МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Тепляков Сергей Михайлович

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ В ЗАДАЧЕ ЭРДЕША–ХАЙНАЛА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯХ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2017

Работа выполнена на кафедре математической статистики и случайных процессов Московского государственного университета

Научные руководители:

Райгородский Андрей Михайлович,
доктор физико-математических наук, директор Физтех-школы прикладной математики и информатики, Московский физико-технический институт

Вороненко Андрей Анатольевич,
доктор физико-математических наук, доцент, профессор Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра математической кибернетики

Официальные оппоненты:

Абросимов Михаил Борисович,
доктор физико-математических наук, доцент, профессор Саратовского национального исследовательского государственного университета им. Н.Г. Черншевского, кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Колпаков Роман Максимович,
доктор физико-математических наук, профессор Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра дискретной математики

Егоров Владимир Николаевич,
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра информационной безопасности

Защита состоится 16 февраля 2018 года в 11 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.16 ФГБОУ ВО "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова"по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, ФГБОУ ВО "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: msu.01.16@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеки ФГБОУ ВО "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова"по адресу: Ломоносовский проспект, д.27 и на сайте ИАС "Истина": https://istina.msu.ru/dissertations/85334672

Автореферат разослан

Ученый секретарь диссертационного совета МГУ.01.16 ФГБОУ ВО МГУ, доктор физико-математических наук, профессор Гасанов Э.Э.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Теория гиперграфов в целом и задача Эрдеша–Хайнала в частности возникли из смежной области математики — теории графов, которая, в свою очередь, является важным и крупным разделом дискретной математики. Напомним, что гиперграф — это пара (V, E), где V — множество вершин, а E — произвольная совокупность подмножеств множества V. Таким образом, гиперграф отличается от обычного графа тем, что каждое ребро может содержать произвольное количество вершин. По этой теме есть множество работ[1,2,3,4], где описаны основные определения, некоторые свойства и общий обзор задач, связанных с гиперграфами. В данной работе рассматривается важное подмножество класса всех гиперграфов — семейство n-однородных гиперграфов, то есть таких гиперграфов, у которых мощности всех ребер одинаковы и равны n. Прежде всего речь пойдет о способах раскраски вершин n-однородных гиперграфов, при которых ребра гиперграфа обладают теми или иными свойствами. Так, одно из рассматриваемых свойств — это обобщение классического свойства двудольности графа: мы требуем от гиперграфа, чтобы существовало такое разделение множества вершин на два подмножества, при котором в каждом его ребре есть по крайней мере один элемент из каждого подмножества. Довольно естественно предположить, что, чем больше ребер в гиперграфе, тем вероятнее, что найти такие два подмножества не получится. Таким образом, возник вопрос об отыскании величины $m(n)$, равной минимальному количеству ребер, необходимому для того, чтобы существовал гиперграф, не обладающий подобным свойством. Для некоторых небольших значений n удалось посчитать точное значение величины $m(n)$, а для всех прочих значений были найдены различные верхние и нижние оценки[5,6,7].Также отдельные результаты по верхним и нижним оценкам приведены в работах[8,9,10] Ловаса и Бурштейна.

Нижние оценки величины $m(n)$ получаются с использованием так называемого вероятностного метода в комбинаторике. Идея этого метода при нахождении подобных оценок состоит в том, чтобы для произвольного гиперграфа, имеющего не более чем N ребер, где N – оценка снизу, которую мы пытаемся доказать, разделить все множество вершин на два подмножества случайным образом. Такое разделение подразумевает то или иное распределение всех способов раскраски и обычно называется случайной раскраской гиперграфа в два цвета. После чего задача сводится к тому, чтобы оценить вероятность того, что хотя бы одно ребро не является одноцветным. Действительно, если вероятность этого события

[1] А. А. Зыков, "Гиперграфы", *УМН*, **29**:6 (1974), 89–154.

