

УДК 621.391.1 : 519.1

© 2017 г. И.С. Сергеев

О ВЕЩЕСТВЕННОЙ СЛОЖНОСТИ КОМПЛЕКСНОГО ДПФ¹

Приводится способ построения теоретически быстрого алгоритма вычисления дискретного преобразования Фурье (ДПФ) порядка $N = 2^n$. Показано, что ДПФ комплексного вектора длины N выполняется со сложностью асимптотически $3,76875N \log_2 N$ вещественных операций сложения, вычитания и скалярного умножения.

§ 1. Введение

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) обладает огромным спектром приложений в теории и практике быстрых вычислений и цифровой обработки сигналов (см., например, [1, 2]). В вычислительной практике чаще всего ДПФ применяется к вещественным или комплексным векторам с длиной, равной степени двойки.

ДПФ является линейным преобразованием и обычно вычисляется с помощью элементарных линейных операций. Мы интересуемся сложностью комплексного ДПФ порядка $N = 2^n$ при реализации схемами или неветвящимися программами (т.е. вычислительной сложностью) в линейном алгебраическом базисе вещественных операций: сложения, вычитания, скалярного умножения на произвольные константы.

Теория алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ), развитая в 50-е–60-е годы XX века, позволяет вычислить ДПФ любого порядка N со сложностью $O(N \log N)$ (см. [1, 2]). Нижние оценки, кроме тривиальных вида $\Omega(N)$, пока не известны, но представляется, что эти оценки не окончательны.

Напомним, что любой метод комплексного БПФ модифицируется для случая вещественного входного вектора, при этом сложность уменьшается асимптотически вдвое (см., например, [2, 3]). Поэтому случай вещественных векторов не требует отдельного рассмотрения.

Если говорить о точных оценках сложности ДПФ порядка $N = 2^k$, то долгое время рекорд составлял асимптотически $4N \log N$ операций². Оценка достигается на известном с 80-х гг. (а возможно, и раньше) методе “БПФ с расщепленным основанием” (split-radix, см., например, [2, 3]) – метод использует около $3N \log N$ аддитивных операций и около $N \log N$ скалярных умножений.

Явное указание мультипликативной сложности (число скалярных умножений) имеет смысл, если учесть, что операции сложения-вычитания и умножения, вообще говоря, неравнозначны (сравнительное время их выполнения зависит от модели вычислений, но умножение обычно сложнее). Известно, что ДПФ любого порядка N можно вычислить с линейной мультипликативной сложностью $O(N)$ [4, 5], но общая сложность соответствующих методов сравнительно высока.

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 17-01-00485а).

² Все логарифмы здесь и далее по тексту – двоичные.

Классический метод с расщепленным основанием эффективно учитывает тот факт, что умножения на корни четвертой степени из единицы выполняются по существу бесплатно. Можно было бы ожидать, что следующий более быстрый метод будет как-то использовать относительную простоту умножений на корни восьмой степени. Однако, по всей видимости, это соображение само по себе не работает, поэтому оценка сложности классического метода оставалась рекордной долгое время. Только в начале XXI века с помощью приема, обнаруженного Дж. ван Бускиркком, оценка общей вещественной сложности ДПФ порядка $N = 2^k$ была улучшена [6, 7] до $3\frac{7}{9} N \log N$ (см. также [3]). Этот метод использует чуть больше скалярных умножений: асимптотически $\frac{10}{9} N \log N$.

Метод [6, 7] иллюстрирует возможность эффективной перестройки структуры скалярных умножений схемы за счет удачно организованной миграции множителей между слоями – существенная часть умножений при этом упрощается. Специфической особенностью метода являются “вращения” – циклические сдвиги векторов аргументов внутренних ДПФ.

В 2011 г. в работе [8] в результате компьютерного эксперимента обнаружено существование вариантов split-radix метода с меньшей сложностью, чем у классической версии, при $N \in \{256, 512\}$. Хотя по сложности найденные схемы уступают схемам [6, 7], в отличие от последних они используют только корни из единицы в качестве множителей. Более того, анализ примеров [8] показывает, что они приводят к более экономным схемам по сравнению с классическими даже вне предположения о простоте умножений на корни восьмой степени.

