МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Мустафина Анастасия Владимировна

Устойчивость положений относительного равновесия системы с деформируемыми элементами

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2018

Работа выполнена в лаборатории навигации и управления научно-исследовательского института механики МГУ имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель:	Морозов Виктор Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Буров Александр Анатольевич, доктор физико-математических наук, доцент, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, старший научный сотрудник
	Родников Александр Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет) (МГТУ им. Н.Э. Баумана), доцент
	Зленко Александр Афанасьевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), доцент

Защита диссертации состоится «02» марта 2018 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета МГУ.01.10 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

E-mail: msu.01.10@mech.math.msu.su

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: https://istina.msu.ru/dissertations/93302355/

Автореферат разослан «___» __________ 20__ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук А.А. Зобова

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Ряд объектов современной техники можно моделировать механическими системами, состоящими из абсолютно твердых тел и связанных с ними деформируемых элементов.

Роторы некоторых современных высокоскоростных машин, таких как центрифуги, сепараторы, вентиляторы, веретена различных типов и др., включают в себя гибкий вал, несущий массивные сосредоточенные элементы. Турбинные лопатки, а также элементы конструкции роботов-манипуляторов в ряде случаев моделируются консольными стержнями, прикрепленными к вращающимся твердым телам.

Такого типа модели возникают и в динамике космических аппаратов (КА). Наличие деформируемых элементов в составе космических аппаратов может существенно повлиять на устойчивость стационарных движений системы, что следует учитывать при конструировании КА.

Цель работы.

Диссертация посвящена решению задач об устойчивости положений относительного равновесия механической системы, состоящей из двух твердых тел, соединенных гибким массивным стержнем, центр масс которой движется по круговой орбите вокруг Земли, а также решению задач об устойчивости относительного равновесия твердого тела на вращающемся гибком валу, в том числе в поле силы тяжести.

Методы исследования.

В работе используются методы теоретической механики и разработанные В.В.Румянцевым методы теории устойчивости механических систем, состоящих из твердых и деформируемых тел, основанные на идеях А.М.Ляпунова.

Достоверность результатов.

Большая часть результатов диссертации получена строгими аналитическими методами и базируется на теории устойчивости стационарных движений сложных механических систем. Часть результатов получена с помощью методов численного анализа. Качественно-аналитические результаты проиллюстрированы и подтверждены с помощью численного анализа.

Научная новизна.

Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность.

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в проектировании космических аппаратов сложной конструкции, а также при изучении устойчивости положений относительных равновесий механических систем, содержащих деформируемые элементы.

Апробация работы.

Результаты, представленные в диссертации, были доложены и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях

- Международная конференция по механике. Шестые Поляховские чтения. Санкт-Петербург, 2012г.
- X Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление», Казань, 2012г.
- Научная конференция «Ломоносовские чтения» МГУ имени М.В.Ломоносова, 2012г.
- Конференция «Dynamical Systems Modeling and Stability Investigation» DSMSI -2013», Киев, Украина, 2013г.
- Международная конференция «Восьмые Окуневские чтения», Санкт-Петербург, 2013 г.
- Конференция-конкурс молодых ученых Института механики МГУ, 2012г
- XII Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», Москва, ИПУ РАН, 2012 г.
- XX Международный научно-технический семинар «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации», г. Алушта, 2011 г.
- Семинар по аналитической механике и теории устойчивости имени В.В.Румянцева под руководством чл.-корр. РАН, проф. В.В.Белецкого; проф. А.В.Карапетяна, МГУ, 2016г, 2017г.
- Семинар имени А.Ю.Ишлинского кафедры прикладной механики и управления механико-математического факультета МГУ, 2017г.
- Семинар «Динамика относительного движения» под руководством чл.-корр. РАН В.В.Белецкого, проф. Ю.Ф.Голубева, доц. К.Е.Якимовой, доц. Е.В.Мелкумовой, МГУ, 2017г.

Публикации.

По теме диссертации опубликовано 6 печатных работ. Среди них 3 работы [1,2,3] опубликованы в журналах Scopus, WoS, RSCI.

Личный вклад.