[2] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.

[3] B. Bollobás, *Combinatorics: Set Systems, Hypergraphs, Families of Vectors and Combinatorial Probability*, Cambridge Univ. Press, 1986.

[4] J. L. Gross, J. Yellen, *Handbook of Graph Theory*, CRC Press, 2004.

[5] A. V. Kostochka, "Color-Critical Graphs and Hypergraphs with Few Edges: A Survey", *More Sets, Graphs and Numbers*, Bolyai Society Mathematical Studies, **15**, eds. E. Győri, G. O. H. Katona, L. Lovász, Springer, 2006, 175–198.

[6] А. М. Райгородский, Д. А. Шабанов, "Задача Эрдеша – Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы", *Успехи Математических Наук*, **66**:5 (2011), 109-182 .

[7] P. Erdős, "Some old and new problems in various branches of combinatorics", *Proceedings of the Tenth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing. Congressus Numerantium XXIII*, Winnipeg: Utilitas Mathematica, 1979, 19–37.

[8] L. Lovász, "A generalization of König's theorem", *Acta Mathematica of the Academy of Sciences, Hungary*, **21** (1970), 443–446.

[9] L. Lovász, "Coverings and colorings of hypergraphs", *Congressus Numer.*, **8** (1973), 3–12.

[10] М. И. Бурштейн, "Критические гиперграфы с минимальным числом ребер", *Доклады АН Грузинской ССР*, **83** (1976), 285–288.

строго меньше единицы, то существует такая раскраска, в которой одноцветного ребра нет. Именно таким способом получаются наилучшие на текущий момент нижние оценки в задаче о величине $m(n)$ и в ее обобщениях. Впервые вероятностный метод был применен в подобного рода задачах П. Эрдешем в 50-ые года XX века. Вероятностный метод использовался в множестве работ [11,12,13,14,15], связанных с отысканием оценок величины $m(n)$. Данный метод получил широкое распространение и среди задач, не связанных с $m(n)$. А именно, он используется в работах в области случайных графов[16,17,18], а также, например, в работе [19] в области k-значных функций.

Для получения верхних оценок величины $m(n)$, по сути, достаточно предъявить гиперграф, определив множество вершин и множество ребер, а затем показать, что для произвольной раскраски в два цвета всегда найдется одноцветное ребро. Поэтому в данном случае задача сводится к поиску оптимальной конструкции, что также оказывается весьма нетривиальным. На эту тему есть ряд работ[20,21], где приведены различные полученные верхние оценки величины $m(n)$.

Диссертационная работа состоит из четырех глав. В первой главе мы рассказываем краткую историю и основные известные на текущий момент результаты, полученные для задачи Эрдеша–Хайнала. Во второй главе говорим о рекуррентных соотношениях для величины $m_k(n)$, равной минимальному числу ребер n-однородного гиперграфа, не допускающего такую раскраску множества вершин в два цвета, при которой любое ребро гипеграфа содержит менее k вершин одного цвета. При помощи таких оценок мы получаем новые численные результаты для малых значений k и n. В третьей главе речь идет об улучшении верхней оценки величины $m_k(n)$. Нам удалось расширить область значений параметра k, для которых верна оценка, доказанная ранее. В четвертой главе мы сформулировали и доказали верхние оценки, а также рассмотрим и другие свойства величины $m_k(n)$ для значений параметра k, близких к $n/2$. Эта задача близка с известной[22] задачей об уклонении.

Цель работы и основные задачи. Цель диссертационной работы состоит в получении новых результатов в экстремальной теории гиперграфов. Основной задачей работы является получение верхних оценок для числа ребер однородных гиперграфов, не допускающих раскрасок определенного типа.

[11] P. Erdős, "On a combinatorial problem, I", *Nordisk Mat. Tidskrift*, **11** (1963), 5–10.

