УДК 517.984.5 +534-14

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АКУСТИКИ ЭМУЛЬСИЙ

Гавриков А.А. (ИПМех РАН), Шамаев А.С. (ИПМех РАН, МГУ)

В настоящей работе установлена сходимость решений задачи о малых колебаниях смеси двух слабовязких жидкостей к решениям усредненной задачи и изучены спектральные свойства усредненной задачи.

Пусть Ω — ограниченная область с гладкой границей в $\mathbb{R}^d, Y = [0,1]^d$ — единичный куб, Y_1, Y_2 — области с гладкой границей в Y, такие что $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$ и $Y = \overline{Y_1 \cup Y_2}$. Положим $\Omega_i^\varepsilon = \Omega \cap (\cup_{m\in\mathbb{Z}^d} \varepsilon(Y_i + m)), i = 1, 2$. Тогда $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon}$. Исходная задача в обобщенной формулировке ставится следующим образом.

Найти вектор-функцию $\mathbf{u}^\varepsilon(t)$ со значениями в $\mathbb{H}_0^1(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^d$ такую, что
$$\int\limits_\Omega \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} w_i dx + \int\limits_\Omega \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx = \int\limits_\Omega f_i w_i dx \ \forall \mathbf{w} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \tag{1}$$
с начальными условиями
$$\mathbf{u}^\varepsilon = \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0,$$
где $\sigma_{ij}^\varepsilon \equiv -\delta_{ij} p^\varepsilon(x,t) + \varepsilon^2[\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\delta_{ik}\delta_{jl}]e_{kl}$, $e_{kl}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_l}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_l}\right)$, давление и перемещение связаны формулой
$$p^\varepsilon(x,t) \equiv -\gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\operatorname{div}\mathbf{u}^\varepsilon, \gamma(\xi) = c^2(\xi)\rho(\xi),$$
c — скорость звука, μ, η — коэффициенты вязкости принимают либо (случай А) постоянные значения для каждой из жидкостей, то есть
$$c(\xi) = \begin{cases} c_1 > 0, \xi \in \Omega_1^\varepsilon, \\ c_2 > 0, \xi \in \Omega_2^\varepsilon, \end{cases} \quad \mu(\xi) = \begin{cases} \mu_1 > 0, \xi \in \Omega_1^\varepsilon, \\ \mu_2 > 0, \xi \in \Omega_2^\varepsilon, \end{cases} \quad \eta(\xi) = \begin{cases} \eta_1 > 0, \xi \in \Omega_1^\varepsilon, \\ \eta_2 > 0, \xi \in \Omega_2^\varepsilon, \end{cases}$$
либо (случай Б) являются непрерывными функциями. Функция плотности $\rho(\xi)$ также либо (случай А) принимает постоянные значения для каждой из жидкостей, т.е.
$$\rho(\xi) = \begin{cases} \rho_1 > 0, \xi \in \Omega_1^\varepsilon, \\ \rho_2 > 0, \xi \in \Omega_2^\varepsilon, \end{cases}$$

либо (случай Б) является непрерывной функцией из $H^1(Y)$.

Данной обобщенной постановке задачи соответствует краевая задача в классической дифференциальной форме

$$\begin{cases} \rho^\varepsilon \dfrac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} = \dfrac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i \text{ в } \Omega, \\ p^\varepsilon(x,t) \equiv -\gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon, \\ \mathbf{u}_1^\varepsilon \,|_{S^\varepsilon} = \mathbf{u}_2^\varepsilon \,|_{S^\varepsilon}, \\ \sigma^\varepsilon(\mathbf{u}_1^\varepsilon) \cdot \mathbf{n} \,|_{S^\varepsilon} = \sigma^\varepsilon(\mathbf{u}_2^\varepsilon) \cdot \mathbf{n} \,|_{S^\varepsilon}, \\ \mathbf{u}^\varepsilon \,|_{\partial\Omega} = 0, \\ \mathbf{u}^\varepsilon = \dfrac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0, \end{cases}$$

где S^ε — граница раздела жидкостей, заключенных в областях Ω_1^ε и Ω_2^ε.

Данная задача рассматривалась в работе [1], а в [2] была доказана слабая сходимость решений данной задачи к решениям предельной задачи в пространстве L_2.