Научный руководитель предложил постановку задач и методы их исследования, а также консультировал соискателя в процессе выполнения работы. Все представленные в диссертации результаты получены лично соискателем.

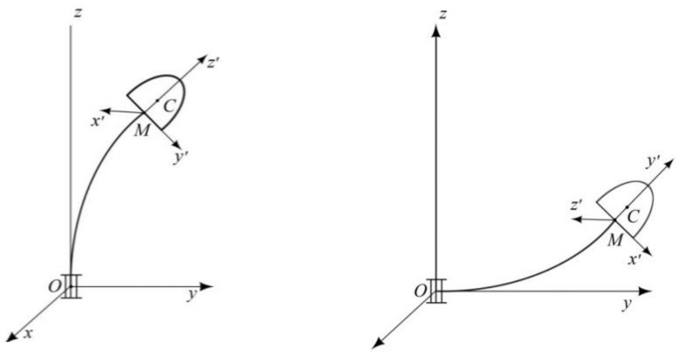
Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 87 наименований. В диссертации приведено 9 рисунков и 5 таблиц. Общий объем диссертации - 119 страниц.

Содержание диссертации

Во введении обоснована актуальность исследования, дан краткий обзор литературы по тематике диссертации и изложено содержание работы.

В **Главе 1** рассматривается задача об относительном равновесии твердого тела, закрепленного на конце гибкого массивного вала, другой конец которого вставлен во вращающийся с постоянной угловой скоростью патрон. Вал представляет собой тонкий или тонкостенный нерастяжимый упругий стержень круглого сечения.



В п. 1.2 исследуются два случая равномерного вращения описанной выше механической системы. В первом случае вращение происходит вокруг оси, совпадающей с недеформированным стержнем. Во втором случае – вокруг оси, ортогональной недеформированному стержню. В обоих случаях выписаны выражения для функционалов потенциальной энергии системы:

$$\Pi = \Pi_T^{\omega} + \Pi_{CT}^{\omega} + \Pi_{CT}^{y},$$

где $\Pi_{CT}^{y} = \frac{1}{2}\int\limits_0^l [EI(u_1''^2 + u_2''^2) + GI_k \varphi'^2]ds$ - потенциальная энергия упругих сил стержня, $\Pi_T^{\omega} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\Theta_T^O\boldsymbol{\omega}$ - потенциальная энергия центробежных сил тела, $\Pi_{CT}^{\omega} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\Theta_{CT}^O\boldsymbol{\omega}$ - потенциальная энергия центробежных сил стержня. Здесь $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения.

Компоненты тензора инерции тела $\boldsymbol{\Theta}_\mathbf{T}^\mathbf{O}$ имеют вид:

$$\theta_{22}^T = \theta_{22} + (\theta_{33} - \theta_{22})u_{2l}'^{\,2} + (\theta_{11} - \theta_{22})\varphi_l^{\,2} + Mu_{1l}^2 +$$
$$+2Mz_c'u_{1l}u_{1l}' - Mlz_c'(u_{1l}'^2 + u_{2l}'^2) - M(l + z_c')\int\limits_0^l (u_1'^2 + u_2'^2)ds;$$

$$\theta_{33}^T = \theta_{33} + (\theta_{11} - \theta_{33})u_{1l}'^2 + (\theta_{22} - \theta_{33})u_{2l}'^2 + M(u_{1l}^2 + u_{2l}^2) +$$
$$+2Mz_c'(u_{1l}u_{1l}' + u_{2l}u_{2l}').$$

Соответствующие компоненты тензора инерции стержня:

$$\theta_{22}^{cm} = \rho\sigma\int\limits_0^l \left[u_1^2 - \frac{1}{2}(l^2 - s^2)(u_1'^2 + u_2'^2) \right] ds,$$

$$\theta_{33}^{cm} = \rho\sigma\int\limits_0^l (u_1^2 + u_2^2)ds$$

На основании принципа возможных перемещений, приравнивая нулю первую вариацию функционала потенциальной энергии, составлены уравнения относительного равновесия для перемещений точек стержня. В каждом из рассматриваемых случаев приведено частное решение этих краевых задач, описывающее равномерное вращение системы вокруг соответствующей оси.