[12] W. M. Schmidt, "Ein kombinatorisches Problem von P. Erdös and A. Hajnal", *Acta Mathematica of the Academy of Sciences, Hungary*, **15** (1964), 373–374.

[13] P. Erdős, L. Lovász, "Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions", *Infinite and Finite Sets*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, **10**, Amsterdam: North Holland, 1973, 609–627.

[14] J. Beck, "On a combinatorial problem of P. Erdős and L. Lovász", *Discrete Mathematics*, **17**:2 (1977), 127–131.

[15] J. Radhakrishnan, A. Srinivasan, "Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring", *Random Structures and Algorithms*, **16**:1 (2000), 4–32.

[16] П. Эрдеш, Дж. Спенсер, *Вероятностные методы в комбинаторике*, М.: Мир, 1976.

[17] B. Bollobas, *Random Graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[18] В.Ф. Колчин, *Случайные графы*, М.: Физматлит, 2000.

[19] А. Вороненко, Н. К. Воронова, В.П. Ильютко "О существовании универсальных функций для класса линейных k-значных функций при небольших k", *Прикладная математика и информатика*, **51** (2013), 100-108.

[20] A. V. Kostochka, "Color-Critical Graphs and Hypergraphs with Few Edges: A Survey", *More Sets, Graphs and Numbers*, Bolyai Society Mathematical Studies, **15**, eds. E. Győri, G. O. H. Katona, L. Lovász, Springer, 2006, 175–198.

[21] А. М. Райгородский, Д. А. Шабанов, "Задача Эрдеша – Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы", *Успехи Математических Наук*, **66**:5 (2011), 109-182 .

[22] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007, с.287-295

Методология и методы исследования. В работе используются методы экстремальной, в том числе вероятностной, комбинаторики и результаты из теории чисел.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть полезны при изучении различных задач, связанных с экстремальными свойствами гиперграфов и раскрасками однородных гиперграфов.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Получены новые рекуррентные верхние оценки величины $m_k(n)$, равной наименьшему числу ребер n-однородного гиперграфа, не обладающего свойством B_k (т.е. не допускающего раскраски в два цвета, при которой в любом ребре гиперграфа вершин каждого цвета по крайней мере k). А именно, для любых натуральных k, l и $a \geq 2k$, $b \geq 2l$ выполнено:
$$m_{al+bk-kl+k+l-a-b}(ab) \leq m_k(a)(m_l(b))^a. \quad \text{(Теорема 1)}$$
Далее, справедливо, что
$$m_k(n) \leq m_k(n-2) \cdot (n-k+1) + 2^{n-k+1}. \quad \text{(Следствие 1)}$$
Наконец,
$$m_k(n) \leq m_k(n-1) \cdot (n-k+1) + 1. \quad \text{(Следствие 2)}$$

2. Получена верхняя оценка величины $m_k(n)$ для всех $k = o(n)$. А именно, при условии $k = o(n)$ справедлива оценка
$$m_k(n) \leq \frac{e \ln 2}{4} n^2 \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{k-1} C_n^i}(1 + o(1))$$
при $n \to \infty$ (теорема 3).

3. Получены новые верхние оценки для величины $\omega(f, q, M)$, равной отношению количества тех значений параметра k, меньших M, к M, при которых $m_k(2k+q)$ не превосходит функцию натурального аргумента $f(k)$, удовлетворяющую ряду ограничений. (теоремы 4 и 5)

4. Получены новые верхние оценки для величины $m_k(n, r)$, равной минимальному количеству ребер n-однородного гиперграфа, не обладающего свойством $B_k(r)$ (т.е. не допускающего раскраски в r цветов, при которой в любом ребре гиперграфа вершин каждого цвета по крайней мере k). А именно, для целого числа $q \geq 0$ и натурального $r \geq 2$ справедливо
$$m_k(r, rk+q) < C \cdot (\ln k)^{q+1}.$$
(теорема 6). Также получены оценки для величины $\omega(f, q, M, r)$, равной отношению количества тех значений параметра k, меньших M, к M, при которых $m_k(r, rk+q)$ не превосходит функцию натурального аргумента $f(k)$, удовлетворяющую ряду ограничений. (теорема 7).