В 2014 г. в работе [9] построена схема с меньшим, чем у схем, упомянутых выше, числом умножений $\frac{11}{12} N \log N$ и общей сложностью $3\frac{5}{6} N \log N$. В работе [9] также предложен модифицированный в духе [6, 7] метод, общая сложность которого согласно оценкам авторов меньше, чем у методов [6, 7]. Однако, судя по всему, в этих оценках не учтены все операции; после их учета сложность метода оказывается асимптотически равной $3\frac{19}{24} N \log N$ и поэтому не рекордной. Эффективность первой из упомянутых схем [9] принципиально опирается на простоту умножений на корни восьмой степени; перестроение структуры умножений здесь играет вспомогательную роль.

Так или иначе, в работах [6–9] вскрыты различные и не вполне совместимые возможности оптимизации структуры умножений схемы БПФ. В настоящей статье предпринимается попытка приблизиться к пониманию принципов построения схемы с оптимальной структурой умножений.

Следует заметить, что любая из перечисленных общих схем (исключая конкретные примеры [8]) строится рекурсивно из базовых подсхем, выполняющих (взвешенное) ДПФ малого порядка. При этом умножения сосредоточены почти исключительно на границах подсхем. Умножения на границах продиктованы стандартной формулой декомпозиции ДПФ [10] и фактически неизбежны в любой конструкции, опирающейся на эту формулу.

Это соображение наводит на мысль строить схему ДПФ из базовых подсхем потенциально неограниченного размера. Общая длина границ между подсхемами при этом должна сокращаться, хотя, конечно, усложнение структуры подсхем ведет к увеличению числа внутренних умножений.

В настоящей статье предлагается конструкция схемы ДПФ, полученная на пути объединения базовых схем растущего размера. Для комплексного ДПФ порядка N схема приводит к оценкам (асимптотически) общей сложности $3,76875N \log N$ и мультипликативной сложности $0,89375N \log N$.

Разумеется, полученное уточнение оценки [6, 7] совсем незначительно. С другой стороны, предел, достижимый при применении формулы [10], предположительно уже близок; возможно, он соответствует константе 3,75 в оценке общей сложности.

Хотя мы стремились к простоте конструкции, чтобы обеспечить доступность анализа сложности, для описания схем приходится прибегать к условной сокращенной записи, которая поясняется в следующем параграфе.

§ 2. Основные понятия и стандартные факты

2.1. Комплексная и вещественная сложность. Напомним, что умножение комплексной переменной на произвольную комплексную константу выполнимо за три вещественных умножения и три вещественных сложения-вычитания; далее такие умножения мы будем называть *нетривиальными*. Умножения на специальные константы вида $a(1 \pm i)$, $\pm 1 + ai$, $a \pm i$, где $a \in \mathbb{R}$, i – мнимая единица, выполняются за два вещественных умножения и два вещественных сложения-вычитания; такие умножения будем называть *простыми*. *Вещественными* умножениями будем называть умножения на вещественные или чисто мнимые константы.

2.2. Структура БПФ. Для ДПФ порядка N с примитивным корнем ζ введем обозначение

$$\text{ДПФ}_{N,\zeta}(\gamma_0, \dots, \gamma_{N-1}) = (\gamma_0^*, \dots, \gamma_{N-1}^*), \quad \gamma_j^* = \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i \zeta^{ij}.$$

Стандартные алгоритмы БПФ порядка 2^k имеют структуру, диктуемую техникой декомпозиции Кули – Тьюки [10].

Пусть требуется вычислить ДПФ порядка ST с примитивным корнем ζ . Для $s = 0, \dots, S-1$ и $t = 0, \dots, T-1$ запишем

$$\begin{aligned} \gamma_{sT+t}^* &= \sum_{I=0}^{ST-1} \gamma_I \zeta^{I(sT+t)} = \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{S-1} \gamma_{iS+j} \zeta^{(iS+j)(sT+t)} = \\ &= \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{S-1} \gamma_{iS+j} \zeta^{itS+jsT+jt} = \sum_{j=0}^{S-1} (\zeta^T)^{js} \zeta^{jt} \gamma_{(j),t}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\gamma_{(j),t} = \sum_{i=0}^{T-1} \gamma_{iS+j} (\zeta^S)^{it}.$$

