СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1 января 1959 г.
Выходит один раз в два месяца

Учредитель: ОАО «НИЦ «Строительство»

МОСКВА. ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко

2(259) 2015

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор
ВЕДЯКОВ И.И. проф., д.т.н.

АЙЗЕНБЕРГ Я.М. проф., д.т.н.
АНДРЕЕВ В.И.
чл.корр. РААСН, проф., д.т.н.
БОНДАРЕНКО В.М.
акад. РААСН, проф., д.т.н.
ВАРДАНЯН Г.С. проф., д.т.н.
ГОРОДЕЦКИЙ А.С.
акад. РААСН, проф., д.т.н.
ЕРЕМЕЕВ П.Г. проф., д.т.н.
ИГНАТЬЕВ В.А. проф., д.т.н.
ИЛЬИЧЕВ В.А. акад. РААСН,
проф., д.т.н.
КАРПЕНКО Н.И.
акад. РААСН, проф., д.т.н.
КОЛЧУНОВ В.И.
акад. РААСН, проф., д.т.н.
КОСИЦЫН С.Б. проф., д.т.н.
КУРБАЦКИЙ Е.Н. проф., д.т.н.
ЛЯХОВИЧ Л.С.
акад. РААСН, проф., д.т.н.
МОНДРУС В.Л. проф., д.т.н.
НАЗАРОВ Ю.П. д.т.н.
НЕМЧИНОВ Ю.И. проф., д.т.н.
ОБОЗОВ В.И. проф., д.т.н.
ОДЕССКИЙ П.Д. проф., д.т.н.
ПЯТИКРЕСТОВСКИЙ К.П.
(отв. секретарь) д.т.н., с.н.с
РАЙЗЕР В.Д. проф., д.т.н.
РАСТОРГУЕВ Б.С. проф., д.т.н.
ТРАВУШ В.И. акад. РААСН, проф., д.т.н.
ФЕДОРОВ В.С. акад. РААСН, проф., д.т.н.
ХАЧИЯН Э.Е. проф., д.т.н.
ЧИРКОВ В.П. проф., д.т.н.
ШАПОШНИКОВ Н.Н.
чл.корр. РААСН, проф., д.т.н.
Томас БОК иностранный чл. РААСН,
проф., д.т.н.

Редактор выпуска *Пятикрестовский К.П.*
Корректор *Козлова М.В.*
Компьютерная верстка *Севастьянова М.Г.*

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-19167 от 27 декабря 2004 г.

Адрес редакции:
109428, Москва, ул. 2-я Институтская, д. 6, стр. 1
Тел.: 8-499-170-10-81; 8-499-174-79-93
E-mail: stroymex@list.ru, stroymexrs@gmail.com
www.stroy-mex.narod.ru

http://elibrary.ru/TITLE_ABOUT.ASP?ID=26727

Подписано в печать 26.03.2015. Формат 70×108 1/16
Бумага офсетная. Офсетная печать. Тираж 500 экз.
Заказ №

Отпечатано в
ООО «Первая оперативная типография»
115114, Москва, 2-й Кожевнический пер., д. 12

Перепечатка материалов журнала «Строительная механика и расчет сооружений» допускается только с письменного разрешения редакции. При цитировании ссылка обязательна.

Представленные заказчиками готовые формы рекламных материалов не подвергаются редакторской правке и печатаются в оригинале.

© ОАО «НИЦ «Строительство», «Строительная механика и расчет сооружений», 2015

УДК 624.04

М.Н. КИРСАНОВ, д-р физ.-мат. наук, проф. (НИУ МЭИ)

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТЕРЖНЕВОЙ РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ С ПЛОСКОЙ ГРАНЬЮ

Предлагается схема пространственного покрытия в виде статически определимой прямоугольной в плане фермы с опорами по четырем углам. Методом индукции с применением системы компьютерной математики Maple удается найти конечное выражение для прогиба фермы как функции размеров, нагрузки и числа панелей. Отмечается наличие минимума на кривой зависимости прогиба от числа панелей при заданных постоянных размерах боковых сторон фермы. Предельный анализ решения выявил наличие асимптот кривых прогиба и предельного значения наиболее сжатого стержня.

