Эмпирическая верификация, восстановление и коррекция субъективной модели исследуемого объекта в теории измерительно-вычислительных преобразователей

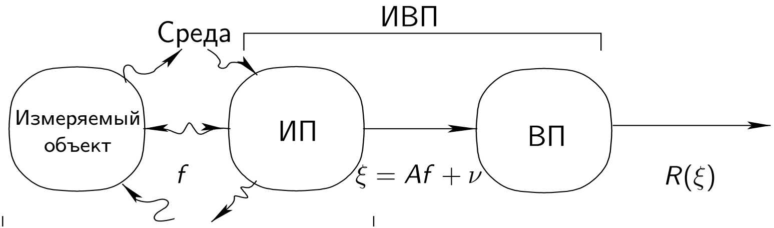
Д.А. Балакин Ю.П. Пытьев

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
Кафедра компьютерных методов физики

XIII Всероссийская научно-техническая конференция
«Состояние и проблемы измерений»
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 22-24 апреля 2015 г.

Схема измерительного эксперимента

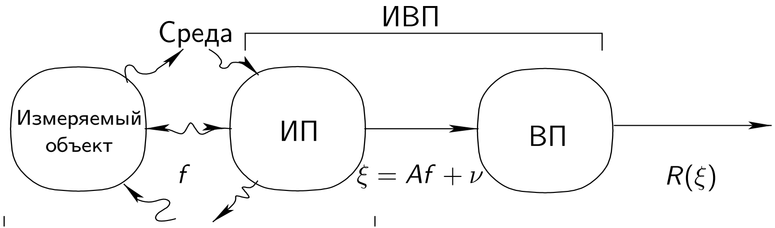
Измеряемый объект и ИВП



ИП преобразует f в сигнал $\xi = Af + \nu$, где A — оператор, моделирующий физические процессы в ИП, взаимодействующем с измеряемым объектом и со средой, ν — ошибка преобразования, шум.

Схема измерительного эксперимента

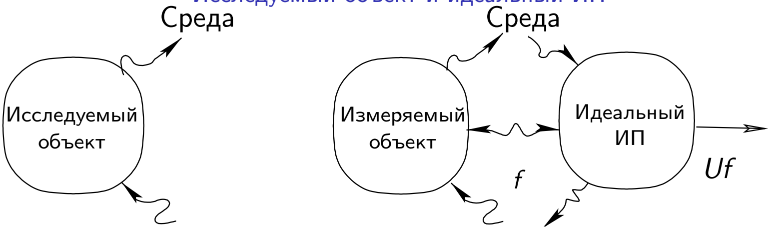
Измеряемый объект и ИВП



Вычислительный преобразователь (ВП) преобразует (редуцирует) результат измерения ξ в выходной сигнал $R(\xi)$ измерительно-вычислительного преобразователя (ИВП), рассматриваемого как средство измерения.

Схема измерительного эксперимента

Исследуемый объект и идеальный ИП



На вход идеального ИП поступает тот же сигнал f, что и на вход реального ИП, но на его выходе сигнал $u = Uf$ равен значению интересующей исследователя характеристики исследуемого, а не измеряемого, объекта, характеристики которого искажены измерением. Как правило, идеальный ИП не может быть реализован «в железе» из-за физических ограничений. Вычислительный преобразователь ограничен лишь математическими законами и позволяет редуцировать результат измерения ξ в $R(\xi)$ «за физический предел».

Задача редукции измерения

Задача редукции состоит в нахождении оператора редукции $R(\cdot)$, для которого $R(\xi)$ — наиболее точная оценка интересующего исследователя значения характеристики $u = Uf$ исследуемого обьекта. Речь идет о редукции результата измерения ξ на реальном ИП к результату измерения u на идеальном ИП.