Полученная формула позволяет произвести вычисления в следующем порядке:

i) Для $j = 0, \dots, S-1$ вычисляются векторы

$$(\gamma_{(j),0}, \gamma_{(j),1}, \dots, \gamma_{(j),T-1}) = \text{ДПФ}_{T,\zeta^S}(\gamma_j, \gamma_{S+j}, \dots, \gamma_{(T-1)S+j});$$

ii) Вычисляются произведения

$$\delta_{(t),j} = \zeta^{jt} \gamma_{(j),t}, \quad j = 0, \dots, S-1, \quad t = 0, \dots, T-1; \quad (2)$$

iii) Заметим, что

$$\gamma_{sT+t}^* = \sum_{j=0}^{S-1} \delta_{(t),j} (\zeta^T)^{js}.$$

Это позволяет окончательно найти компоненты вектора ДПФ по формулам

$$\left(\gamma_t^*, \gamma_{T+t}^*, \dots, \gamma_{(S-1)T+t}^*\right) = \text{ДПФ}_{S, \zeta^T}(\delta_{(t),0}, \delta_{(t),1}, \dots, \delta_{(t),S-1}),$$

где $t = 0, \dots, T - 1$.

Итак, ДПФ порядка ST сведено к S “внутренним” ДПФ порядка T , T “внешним” ДПФ порядка S и $(S - 1)(T - 1)$ промежуточным умножениям на степени ζ .

В конечном счете алгоритмы БПФ порядка $N = 2^k$ состоят из k слоев, параллельно выполняющих ДПФ порядка 2, чередующихся со слоями из скалярных умножений (2). ДПФ порядка 2 – это преобразование $\gamma_0 \pm \gamma_1$, выполняемое парой из операций сложения и вычитания.

Любой стандартный, т.е. основанный на (1), алгоритм БПФ выполняет $N \log N$ комплексных сложений или вычитаний; остальные операции являются скалярными умножениями. Именно структура умножений отличает разные алгоритмы БПФ.

2.3. Алгоритм БПФ с расщепленным основанием. Наивный подход к реализации ДПФ состоит в рекурсивном применении формулы (1) с выбором $S = 2$ или $T = 2$. В результате согласно п. ii на каждом слое схемы выполняется примерно по $N/2$ нетривиальных умножений, поэтому общая оценка вещественной сложности близка к $5N \log N$.

Алгоритм БПФ с расщепленным основанием (split-radix) задействует ДПФ порядка 4 и учитывает, что умножение на корни четвертой степени $\pm i$ выполняется бесплатно.

1) По формуле (1) с выбором $S = 2^{k-1}$ и $T = 2$ вычисляются компоненты ДПФ с четными индексами, т.е. при $t = 0$. Для этого достаточно вычислить по одной компоненте $\gamma_{(j),0} = \gamma_j + \gamma_{S+j}$ каждого из 2^{k-1} внутренних ДПФ порядка 2 и реализовать внешнее ДПФ порядка 2^{k-1} .

2) Для вычисления компонент с нечетными индексами формула (1) применяется с параметрами $S = 2^{k-2}$ и $T = 4$. У каждого из 2^{k-2} внутренних ДПФ порядка 4 требуется вычислить по две компоненты $\gamma_{(j),1}$ и $\gamma_{(j),3}$. Каждая такая пара в силу $\zeta^S = i$ может быть найдена по формулам

$$\begin{aligned}\gamma_{(j),1} &= (\gamma_j - \gamma_{2S+j}) + i(\gamma_{S+j} - \gamma_{3S+j}), \\ \gamma_{(j),3} &= (\gamma_j - \gamma_{2S+j}) - i(\gamma_{S+j} - \gamma_{3S+j}).\end{aligned}$$

Окончательно, выполняется 2^{k-1} умножений на степени ζ^{jt} и два ДПФ порядка 2^{k-2} . Так по отношению к наивному методу треть нетривиальных умножений сокращается, благодаря чему общая сложность снижается до $4N \log N$.

Если ввести дополнительное понятие, то метод можно объяснить как рекурсивное применение ДПФ смешанного порядка $2/4$.

ДПФ смешанного порядка получается из ДПФ порядка N (пусть $N = ST$) несколькими подстановками следующего вида: компоненты γ_{t+sT}^* , $s = 0, \dots, S - 1$, подменяются компонентами $\gamma_{(j),t}$, $j = 0, \dots, S - 1$ (см. (1)). При этом множества заменяемых компонент в различных подстановках не должны пересекаться. По сути, ДПФ смешанного порядка представляет собой промежуточный результат вычисления ДПФ полного порядка.

Встречающиеся далее в тексте ДПФ смешанного порядка будем для краткости идентифицировать перечислением порядков, входящих в преобразование компонент: например, как выше в случае ДПФ порядка $2/4$.