***Ключевые слова**: пространственная ферма, прямоугольное покрытие, Maple, индукция, асимптотика, прогиб.*

Постановка задачи

Поставлено две задачи: найти схему регулярной пространственной статически определимой фермы, предназначенной для большепролетного покрытия некоторого сооружения, и найти аналитическое решение для усилий в стержнях такой фермы и ее прогиба под действием какой-либо тестовой нагрузки. В решение должны входить параметрически размеры фермы и число панелей фермы. Аналогичные задачи для пространственных систем методом индукции решены в [1—7].

Поиск новых статически определимых схем ферм (плоских и пространственных) представляет сложную задачу [8]. Обычно конструирование пространственной статически определимой фермы производят наращиванием некоторой фермы присоединением узлов, руководствуясь формой и размерами целевой конструкции. Однако при разработке схемы регулярной симметричной фермы с плоской гранью обнаруживается, что простым присоединением очередного узла тремя стержнями к статически определимой части фермы (обычно простейшей пирамидальной из шести стержней и четырех узлов) неизбежно нарушается регулярность и симметрия в угловых точках фермы, если она имеет в плане прямоугольную форму. Требование регулярности и симметрии вытекает из особенности постановки задачи: предполагается, что решение будет найдено в конечной, аналитической форме методом индукции [1—7], особенно эффективным для таких систем.

Кроме этого имеется и проблема опор в пространственных фермах. Если свободная (без опор) ферма представляет собой твердое тело с шестью степенями свободы, то реализовать четыре вертикальные опоры, например, по углам фермы не удается. Таких опор в статически определимых системах может быть только три. Безусловно, можно использовать специального вида внешне уравновешенную нагрузку, имитирующую реакции опор [1, 3]. Но при этом математическая модель системы не будет обладать универсальностью при смене нагружения. Для каждой нагрузки будет возникать необходимость пересчета условных реакций опор, что создает сложность для анализа свойств системы.

Предлагаемая конструкция свободна от указанных недостатков. Она представляет собой шарнирную решетку с прямоугольными ячейками размерами $a \times b$, к каждой из которых присоединены четыре стержня, образующие пирамиду высотой H для боковых ячеек и высотой h во всех остальных (рис. 1—3). Не уменьшая принципиально общности, будем рассматривать фермы с четным числом ячеек по боковым сторонам — $2n$ и $2m$. В этом случае существу-

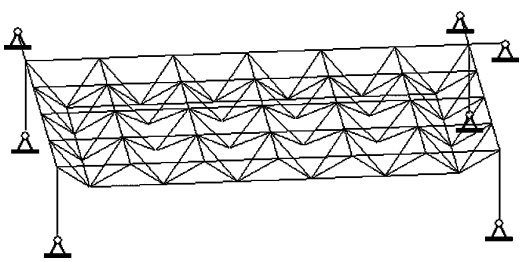


Рис. 1. Шарнирная решетка, $n = 3$, $m = 2$

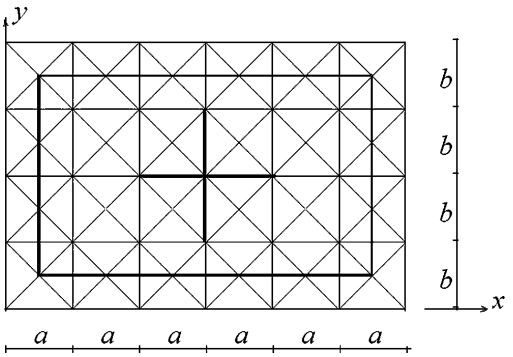


Рис. 2. Схема приложения вертикальной силы в центральном узле $n = 3$, $m = 2$

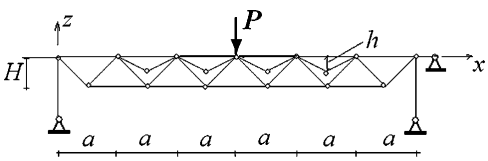


Рис. 3. Размеры пирамиды, $n = 3$, $h > 0$

ет центральная точка (узел), к которой можно приложить вертикальную силу и определить прогиб фермы в этой точке (вертикальное смещение). Вершины боковых пирамид (высотой H) соединены горизонтальными стержнями, образующими контур фермы (рис. 2, 3). Ферма имеет семь опорных стержней, четыре из которых вертикальны.