В п. 1.3 отдельно для каждого случая вращения механической системы исследуется устойчивость положения относительного равновесия. Достаточные условия устойчивости этих положений получены как условия положительной определенности второй вариации

$\delta^2\Pi$ функционала потенциальной энергии, которая в первом случае выглядит следующим образом:

$$\delta^2\Pi = \Pi_1(u_1) + \Pi_2(u_2) + \Pi_3(\varphi),$$

$$\Pi_j(u_j) = \frac{1}{2}\frac{EI}{l}\left[\int_0^1 (u_j''^2 - \nu^4 u_j^2)ds + q_j\lambda^2 u'^2_j(1) - \lambda^2 u_j^2(1) - 2\beta\lambda^2 u_j(1)u_j'(1)\right]$$

$$\Pi_3(\varphi) = \frac{1}{2}\frac{I_k G}{l}\int_0^1 \varphi'^2\,ds, \qquad (j = 1,2)$$

Здесь $u_j(s,t)$ – компоненты упругих перемещений точек оси стержня, $u' = \dfrac{\partial u}{\partial s}$, а через $\varphi(s,t)$ – угол поворота сечения стержня. l - длина стержня, E, G - модули Юнга и сдвига, I, I_k - геометрические характеристики поперечного сечения стержня.

$$\nu^4 = \frac{\rho\sigma l^4\omega^2}{EI}, \lambda^2 = \frac{Ml^3\omega^2}{EI}, q_j = \frac{(\theta_{33} - \theta_{jj})}{Ml^2} \quad (j = 1,2), \quad \beta = \frac{z_C'}{l}.$$

θ_{jj} - компоненты тензора инерции твердого тела, $m = \rho\sigma l, M$ - массы стержня и тела соответственно, ρ, σ - плотность и площадь поперечного сечения стержня, z_C' - расстояние от центра масс твердого тела до точки крепления тела к стержню.

Характеристические уравнения, определяющие критические значения параметров имеют вид:

$$\Delta_j = \nu^4(1 + ch\nu\cos\nu) + \nu^3\lambda^2 q_j(\sin\nu ch\nu + sh\nu\cos\nu) - 2\beta\nu^2\lambda^2\sin\nu sh\nu -$$
$$- \nu\lambda^2(\sin\nu ch\nu - sh\nu\cos\nu) - (q_j + \beta^2)\lambda^4(1 - ch\nu\cos\nu) = 0.$$

Достаточное условие устойчивости имеет вид $\lambda^4 < \lambda_*^4$, что накладывает ограничение сверху на угловую скорость вращения.

В п. 1.3.1 в случае вращения стержня вокруг оси, совпадающей с недеформированным стержнем, рассмотрена ситуация, когда масса стержня мала. Тогда уравнение на определение наименьшего собственного значения λ_*^4 упрощается и его решение, которое, как показано, не зависит от массы стержня, выписано в явном виде:

$a\lambda^4 + 2b\lambda^2 - 12 = 0$, где $a = q_j + \beta^2, b = 6(\beta - q_j + \frac{1}{3})$.

Проведен параметрический анализ полученных условий устойчивости. Если считать стержень безмассовым, то найденное критическое значение параметра λ_*^4 совпадает с полученными ранее в литературе[1].

Показано, что в случае массивного стержня ограничение на угловую скорость вращения более жесткое. Также выписаны значения параметра λ_*^4 при различных формах тела и значениях параметров системы (соотношения между массами стержня и тела, между длиной стержня и расстоянием от точки закрепления тела до центра масс тела).

Далее с помощью оценки снизу функционала $\delta^2 \Pi$ получены более простые достаточные условия устойчивости относительного равновесия системы. При этом нет необходимости решать рассмотренные выше краевые задачи с переменными коэффициентами. Данные условия устойчивости являются более простыми и позволяют оценить вклад массы стержня в выражение для критических значений параметра λ_*^2, но стоит иметь в виду, что полученные таким методом условия достаточно грубые.