Вероятностная редукция

Если входной сигнал f — произвольный вектор евклидова пространства F, а ν — случайный вектор евклидова пространства X, математическое ожидание $\mathbb{E}\,\nu = 0$ и задан ковариационный оператор $\Sigma_\nu : X \to X : \Sigma_\nu x = \mathbb{E}\,\nu(x, \nu)$, то:

- квадрат с.к. ошибки интерпретации $R(\xi)$ как оценки Uf есть $\sup\limits_{f \in F} \mathbb{E} \| R(\xi) - Uf \|^2$,
- погрешность минимальна при $R(\xi) = U(\Sigma_\nu^{-1/2} A)^- \Sigma_\nu^{-1/2} \xi$ (чёрточка $^-$ обозначает псевдообращение) и равна $\operatorname{tr} U(A\Sigma_\nu^{-1} A^*)^- U^*$, если $U(I - A^- A) = 0$,
- погрешность равна бесконечности, если это условие не выполнено, и сигнал Uf (а тем более f) невозможно оценить по ξ.

Метод наименьших квадратов

Заметим, что в методе наименьших квадратов оценка величины f есть $\operatorname*{argmin}_{f' \in F} \|Af' - \xi\|^2$.

- Такая оценка не учитывает стохастичность схемы измерения.
- Её с.к. погрешность не минимальна.
- В случае $I - A^{-}A \neq 0$ оценить методом наименьших квадратов f невозможно.

Априорная информация

Наличие априорной информации об интересующей исследователя характеристике позволяет уменьшить погрешность редукции. «Источником» информации может быть сам исследователь. Но математическая модель такой (субъективной) информации должна характеризовать ее неизбежную неполноту и недостоверность, а, следовательно, должна допускать как эмпирическую проверку адекватности (субъективной) модели объекта исследования, цели исследования, так и эмпирическую ее коррекцию.

Меры правдоподобия и доверия

Математическая модель субъективных суждений[1] модельера-исследователя (м.-и.) о модели исследуемого объекта — $(V, \mathcal{P}(V), \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}})$, $\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(\cdot) : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{L}$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}(\cdot) : \mathcal{P}(V) \to \widehat{\mathcal{L}}$, $\mathcal{L} = ([0,1], \leqslant, \max, \min)$, $\widehat{\mathcal{L}} = ([0,1], \widehat{\leqslant} = \geqslant, \min, \max)$. Меры Pl, Bel характеризуют своими значениями отношение м.-и. к истинности его собственных суждений о модели исследуемого объекта. Меры Pl и Pl′ (Bel и Bel′) эквивалентны, если $\gamma \circ \mathrm{Pl} = \mathrm{Pl}'$ $(\gamma \circ \mathrm{Bel} = \mathrm{Bel}')$ для некоторой непрерывной строго монотонной функции $\gamma(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$.

[1] Пытьев Ю. П. Моделирование субъективных суждений модельера-исследователя о модели объекта исследования // Математическое моделирование. — 2013. — Т. 25, № 4. — С. 102–125.

Меры правдоподобия и доверия

Рассмотрим неопределенный элемент $\widetilde{u}$, канонический для пространства $(V, \mathcal{P}(V), \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}})$ — математическую модель «неизвестного параметра». Он задается функциями $t^{\widetilde{u}}(u) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(\widetilde{u} = u)$, $\widehat{t}^{\widetilde{u}}(u) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}(\widetilde{u} \neq u), u \in V$, определяющими меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}$ равенствами

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(E) = \mathrm{Pl}(\widetilde{u} \in E) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{u \in E} t^{\widetilde{u}}(u),\ \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(\varnothing) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0,$$

$$\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}(E) = \mathrm{Bel}(\widetilde{u} \in V \setminus E) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf_{u \in V \setminus E} \widehat{t}^{\widetilde{u}}(u),\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}(V) = 1,$$

$E \in \mathcal{P}(V)$, т. е. $\widetilde{u}$ определяет меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}$.