Определим вектор-функции $\mathbf{V}^j(t), j = 1, \ldots, d$ со значениями в $\mathbb{H}^1(Y)$ как решения вспомогательных задач (локальных) на ячейке периодичности Y

$$\begin{cases} \rho(\xi) \dfrac{\partial \mathbf{V}^j(\xi,t)}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{V}^j(\xi,t) + \nabla q(\xi,t) = 0, \\ \operatorname{div}_\xi \mathbf{V}^j = 0, \\ \mathbf{V}^{j1}|_S = \mathbf{V}^{j2}|_S, \\ \sigma(\mathbf{V}^{j1}) \cdot \mathbf{n} \,|_S = \sigma(\mathbf{V}^{j2}) \cdot \mathbf{n} \,|_S, \\ \mathbf{V}^j|_{t=0} = \dfrac{\mathbf{e}_j}{\rho(\xi)}; \end{cases} \tag{2}$$

где S — граница областей Y_1 и Y_2, и матрицу $K(t) = \{K_{ij}\}, i, j = 1, \ldots, d$, элементы которой задаются формулой

$$K_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int\limits_Y V_i^j(\xi, t) d\xi. \tag{3}$$

Определим также функцию $p^0(x,t)$ как решение задачи (акустического уравнения)

$$\begin{cases} \left\langle \dfrac{1}{\gamma(\xi)} \right\rangle_Y \dfrac{\partial p^0(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}_x \left[K(t) * (\mathbf{f}(x,t) - \nabla p^0(x,t)) \right] = 0 \text{ в } \Omega, \\ \left[K(t) * (\mathbf{f}(x,t) - \nabla p^0(x,t)) \right] \cdot \mathbf{n} \,|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

(здесь символ $'*'$ обозначает операцию свертки: $f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-s) g(s) ds$, $\langle g \rangle_Y = \frac{1}{|Y|} \int\limits_Y g(\xi) d\xi$ — среднее по ячейке). Можно доказать, что если $\mathbf{f} \in L_2((0,\infty), \mathbb{H}^1(\Omega))$, то $p^0 \in W_2^1((0,\infty), H^2(\Omega))$.

Введем теперь функцию $\mathbf{u}^0(t)$ со значениями в $\mathbb{H}^1(\Omega, \mathbb{H}_0^1(Y))$ с помощью формулы

$$\mathbf{u}^0(x,\xi,t) = \sum_{j=1}^{j=d} \int\limits_0^t \mathbf{V}^j(\xi, t-s) \big(\mathbf{f}(x,s) - \nabla p^0(x,s) \big) \, ds. \tag{5}$$

Тогда имеет место

Теорема. *Для решений предельной (усредненной) и исходной задач справедливы равенства:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| \mathbf{u}^\varepsilon(x,t) - \mathbf{u}^0(x, \tfrac{x}{\varepsilon}, t) \|_{L_2(\Omega)} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| \varepsilon \nabla_x \mathbf{u}^\varepsilon(x,t) - \nabla_{\frac{x}{\varepsilon}} \mathbf{u}^0(x, \tfrac{x}{\varepsilon}, t) \|_{L_2(\Omega)} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| p^\varepsilon(x,t) - p^0(x,t) \|_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Таким образом, вектор-функция $\mathbf{u}^0(x, \frac{x}{\varepsilon}, t)$ описывает предельное поведение скорости, а $\frac{1}{|Y|} \int\limits_Y \mathbf{u}^0(x,\xi,t) d\xi$ — предельной средней скорости. Из (5) вытекает соотношение

$$\frac{1}{|Y|} \int\limits_Y \mathbf{u}^0(x,\xi,t) d\xi = \int\limits_0^t K(t-s) (\mathbf{f}(x,s) - \nabla p^0(x,s)) ds,$$

называемое обычно динамическим законом Дарси.

Для случая одного пространственного переменного задача (4) принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p^0(x,t)}{\partial t} + \int\limits_0^t K(t-s)(f(x,t) - p^0_{xx}(x,s))ds = 0 \text{ на } [0,\pi], \\ p^0|_{t<0} = 0, K(t) * (f(x,t) - p^0_x(x,t))|_{x=0} = K(t) * (f(x,t) - p^0_x(x,t))|_{x=\pi} = 0, \end{cases} \tag{6}$$

где $K(t)$ — скалярная функция. Далее будут сформулированы утверждения о спектрах задачи (6) при различных предположениях о функции $K(t)$. Отметим, что эти утверждения о спектрах верны не только в одномерном, но и в многомерном случае, если только форма включения одной жидкости в другую обладает свойством симметрии относительно всех координатных плоскостей (при таком условии матрица $K(t)$ является скалярной (см. [2])).

