ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2011, том 436, № 2, с. 199–202

МЕХАНИКА

УДК 517.958:531.33

УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ ДЛЯ ЧАСТИЧНО ПЕРФОРИРОВАННОГО ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

© 2011 г. А. С. Шамаев, В. В. Шумилова

Представлено академиком В.В. Козловым 23.07.2010 г.

Поступило 05.08.2010 г.

В настоящей работе рассмотрена задача о малых колебаниях частично перфорированного вязкоупругого материала и вязкой жидкости, заполняющей поры. Для поставленной задачи построена усредненная задача и установлена сходимость решений допредельных задач к решению усредненной задачи по норме пространства L^2.

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$, разбитая на две части Ω_0 и Ω_1 гладкой поверхностью S; $Y = (0, 1)^3$ – ячейка периодичности в $\mathbb{R}^3$; Y^h и Y^s – открытые, связные подмножества Y с гладкой общей границей Γ такие, что $Y^h \cap Y^s = \varnothing$, $\overline{Y^h} \cup \overline{Y^s} = \overline{Y}$. Обозначим через $\Omega_\varepsilon^s = \Omega_1 \backslash \left(\bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}^3} (\varepsilon \overline{Y^h} + \varepsilon k)\right)$ жидкую часть, занятую вязкой несжимаемой жидкостью, а через $\Omega_\varepsilon^h = \Omega \backslash \overline{\Omega_\varepsilon^s}$ – вязкоупругую часть области Ω.

Дифференциальная запись задачи, описывающей малые колебания рассматриваемой комбинированной среды, имеет вид

$$\rho_\varepsilon(x)\frac{\partial^2 u_\varepsilon^i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f^i(x, t) \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, T),$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}_\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon^s \times (0, T),$$

$$[\mathbf{u}_\varepsilon]_{S_\varepsilon} = 0, \quad [\sigma_{ij}^\varepsilon n_j]_{S_\varepsilon} = 0,$$

$$\mathbf{u}_\varepsilon(x, 0) = \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\mathbf{u}_\varepsilon(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0,$$

где $\rho_\varepsilon(x)$ – функция плотности,

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \rho^h(x/\varepsilon), \quad x \in \Omega_\varepsilon^h, \\ \rho^h(y) \quad \text{положительна и } Y\text{-периодична;} \\ \rho^s > 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon^s, \quad \rho^s = \text{const}; \end{cases}$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = \begin{cases} a_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(\mathbf{u}_\varepsilon) + b_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}\left(\dfrac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t}\right) \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon^h \times (0, T), \\ -\delta_{ij} p_\varepsilon + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jh} e_{kh}\left(\dfrac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t}\right) \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon^s \times (0, T); \end{cases}$$

μ – коэффициент вязкости жидкости; $p_\varepsilon(x, t)$ – давление в жидкой фазе; $e_{kh}(\mathbf{u}) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u^k}{\partial x_h} + \dfrac{\partial u^h}{\partial x_k}\right)$;

$a_{ijkh}^\varepsilon(x) = a_{ijkh}\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, $b_{ijkh}^\varepsilon(x) = b_{ijkh}\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, $1 \le i, j, k, h \le 3$;

$a_{ijkh}(y)$ и $b_{ijkh}(y)$ – гладкие, Y-периодические функции, удовлетворяющие условиям симметрии и положительной определенности:

$$a_{ijkh}(y) = a_{jikh}(y) = a_{khij}(y),$$

$$b_{ijkh}(y) = b_{jikh}(y) = b_{khij}(y),$$

$$a_{ijkh}(y)\xi_{ij}\xi_{kh} \ge \alpha\xi_{ij}\xi_{ij},$$

$$b_{ijkh}(y)\xi_{ij}\xi_{kh} \ge \beta\xi_{ij}\xi_{ij} \quad \forall \xi_{ij} \in \mathbb{R},$$

$$\xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad \alpha, \beta > 0;$$

$[g]_{S_\varepsilon}$ – скачок функции g при переходе через границу $S_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon^s \cap \partial\Omega_\varepsilon^h$; $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – единичный вектор нормали к S_ε; $\mathbf{f}(x, t) \in H^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ – заданная сила.