Схема измерения

В докладе рассмотрена схема измерения объекта, состоящая из:

1. вероятностного пространства $(X, \mathcal{B}, \Pr^{\xi}(\cdot; f))$, заданного с точностью до значения входного сигнала $f \in F$, характеризующего распределение вероятностей выходного сигнала ξ при заданном значении f;
2. модели «диалога» м.-и. с моделью исследуемого объекта, определенной исследователем как пространство $(V, \mathcal{P}(V), \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}})$ с мерами правдоподобия $\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}$ и доверия $\mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}$, в котором н. э. $\widetilde{u}$ моделирует его субъективные суждения об истинности каждого значения $u \in V$ и их модальности, определенные значениями правдоподобия $t^{\widetilde{u}}(u) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(\widetilde{u} = u)$ и доверия $\widehat{t}^{\widetilde{u}}(u) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}}(\widetilde{u} \neq u)$, $u \in V$;
3. модели идеального ИП как линейного оператора U.

Данные наблюдений

В рассматриваемом далее случае м.-и. доступны данные наблюдений за объектом, и он намерен использовать их:

- для эмпирического построения модели $(V, \mathcal{P}(V), \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}})$,
- чтобы сравнить её с его субъективной моделью,
- чтобы оценить адекватность последней цели исследования.

Обозначим $\xi \in X$ данные наблюдений как случайный вектор, $x \in X$ — его полученное значение, $\mathrm{Pr}^{\xi}(\cdot; f) : \mathcal{B} \to [0, 1]$ — контролировавшую ξ вероятность, $H(u)$ — гипотезу, согласно которой значение f измеренного таково, что значение интересующей исследователя характеристики Uf есть u, т. е $H(u) = \{f \in F | Uf = u\}$, $K(u)$ обозначим альтернативу, согласно которой значение f таково, что значение интересующей исследователя характеристики Uf не равно u, $K(u) = \{f \in F | Uf \neq u\}$.

Отображения Φ, Φ^{-1}

Определим следующие семейства взаимно обратных точечно-множественных отображений, $\mathrm{pr} \in [0, 1]$:

- $\Phi(\cdot, \mathrm{pr}) : V \to \mathcal{B}$ — множество элементарных событий $x \in X$, при которых принимается $H(u)$,
- $\Phi^{-1}(\cdot, \mathrm{pr}) : X \to \mathcal{P}(V)$ — множество таких $u \in V$, при которых принимается $H(u)$, если результат наблюдения — $x \in \Phi(u; \mathrm{pr})$,

где pr — точная верхняя грань вероятности принять $H(u)$, если эта гипотеза в самом деле верна.

Свойства отображений Φ, Φ^{-1}

Иными словами, $\forall\,\mathrm{pr} \in [0,1]$, $\forall u \in V$,

$$\sup_{f \in H(u)} \Pr{}^{\xi}(u \in \Phi^{-1}(\xi;\mathrm{pr}); f) = \sup_{f \in H(u)} \Pr{}^{\xi}(\xi \in \Phi(u;\mathrm{pr}); f) = \mathrm{pr}, \tag{1}$$

где случайное множество $\Phi^{-1}(\xi;\mathrm{pr})$ покрывает (оценивает) значение u функции от параметра f вероятности $\Pr^{\xi}(\cdot; f)$, контролировавшей наблюдения ξ. Кроме того,

$$\Phi^{-1}(x;\mathrm{pr}) \subset \Phi^{-1}(x;\mathrm{pr}'),\ \text{ если }\ \mathrm{pr} \leqslant \mathrm{pr}'\,. \tag{2}$$

Оценивающие множества максимального правдоподобия

Определим семейство $\Phi^{-1}(x, \mathrm{pr})$, $\mathrm{pr} \in [0, 1]$, $x \in X$ оценивающих множеств максимального правдоподобия как множество таких значений u, при которых плотность вероятности результата наблюдений x не меньше порогового значения, определяемого из условия (1).

