–2704.

3. *Hostetler S.W., Bartlein P.J.* Simulation of lake evaporation with application to modeling lake level variations of Harney-Malheur Lake // *Water Resour. Res.* 1990. V. 26. P. 361–369.
4. *Mironov D., Rontu L., Kourzeneva E., Terzhevik A.* Towards improved representation of lakes in numerical weather prediction and climate models // *Boreal Environ. Res.* 2010. V. 15. P. 97–99.
5. *Dutra E., Stepanenko V.M., Balsamo G., Viterbo P., Miranda A., Mironov D., Schar C.* An offline study of the impact of lakes on the performance of the ECMWF surface scheme // *Boreal Environ. Res.* 2010. V. 15. P. 100–112.
6. *Walter K.M., Smith L.C., Chapin F.S.* Methane bubbling from northern lakes: Present and future contributions to the global methane budget // *Philos. Trans. R. Soc. A.* 2007. V. 365. P. 1657–1676.
7. *Stepanenko V., Mammarella I., Ojala A., Miettinen H., Lykosov V., Vesala T.* LAKE 2.0: a model for temperature, methane, carbon dioxide and oxygen dynamics in lakes // *Geosci. Model Dev.*, 2016. V. 9. P. 1977–2016.
8. *Subin Z.M., Riley W.J., Mironov D.* An improved lake model for climate simulations: Model structure, evaluation, and sensitivity analyses in CESM1 // *J. Adv. Model. Earth Syst.* 2012. V. 4. M02001.
9. *Степаненко В.М., Мачульская Е.Е., Глаголев М.В., Лыкосов В.Н.* Моделирование эмиссии метана из озер зоны вечной мерзлоты. *Известия РАН. Физика атмосферы и океана.* 2011. Т. 47, № 2. P. 275–288.
10. *Kunz R.F., Lakshminarayana B.* Stability of Explicit Navier-Stokes Procedures Using K-[epsilon] and K-[epsilon]/algebraic Reynolds Stress Turbulence Models // *Journal of Computational Physics.* 1992. V. 103. N 1. P. 141–159.
11. *Lotstedt P., Carlbom P.* Stability and non-normality of the  $k - \varepsilon$  equations // *Fuel and Energy Abstracts.* 1997. V. 83. N 1. P. 11–37.
12. *Henderson-Sellers B.* New formulation of eddy diffusion thermocline models // *New formulation of eddy diffusion thermocline models.* 1985. V. 9. N 6. P. 411–446.
13. *Bogomolov V., Stepanenko V., Volodin E.* Development of lake parametrization in the INMCM climate model // *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science.* 2016. V. 48.012005.
14. *Колмогоров А.Н.* Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности // *Доклады Академии Наук СССР.* 1941. Т. XXXII, № 1. С. 19–21.
15. *Canuto V.M.* Turbulent convection with overshooting: Reynolds stress approach // *Journal of Astrophysics.* 1992. V. 392. P. 218–232.
16. *Galperin B., Kantha L., Hassid S., Rosati A.* A Quasi-equilibrium Turbulent Energy Model for Geophysical Flows // *J. Atmos. Sci.* 1988. V. 45. P. 55–62.
17. *Kato H., Phillips O.M.* On the penetration of a turbulent layer into stratified fluid // *J. Fluid Mech.* 1969. V. 37. P. 643–655.
18. *Price J.F.* On the scaling of stress-driven entrainment experiments // *Fuel and Energy Abstracts,* 1979. V. 90, N 1. P. 509–529.
19. *Deleersnijder E., Luyten P.* On the practical advantages of the quasi-equilibrium version of the Mellor and Yamada level 2.5 turbulence closure applied to marine modelling // *App. Math. Modelling.* 1994. V. 18. P. 281–287.
20. *Burchard H., Baumert H.* The formation of estuarine turbidity maxima due to density effects in the salt wedge. A hydrodynamic process study // *J. Phys. Oceanogr.* 1998. V. 28, N 1. P. 309–321.

21. *Mammarella I., Nordbo A., Rannik U., Haapanala S., Levula J., Laakso H., Ojala A., Peltola O., Heiskanen J., Pumpanen J., Vesala T.* Carbon dioxide and energy fluxes over a small boreal lake in Southern Finland // *J. Geophys. Res. Biogeo.* 2015. V. 120. N C21. P. 1296–1314.
22. *Goudsmit G.H.* Application of  $k - \varepsilon$  turbulence models to enclosed basins: The role of internal seiches // *J. Geophys. Res.* 2002. V. 107. N C21. P. 23-1–23-13.
23. *Smith I.R.* Hydraulic conditions in isothermal lakes // *Freshwater Biology.* 1979. V. 9. N C21. P. 119–145.