При этом противоречие со статической определимостью конструкции не возникает, так как ферма без опор твердое тело не представляет. В полученной схеме фермы число стержней и число возможных уравнений статики (метода вырезания узлов) совпадают. Действительно, в ферме $6N+6(n+m)-4$ стержней, где $N=4nm$ и 7 стержневых опор. Число шарниров, равновесие которых рассматривается, равно $(2n+1)(2m+1)+N$. Легко проверить равенство:

$$n_s = 6N+6(n+m)+3 = 3((2n+1)(2m+1)+N).$$

Решение

Для определения усилий в стержнях статически определимой пространственной фермы наиболее эффективен метод вырезания узлов. Представляя систему уравнений равновесия узлов (шарниров) фермы в матричной форме $[M]\bar{S}=\bar{Y}$, где $[M]$ – матрица направляющих косинусов, $\bar{S}$ – вектор усилий в стержнях, $\bar{Y}$ – вектор нагрузок. Матрица имеет размер $n_s \times n_s$. Строки матрицы с номерами $3i-2$, $i=1,...,n_s$ соответствуют направляющим косинусам стержней с осью x, с номерами $3i-1$ – с осью y, а с номерами, кратными 3 – направляющие косинусы с осью z. В пакете Maple [9] решение системы линейных уравнений может быть получено в символьной форме, алгоритм составления уравнений описан в [10].

Для вывода формулы прогиба середины фермы возможны два способа. Первый – найти аналитические зависимости усилий во всех стержнях, а потом по формуле Максвелла – Мора найти прогиб. Процедура индуктивного метода при этом применяется для каждого стержня. Другой способ – опустить промежуточные вычисления усилий в стержнях и вычислять индуктивным методом сразу прогиб. В большинстве случаев эти методы приблизительно одинаковы по трудоемкости. Второй способ имеет некоторые преимущества по объему вычислений, особенно в тех случаях, когда конструкция сложная и типов стержней достаточно много. Под типами стержней здесь условно понимаем местоположение стержня в конструкции. Стержни одного типа имеют кроме этого одну длину. В данной ферме это стержни горизонтальной решетки (два типа: продольные и поперечные стержни), четыре типа стержней, образующих купола и др.

Прогиб центрального узла от действия вертикальной силы P, приложенной к нему, получаем по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = P\sum_{j=1}^{n_s-7}\frac{S_j^{\,2}l_j}{EF}, \qquad (1)$$

где E – модуль упругости стержней, F – площадь сечения стержней (одинаковые для всей конструкции), l_j и S_j – длина j-го стержня и усилие в нем от действия единичной силы, направленной вдольP и приложенной к той же точке. Суммирование ведется по всем стерж-

ням фермы, кроме опорных, которые предполагаются жесткими: $j=1,\ldots,n_s-7$. Введем обозначение $\tilde{\Delta}=\Delta EF/P$.

$$\tilde{\Delta}=\Big(A(n)a^3+A(m)b^3+(n+m-1)d^3-(H/h)\Big(C(n)a^3+C(m)b^3\Big)+ \\ +(H/h)^2\Big(B(n)a^3+B(m)b^3+(m-1)(n-1)c^3\Big)\Big)/(16H^2), \qquad (2)$$

где введены три функции натурального аргумента:

$$A(j)=(2j-1)(4j^2-4j+9)/3,\ B(j)=(j-1)(2j-1)(2j-3),$$

$$C(j)=2(j-1)(4j^2-14j+9)/3.$$

Введены также обозначения (удвоенные длины наклонных стержней фермы — стержней куполов): $c=\sqrt{a^2+b^2+4h^2}$, $d=\sqrt{a^2+b^2+4H^2}$.