Случайный неопределенный элемент

Свойства отображений Φ, Φ^{-1} как статистических характеристик объекта исследования позволяют м.-и. рассматривать $u \in V$ как значения случайного н.э. $\widetilde{u}(x)$ и считать этот случайный н.э. эмпирической моделью его субъективных суждений о возможных значениях неизвестной характеристики u модели исследуемого объекта, согласно следующим замечаниям.

1. Чем больше минимальная вероятность $\mathrm{pr} \in [0, 1]$, при которой гипотеза $H(u)$ принимается, тем значительнее наблюдение x свидетельствует против $H(u)$, тем менее правдоподобно равенство $\widetilde{u}(x) = u$.
2. Чем больше максимальная вероятность $\mathrm{pr} \in [0, 1]$, при которой гипотеза $H(u)$ отвергается, тем значительнее наблюдение x свидетельствует против $H(u)$, тем менее правдоподобно равенство $\widetilde{u}(x) = u$.

Случайный неопределенный элемент

Эти замечания определяют статистическую модель случайного н.э. $\widetilde{u}(\xi)$ вариантами случайных распределений правдоподобий и доверий со значениями, согласованными со значениями вероятности:

$$t_0^{\widetilde{u}}(u;x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \sup\{\text{pr} \mid \text{pr} \in [0,1], u \in V \setminus \Phi^{-1}(x;\text{pr})\} = \\ = 1 - \inf\{\text{pr} \mid \text{pr} \in [0,1], u \in \Phi^{-1}(x;\text{pr})\}, \\ \widehat{t_0^{\widetilde{u}}}(u;x) = 1 - t_0^{\widetilde{u}}(u;x), u \in V, x \in X. \quad (3)$$

Пример

Пусть $\xi = Af + \nu$, k — ранг оператора U, $\nu \backsim \mathcal{N}(0, \Sigma_\nu)$, т. е. $\xi \backsim \mathcal{N}(Af, \Sigma_\nu)$. Тогда $t_0^{\widetilde{u}(x)}(u) =$
$1 - F_{\chi^2_k}\left(\|(I - CC^-)\Sigma_\nu^{-1/2}(x - AU^- u)\|^2 - \|(I - BB^-)\Sigma_\nu^{-1/2} x\|^2\right)$,
где $F_{\chi^2_k}$ — функция распределения χ^2 с k степенями свободы, $B = \Sigma_\nu^{-1/2} A$, $C = B(I - U^- U)$. Здесь первая норма описывает соответствие наблюдений и значения характеристики u, вторая норма — соответствие наблюдений модели измерения.
Если выполняется условие несмещённости оценки редукции $U(I - A^- A) = 0$, то $t_0^{\widetilde{u}(x)}(u) = 1$ только для оценки редукции $u = R(\xi) = U(\Sigma_\nu^{-1/2} A)^- \Sigma_\nu^{-1/2} \xi$.

Согласие модели н.э. с моделью его оценки

Если м.-и. предложил модель $(V, \mathcal{P}(V), \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{u}})$ н.э. $\widetilde{u}$ до появления данных наблюдений за моделируемым объектом, то он может использовать н.э. $\widetilde{u}(x)$ для анализа состоятельности своей модели н.э. $\widetilde{u}$, считая $\widetilde{u}(x)$ статистической оценкой $\widetilde{u}$. Пусть согласно его модели u_0 — единственное максимально правдоподобное значение, $t^{\widetilde{u}}(u_0) = 1$. Если истинное значение интересующей исследователя характеристики действительно u_0, то наибольшая вероятность получить любой результат наблюдений x', не менее вероятный, чем наблюденный x равна $t_0^{\widetilde{u}}(u_0; x)$. Если $t_0^{\widetilde{u}}(u_0; x) \lesssim 10^{-3}$, то модель н.э. $\widetilde{u}$ плохо согласуется с моделью $\widetilde{u}(x)$.