Степень достоверности и аппробация результатов. Материалы диссертации опубликованы в 3 работах ([1-3]). Работа [1] опубликована в издании, входящем в Web of Science, а работы [2] и [3] опубликованы в издании, состоящем в RSCI. Список этих работ приведен в конце автореферата. Также результаты работы докладывались на научных семинарах под руководством профессора А.М. Райгородского в МГУ им. М.В. Ломоносова (кафедра математической статистики и случайных процессов, механико-математический факультет), научном семинаре кафедры математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносва. Достоверность полученных результатов также подтверждается применением современных методов экстремальной комбинаторики и теории гиперграфов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка условных обозначений и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 62 страницы. Список литературы содержит 42 наименования.

Основное содержание работы

Во **введении** к диссертации дается общий обзор наиболее актуальных направлений дискретной математики и теории вероятности, связанных с задачами, которые рассматриваются в работе.

В **первой главе** диссертации более подробно рассматривается история возникновения задачи Эрдеша–Хайнала и приводятся основные результаты, известные на текущий момент. Также в этой главе вводятся и основные определения. Так, объясняется, что гиперграф – это пара множеств $H = (V, E)$, где V– конечное множество, называемое множеством вершин, а E – произвольная совокупность различных подмножеств V, называемых ребрами гиперграфа. Если мощность каждого элемента из множества E равна n, то такой гиперграф называется n-однородным. Именно такой класс гиперграфов рассматривается в настоящей работе. Далее, для гиперграфов определяется свойство B. Утверждается, что гиперграф обладает свойством B, если найдется раскраска множества его вершин в два цвета, при которой все его ребра неодноцветны. После чего вводится величина $m(n)$, равная минимальному числу ребер n-однородного гиперграфа H, который не обладает свойством B. Приводятся наилучшие оценки данной величины, известные на текущий момент:

$$0.1\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/2} 2^n \le m(n) \le e(\ln 2)n^2 2^{n-2}(1 + o(1)).$$

Поскольку в диссертации речь идет не о классической величине $m(n)$, а об ее обобщениях, то далее, по аналогии, приводятся понятия свойства B_k и величины $m_k(n)$. Гиперграф обладает свойством B_k, если найдется раскраска множества его вершин в два цвета, при которой во всех ребрах вершин каждого из цветов будет не меньше k. А величина $m_k(n)$ равна минимальному числу ребер n-однородного гиперграфа, не обладающего свойством B_k. Для данной величины также известны асимптотические верхние и нижние оценки. Вот некоторые из них:

Нижние оценки:

1) Если $k = k(n)$ таково, что $k \le \gamma \ln n$, где

$$0 < \gamma < (2 + 4 \ln 2)^{-1},$$

то асимптотически наибольшая оценка, полученная в работе[23] Шабанова:

$$m_k(n) \ge c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2^{1-k}e^{-\frac{k}{2}}}{\sqrt{2k-1}} \frac{2^{n-1}}{C_n^{k-1}}.$$

2) Если же $k \ge (2+4\ln 2)^{-1} \ln n$ и $2k^2(n-k) < (n-2k)^2$, то асимптотически наибольшей является оценка, полученная в работе[24] Розовской:

$$m_k(n) \ge 0.19n^{1/4} \frac{2^{n-1}}{C_n^{k-1}}.$$

3) Наконец, если $2k^2(n-k) \ge (n-2k)^2$, то наибольшей является оценка[25], получаемая вероятностным методом:

$$m_k(n) \ge \frac{2^{n-1}}{\sum_{i=0}^{k-1} C_n^i}.$$

---

[23] Д. А. Шабанов, “Рандомизированные алгоритмы раскрасок гиперграфов”, *Математический сборник*, **199**:7 (2008), 139–160.