Вариационная формулировка поставленной выше задачи имеет следующий вид: найти функции $\mathbf{u}_\varepsilon \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$ и $p_\varepsilon \in L^2(0, T; L^2(\Omega_1))$ такие, что

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии наук, Москва

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon^i}{\partial t^2} v^i dx + b_\varepsilon\left(\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t}, \mathbf{v}\right) + c_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) = \int_\Omega f^i v^i dx$$
$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{1}$$
$$\operatorname{div}\mathbf{u}_\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon^s \times (0, T),$$
$$\mathbf{u}_\varepsilon(0) = \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t}(0) = 0,$$

где

$$b_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\mu \int_{\Omega_\varepsilon^s} e_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) dx + \int_{\Omega_\varepsilon^h} b_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) dx,$$

$$c_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\int_{\Omega_\varepsilon^s} p_\varepsilon \operatorname{div}\mathbf{v} dx + \int_{\Omega_\varepsilon^h} a_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) dx.$$

Следует отметить, что усредненные модели для комбинированной среды, состоящей из упругого каркаса и вязкой жидкости, были построены в работах [1, 2], а для комбинированной среды, состоящей из упругого каркаса и слабо вязкой жидкости, – в работах [3–5].

Определим функции $\mathbf{N}^{kh}(y) \in \mathbf{H}_{per}^1(Y)/\mathbb{R}^3$ и $\{\mathbf{Z}^{kh}(y), B^{kh}(y)\} \in \mathbf{H}_{per}^1(Y)/\mathbb{R}^3 \times L_{per}^2(Y^s)$ как решения периодических задач

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(b_{ijkh} + b_{ijlm} e_{lm}^y(\mathbf{N}^{kh})) = 0, \quad y \in Y, \tag{2}$$

и

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial y_j}(\sigma_{ij}(\mathbf{Z}^{kh})) = 0, \quad y \in Y, \\ \operatorname{div}_y \mathbf{Z}^{kh} = -\delta_{kh}, \quad y \in Y^s, \\ [\sigma_{ij}(\mathbf{Z}^{kh}) n_j]_\Gamma = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

при

$$\sigma_{ij}(\mathbf{Z}^{kh}) = \begin{cases} b_{ijlm} e_{lm}^y(\mathbf{Z}^{kh}) + b_{ijkh} \quad \text{в} \quad Y^h, \\ 2\mu e_{ij}^y(\mathbf{Z}^{kh}) + \mu(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}) - \delta_{ij} B^{kh} \\ \text{в} \quad Y^s \end{cases}$$

соответственно.

Далее определим вектор-функции $\mathbf{D}^{kh}(y)$, $\mathbf{G}^{kh}(y) \in \mathbf{H}_{per}^1(Y)/\mathbb{R}^3$ как решения периодических задач

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(b_{ijlm} e_{lm}^y(\mathbf{D}^{kh}) + a_{ijlm} e_{lm}^y(\mathbf{N}^{kh}) + a_{ijkh}) = 0, \quad y \in Y,$$

и

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial y_j}(\sigma_{ij}(\mathbf{G}^{kh})) = 0, \quad y \in Y, \\ [\sigma_{ij}(\mathbf{G}^{kh}) n_j]_\Gamma = 0 \end{gathered} \tag{4}$$

при

$$\sigma_{ij}(\mathbf{G}^{kh}) = \begin{cases} b_{ijlm} e_{lm}^y(\mathbf{G}^{kh}) + a_{ijlm} e_{lm}^y(\mathbf{Z}^{kh}) + a_{ijkh} \\ \text{в} \quad Y^h, \\ 2\mu e_{ij}^y(\mathbf{G}^{kh}) \quad \text{в} \quad Y^s \end{cases}$$

соответственно.

И, наконец, определим функции $\mathbf{M}^{kh}(t)$ со значениями в $\mathbf{H}_{per}^1(Y)/\mathbb{R}^3$ и $\{\mathbf{W}^{kh}(t), S^{kh}(t)\}$ со значениями в $\mathbf{H}_{per}^1(Y)/\mathbb{R}^3 \times L_{per}^2(Y^s)$ как решения периодических задач

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{ijlm} e_{lm}^y(\mathbf{M}^{kh}) + b_{ijlm} e_{lm}^y\left(\frac{\partial \mathbf{M}^{kh}}{\partial t}\right)\right) = 0, \quad y \in Y, \\ \mathbf{M}^{kh}(y, 0) = \mathbf{D}^{kh}(y), \quad y \in Y, \end{gathered} \tag{5}$$