В п. 1.3.2 рассмотрен случай вращения механической системы вокруг оси, ортогональной недеформированному стержню. Так же, как и в первом случае, получены краевые задачи, которые необходимо решить для определения достаточных условий положительной определенности функционалов, входящих в состав функционала $\delta^2 \Pi$. Приведенные краевые задачи содержат переменные коэффициенты, что не позволяет аналитически отыскать их решения. Далее был рассмотрен случай безмассового стержня. С помощью решения краевых задач (уже с постоянными коэффициентами) аналитически получены достаточные условия устойчивости. Эти условия были применены к случаю, когда на конце безмассового стержня закреплен диск - достаточные условия устойчивости положения относительного равновесия сводятся к

[1] Лурье А.И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961. 824 С.

следующему неравенству $\lambda^2 < \lambda_{0*}^2$, где λ_{0*} - положительное решение уравнения $\lambda_0 th\lambda_0 = \dfrac{1}{r^2}$.

В **Главе 2** рассматривается та же механическая система, но с учетом силы тяжести. При этом вращение происходит вокруг вертикальной оси, вдоль которой расположен недеформированный стержень.

В п. 2.1 выписано выражение для потенциальной энергии Π системы, которая в этом случае состоит из потенциальной энергии упругой деформации, потенциальной энергии центробежных сил и потенциальной энергии силы тяжести:

$$\Pi = \Pi_T^{\omega} + \Pi_{CT}^{\omega} + \Pi_{CT}^{y} + \Pi_g,$$

$$\Pi_g = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(Mgl + g\rho\sigma l^2(1-s)\right)\left(u_1'^2 + u_2'^2\right)ds - \frac{1}{2}Mgl\beta\left(u_1'^2(1) + u_2'^2(1)\right)$$

Для решения, описывающего равномерное вращение системы с недеформированным стержнем, в случае, когда масса тела много больше массы стержня, получена краевая задача, из которой найдено характеристическое уравнение для определения критического значения угловой скорости вращения системы.

Показано, что наличие силы тяжести мало влияет на значение критической угловой скорости вращения системы.

Метод возмущений, распространенный на рассматриваемую механическую систему, описан в п. 2.4. В предположении, что масса стержня мала по сравнению с массой тела, было найдено приближенное значение критического параметра λ_1^2. Метод возмущений позволяет продолжить приведенную в п. 2.4 процедуру.

В п. 2.5 описаны три частных случая системы: точечная масса, цилиндр и диск, закрепленные на конце безмассового стержня. В каждом из этих случаев найдены выражения для критической угловой скорости вращения системы ω_*^2, вычисленные двумя методами, и проведено сравнение полученных результатов.

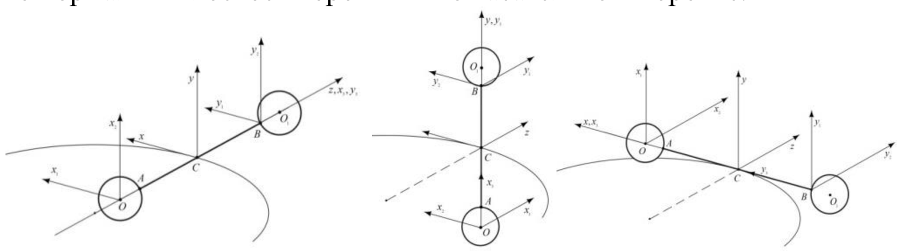
В **Главе 3** рассматривается задача об устойчивости положений относительного равновесия механической системы, состоящей из двух твердых тел, соединенных массивным нерастяжимым упругим стержнем, центр масс которой движется по круговой орбите.