[24] А. П. Розовская, “О двухцветных раскрасках общего вида для равномерных гиперграфов”, *Доклады Академии Наук*, **429**:3 (2009), 309–311.

[25] А. М. Райгородский, Д. А. Шабанов, “Задача Эрдеша – Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы”, *Успехи Математических Наук*, **66**:5 (2011), 109-182 .

Верхние оценки:

1) Если k удовлетворяет соотношению $k = \bar{o}(\frac{n}{\ln n})$ при $n \to \infty$, то асимптотически наименьшей является оценка, полученная в работе [26] Шабанова:

$$m_k(n) \leq \frac{e \ln 2}{4} n^2 \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{k-1} C_n^i}(1 + \bar{o}(1)).$$

2) Если $k = C \cdot n$, $n \to \infty$ наименьшей является оценка

$$m_k(n) \leq m(n-k+1) < \frac{e \ln 2}{4} \cdot (n-k+1)^2 \cdot 2^{n-k+1}(1 + \bar{o}(1)).$$

Диссертационная работа как раз посвящена изучению верхних оценок величины $m_k(n)$, их дополнению и улучшению.

В **главе 2** диссертации рассматривается задача об отыскании $m_k(n)$ при малых значениях параметров n и k. Эта задача мотивирована тем, что доказанные асимптотические оценки не дают никакого представления об этой величине в области малых n и k. Для получения новых оценок мы доказали новые рекуррентные соотношения, основанные на склейке нескольких гиперграфов. Основная идея состоит в том, чтобы на основе нескольких гиперграфов построить новый гиперграф, больший по размеру, не обладающий свойством B_k. В итоге доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Для любых натуральных k, l и $a \geq 2k$, $b \geq 2l$ выполнено:*

$$m_{al+bk-kl+k+l-a-b}(ab) \leq m_k(a)(m_l(b))^a.$$

Для того чтобы сформулировать следующую теорему определим гиперграфы H_l^1 и H_l^2. Пусть n, l — натуральные числа, причем $n \geq 2$, а $l \leq \frac{n}{2}$.

Рассмотрим множество вершин $V_l^1 = \{x_1, \ldots, x_{2l-1}, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n\}$ и множество ребер E_l^1, состоящее из таких ребер A, что $A = \{x_1, \ldots, x_{2l-1}, a_i, b_i\}$, где $i \in \{1, \ldots, n-l+1\}$, или $A = \{c_1, \ldots, c_{n-l+1}, a_{n-l+2}, \ldots, a_n\}$, где $c_i = a_i$ или $c_i = b_i$. Таким образом, мы получили гиперграф $H_l^1 = (V_l^1, E_l^1)$.

Рассмотрим множество вершин $V_l^2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_{2l-1}\}$. Пусть $A \in E_l^2$, если и только если $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2l-1}, y_i\}$, где $i = 1, 2, \ldots, n-l+1$, или $A = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Таким образом, мы получили гиперграф $H_l^2 = (V_l^2, E_l^2)$. Теперь сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. *Зафиксируем натуральные числа n, k, l с условиями $n \geq 2$, $k \geq l$ и $l \leq \frac{n}{2}$. Пусть H_1 и H_2 — два непересекающихся гиперграфа, причем H_1 — произвольный гиперграф, не обладающий свойством B_k, а H_2 — это либо гиперграф H_l^1, либо H_l^2 с соответствующими параметрами n, l. Рассмотрим гиперграф H, полученный следующим образом:*

$$V(H) = V(H_1) \cup (V(H_2) \setminus \{x_1, \ldots, x_{2l-1}\}),$$

$$E(H) = (E(H_2 \setminus \{x_1, \ldots, x_{2l-1}\}))\cup$$

[26] Д. А. Шабанов, “Об одной комбинаторной задаче Эрдеша”, *Доклады Академии Наук*, **396**:2 (2004), 166–169.

$$\cup\{A \mid A = A_i \cup B_j\ ,\ A_i \in E(H_1)\ ,\ B_j \cup \{x_1, \dots, x_{2l-1}\} \in E(H_2)\}.$$

Тогда гиперграф H не обладает свойством B_k.