и

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial y_j}(\sigma_{ij}(\mathbf{W}^{kh})) = 0, \quad y \in Y, \\ \operatorname{div}_y \mathbf{W}^{kh} = 0, \quad y \in Y^s, \\ \mathbf{W}^{kh}(y, 0) = \mathbf{G}^{kh}(y), \quad y \in Y, \\ [\sigma_{ij}(\mathbf{W}^{kh}) n_j]_\Gamma = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

при

$$\sigma_{ij}(\mathbf{W}^{kh}) = \begin{cases} a_{ijlm} e_{lm}^y(\mathbf{W}^{kh}) + b_{ijlm} e_{lm}^y\left(\frac{\partial \mathbf{W}^{kh}}{\partial t}\right) \quad \text{в} \quad Y^h, \\ -\delta_{ij} S^{kh} + 2\mu e_{ij}^y\left(\frac{\partial \mathbf{W}^{kh}}{\partial t}\right) \quad \text{в} \quad Y^s \end{cases}$$

соответственно.

Предельная (усредненная) задача для исходной задачи (1) формулируется следующим образом: найти вектор-функцию $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$ такую, что

$$\begin{gathered} \tilde{\rho}(x) \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x_j} + f^i(x, t) \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, T), \\ [\sigma_{ij} n_j]_S = 0, \quad \mathbf{u}(0) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0) = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

где $\tilde{\rho}(x) = \int_Y \rho^h(y) dy$ при $x \in \Omega_0$, $\tilde{\rho}(x) = \int_{Y^h} \rho^h(y) dy + |Y^s| \rho^s$ при $x \in \Omega_1$,

$$\sigma_{ij} = \alpha^n_{ijkh}\frac{\partial u^k}{\partial x_h} + \beta^n_{ijkh}\frac{\partial^2 u^k}{\partial x_h \partial t} + g^n_{ijkh}(t) * \frac{\partial u^k}{\partial x_h}$$

$$\text{в} \quad \Omega_n \times (0, T), \quad n = 0, 1.$$

Звездочка означает операцию свертки:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds;$$

$$\alpha^0_{ijkh} = \int_Y (a_{ijkh} + a_{ijlm}e^y_{lm}(\mathbf{N}^{kh}) + b_{ijlm}e^y_{lm}(\mathbf{D}^{kh}))dy,$$

$$\alpha^1_{ijkh} = \int_{Y^h} (a_{ijkh} + a_{ijlm}e^y_{lm}(\mathbf{Z}^{kh}) + b_{ijlm}e^y_{lm}(\mathbf{G}^{kh}))dy +$$

$$+ 2\mu \int_{Y^s} e^y_{ij}(\mathbf{G}^{kh})dy,$$

$$\beta^0_{ijkh} = \int_Y (b_{ijkh} + b_{ijlm}e^y_{lm}(\mathbf{N}^{kh}))dy,$$

$$\beta^1_{ijkh} = \int_{Y^h} (b_{ijkh} + b_{ijlm}e^y_{lm}(\mathbf{Z}^{kh}))dy +$$

$$+ \mu|Y^s|(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}) + \int_{Y^s} (2\mu e^y_{ij}(\mathbf{Z}^{kh}) - \delta_{ij}B^{kh})dy,$$

$$g^0_{ijkh}(t) = \int_Y \left(a_{ijlm}e^y_{lm}(\mathbf{M}^{kh}) + b_{ijlm}e^y_{lm}\left(\frac{\partial \mathbf{M}^{kh}}{\partial t}\right)\right)dy,$$

$$g^1_{ijkh}(t) = \int_{Y^h} \left(a_{ijlm}e^y_{lm}(\mathbf{W}^{kh}) + b_{ijlm}e^y_{lm}\left(\frac{\partial \mathbf{W}^{kh}}{\partial t}\right)\right)dy +$$

$$+ \int_{Y^s} \left(2\mu e^y_{ij}\left(\frac{\partial \mathbf{W}^{kh}}{\partial t}\right) - \delta_{ij}S^{kh}\right)dy,$$

а $\mathbf{N}^{kh}(y)$, $\{\mathbf{Z}^{kh}(y), B^{kh}(y)\}$, $\mathbf{D}^{kh}(y)$, $\mathbf{G}^{kh}(y)$, $\mathbf{M}^{kh}(y, t)$ и $\{\mathbf{W}^{kh}(y, t), S^{kh}(y, t)\}$ – решения определенных выше периодических задач.