В п. 3.1 введены необходимые системы координат, вектор упругих перемещений стержня, матрица перехода между системами координат, элементы которой выражены через компоненты упругих перемещений точки крепления стержня ко второму телу, выражения для компонент тензора инерции системы для ее центра масс, координаты центра масс системы.

$$D = \begin{Vmatrix} 1-\dfrac{1}{2}(u_{1l}'^2+\varphi_l^2) & \varphi_l-\dfrac{1}{2}u_{1l}'u_{2l}' & -u_{1l}'-\dfrac{1}{2}u_{2l}'\varphi_l \\ -\varphi_l-\dfrac{1}{2}u_{1l}'u_{2l}' & 1-\dfrac{1}{2}(u_{2l}'^2+\varphi_l^2) & -u_{2l}'+\dfrac{1}{2}u_{1l}'\varphi_l \\ u_{1l}'-\dfrac{1}{2}u_{2l}'\varphi_l & u_{2l}'+\dfrac{1}{2}u_{1l}'\varphi_l & 1-\dfrac{1}{2}(u_{1l}'^2+u_{2l}'^2) \end{Vmatrix}$$

В п. 3.2 отмечено, что рассматриваемая механическая система допускает интеграл энергии $T+W=const$, где T - кинетическая энергия при движении системы относительно орбитальной системы координат, а $W=\Pi_d+\Pi_c+\Pi_g$ - функционал измененной потенциальной энергии системы, который состоит из потенциальной энергии гравитационных сил Π_g, потенциальной энергии центробежных сил Π_c и потенциальной энергии упругих сил Π_d.

Получены уравнения для определения положений относительного равновесия и соответствующие граничные условия, приведены три частных решения, описывающие следующие положения относительного равновесия системы: ось, вдоль которой расположен недеформированный стержень, направлена по радиус-вектору орбиты, по нормали к плоскости орбиты и по касательной к орбите.



В п. 3.3.1 описан метод исследования устойчивости приведенных выше стационарных движений, в основе которого лежит теорема В.В.Румянцева[2]. Данная теорема заключается в том,
что если для стационарного движения сложной системы измененная потенциальная энергия системы имеет изолированный минимум, то стационарное движение устойчиво.

Достаточными условиями минимума функционала измененной потенциальной энергии W служат условия положительной определенности второй вариации $\delta^2 W$ функционала W. Выражение для $\delta^2 W$ представляется в виде трех слагаемых: квадратичного функционала F_0 от компонент упругих перемещений, билинейного функционала F_1 относительно компонент упругих перемещений u и обобщенных координат γ твердого тела и квадратичной формы F_2 обобщенных координат γ

Метод установления положительной определенности функционала $\delta^2 W_*$ описан в работе В.М.Морозова, В.Н.Рубановского, В.В.Румянцева и В.А.Самсонова[3] и состоит в том, чтобы разделить функционал $\delta^2 W_*$ на две независимые части, каждая из которых содержит только переменные u или только переменные γ:

$$\delta^2 W_* = F_0(u - u^0) + U(\gamma),$$

где $U(\gamma) = F_2(\gamma) + \dfrac{1}{2} F_1(u^0(\gamma), \gamma)$, $u^0(s)$ – решение краевых задач, получающихся из условий минимума по u функционала $F_0 + F_1$ при фиксированных значениях γ.

Тогда условия положительной определенности $\delta^2 W$ представляются в виде двух независимых групп, первая из которых обеспечивает положительную определенность функционала F_0, а вторая представляет собой условия положительной определенности квадратичной формы U координат γ:

---

[2] Румянцев В.В. Об устойчивости установившихся движений твердых тел с полостями, наполненными жидкостью // Прикладная механика. - 1962 г.. - Т. 26. - стр. 977-991.

[3] Морозов В.М.; Рубановский В.Н.; Румянцев В.В.; Самсонов В.А. О бифуркации и устойчивости установившихся движений сложных механических систем // Прикладная математика и механика. - 1973 г.. - 3 : Т. 37. - стр. 387-399

$$U(\gamma) = F_2(\gamma) + \frac{1}{2} F_1(u^0(\gamma), \gamma).$$

Этот способ разбиения функционала $\delta^2 W_*$ дает необходимые и достаточные условия положительной определенности функционала $\delta^2 W_*$. Поэтому эти условия представляют собой наиболее широкие из всех возможных достаточных условий устойчивости стационарных движений сложной механической системы, получаемых из рассмотрения второй вариации $\delta^2 W_*$ функционала W_*.