Следствие 1. *Имеет место оценка:*

$$m_k(n) \leq m_k(n-2) \cdot (n-k+1) + 2^{n-k+1}.$$

Следствие 2. *Имеет место оценка*

$$m_k(n) \leq m_k(n-1) \cdot (n-k+1) + 1.$$

Далее в главе приводятся два уже доказанных в прошлом утверждения, связанных с методом систем общих представителей. Этот метод используется при доказательстве асимптотических оценок, однако его можно использовать и в целях получения оценок при небольших значениях k и n. Вкратце опишем суть этого метода. Пусть

$$\Re_n = \{1, \dots, n\}$$

множество, состоящее из n элементов. Пусть, далее,

$$\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_s\}$$

совокупность любых подмножеств $\Re_n$. Положим $k = \min\limits_{i=1,\dots,s} |M_i|$. Рассмотрим произвольное множество $S \subseteq \Re_n$, обладающее тем свойством, что $S \cap M_j \neq \varnothing$ для каждого $j \in \{1, \dots, s\}$. Такое множество S называется *системой общих представителей (с.о.п.)* для совокупности $\mathcal{M}$. Положим

$$\zeta(n, s, k) = \max_{\mathcal{M}} \min\{|S| : S \text{ является с.о.п. для } \mathcal{M}\}.$$

В данных обозначениях сформулируем утверждение, которое и позволит нам получать верхние оценки для $m_k(n)$.

Утверждение 3. *Пусть $v \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ с условиями $n < \frac{v}{2}$, $k \leq \frac{n}{2}$. Тогда при*

$$a = C_v^n\ ,\ b = \min_x \sum_{j=0}^{k-1} \left(C_x^{n-j} \cdot C_{v-x}^j + C_x^j \cdot C_{v-x}^{n-j}\right)\ ,\ c = 2^v$$

имеем

$$m_k(n) \leq \min_v \zeta(a, c, b).$$

Доказательство этого утверждения приведено в работе[27] Д.А. Шабанова и в данной работе не приводится. Оценки при помощи систем общих представителей получаются из утверждения 3 и следующего утверждения, в котором дается явная оценка величины $\zeta(n, s, k)$.

Утверждение 4 *Для любых n, s, k имеет место неравенство*

$$\zeta(n, s, k) \leq \max\left\{\frac{n}{k}, \frac{n}{k} \ln \frac{sk}{n}\right\} + \frac{n}{k} + 1.$$

[27] Д. А. Шабанов, “Рандомизированные алгоритмы раскрасок гиперграфов”, *Математический сборник*, **199**:7 (2008), 139–160.

Доказательство утверждения 4 приведено в книге[28] А.М. Райгородского и в данной работе не приводится. Оценка из утверждения 4 при конкретных (малых) значениях параметров n, s, k допускает небольшое уточнение. Опишем алгоритм построения системы общих представителей, дающий и саму оценку, и ее уточнение.

Зафиксируем совокупность

$$\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_s\}.$$

Возьмем такой элемент $\nu_1 \in \mathfrak{R}_n$, что количество множеств из $\mathcal{M}$, которые его содержат, максимально. Это будет первый элемент с.о.п. Нетрудно видеть, что он служит представителем для не менее $\left\lceil \frac{sk}{n} \right\rceil$ множеств из $\mathcal{M}$. Значит, непредставленными остались

$$s_1 \leq s - \left\lceil \frac{sk}{n} \right\rceil$$

множеств, причем все они находятся в

$$\mathfrak{R}_n \setminus \{\nu_1\} = \mathfrak{R}_{n-1}.$$

Продолжая процедуру, берем элемент $\nu_2 \in \mathfrak{R}_{n-1}$, который принадлежит не менее $\left\lceil \frac{s_1 k}{n-1} \right\rceil$ множествам $\mathcal{M}$. И так далее, покуда не исчерпаем всю совокупность $\mathcal{M}$.