## References

1. *Forbes G.S., Merritt J.M.* Mesoscale vortices over the Great Lakes in wintertime. *Mon. Wea. Rev.* 1984. V. 112. P. 377–381.
2. *Bonan G.B.* Sensitivity of a GCM simulation to inclusion of inland water surfaces. *J. Climate.* 1995. V. 8. P. 2691–2704.
3. *Hostetler S.W., Bartlein P.J.* Simulation of lake evaporation with application to modeling lake level variations of Harney-Malheur Lake. *Water Resour. Res.* 1990. V. 26. P. 361–369.
4. *Mironov D., Rontu L., Kourzeneva E., Terzhevik A.* Towards improved representation of lakes in numerical weather prediction and climate models. *Boreal Environ. Res.* 2010. V. 15. P. 97–99.
5. *Dutra E., Stepanenko V.M., Balsamo G., Viterbo P., Miranda A., Mironov D., Schar C.* An offline study of the impact of lakes on the performance of the ECMWF surface scheme. *Boreal Environ. Res.* 2010. V. 15. P. 100–112.
6. *Walter K.M., Smith L.C., Chapin F.S.* Methane bubbling from northern lakes: Present and future contributions to the global methane budget. *Philos. Trans. R. Soc. A.* 2007. V. 365. P. 1657–1676.
7. *Stepanenko V., Mammarella I., Ojala A., Miettinen H., Lykosov V., Vesala T.* LAKE 2.0: a model for temperature, methane, carbon dioxide and oxygen dynamics in lakes. *Geosci. Model Dev.*, 2016. V. 9. P. 1977–2016.
8. *Subin Z.M., Riley W.J., Mironov D.* An improved lake model for climate simulations: Model structure, evaluation, and sensitivity analyses in CESM1. *J. Adv. Model. Earth Syst.* 2012. V. 4. M02001.
9. *Stepanenko V.M., Machulskaya E.E., Glagolev M.V., Lykosov V.N.* Numerical modeling of methane emissions from lakes in the permafrost zone // *Izvestiya RAS. Atmos. Ocean. Phys.* 2011. V. 47, N 2. P. 275–288. (in Russian).
10. *Kunz R.F., Lakshminarayana B.* Stability of Explicit Navier-Stokes Procedures Using  $K$ -[epsilon] and  $K$ -[epsilon]/algebraic Reynolds Stress Turbulence Models. *Journal of Computational Physics.* 1992. V. 103. N 1. P. 141–159.
11. *Lotstedt P., Carlbom P.* Stability and non-normality of the  $k - \varepsilon$  equations. *Fuel and Energy Abstracts.* 1997. V. 83. N 1. P. 11–37.
12. *Henderson-Sellers B.* New formulation of eddy diffusion thermocline models. *New formulation of eddy diffusion thermocline models.* 1985. V. 9. N 6. P. 411–446.
13. *Bogomolov V., Stepanenko V., Volodin E.* Development of lake parametrization in the INMCM climate model. *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science.* 2016. V. 48.012005.
14. *Kolmogorov A.N.* Dissipation of energy for locally isotropic turbulence. *Reports of the Academy of Sciences of the USSR.* 1941. V. XXXII, N 1. P. 19–21. (in Russian).

15. *Canuto V.M.* Turbulent convection with overshooting: Reynolds stress approach. *Journal of Astrophysics*. 1992. V. 392. P. 218–232.
16. *Galperin B., Kantha L., Hassid S., Rosati A.* A Quasi-equilibrium Turbulent Energy Model for Geophysical Flows. *J. Atmos. Sci.* 1988. V. 45. P. 55–62.
17. *Kato H., Phillips O.M.* On the penetration of a turbulent layer into stratified fluid. *J. Fluid Mech.* 1969. V. 37. P. 643–655.
18. *Price J.F.* On the scaling of stress-driven entrainment experiments. *Fuel and Energy Abstracts*, 1979. V. 90, N 1. P. 509–529.
19. *Deleersnijder E., Luyten P.* On the practical advantages of the quasi-equilibrium version of the Mellor and Yamada level 2.5 turbulence closure applied to marine modelling. *App. Math. Modelling*. 1994. V. 18. P. 281–287.
20. *Burchard H., Baumert H.* The formation of estuarine turbidity maxima due to density effects in the salt wedge. A hydrodynamic process study. *J. Phys. Oceanogr.* 1998. V. 28, N 1. P. 309–321.
21. *Mammarella I., Nordbo A., Rannik U., Haapanala S., Levula J., Laakso H., Ojala A., Peltola O., Heiskanen J., Pumpanen J., Vesala T.* Carbon dioxide and energy fluxes over a small boreal lake in Southern Finland. *J. Geophys. Res. Biogeo.* 2015. V. 120. N C21. P. 1296–1314.
22. *Goudsmit G.H.* Application of  $k - \varepsilon$  turbulence models to enclosed basins: The role of internal seiches. *J. Geophys. Res.* 2002. V. 107. N C21. P. 23-1–23-13.
23. *Smith I.R.* Hydraulic conditions in isothermal lakes. *Freshwater Biology*. 1979. V. 9. N C21. P. 119–145.

Поступила в редакцию 20.11.2017