В пп. 3.3.2, 3.3.3 и 3.3.4 описанный выше метод применен к исследованию устойчивости трех указанных выше положений относительного равновесия системы.

В каждом из перечисленных выше пунктов выписаны в явном виде выражения для функционалов F_0, F_1 и квадратичной формы F_2.

Ниже выписаны эти выражения для случая, когда недеформированный стержень расположен вдоль радиус-вектора орбиты. В этом случае $\gamma_3 = 1, \beta_2 = 1$ (здесь γ_i, β_j - направляющие косинусы радиус-вектора и нормали к плоскости орбиты).

$$F_{01}(u_1) + F_{11}(u_1, \gamma_1) = \frac{1}{2}\int_0^l EI_2 u_1''^2 ds + \frac{1}{2}\Omega^2[-\int_0^l 3\chi_2 u_1'^2 ds + 3Mx_{3C}^2 +$$

$$+3(B_1 - B_3)u_{1l}'^2 + 3M_2 b(a+l)u_{1l}'^2 + 6\gamma_1[\{\rho\sigma\int_0^l u_1 ds + M_2(u_{1l} + bu_{1l}')\}x_{3C}^0 -$$

$$-\int_0^l \rho\sigma(a+s)u_1 ds + \rho I_2 u_{1l} - M_2 L u_{1l} + (B_3 - B_1 - M_2 b(a+l))u_{1l}']],$$

$$F_{21}(\gamma_1) = \Omega^2 \frac{3}{2}\gamma_1^2(\theta_{11}^0 - \theta_{33}^0),$$

$$F_{02}(u_2)+F_{12}(u_2,\gamma_2)=\frac{1}{2}\int_0^l EI_1 u_2''^2 ds+\frac{1}{2}\Omega^2[\int_0^l\left(-3\chi_1 u_2'^2+\rho\sigma u_2^2\right)ds+3Mx_{3C}^2-$$

$$-Mx_{2C}^2+M_2u_{2l}^2+3M_2b(a+l)u_{2l}'^2+2M_2bu_{2l}u_{2l}'+4(B_2-B_3)u_{2l}'^2+$$

$$+8\gamma_2[\{\rho\sigma\int_0^l u_2 ds+M_2(u_{2l}+bu_{2l}')\}x_{3C}^0-\int_0^l\rho\sigma(a+s)u_2 ds+$$

$$+\rho I_1 u_{2l}-M_2Lu_{2l}+(B_3-B_2-M_2b(a+l))u_{2l}']],$$

$$F_{22}(\gamma_2)=\frac{1}{2}\Omega^2[4\gamma_2^2(\theta_{22}^0-\theta_{33}^0)],$$

$$F_{03}(\varphi)+F_{13}(\varphi,\beta_2)=\frac{1}{2}\int_0^l\left(EI_\omega\varphi''^2+GI_k\varphi'^2\right)ds+\frac{1}{2}\Omega^2[\int_0^l\left(-3\rho I_\varphi\varphi'^2+\rho I_2\varphi^2\right)ds-$$

$$-(B_1-B_2)\varphi_l^2+2\beta_1[(B_2-B_1)\varphi_l+\int_0^l\rho(I_1-I_2)\varphi ds]],$$

$$F_{23}(\beta_2)=\frac{1}{2}\Omega^2[\beta_1^2(\theta_{22}^0-\theta_{11}^0)].$$

Здесь a, b - расстояние от центра масс тел до их точек крепления к стержню, $L=a+b+l$. x_{jC} - координаты центра масс системы, Ω - орбитальная угловая скорость, θ_{ii}^0, B_j - моменты инерции системы и второго тела, M, M_1, M_2 - масса всей системы, первого и второго тел соответственно, $\chi_j(s)=\rho I_j-\rho\sigma[a(l-s)+\frac{1}{2}(l^2-s^2)]-M_2L, \quad j=1,2$.

В некоторых случаях для упрощения функционал $F_{02}(u_2)+F_{12}(u_2,\gamma_2)$ оценен снизу.