Для нахождения функции A потребовалось найти общий член последовательности 3, 17, 55, 133, 267, 473, 767, 1165, 1683, полученной последовательным расчетом фермы при $n=1,2,\ldots,9$ при фиксированном значении m. Аналогично, функция B есть общий член последовательности 0, 3, 30, 105, 252, 495, 858, 1365, 2040, а функция C есть в свою очередь общий член последовательности 0, -2, 4, 34, 104, 230, 428, 714, 1104. Примечательно, что все три последовательности удовлетворяют одному и тому же рекуррентному уравнению, полученному оператором **rgf_findrecur** из пакета **genfunc**:

$$C_k=4C_{k-1}-6C_{k-2}+4C_{k-3}-C_{k-4}.$$

Решения отличаются начальными условиями. Для функции C это условия $C(2)=-2$, $C(3)=4$, $C(4)=34$, $C(5)=104$. Решение этих уравнений с помощью оператора **rsolve** с заданными начальными условиями дает искомые зависимости. Коэффициент $(m-1)(n-1)$ при c^3 зависит от двух параметров одновременно. К сожалению, в системе **Maple** нет операторов, позволяющих анализировать последовательности с двумя натуральными параметрами, поэтому для этого коэффициента приходилось решать задачу индукции по шагам, фиксируя всякий раз один из параметров, например m, и находить общий член последовательности по другому параметру. Затем, получив серию общих членов для различных значений m, надо было пытаться найти закономерность полученных выражений уже по параметру m. Аналогично был получен более простой коэффициент $n+m-1$ при d^3. К счастью, в данной задаче искомые функции были линейны по каждому параметру, и особых усилий для их отыскания не потребовалось. Для более сложных систем нагрузок, например, для вертикальных нагрузок, равномерно распределенных по всем узлам фермы и имитирующих собственный вес конструкции, требуется более сложный анализ. Следует отметить также существенный рост времени символьных преобразований при увеличении числа панелей. Последние значения последовательностей коэффициентов требовали более получаса работы системы Maple при

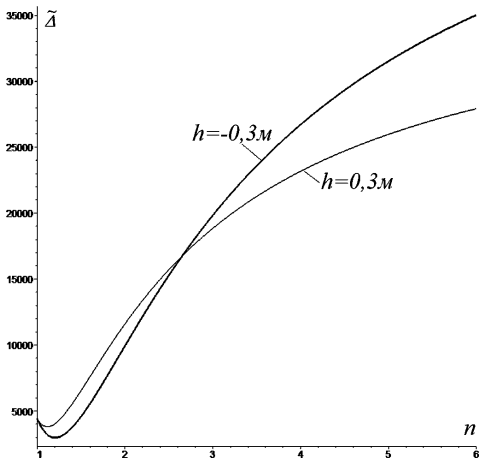


Рис. 4. Зависимость прогиба от числа панелей

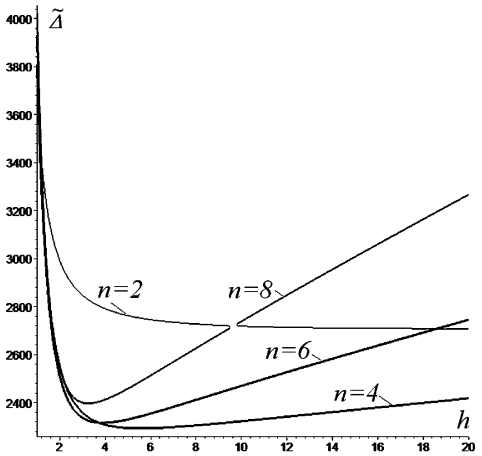


Рис. 5. Зависимость прогиба от высоты

$m = 2$, $n > 8$, при $n = m = 4$ – около трех часов, в то время как численный счет этих же конструкций длится доли секунды. Эта особенность символьных преобразований ставит некоторые ограничения на сложность рассчитываемых конструкций.