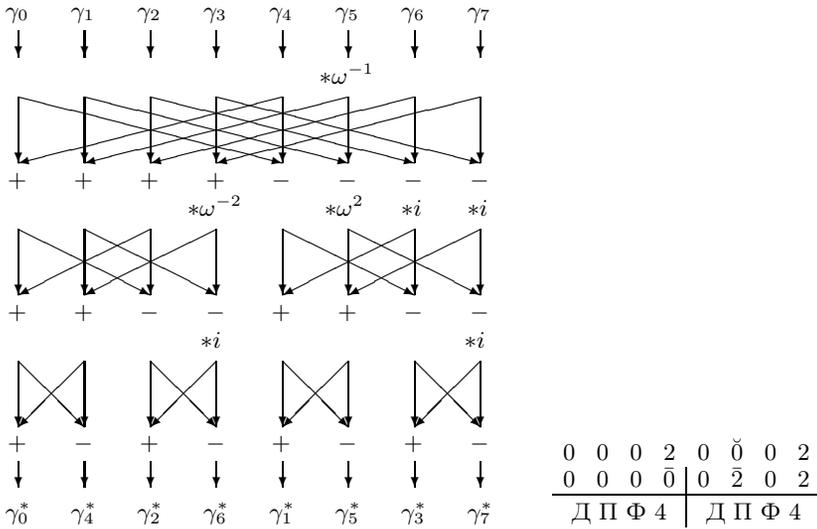


Рис. 1. Схема взвешенного ДПФ порядка 8

2.4. Сокращенная запись схем ДПФ. Для удобства рассуждений будем считать, что мы решаем более общую задачу реализации нормированного взвешенного ДПФ:

$$a \cdot \text{ДПФ}_{N,\zeta}(b_0\gamma_0, b_1\gamma_1, \dots, b_{N-1}\gamma_{N-1}), \quad (3)$$

где a, b_i – произвольные комплексные числа (нормирующий и весовые множители соответственно). Сложность такого преобразования отличается от сложности обычного ДПФ только линейным аддитивным членом. Вектор $(b_0^{-1}, \dots, b_{N-1}^{-1})$ будем называть *весовым вектором*. Учитывая, что, как правило, в рассматриваемых далее схемах весовые множители b_i являются корнями из единицы, мы будем использовать аддитивную нотацию, указывая вместо числа b_i показатель d степени подходящего примитивного корня ω , если $b_i = \omega^d$.

Для изображения схем ДПФ воспользуемся экономной матричной формой записи, по духу близкой к [8], но опускающей несущественные для подсчета сложности подробности. Строки матрицы соответствуют ярусам стандартной схемы БПФ с топологией “бабочки”. В строке записываются относительные веса компонент на данном слое. В рассматриваемых далее примерах в качестве весов будут использоваться степени примитивного корня ω степени 16 из единицы. В ячейках строки мы указываем лишь степень ω по модулю 4: умножения на $\omega^4 = i$ являются бесплатными, и при оценке сложности мы ими не интересуемся.

На рис. 1 изображена схема преобразования

$$(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \omega^2\gamma_3, \gamma_4, \omega\gamma_5, \gamma_6, \omega^2\gamma_7) \rightarrow \text{ДПФ}_{8,\omega^2}(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_7)$$

и ее компактная форма записи. Схема использует представление ДПФ порядка 8 как композицию внутренних ДПФ порядка 2 и внешних ДПФ порядка 4 – последние являются стандартными, поэтому в сокращенной записи рис. 1 не раскрываются.

Для наглядности символом \checkmark мы отмечаем позиции, в которых выполняются нетривиальные скалярные умножения, а символом $-$ – позиции, в которых выполняются простые умножения. Позицию с вещественным умножением будем далее отмечать символом \cdot .

Принцип построения таблицы весов прост: нужно, чтобы компоненты, которые суммируются на очередном ярусе схемы ДПФ, имели одинаковые веса. На рис. 1

0	1	0	3	0	1	0	3	0	1	0	3	0	1	0	3								
0	1	0	3	0	1	0	3		0	1	0	3	0	1	0	3							
0	0̇	0	0̇		0	2̇	0	2̇		0	1	2̇	3		2̇	1	0	3					
				Д	П	Ф	4					Д	П	Ф	4					Д	П	Ф	4

Рис. 2. Пример схемы ДПФ порядка 4/16

это в первой строке компоненты на расстоянии 4. На ярусе, в котором стыкуются внешние и внутренние ДПФ (вторая строка рис. 1), веса должны следовать правилу (2). Нормирующий множитель a (3) мы явно не указываем на изображении, предполагая, что он переносится на выходы схемы.