Под спектром рассматриваемых задач будет пониматься множество $\sigma \subset \mathbb{C}$ комплексных чисел λ таких, что краевая задача, полученная из краевой задачи (6) преобразованием Лапласа при $f(x,t) \equiv 0$, имеет при $\lambda \in \sigma$ отличное от тождественного нуля решение. Обозначим $\sigma_{\mathbb{R}} = \{\lambda | \lambda \in \sigma, \lambda \in \mathbb{R}\}, \sigma_{\mathbb{C}} = \{\lambda | \lambda \in \sigma, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$ Отметим, что предварительный анализ спектров задачи (6) был проведен в работе [3].

1) Если функция $K(t)$ (3) представима в виде $K(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i e^{-a_i t}$, где c_i, $a_i > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i < \infty, \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i c_i < \infty$ (т.е. $\dot{K}(t) \in W_1^1(\mathbb{R}_+)$), что соответствует условию $\rho(y) \in H^1(Y)$ в задаче (1), то σ имеет следующий вид (спектральная структура, которую мы условно называем структурой типа «крест», см. рис. 1): $\sigma_{\mathbb{R}}$ состоит из счетного числа серий $\mu_{n,N}$, сходящихся к предельным точкам $\mu_N, \sigma_{\mathbb{C}}$ состоит из двух серий собственных значений $\lambda_n, \overline{\lambda_n}$ таких, что $|Im\lambda_n| \to \infty$, а действительные части $Re\lambda_n$ имеют конечный предел

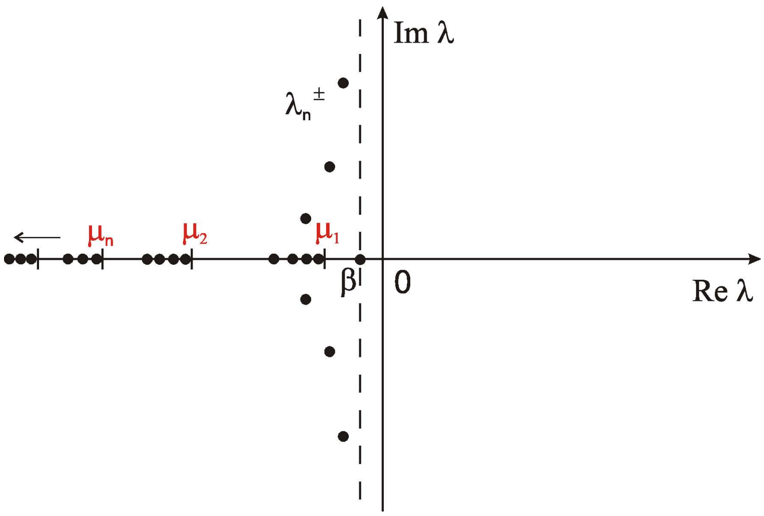

Рис. 1: Спектральная структура типа «крест»

$\beta = const < 0$, причем

$$\beta = -\frac{1}{2}\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i c_i}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i} = \frac{1}{2}\frac{\dot{K}(0)}{K(0)}.$$

Если уравнение (6) получено как макроскопическое уравнение в результате усреднения задачи (1), то вертикальная асимптота $Re\lambda = \beta$ связана с функцией плотности следующей формулой

$$\beta = -\frac{1}{2}\frac{\left\|\nabla \frac{1}{\rho}\right\|^2_{L_2(Y)}}{\left\|\frac{1}{\rho}\right\|^2_{L_2(Y)}} = -\frac{1}{2}\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i c_i}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i}. \tag{7}$$

2) Если $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i c_i = \infty$ (т.е. $\dot{K}(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$), что соответствует условию $\rho(y) \notin H^1(Y)$ в задаче (1), то спектр σ имеет следующий вид (спектральная структура, которую мы условно называем структурой типа «лилия», см. рис. 2): часть спектра $\sigma_{\mathbb{R}}$ такая же, как и в случае структуры «крест»; $\sigma_{\mathbb{C}}$ состоит из собственных значений $\lambda_n, \overline{\lambda_n}$ таких, что $Re\lambda_n \to -\infty, |Im\lambda_n| \to \infty$. Если $c_m = \dfrac{k_1}{m^{\alpha}}, a_m = k_2 m^{\beta}(k_i, \alpha, \beta - const > 0)$, то справедливо равенство

$$Re\lambda_n = -Cn^s, s = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(-\dot{K}(t))}{\ln t}.$$