Анализ

Зависимость (2) прогиба от числа панелей при фиксированных размерах боковых сторон фермы обнаруживает минимум. Пусть размер стороны фермы задан $L = 2an$. Имеем следующие кривые (рис. 4, 5) при $L = 40$ м, $a = b = L/(2n)$, $m = n$, $H = 1$ м. Отрицательное значение высоты h означает, что стержневые пирамиды располагаются не снизу, а сверху фермы. Покрытие при этом приобретает другой вид, и для больших значений n жесткость его несколько уменьшается. Точка пересечения кривых не зависит от размеров a, b и H. Из условия $\tilde{\Delta}(h) = \tilde{\Delta}(-h)$ следует уравнение $(n-1)(4n^2 - 14n + 9) = 0$, имеющее корни $1, (7 - \sqrt{13})/4 \approx 0{,}85, \ (7 + \sqrt{13})/4 \approx 2{,}65$.

Характер кривых на рисунке 5 подсказывает наличие асимптот. Введем для **Maple** обозначение **Delt** относительного прогиба (2). Последовательное применение операторов **k: = limit(Delt/h,h = infinity)** и **limit(Delt -k*h,h = infinity)** дает уравнение наклонной асимптоты $\tilde{\Delta} = (n-1)^2 h + \delta$, где

$$\delta = \frac{(2n-1)\left(L^3(4n^2 - 4n + 9) + 3\sqrt{2}(L^2 + 8H^2n^2)^{3/2}\right)}{192H^2n^3}.$$

В квадратной в плане ферме наиболее сжатые стержни находятся в ее центре – горизонтальные стержни длиной a (на рис. 2, 3 выделены утолщением). При $n = m$ и $a = b$ усилие в этих стержнях равно

$$S_{\min} = -Pa\frac{(2n-3)H + h}{4Hh}.$$

При увеличении числа панелей и фиксированной длине боковой стороны $L = 2an$ это выражение имеет предел

$$\lim_{n \to \infty} S_{\min} = -PL/(4h).$$

Расчет предельной несущей способности фермы из условия потери устойчивости можно вести, исходя из этих значений.

Полученные аналитические выражения позволяют определить или оценить в какой-то степени оптимальную по жесткости форму конструкции. Например, при заданной суммарной высоте $h_s = h + H$ кривая прогиба имеет минимум вблизи значений близких высот. Пусть ферма имеет квадратную в плане форму: $a = b = L/(2n)$, $n = m$. Кривые на рис. 6 имеют явно выраженный минимум вблизи $h \approx H$. Кроме того заметно, что минимум почти не зависит от n. Аналогично можно оценить оптимальную форму (в данном случае соотношение высот H и h) по минимуму модуля усилия наиболее сжатого стержня $|S_{\min}|$. Здесь, однако, минимум зависит от числа панелей (рис. 7).