Рассмотрим более содержательный пример. На рис. 2 изображена схема ДПФ порядка 4/16. В ней компоненты порядка 16 вычисляются композицией ДПФ порядка 4. Поясним, что для ДПФ порядка 16, представленного композицией ДПФ порядка 4, согласно (2) “целевой” является третья строка

$$0\ 0\ 0\ 0, 0\ 2\ 0\ 2, 0\ 1\ 2\ 3, 0\ 3\ 2\ 1.$$

Если схема используется в качестве внутренней подсхемы для реализации ДПФ большого порядка, то мы можем допускать сдвиг в четверках, относящихся к одному и тому же внешнему ДПФ. Сдвиг, т.е. дополнительная нормировка соответствующей степени ω , может быть учтен далее на уровне стыковки разных подсхем. Например, на рис. 2 сдвигу подвергнуты входы правой подсхемы ДПФ порядка 4. За счет специального подбора весового вектора и допуска сдвигов на выходах схема рис. 2 имеет меньшую сложность, чем стандартная. Потому она более предпочтительна для рекурсивных построений.

2.5. Прием экономии аддитивной сложности. Далее встречается ситуация, когда нормированное ДПФ порядка 4 применяется к вектору с весами, среди которых два примитивных корня 16-й степени из 1 и еще хотя бы один коэффициент имеет общий вид, т.е. отличен от $bi \pm 1, b \pm i$. Тогда путем деления нормирующего множителя ДПФ на $\rho = \cos^{-1}(\pi/8)$ можно сэкономить два вещественных сложения-вычитания. Действительно, в четверке умножений на первом слое два нетривиальных умножения становятся простыми, сложность третьего умножения не увеличивается, и дополнительно может появиться умножение на вещественную константу. Отметим, что метод [6, 7] вырастает из эксплуатации аналогичных ситуаций.

§ 3. Конструкция схемы

Опираясь корнями из единицы степени 16, можно построить ДПФ смешанного порядка $2^k/2^{k-1}/\dots/16$ при любом $k \geq 4$: оно содержит 16 компонент ДПФ порядка 2^k и по 2^{k+3-r} компонент ДПФ порядка 2^r при $4 \leq r < k$. Тем самым, ДПФ определено однозначно, так как только 16 компонент ДПФ порядка 2^r может быть вычислено с использованием корней степени 16.

Рассмотрим разложение ДПФ порядка $N = 2^k$ в композицию указанных ДПФ, используя на каждом уровне преобразования максимального порядка. Эта конструкция проиллюстрирована на рис. 3.

Как указано выше, рассматриваем вычисление подходящим образом нормированного ДПФ. Нормировка весовых векторов базовых схем совмещается с умножениями на границах между подсхемами.

По существу, нам нужно только оценить сложность базовой схемы заданного порядка при возможности произвольного выбора весового вектора. При оценке сложности мы интересуемся только скалярными умножениями (напомним, что заключенная в аддитивных комплексных операциях сложность схемы БПФ предопределена).

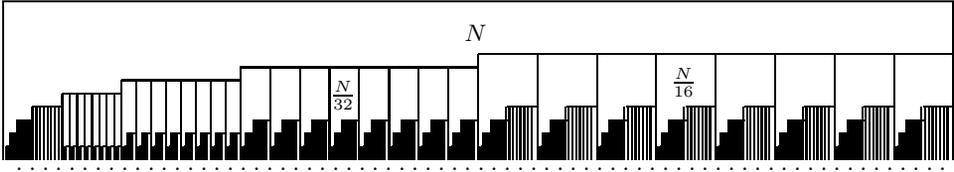


Рис. 3. Схема декомпозиции ДПФ порядка N

...								...								
i_1	j_1	i_2	j_2	i_3	j_3	i_4	j_4	i_1	j_1	i_2	j_2	i_3	j_3	i_4	j_4	...
k_1	k_2	k_3	k_4	k_1	k_2	k_3	k_4	l_1	l_2	l_3	l_4	l_1	l_2	l_3	l_4	
a	a	a	a	b	$b+2$	b	$b+2$	c	$c+1$	$c+2$	$c+3$	d	$d+3$	$d+2$	$d+1$	
Д	П	Ф	4	Д	П	Ф	4	Д	П	Ф	4	Д	П	Ф	4	

Рис. 4. Фрагмент базовой схемы

Оценку будем записывать в формате [число нетривиальных умножений; число простых умножений; число вещественных умножений], опуская последнюю компоненту, если вещественных умножений нет.