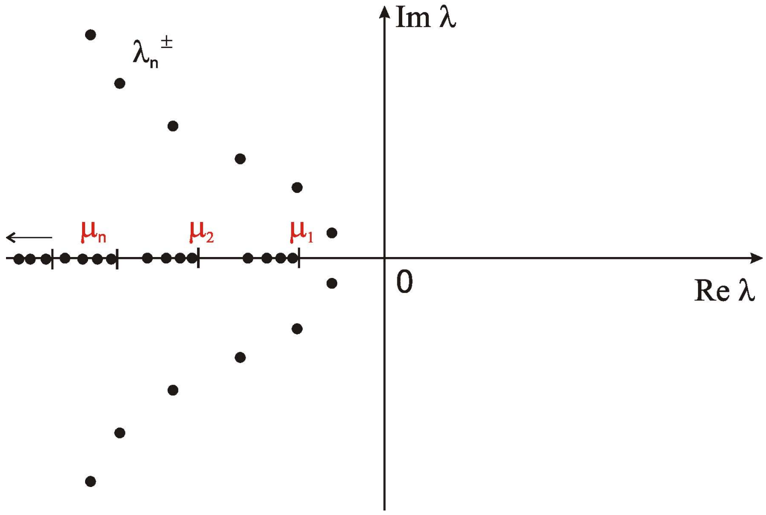

Рис. 2: Спектральная структура типа «лилия»

Кроме того, следует заметить, что в случаях 1) и 2) величина $\sqrt{K(0)}$ в определенном смысле играет роль скорости звука в данной среде.

Случаи 1) и 2) напрямую связаны с поведением функции плотности $\rho(y)$. Именно, имеет место

Теорема. *Если функция плотности $\rho(y)$ разрывна, что соответствует «резкой» границе между двумя жидкостями (случай А), то спектр акустического уравнения (4) является спектральной структурой типа «лилия»; если функция плотности $\rho(y)$ непрерывна (случай Б), то спектр уравнения является структурой типа «крест»; если функция плотности $\rho(y)$ постоянна, то спектр лежит на мнимой оси.*

Данное утверждение основано на зависимости типа спектра от свойств функции $K(t)$. Предположение, что для $K(t)$ в случаях 1) и 2) имеют место спектральные структуры «крест» и «лилия» было сделано авторами, проверено в численном эксперименте, а позже строго доказано В.В. Власовым, Дж. Ву, Г.Р. Кабировой [4], [5],[6], для случая 1) («крест»), и В.В. Власовым, Н.А. Раутиан для случая 2)(«лилия»).

Численным экспериментом по расчету функции $K(t)$ для эмульсии двух жидкостей с разрывной плотностью было подтверждено утверждение о наличии особенности функции $\dot{K}(t)$ в точке 0, что соответствует случаю 2) — спектральной структуре типа «лилия».

3) Пусть функция $K(t)$ в уравнении (6) представима в виде

$$K(t) = C^2 + \alpha\delta(t) + \int\limits_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} e^{\lambda t} d\mu(\lambda),$$

что соответствует уравнению (6), полученному путем интегрирования по t одномерного варианта системы уравнений вязкоупругости

$$\begin{cases} \tilde{\rho}\ddot{u}_j = (q_{ijkn}e_{kn}(\mathbf{u}))'_{x_i} + (\alpha_{ijkn}e_{kn}(\dot{\mathbf{u}}))'_{x_i} \\ \quad +(\beta_{ijkn}(t) * e_{kn}(\mathbf{u}))'_{x_i} + f_j(t,x), \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{u}(t,x)|_{t<0} \equiv 0, \\ f_j(t,x)|_{t<0} \equiv 0 \quad (j = 1,2,3). \end{cases}$$

(здесь $\delta(t)$ — дельта-функция, $C^2, \alpha > 0$ — константы, а мера $d\mu(\lambda)$ с ком-