В дальнейшем, строя наилучшим образом оценки для $m_k(n)$ с помощью систем общих представителей, мы перебираем все возможные значения величины v из утверждения 3, для каждого из таких значений берем параметры a, b, c и оцениваем $\zeta(a, c, b)$ с помощью описанного "жадного" алгоритма. Эти расчеты осуществляются на компьютере.

Наконец, сопоставляются результаты, полученные при помощи разных оценок, тем самым получаются числовые оценки величины $m_k(n)$ при малых значениях k и n.

В **главе 3** приводится доказательство асимтотической верхней оценки для величины $m_k(n)$. Основное достижение состоит в том, что, в отличие от прошлого результата, область применения оценки расширена с $k = o(\frac{n}{\ln n})$ до $k = o(n)$. Доказывается

Теорема 3. *Пусть $k = k(n)$ удовлетворяет условию $k = o(n)$ при $n \to \infty$. Тогда выполнено неравенство:*

$$m_k(n) \leq \frac{e \ln 2}{4} n^2 \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{k-1} C_n^i} (1 + o(1))$$

В **главе 4** изучено поведение величины $m_k(n)$ вблизи $k = n/2$. В частности, приведено доказательство верхней оценки $m_k(2k + c)$, которое было ранее доказано только для частного случая $c = 1$ в работе[29] Д. Черкашина и А. Куликова.

Теорема 4. *Для произвольного целого числа $q \geq 0$ существует такая константа $C > 0$, что*

$$m_k(2k + q) \leq C (\ln k)^{q+1}.$$

Кроме того, существуют такие возрастающие последовательности $k_1, \ldots, k_s, \ldots$, где $k_i < k_j$ для $i < j$, при которых величину $m_{k_s}(2k_s + q)$ можно оценить функцией, возрастающей медленнее, чем $\ln^{q+1}(k)$ при $s \to \infty$. Более того, существуют такие последовательности $k_1, \ldots, k_s, \ldots$, при которых эта функция оценивается сверху константой. В

[28] А. М. Райгородский, "Системы общих представителей в комбинаторике и их приложениях", *Москва, МЦНМО, 2009.*

[29] Черкашин Д., Куликов А., "О двухцветных раскрасках гиперграфов", *Доклады РАН*, **436**:3 (2011), 316–319.

работе производится оценка мощности множества тех k, для которых для данной функции f натурального аргумента k выполнена оценка $m_k(2k+q) \le f(k)$. Для этого вводится специальное обозначение

$$\omega(f, q, M) = \frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \le M, m_k(2k+q) < f(k)\}|}{M}.$$

Доказывается

Теорема 5. *Пусть целое число $q \ge 0$ и произвольное число $C > 0$ таковы, что*

$$\Big(C(q+1)! - q - 1\Big)^{\frac{1}{q+1}} \ge 56.$$

Пусть

$$D = (C(q+1)! - q - 1)^{\frac{1}{q+1}}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\lim_{M\to\infty} \omega(C, q, M) \ge 1 - \left(\frac{D}{e(2q+1)(\ln D + 2)}\right)^{-\frac{D}{\ln D+2}}.$$