Лемма. Заключенная в скалярных умножениях вещественная сложность ДПФ порядка $2^k/2^{k-1}/\dots/16$ с подходящим весовым вектором при $k \geq 7$ не превосходит $[26; 49; 6] \cdot 2^{k-7} - [2; 1]$.

Доказательство. ДПФ порядка $2^k/2^{k-1}/\dots/16$, как в примере рис. 2, будем представлять композицией ДПФ порядка $2^{k-2}/2^{k-3}/\dots/4$ и ДПФ порядка 4.

Построение схемы проведем индуктивно. Для этого рассмотрим последние два слоя схемы, примыкающие к ДПФ порядка 4, формирующим первые (слева) 16 выходов, т.е. компоненты максимального порядка 2^k (см. рис. 4). Напомним, что в третьей строке рис. 4 должны формироваться четверки 0000, 0202, 0123, 0321 с точностью до сдвигов.

Пусть $K = (k_1, k_2, k_3, k_4)$. Обозначим через Φ_n минимальную сложность схемы ДПФ порядка $2^n/\dots/16$ при реализации композицией ДПФ порядка $2^{n-2}/\dots/4$ и ДПФ порядка 4, а через $\Phi_n(K)$ – ту же сложность без учета части схемы ниже восьмерки (K, K) на рис. 4 (т.е. исключая вычисления в подстроке $a, \dots, b+2$).

Отметим, что при любом a

$$\Phi_n(K + (a, a, a, a)) = \Phi_n(K) \quad (4)$$

(схемы переходят друг в друга при перенормировке весового вектора).

Пусть $D(A, B)$ обозначает расстояние между векторами $A = (a_1, \dots, a_n)$ и $B = (b_1, \dots, b_n)$ в смысле вещественной сложности умножений при переходе от A к B :

$$D(A, B) = \sum_{i=1}^n \delta(a_i - b_i), \quad \delta(x) = \begin{cases} [0; 0], & x \equiv 0 \pmod{4}, \\ [0; 1], & x \equiv 2 \pmod{4}, \\ [1; 0] & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для $I = (i_1, i_2, i_3, i_4)$ и $J = (j_1, j_2, j_3, j_4)$ обозначим

$$\langle I, J \rangle = (i_1, j_1, i_2, j_2, i_3, j_3, i_4, j_4).$$

Пусть

$$D_0(I, J) = \min_{K, a, b} \{D(\langle I, J \rangle, (K, K)) + D(K, a + (0, 0, 0, 0)) + D(K, b + (0, 2, 0, 2))\},$$

$$D_1(I, J) = \min_{L, a, b} \{D(\langle I, J \rangle, (L, L)) + D(L, a + (0, 1, 2, 3)) + D(L, b + (0, 3, 2, 1))\}.$$

Общие соотношения

K	I	J	n_0	$D(\langle I, J \rangle, (K, K))$	$D_1(I, J)$
0,0,0,0	0,0,0,0	0,0,0,3	7	[1;0]	[3;2]
0,3,1,3	0,2,0,1	0,3,3,3	8	[2;0]	[2;2]
0,0,0,3	0,0,0,0	0,3,1,3	6	[1;0]	[1;2]
0,2,0,1	0,0,0,0	3,1,2,1	6	[1;0]	[1;2]
0,3,3,3	0,3,0,2	0,3,3,3	8	[2;0]	[2;2]
3,1,2,1	0,2,3,2	0,1,1,1	8	[2;0]	[2;2]
0,3,0,2	0,0,0,0	3,2,3,1	6	[1;0]	[1;2]
0,1,1,1	0,2,0,1	0,1,1,1	8	[2;0]	[2;2]