Уравнения полученных краевых задач представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами. В каждом из пп. 3.3.2, 3.3.3, 3.3.4 выписаны условия положительной определенности квадратичной формы U_j, которые представляют одну из групп достаточных условий устойчивости рассматриваемых решений. Вторая группа условий устойчивости, представляющая собой условия положительной определенности функционала F_0, получена при определении наименьших собственных значений соответствующих краевых задач.

Эти условия представляют собой условия устойчивости прямолинейной формы стержня и накладывают ограничения сверху на величину угловой скорости стационарного вращения.

Так, например, для первого положения относительного равновесия полученные краевые задачи имеют следующий вид (для безмассового стержня):

$$u_1^{IV} - \nu_1^2 u_1'' = 0$$

$$\begin{cases} u_1''(1) + a_0\nu_1^2 u_1'(1) - \gamma_1 a_0 \nu_1^2 = 0 \\ u_1'''(1) - \nu_1^2 u_1'(1) + \gamma_1 \nu_1^2 = 0 \\ u_1'(0) = 0, u_1(0) = 0 \end{cases}$$

$$u_2^{IV} - \nu_2^2 u_2'' = 0$$

$$\begin{cases} u_2''(1) + b_0\nu_2^2 u_2'(1) - \gamma_2 b_0 \nu_2^2 = 0 \\ u_2'''(1) - \nu_2^2 u_2'(1) - \dfrac{1}{3}\nu_2^2 u_2(1) + \dfrac{4}{3}\gamma_2 \nu_2^2 = 0 \\ u_2'(0) = 0, u_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\varphi^{IV} - \nu_3^2 \varphi'' = 0$$

$$\begin{cases} -\varphi'''(1) + \nu_3^2 \varphi'(1) + c_0\varphi(1) + \beta_1 c_0 = 0 \\ \varphi''(1) = 0, \varphi'(0) = 0, \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

Здесь

$$\nu_1^2 = \frac{3\Omega^2 \kappa l^3}{EI_2}, a_0 = \frac{(B_1 - B_3)}{\kappa l^2}, \kappa = \frac{M_1 M_2}{M}; \nu_2^2 = \frac{3\Omega^2 \kappa l^3}{EI_1},$$

$$b_0 = \frac{4(B_2 - B_3)}{3\kappa l^2}; \nu_3^2 = \frac{GI_k l^2}{EI_\omega}, c_0 = \frac{\Omega^2 l^3 (B_2 - B_1)}{EI_\omega}.$$

Таким образом, на основании этих краевых задач получаются достаточные условия устойчивости рассматриваемого положения относительного равновесия в явном виде через параметры системы.

Условия положительной определенности квадратичной формы U_j :

$$
\begin{cases}
A_1 - A_3 + \kappa l^2 \dfrac{\dfrac{th\nu_1}{\nu_1} + a_0}{1 + a_0 \nu_1 th\nu_1} > 0, \\
A_2 - A_3 + \dfrac{3}{4}\kappa l^2 \dfrac{1}{\Delta_2}\left(\dfrac{th\nu_2}{\nu_2} + b_0\left(1 - \dfrac{th\nu_2}{4\nu_2}\right)\right) > 0. \\
A_2 - A_1 + (B_2 - B_1)\dfrac{\nu_3^2}{\Delta_3} > 0.
\end{cases}
$$

Условия положительной определенности функционала F_0:

$$
\begin{cases}
\Delta_1 = \nu_1(1 + a_0 \nu_1 th\nu_1) > 0, \\
\Delta_2 = 1 - \dfrac{th\nu_2}{4\nu_2} + \dfrac{b_0}{2}\left(2\nu_2 th\nu_2 - 1 + \dfrac{1}{ch\nu_2}\right) > 0. \\
\Delta_3 = \nu_3^2 + c_0\left(1 - \dfrac{th\nu_3}{\nu_3}\right) > 0
\end{cases}
$$

Рассмотрены различные случаи распределения масс в системе и проведен анализ полученных достаточных условий устойчивости, который позволяет оценить влияние деформируемости соединительного стержня на устойчивость движения системы.

Показано, что отнесение массы на расстояние l расширяет область устойчивости, а «плохое» распределение массы M_2 может, вообще говоря, свести на нет это расширение.