Согласие модели н.э. с моделью его оценки

Если же существует неодноточечное множество максимально правдоподобных значений $E = \{u \in V, t^{\widetilde{u}}(u) = 1\}$, то наибольшая вероятность получить наблюденное x, или — любое не менее вероятное x', равна $\mathrm{Pl}_0^{\widetilde{u}}(E; x)$, и если значение $\mathrm{Pl}_0^{\widetilde{u}}(E; x)$ мало, то модель н.э. $\widetilde{u}$ плохо согласуется с моделью оценки $\widetilde{u}(x)$ н.э. $\widetilde{u}$.
Если исследователь считает, что согласие его модели н.э. $\widetilde{u}$ со статистической моделью н.э. $\widetilde{u}(x)$ удовлетворительное, то он может использовать последнюю для коррекции своей модели, применив методы построения «коллективной экспертизы»[2].

[2] Пытьев Ю. П. Возможность как альтернатива вероятности, § 3.9. — 2 изд. — М.: Физматлит, 2015.

Эмпирическая коррекция

Пусть корректируемая субъективная модель основана на результатах измерений на другом ИП.

- Другой ИП описывается другим оператором A'.
- Шум на его выходе ν' имеет другой ковариационный оператор Σ'_ν.
- Другой ИП, вообще говоря, по-другому искажает входной сигнал f', $f' \neq f$ $U' \neq U$,

но исследователя интересует одна и та же характеристика, и потому $Uf = U'f' = u$.

Эмпирическая коррекция

В этом случае комбинирование полученной информации может также быть осуществлено с помощью совместной редукции[3]:

1. Вычисляются результаты редукции для ИП A, $R\xi = u + R\nu$, и для ИП A', $R'\xi' = u + R'\nu'$.
2. Результаты редукции на отдельных ИП рассматриваются как результат $\begin{pmatrix} R\xi \\ R'\xi' \end{pmatrix}$ измерения величины u на ИП, соответствующем оператору $\begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}$, шум на выходе которого есть $\begin{pmatrix} R\nu \\ R'\nu' \end{pmatrix}$.

[3] Пытьев Ю. П. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. — 3 изд. — М.: Физматлит, 2012.

Согласие субъективной модели н.э. с данными наблюдений за объектом

Судить о том, насколько предложенная м.-и. модель н.э. $\widetilde{u}$ согласуется с данными x наблюдений, следует, не обращаясь к н.э. $\widetilde{u}(x)$. Рассмотрим семейство неопределенных множеств (н.м.) $\Phi(\widetilde{u};\mathrm{pr})$, $\mathrm{pr} \in [0,1]$, определенных отображениями $\Phi(\cdot,\mathrm{pr})$. Поскольку $\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(x \in \Phi(\widetilde{u};\mathrm{pr})) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup\{t^{\widetilde{u}}(u) | u \in V, x \in \Phi(u;\mathrm{pr})\}$ — правдоподобие истинности неопределенного высказывания, согласно которому н.м. $\Phi(\widetilde{u},\mathrm{pr})$ покрывает x, то чем больше минимальная вероятность такого покрытия, при которой его правдоподобие равно 1, тем значительнее наблюдение x свидетельствует против модели н.э. $\widetilde{u}$.

Согласие субъективной модели н.э. с данными наблюдений за объектом

Поэтому (случайное) правдоподобие истинности неопределенного высказывания, согласно которому модель н.э. $\widetilde{u}$ согласуется с данными наблюдений x, $\widetilde{u} \backsim x$, определим равенством

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(\widetilde{u} \backsim x) \overset{\mathrm{def}}{=} 1 - \mathrm{pr}(x) =$$

$$= 1 - \inf\{\mathrm{pr} \mid \mathrm{pr} \in [0,1], \mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(\Phi^{-1}(x; \mathrm{pr})) = 1\}.$$

Спасибо за внимание!