Справедлива следующая теорема о сходимости решений допредельных задач (1) к решению усредненной задачи (7) при условии, что граница $\partial\Omega$ и вектор-функция **f** являются достаточно гладкими.

Т е о р е м а. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon(x, t)$, $p_\varepsilon(x, t)$ *– решение задачи* (1) *и* $\mathbf{v}_\varepsilon(x, t) = \dfrac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t}$. *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\|\mathbf{u}_\varepsilon(x, t) - \mathbf{u}(x, t)\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\|\mathbf{v}_\varepsilon(x, t) - \mathbf{v}(x, t)\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\|p_\varepsilon(x, t) - p(x, \varepsilon^{-1}x, t)\|_{L^2(\Omega^s_\varepsilon)} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\|\nabla_x \mathbf{u}_\varepsilon(x, t) - \nabla_x \mathbf{u}(x, t) - \nabla_y \mathbf{u}_1(x, \varepsilon^{-1}x, t)\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\|\nabla_x \mathbf{v}_\varepsilon(x, t) - \nabla_x \mathbf{v}(x, t) - \nabla_y \mathbf{v}_1(x, \varepsilon^{-1}x, t)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Здесь $\mathbf{u}(x, t)$ *– решение усредненной задачи* (7),

$$\mathbf{v}(x, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t), \quad \mathbf{v}_1(x, y, t) = \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t}(x, y, t),$$

$$p(x, y, t) = B^{kh}(y)\frac{\partial^2 u^k}{\partial x_h \partial t} + S^{kh}(y, t) * \frac{\partial u^k}{\partial x_h},$$

$$x \in \Omega_1, \quad y \in Y^s,$$

$$\mathbf{u}_1(x, y, t) = \begin{cases} \mathbf{N}^{kh}(y)\dfrac{\partial u^k}{\partial x_h} + \mathbf{M}^{kh}(y, t) * \dfrac{\partial u^k}{\partial x_h}, \\ x \in \Omega_0, \quad y \in Y, \\ \mathbf{Z}^{kh}(y)\dfrac{\partial u^k}{\partial x_h} + \mathbf{W}^{kh}(y, t) * \dfrac{\partial u^k}{\partial x_h}, \\ x \in \Omega_1, \quad y \in Y, \end{cases}$$

где $\mathbf{N}^{kh}(y)$, $\{\mathbf{Z}^{kh}(y), B^{kh}(y)\}$, $\mathbf{M}^{kh}(y, t)$ *и* $\{\mathbf{W}^{kh}(y, t), S^{kh}(y, t)\}$ *– решения периодических задач* (2), (3), (5) *и* (6) *соответственно.*

Теперь предположим, что область Ω^s_ε занята вязкой сжимаемой жидкостью. В этом случае исходная задача о малых колебаниях комбинированной среды имеет вид (1), но условие $\mathrm{div}\,\mathbf{u}_\varepsilon(x, t) = 0$ в $\Omega^s_\varepsilon \times (0, T)$ заменяется на условие $p_\varepsilon(x, t) = -\gamma \mathrm{div}\,\mathbf{u}_\varepsilon(x, t)$ в $\Omega^s_\varepsilon \times (0, T)$, где $\gamma = c^2\rho^s$ ($c > 0$ – скорость звука в жидкости в состоянии покоя). При этом усредненная задача также имеет вид (7), причем α^0_{ijkh}, β^0_{ijkh} и $g^0_{ijkh}(t)$ определяются так же, как и для случая несжимаемой жидкости, а

$$\alpha^1_{ijkh} = \int_{Y^h} (a_{ijkh} + a_{ijlm}e^y_{lm}(\mathbf{Z}^{kh}) + b_{ijlm}e^y_{lm}(\mathbf{G}^{kh}))dy +$$

$$+ \gamma|Y^s|\delta_{ij}\delta_{kh} + \int_{Y^s} (\gamma\delta_{ij}\mathrm{div}_y \mathbf{Z}^{kh} + 2\mu e^y_{ij}(\mathbf{G}^{kh}))dy,$$