Таблица 2

Частные соотношения

K	I	J	n	$D(\langle I, J \rangle, (K, K))$	$D_1(I, J)$
0,3,3,3	0,3,0,2	3,3,3,3	7	[1;0]	[1;2]
0,3,1,3	0,2,0,1	3,3,3,3	7	[1;0]	[1;2]
3,1,2,1	0,2,3,2	1,1,1,1	7	[1;0]	[1;2]
0,1,1,1	0,2,0,1	1,1,1,1	7	[1;0]	[1;2]
0,0,0,0	0,0,0,0	0,0,3,1	6	[2;0]	[2;2]
0,3,1,3	0,2,0,1	0,3,3,3	6	[2;0]	[2;2]
3,1,2,1	0,2,3,2	0,1,1,1	6	[2;0]	[2;2]
0,0,0,0	0,0,0,0	0,3,0,1	5	[2;0]	[2;3]
0,3,1,3	0,3,0,1	3,3,3,3	5	[0;1]	[2;2]
0,2,0,1	0,0,0,0	0,1,2,1	5	[0;1]	[2;2]
0,3,3,3	0,3,0,1	3,3,3,3	5	[0;1]	[2;2]
3,1,2,1	3,2,1,2	1,1,1,1	5	[0;1]	[2;2]
3,2,3,1	3,3,3,3	2,3,2,1	5	[0;1]	[2;2]
0,0,3,1	0,3,0,3	0,3,0,1	5	[0;1]	[4;1]
0,1,1,1	0,3,0,1	1,1,1,1	5	[0;1]	[2;2]

Таким образом, величина $D_0(I, J)$ оценивает сложность левой части фрагмента рис. 4, а $D_1(I, J)$ – правой.

Теперь легко устанавливаются соотношения (см. рис. 4):

$$\Phi_n \leq \min_{I, J} \{ \Phi_{n-1}(I) + \Phi_{n-1}(J) + D_0(I, J) + D_1(I, J) \},$$

$$\Phi_n(K) \leq \min_{I, J} \{ \Phi_{n-1}(I) + \Phi_{n-1}(J) + D(\langle I, J \rangle, (K, K)) + D_1(I, J) \}.$$

Оставшаяся часть доказательства – техническая: решение найдено с помощью перебора на ЭВМ. При $n \geq 6$ используем соотношение

$$\Phi_n \leq \Phi_{n-1}(0, 0, 0, 0) + \Phi_{n-1}(0, 3, 1, 3) + [4; 3]. \quad (5)$$

Действительно, $D_0(I, J) \leq [3; 1]$, $D_1(I, J) \leq [1; 2]$ при $I = (0, 0, 0, 0)$, $J = (0, 3, 1, 3)$.

Также нам понадобится серия соотношений вида

$$\Phi_n(K) \leq \Phi_{n-1}(I) + \Phi_{n-1}(J) + D(\langle I, J \rangle, (K, K)) + D_1(I, J), \quad (6)$$

применяемых при $n \geq n_0$ и перечисленных в табл. 1.

Напомним, что согласно правилу (4) $\Phi_n(0, 2, 3, 2) = \Phi_n(3, 1, 2, 1)$, $\Phi_n(3, 2, 3, 1) = \Phi_n(0, 3, 0, 2)$, $\Phi_n(3, 2, 2, 2) = \Phi_n(0, 3, 3, 3)$.

При малых n применяем соотношения (6), собранные в табл. 2.

Базовые значения сложности

K	$\Phi_4(K)$
0,0,0,0	[0;6;2]
0,3,0,1; 3,2,1,2; 2,3,2,1; 0,1,2,1	[0;2]
0,3,0,3	[0;4]

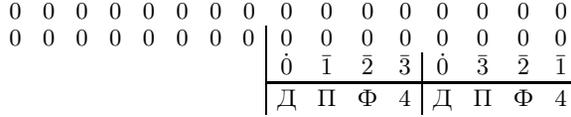


Рис. 5. Схема, порождающая четверку (0, 0, 0, 0)

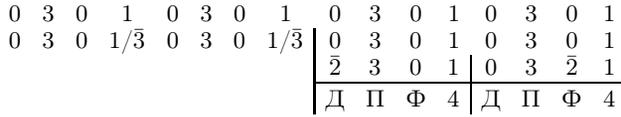


Рис. 6. Схема, порождающая четверку (0, 3, 0, 1) или (0, 3, 0, 3)

В основании индукции лежат оценки сложности схем ДПФ порядка 16, приведенные в табл. 3.

Схемы, доставляющие оценки табл. 3, приведены на рис. 5, 6. Четверки, перечисленные в одной строке, реализуются эквивалентными схемами (отличающимися нормировкой весового вектора и циклическими сдвигами четверок весового вектора). В схеме рис. 5 используется прием экономии сложности из п. 2.5.