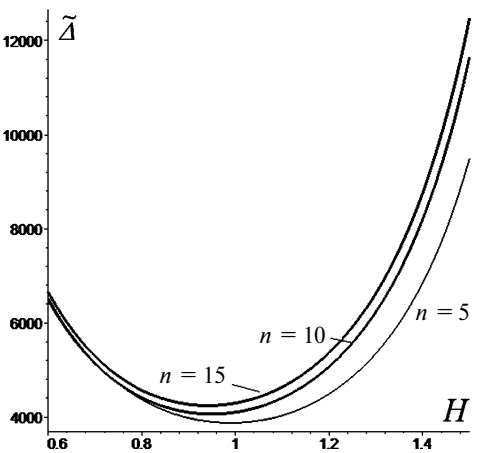


Рис. 6. Прогиб, $h + H = 2$ м, $L = 40$ м

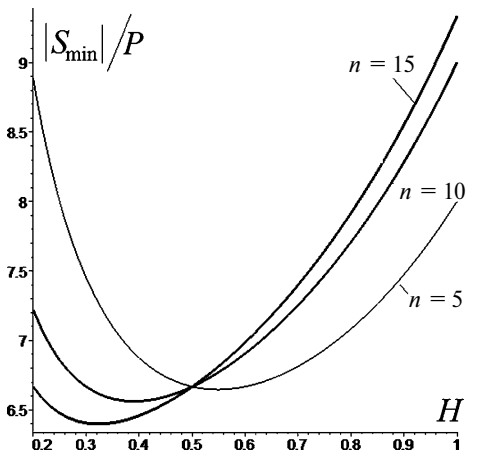


Рис. 7. Усилие, $h + H = 2$ м, $L = 40$ м

Заключение

Предложена схема пространственной статически определимой конструкции. Методом индукции найдены точные значения усилий в стержнях при произвольном числе панелей фермы и аналитическое выражение для ее прогиба. Показано, что полученное решение позволяет определять предельные свойства системы, подбирать геометрические и конструкционные параметры фермы для оптимизации ее свойств. В частности, выбор числа боковых панелей и их размеров может заметно увеличить жесткость фермы. Найденные формулы могут быть использованы как тестовые для более сложных численных расчетов, где возможна погрешность результатов за счет накопления ошибок округления. Особенно это касается сложных систем с большим или весьма большим числом элементов.

Отметим, что хотя генетический метод оптимизации форм конструкций, получивший в последнее время заметное развитие [11], относится в общем случае к численным методам, аналитические решения на основе метода индукции могут быть там также полезны как для ускорения сходимости решения, так и для оценки его точности.

Литература

1. *Кирсанов М.Н.* Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия МГТУ МАМИ, 2014. Т. 4. № 2 (20). С. 36—39.
2. *Кирсанов М.Н.* Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал, 2014. № 5 (49). С. 37—43.
3. *Кирсанов М.Н.* Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ, 2012. № 5. С. 5—8.
4. *Кирсанов М.Н.* Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость// Строительная механика и расчет сооружений, 2012. № 3. С. 48—51.
5. *Кирсанов М.Н.* Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений, 2011. № 5. С. 11—15.
6. *Кирсанов М.Н.* Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал, 2011. № 6 (24). С. 28—34.
7. *Кирсанов М.Н.* Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2012. № 1. С. 49—53.
8. *Hutchinson R. G., Fleck N. A.* Microarchitectured cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85, No. 9. p. 607—617.
9. *Кирсанов М. Н.* Практика программирования в системе Maple. — М.: Издательский дом МЭИ, 2011. – 208 с.
10. *Кирсанов М. Н.* Решебник. Теоретическая механика / Под ред. А. И. Кириллова. М.: Физматлит, 2008. – 384 с.
11. *Кирсанов М.Н.* Генетический алгоритм оптимизации стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений, 2010. № 2. С. 60—63.

УДК 624.072.2/.4

В.А. КОМАРОВ, канд. техн. наук, доц.
Пензенский государственный университет архитектуры и строительства

РАСЧЕТ НАКЛОННЫХ СЕЧЕНИЙ В ПОДРЕЗКАХ КОНСОЛЬНЫХ ОПОР РИГЕЛЕЙ СБОРНЫХ МНОГОЭТАЖНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КАРКАСОВ

Рассмотрены методы расчета наклонных сечений в подрезках консольных опор ригелей, рекомендованные СНиП 52.01-2003, СНиП 2.03.01-84 по результатам экспериментально-теоретических исследований.*

Ключевые слова: *консольная опора ригеля с подрезкой, продольная и сосредоточенная поперечная арматура, наклонные сечения, трещины, схемы разрушения.*

Ригели с консольными опорами (с подрезкой) приняты типовыми конструкциями многоэтажных сборных каркасов серии межвидового применения 1.020.1 и усовершенствованной серии ИИ-04. В настоящее время свод правил к СНиП 52-01-2003 не дает рекомендаций, расчет наклонных сечений в подрезках выполняют по нормативным расчетным сечениям, принятым СНиП 2.03.01-84*. Для элементов с резко меняющейся высотой сечения (имеющих подрезки) производится расчет по поперечной силе для наклонных сечений, проходящих у опоры консоли, образованной подрезкой (рис. 1) на действие поперечной силы и на действие