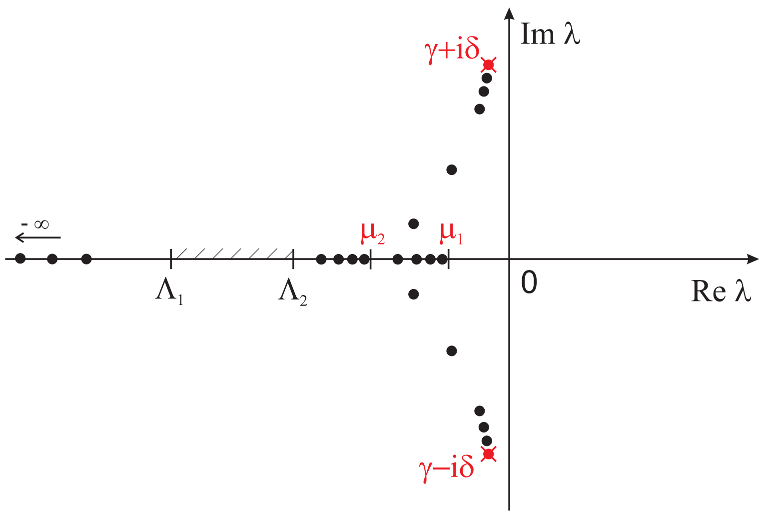

Рис. 3: Спектральная структура типа «шпага»

пактным носителем задается некоторой монотонной функцией). Тогда спектр σ имеет следующий вид (спектральная структура, условно называемая нами структурой типа «шпага», см. рис. 3): $\sigma_{\mathbb{R}}$ состоит из серии, уходящей на бесконечность, отрезка $[\Lambda_1, \Lambda_2]$ с непрерывной частью спектра, двух серий $\mu_{n,N}$, сходящихся к своим предельным точкам $\mu_N, N=1,2$; $\sigma_{\mathbb{C}}$ может либо отсутствовать, либо состоять из конечного числа комплексносопряженных собственных значений $\lambda_n^{\pm}$, либо из счетного числа комплексносопряженных собственных значений $\lambda_n^{\pm}$, имеющих своими конечными пределами точки $\gamma \pm i\delta$.

При этом картина спектра для данного $K(t)$ существенным образом зависит от параметра α: при $\alpha = 0$ имеем спектральную структуру типа «крест», при $\alpha \in (0, \alpha_1)$ $\sigma_{\mathbb{C}}$ отсутствует, при $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ имеем спектральную структуру типа «шпага» с конечным $\sigma_{\mathbb{C}}$, при $\alpha \in (\alpha_2, \alpha_3)$ — с бесконечным, при $\alpha \in (\alpha_3, \alpha_4)$ — вновь с конечным, а при $\alpha > \alpha_4$ $\sigma_{\mathbb{C}}$ отсутствует.

Кроме того, авторами получены формулы для предельных точек комплексной части спектра типа «шпага» $\gamma \pm i\delta$. Для формулировки этого результата введем некоторые определения. Обозначим $\tilde{\mu}(\lambda) = \lambda\mu(\lambda)$,

$$f_N(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\tilde{\mu}(\lambda_{j+1}) - \tilde{\mu}(\lambda_j)}{\lambda - \lambda_j},\ \lambda_j = \Lambda_1 + j\frac{\Lambda_2 - \Lambda_1}{N},$$

и рассмотрим корни уравнения $f_N(\lambda) = -\alpha\lambda - C^2$. Обозначим через δ_j^N расстояние от λ_j до ближайшего упомянутого корня справа. Пусть

$$F_N \equiv \sum_{j=1}^{N} \delta_j^N,\quad \Phi_N \equiv \sum_{j=1}^{N} \frac{\delta_j^N}{\lambda_j},\ F(\tilde{\mu}) \equiv \varlimsup_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \delta_j^N,\ \Phi(\tilde{\mu}) \equiv \varlimsup_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \frac{\delta_j^N}{\lambda_j}.$$

Положим $f(\lambda) = \int \frac{d\tilde{\mu}(\tilde{\lambda})}{\lambda - \tilde{\lambda}}$.

Тогда 3.1) если уравнение $f(\lambda) = -\alpha\lambda - C^2$ при $\lambda \in \mathbb{R}\backslash[\Lambda_1, \Lambda_2]$ не имеет корней, то спектр (типа «шпага») содержит бесконечное количество пар комплексносопряженных корней. В противном случае спектр содержит конечное количество пар комплексносопряженных корней. Оно равно количеству натуральных чисел n, для которых уравнение $f(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{n^2} - \alpha\lambda - C^2$ имеет только один корень. В случае, когда таких натуральных значений нет, комплексная составляющая спектра отсутствует.