Также показано, что условие устойчивости всей системы нарушается раньше, чем условие устойчивости прямолинейной формы стержня.

Аналогичные достаточные условия устойчивости получены и для двух других положений относительного равновесия.

В **заключении** приведены основные результаты диссертации.

Основные результаты

В работе исследованы следующие задачи:

- задачи об устойчивости положений относительного равновесия твердого тела на массивном гибком валу при вращении как вокруг оси, вдоль которой расположен недеформированный стержень, так и при вращении вокруг оси, ортогональной недеформированному стержню в отсутствии внешних сил;

- задача об устойчивости положения относительного равновесия твердого тела на массивном гибком валу при вращении вокруг вертикальной оси, вдоль которой расположен недеформированный стержень в поле силы тяжести;

- задача об устойчивости положений относительного равновесия механической системы, состоящей из двух твердых тел, соединенных массивным нерастяжимым упругим стержнем, центр масс которой движется по круговой орбите вокруг Земли.

- Получены достаточные условия устойчивости относительного равновесия рассматриваемой механической системы как условия положительной определенности второй вариации функционала потенциальной энергии. Эти условия накладывают ограничения сверху на величину угловой скорости равномерного вращения и позволяют оценить влияние массы стержня и его деформируемости на величину критической угловой скорости.
- Получено выражение для функционала измененной потенциальной энергии системы, состоящей из двух твердых тел, соединенных гибким массивным стержнем, центр масс которой движется по круговой орбите. Указаны три частных решения, описывающих положения относительного равновесия недеформированной системы в различных конфигурациях.
- Из условий положительной определенности второй вариации функционала измененной потенциальной энергии системы найдены достаточные условия устойчивости указанных положений относительного равновесия.
- Условия положительной определенности второй вариации функционала измененной потенциальной энергии системы представлены в виде двух независимых групп с помощью

специального разбиения. Первая обеспечивает положительную определенность квадратичного функционала, характеризующего деформируемость системы, вторая представляет условия положительной определенности квадратичной формы, которая определяет характер устойчивости системы с учетом ее деформируемости.

- Получены более простые (но более грубые) достаточные условия устойчивости указанных положений относительного равновесия с помощью оценки соответствующих функционалов.
- Для случая безмассового стержня в явном виде приведены достаточные условия устойчивости положений относительного равновесия системы. Проведен анализ полученных условий устойчивости для различных конфигураций системы.

Работы автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Scopus, WoS, RSCI:

1. Ильинская А.В. «Об устойчивости относительного равновесия на круговой орбите одной механической системы с деформируемыми элементами». Вестник МГУ Сер. 1 Мат. Мех. 2014 №1. С. 60-65.
2. Морозов В.М., Ильинская А.В. «Устойчивость относительного равновесия космической станции, состоящей из двух твердых тел, соединенных упругим стержнем». Автоматика и телемеханика. №8. 2013. С. 103-111.
3. Морозов В.М., Ильинская А.В., Чжао Цзе. «Устойчивость относительных равновесий твердого тела на вращающемся массивном гибком валу». Математическое моделирование Т.26 №10. 2014. С. 19-32.

Иные работы, опубликованные автором по теме диссертации:

4. Ильинская А.В. «Об устойчивости относительного равновесия космической станции, состоящей из двух твердых тел, соединенных упругим стержнем». В сборнике трудов XXI Международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки

информации», 2012. М.: Изд-во ГУП Академиздат центр «Наука» РАН. С.130-131.

5. Морозов В.М., Ильинская А.В. «Об устойчивости относительного равновесия на круговой орбите двух твердых тел, соединенных массивным упругим стержнем». Труды X Международной Четаевской конференции. «Аналитическая механика, устойчивость и управление», посв. 110-летию Н.Г. Четаева. Т. 2. Казань. 2012. С.383-392.
6. В.М.Морозов, А.В.Ильинская. «Устойчивость стационарных движений космической станции, содержащей деформируемые элементы». Тезисы докл. XII Междунар. конф. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». 2012. М.: ИПУ РАН. С.245-246.