Теперь с помощью табл. 1-3 можно проверить, что

$$\Phi_7(0, 0, 0, 0) \leq [24; 47; 6], \quad \Phi_7(I) \leq [22; 47; 6],$$

для любой отличной от (0, 0, 0, 0) четверки I из табл. 1. Тогда рекуррентные соотношения (6) табл. 1 приводят к оценкам

$$\Phi_k(0, 0, 0, 0) \leq [26; 49; 6] \cdot 2^{k-7} - [2; 2], \quad \Phi_k(I) \leq [26; 49; 6] \cdot 2^{k-7} - [4; 2],$$

откуда с учетом (5) вытекает оценка леммы. \blacktriangle

Сложность всей схемы ДПФ порядка N складывается из сложностей подсхем и $O(N)$ умножений, выполняемых на входе для приведения весового вектора к удобному виду. С учетом умножений, выполняемых на выходах базовой подсхемы порядка $2^k / \dots / 16$, сложность такой подсхемы оценивается как $[154; 49; 6] \cdot 2^{k-7} - [2; 1]$.

Для упрощения расчета будем оперировать относительным показателем: средним числом умножений, приходящихся на один узел схемы. Напомним, что стандартную схему БПФ можно представить состоящей из $N \log N$ узлов, в каждом узле выполняется ДПФ порядка 2 (см. левую часть рис. 1). Тогда число узлов в базовой схеме порядка $2^k / \dots / 16$ равно

$$2^k(4 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{4-k}) = 5 \cdot 2^k - 16,$$

а среднее число умножений на узел равно $\alpha + O(2^{-k}[1; 1; 1])$, где $\alpha = \left[\frac{77}{320}; \frac{49}{640}; \frac{3}{320} \right]$.

Пусть $k_0 \approx \log \log N$. Базовые подсхемы, присоединяемые не ближе k_0 уровней к выходам, имеют порядок не меньше $2^{k_0} / \dots / 16$. Как следствие, среднее число умножений на узел в верхних $\log N - k_0$ уровнях схемы не превосходит $\alpha + O(2^{-k_0}[1; 1; 1])$. Среднее число умножений в нижних k_0 слоях оценим просто как $O([1; 1; 1])$. Тогда

для общего числа скалярных умножений в схеме имеем оценку

$$\alpha N \log N + N \log \log N \cdot O([1; 1; 1]),$$

поэтому вещественная мультипликативная сложность метода асимптотически не превосходит $c_M N \log N$, где $c_M = \frac{143}{160} = 0,89375$, а суммарная вещественная сложность – $c_T N \log N$, где $c_T = 2 + 2\left(c_M - \frac{3}{320}\right) = 3\frac{123}{160} = 3,76875$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989.
2. *Власенко В.А., Лаппа Ю.М., Ярославский Л.П.* Методы синтеза быстрых алгоритмов свертки и спектрального анализа сигналов. М.: Наука, 1990.
3. *Гашков С.Б., Сергеев И.С.* Алгоритмы быстрого преобразования Фурье // Дискретная математика и ее приложения. Вып. V. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2009. С. 3–23.
4. *Winograd S.* On the Multiplicative Complexity of the Discrete Fourier Transform // Adv. in Math. 1979. V. 32. № 2. P. 83–117.
5. *Heideman M.T.* Applications of Multiplicative Complexity Theory to Convolution and the Discrete Fourier Transform: Ph.D. Thesis. Rice Univ., Houston, Texas, 1986.
6. *Johnson S.F., Frigo M.* A Modified Split-Radix FFT with Fewer Arithmetic Operations // IEEE Trans. Signal Process. 2007. V. 55. № 1. P. 111–119.
7. *Lundy T.J., van Buskirk J.* A New Matrix Approach to Real FFTs and Convolutions of Length 2^k // Computing. 2007. V. 80. № 1. P. 23–45.
8. *Haynal S., Haynal H.* Generating and Searching Families of FFT Algorithms // J. Satisf. Boolean Model. Comput. 2011. V. 7. № 4. P. 145–187.
9. *Zheng W., Li K., Li K.* Scaled Radix-2/8 Algorithm for Efficient Computation of Length- $N = 2^m$ DFTs // IEEE Trans. Signal Process. 2014. V. 62. № 10. P. 2492–2503.
10. *Cooley J.W., Tukey J.W.* An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series // Math. Comp. 1965. V. 19. № 90. P. 297–301.

Сергеев Игорь Сергеевич
ФГУП “НИИ “Квант”
isserg@gmail.com

Поступила в редакцию
29.08.2016
После переработки
21.11.2016