3.2) Для предельных значений $\gamma \pm i\delta$, комплексной части спектра, соответствующей структуре типа «шпага» (когда количество комплексных собственных значений бесконечно), имеют место формулы

$$2\gamma = \Lambda_2 + F(\tilde{\mu}), \gamma^2 + \delta^2 = \alpha\Lambda_2 e^{\Phi}\Big(C^2 - \int\limits_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} \frac{d\tilde{\mu}(\lambda)}{\lambda}\Big).$$

Также авторами получены формулы для численного анализа спектра уравнения (4) для указанных выше ядер в нескольких модельных примерах, когда вид последовательностей a_i, c_i и меры $\mu(\lambda)$ задается в явном виде.

Результаты, изложенные в настоящей работе, позволяют объяснить такие качественные эффекты, возникающие в неоднородных средах, как а) исчезновение собственных колебаний при проникновении вязкой жидкости в поры упругого тела (см. [7],[8] — эксперимент по измерению собственных частот мраморного стержня, поры которого содержат вазелин), б) уменьшение частот собственных колебаний при появлении пузырьков в жидкости, в) исчезновении диссипации и эффекта последействия в эмульсии из двух жидкостей при равенстве плотностей (при сохранении различия коэффициентов вязкости и сжимаемости), г) зависимость типа спектра от гладкости плотности в смеси двух жидкостей. Явление а) можно объяснить как отсутствие колебательной (комплексной) части спектра при некоторых значениях параметра α в случае 3), явления б)-г) — как изменение типа спектра при изменении гладкости функции плотности $\rho(y)$ в случаях 1)-2): при появлении пузырьков газа в жидкости чисто мнимый спектр изменяется на спектральный тип «крест» или «лилия» с уменьшением $|Im\lambda_n^{\pm}|$; при равенстве плотностей в смеси двух жидкостей спектр чисто мнимый, а зависимость спектра от градиента плотности отражает формула (7): по мере увеличения градиента функции $\dfrac{1}{\rho(y)}$ (т.е. граница раздела двух жидкостей становится все более «резкой») вертикальная асимптота спектральной структуры типа «крест» смещается влево в отрицательной полуплоскости и в пределе, когда плотность становится разрывной, уходит на бесконечность, а тип спектра изменяется на «лилию».

Кроме того, авторами получено численное решение вспомогательных задач (2) на ячейке периодичности $Y = [0,1]^2$ в двумерном случае (на плоскости) с помощью метода конечных объемов [9], построен алгоритм расчета ядер сверток уравнения (4) — элементов матрицы $K(t)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00180-а) и Гранта поддержки ведущих научных школ РФ (НШ 4315.2008.1).

e-mail: gavrikov@ipmnet.ru

Список литературы

[1] T. Lévy *Propagation of waves in a mixture of fluids* // Int. J. Engng Sci. Vol. 19, pp. 83-90, 1981.

[2] Э. Санчес-Паленсия. *Неоднородные среды и теория колебаний* - М. Мир, 1984г.

[3] Д. А. Космодемьянский, А. С. Шамаев *О некоторых спектральных задачах в пористых средах, насыщенных жидкостью* // Современная математика, Фундаментальные направления, т. 17, М., с. 88-109, 2006г.

[4] V. V. Vlasov, J. Wu *Solvability and Spectral Analysis of Abstract Hyperbolic Equations with Delay* // J. Functional Differential Equations, vol.16, №4, pp. 751-768, 2009.

[5] В.В. Власов, Дж. Ву *Спектральный анализ и разрешимость абстрактных гиперболических уравнений с последействием* // Дифференциальные уравнения, т. 45, №4, с. 524-533, 2009г.

[6] В.В. Власов, Дж. Ву, Г.Р. Кабирова *Корректная разрешимость и спектральные свойства абстрактных гиперболических уравнений с последействием* // Современная математика. Фундаментальные направления, 2010г. (принята к печати).

[7] Л. Д. Акуленко, С. В. Нестеров *Динамическая модель пористой среды, заполненной вязкой жидкостью* // ДАН, сер. Механика, Т.401 №5, с. 630-633, М. 2005г.

[8] *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* // Изв. РАН МТТ. 2005. №1, с. 109-119, М. 2005г.

[9] *Wesseling P.* Principles of computational fluid dynamics. Berlin: Springer, 2001. 644p.