$$\beta^1_{ijkh} = \int\limits_{Y^h}(b_{ijkh} + b_{ijlm}e^y_{lm}(\mathbf{Z}^{kh}))dy +$$

$$+ \mu|Y^s|(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}) + 2\mu\int\limits_{Y^s}e^y_{ij}(\mathbf{Z}^{kh})dy,$$

$$g^1_{ijkh}(t) = \int\limits_{Y^h}\left(a_{ijlm}e^y_{lm}(\mathbf{W}^{kh}) + b_{ijlm}e^y_{lm}\left(\frac{\partial\mathbf{W}^{kh}}{\partial t}\right)\right)dy +$$

$$+ \int\limits_{Y^s}\left(\gamma\delta_{ij}\mathrm{div}_y\mathbf{W}^{kh} + 2\mu e^y_{ij}\left(\frac{\partial\mathbf{W}^{kh}}{\partial t}\right)\right)dy,$$

где вектор-функции $\mathbf{Z}^{kh}(y)$, $\mathbf{W}^{kh}(y, t)$, $\mathbf{G}^{kh}(y)$ определяются как решения периодических задач

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(\sigma_{ij}(\mathbf{Z}^{kh})) = 0,$$

$$[\sigma_{ij}(\mathbf{Z}^{kh})n_j]_\Gamma = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(\sigma_{ij}(\mathbf{W}^{kh})) = 0,$$

$$\mathbf{W}^{kh}(y, 0) = \mathbf{G}^{kh}(y),$$

$$[\sigma_{ij}(\mathbf{W}^{kh})n_j]_\Gamma = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(\sigma_{ij}(\mathbf{G}^{kh})) = 0,$$

$$[\sigma_{ij}(\mathbf{G}^{kh})n_j]_\Gamma = 0$$

соответственно. Здесь $\sigma_{ij}(\mathbf{Z}^{kh})$, $\sigma_{ij}(\mathbf{G}^{kh})$, $\sigma_{ij}(\mathbf{W}^{kh})$ в Y^h определены так же, как и в задачах (3), (4), (6) соответственно, а в Y^s

$$\sigma_{ij}(\mathbf{Z}^{kh}) = 2\mu e^y_{ij}(\mathbf{Z}^{kh}) + \mu(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}),$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{G}^{kh}) = 2\mu e^y_{ij}(\mathbf{G}^{kh}) + \gamma\delta_{ij}(\mathrm{div}_y\mathbf{Z}^{kh} + \delta_{kh}),$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{W}^{kh}) = \gamma\delta_{ij}\mathrm{div}_y\mathbf{W}^{kh} + 2\mu e^y_{ij}\left(\frac{\partial\mathbf{W}^{kh}}{\partial t}\right).$$

Более того, в этом случае имеют место все утверждения приведенной выше теоремы, но при этом

$$p(x, y, t) = -\gamma(\mathrm{div}_x\mathbf{u}(x, t) + \mathrm{div}_y\mathbf{u}_1(x, y, t)),$$

$$x \in \Omega_1, \quad y \in Y^s.$$

Важно отметить, что для слабо сжимаемой жидкости коэффициент γ является достаточно большим, а значит, члены $\mathrm{div}_y\mathbf{Z}^{kh} + \delta_{kh}$ и $\mathrm{div}_y\mathbf{W}^{kh}$ будут достаточно малыми. В этом случае для полного представления о поведении решений $\mathbf{Z}^{kh}(y)$ и $\mathbf{W}^{kh}(y, t)$ соответствующих периодических задач требуется принимать во внимание решения периодических задач (3) и (6) для среды с вязкой несжимаемой жидкостью.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 08–01–00180-а), гранта поддержки ведущих научных школ РФ (НШ 4315.2008.1) и гранта 09–01–90408-Укр-ф-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
2. *Gilbert R.P., Mikelić A.* // Nonlin. Anal. 2000. T. 40. P. 185–212.
3. *Nguetseng G.* // SIAM J. Math. Anal. 1990. V. 21. № 6. P. 1396–1414.
4. *Clopeau Th., Ferrin J.L., Gilbert R.P., Mikelić A.* // Math. and Comput. Modelling. 2001. V. 33. P. 821–841.
5. *Космодемьянский Д.А., Шамаев А.С.* // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 6. С. 75–114.