Кроме того, для любой монотонно возрастающей неограниченной функции f верно, что

$$\lim_{M\to\infty} \omega(f, q, M) = 1.$$

Также в главе 4 рассматривается и еще одно обобщение классической величины $m(n)$. Скажем, что гиперграф $H = (V, E)$ обладает свойством $B_k(r)$, если существует раскраска его вершин в r цветов, такая, что в любом ребре $e \in E$ число вершин каждого из цветов, по крайней мере, k. Тогда определим $m_k(r, n)$ как минимальное число ребер n-однородного гиперграфа, не обладающего свойством $B_k(r)$. Из определения следует, что в случае $r = 2$ мы получаем величину $m_k(n)$. Для этого обобщения также возникает задача поиска верхней оценки для значений k, близких к n/r. Нам удалось доказать, что для произвольного целого $q \ge 0$ справедлива теорема

Теорема 6. *Для любых фиксированных r и q существует такая константа $C > 0$, что*

$$m_k(r, rk+q) < C \cdot (\ln k)^{q+1}.$$

Аналогично случаю $r = 2$ для заданной функции f натурального аргумента и произвольного $r \in \mathbb{N}$, такого, что $r \ge 2$, введем обозначение:

$$\omega(f, q, M, r) = \frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \le M, m_k(r, rk+q) < f(k)\}|}{M}.$$

Оказалось, что для величины $\omega(f, q, M, r)$ также можно доказать оценку сверху. Справедлива

Теорема 7. *Пусть число $r \ge 3$, число $q \ge 0$ и произвольное число $C > 0$ таковы, что*

$$\Big(C(q+1)! - q - 1\Big)^{\frac{1}{q+1}} \ge 56.$$

Пусть
$$D = (C(q+1)! - q - 1)^{\frac{1}{q+1}}.$$
Тогда справедливо неравенство
$$\lim_{M\to\infty} \omega(C, q, M, r) \geq 1 - r\left(\frac{D}{e(2q+1)(\ln D + 2)}\right)^{-\frac{D}{\ln D+2}}.$$
Кроме того, для любой монотонно возрастающей неограниченной функции f справедливо, что
$$\lim_{M\to\infty} \omega(f, q, M, r) = 1.$$

В **заключении** сформулированы основные новые полученные результаты в обобщениях задачи Эрдеша–Хайнала. Кроме того, приведены возможные направления для дальнейшей исследовательской деятельности по этой задаче. Так, поиск верхней оценки для величины $m_k(n)$ при k между $k = n/2$ и $k = o(n)$, является важной и интересной задачей. Кроме того, совсем не изученной остается величина $m_k(n, r)$, введенная в работе. Для нее можно научиться находить верхние и нижние асимптотические оценки, что может быть полезно для улучшения оценок величины $m_k(n)$ или даже классической величины $m(n)$. Также в области малых значений k и n по-прежнему остаются открытые вопросы. До сих пор не известно значение величины $m(5)$, а $m(4)$ найдено только при помощи компьютерного перебора. Наконец, разрыв между нижней и верхней границей как для величины $m(n)$, так и для $m_k(n)$ остается очень большим, а, значит, улучшение по крайней мере одной из них — это важная и интересная задача.

Соискатель считает своим приятным долгом поблагодарить д.ф.-м.н., проф. А.М. Райгородского и д.ф.-м.н., проф. А.А. Вороненко за постоянный интерес и внимание к его работе.

Работы автора по теме диссертации

1. С.М. Тепляков, “Верхняя оценка в задаче Эрдеша–Хайнала о раскраске гиперграфа”, *Математические заметки*, **93**:1 (2013), 148–151.

2. С.М. Тепляков, “Рекуррентные верхние оценки в задаче Эрдеша–Хайнала о раскраске гиперграфа и в ее обобщениях”, *Труды МФТИ*, **4**:1(13) (2012), 141–150.

3. С.М. Тепляков, “О многоцветных раскрасках гиперграфов”, *Труды МФТИ*, **9**:1(33) (2017), 22–38.

Тепляков Сергей Михайлович

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ В ЗАДАЧЕ ЭРДЕША–ХАЙНАЛА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯХ

АВТОРЕФЕРАТ