

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

А.В. Ахметзянов, А.Г. Кушнер, В.В. Лычагин

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
УПРАВЛЕНИЯ РАЗРАБОТКОЙ
НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ**

Москва
ИПУ РАН
2017

УДК 514.86:517.957

ББК 22.161.6

A95

Ахметзянов А.В. Математические модели управления разработкой нефтяных месторождений: монография / А.В. Ахметзянов, А.Г. Кушнер, В.В. Лычагин. – М.: ИПУ РАН, 2017. – 124 с. – ISBN 978-5-91450-206-2.

В монографии излагаются новые результаты по теории нелинейной двухфазной фильтрации и ее применению к оптимальному управлению разработкой нефтяных месторождений.

Научное издание предназначено для специалистов по теории управления, теории фильтрации и теории дифференциальных уравнений, а также для аспирантов и студентов, желающих углубить свои знания.

Рецензенты: *д.т.н. Б.В. Павлов,*
д.ф. - м.н., проф. РАН М.В. Хлебников

Утверждено к печати Редакционным советом Института

*Текст воспроизводится в виде, утвержденном
Редакционным советом Института*

ISBN 978-5-91450-206-2

 **ИНСТИТУТ
ПРОБЛЕМ
УПРАВЛЕНИЯ 2017**

Оглавление

| | |
|--|-----------|
| Предисловие | 5 |
| 1 Модели фильтрации | 9 |
| 1.1 Законы сохранения | 9 |
| 1.2 Изотермические модели | 14 |
| 1.3 Неизотермическая модель | 17 |
| 2 Одномерные модели | 19 |
| 2.1 Модель Бакли–Левретта | 20 |
| 2.2 Динамики уравнений Рапопорта–Лиса | 40 |
| 2.3 Симметрии уравнений Рапопорта–Лиса | 48 |
| 3 Двумерные модели | 59 |
| 3.1 Неизотермическая фильтрация | 59 |
| 3.2 Оптимальное управление | 72 |
| 3.3 Симметрии уравнений Бакли–Левретта | 79 |
| 3.4 Бегущие волны | 85 |
| 4 Геометрия дифференциальных уравнений | 99 |
| 4.1 Пространства джетов | 99 |
| 4.2 Распределение Картана | 102 |
| 4.3 Геометрия уравнений | 105 |
| 4.4 Разрывные решения | 109 |

| | | |
|-----|----------------------------------|------------|
| 4.5 | Симметрии | 112 |
| 4.6 | Уравнения Монжа–Ампера | 115 |
| | Литература | 117 |

Предисловие

При разработке нефтяных месторождений поддержание энергии нефтяного пласта обеспечивается закачкой вытесняющей жидкости (воды, горячей воды или водных растворов активных реагентов) в нагнетательные скважины, что обеспечивает уменьшение вязкости нефти и способствует повышению нефтеотдачи. Фильтрация вытесняемой нефти и вытесняющей жидкости определяется перепадом давления между забоями нагнетательной и добывающей скважин.

В этой книге рассматриваются математические модели двухфазной фильтрации в размерностях 1 и 2, однако предлагаемые методы могут быть использованы в размерности 3, а также при изучении процессов многофазной фильтрации и для задач оптимального управления тепловыми и физико-химическими воздействиями на нефтяной пласт. Основной математический аппарат книги — геометрия дифференциальных уравнений. Для его понимания достаточно знания основ современной дифференциальной геометрии.

В главе 1 рассматриваются классические модели фильтрации — Бакли–Леверетта, Рапопорта–Лиса, а также неизотермической фильтрации.

В главе 2 для исследования моделей одномерной фильтрации применяются методы геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений. С помощью преобразования Бэклунда

и преобразования Лежандра, уравнение Бакли–Леверетта приводится к линейному уравнению, которое интегрируется. Затем с помощью обратных замен переменных строятся многозначные решения уравнения Бакли–Леверетта и, наконец, с помощью закона сохранения строятся его разрывные решения.

Заметим, что уравнение Бакли–Леверетта проинтегрировано нами при произвольной функции Бакли–Леверетта. Максимум что нужно для построения решения задачи Коши — это решать функциональные уравнения.

Предложенные нами методы решения уравнения Леверетта отличается от известных тем, что либо вообще не используют сетки, либо используют адаптивные сетки в пространстве джетов.

Для уравнения, обобщающего уравнение Рапопорта–Лиса строятся конечномерные динамики, а также проводится классификация допускаемых симметрий.

В главе 3 предлагается асимптотический метод решения задачи расчета неизотермической фильтраций. За основу взята модель Бакли–Леверетта, дополненная законом сохранения тепловой энергии.

Определяется некоторое число, которое мы назвали характеристическим и которое зависит от физических и геометрических параметров пласта, а также от характерных интервалов времени его разработки.

Решения соответствующей системы дифференциальных уравнений ищутся в виде асимптотик по характеристическому числу. Начальные члены асимптотики удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, которая инвариантна относительно конформных преобразований.

В силу теоремы Римана, всякая односвязная область с гладкой границей конформно эквивалентна единичному диску. Для единичного диска приводятся явные интегральные выражения

для начальных членов асимптотик давления, насыщенности и температуры при произвольном размещении добывающих и нагнетательных скважин.

Отметим также, что конформное отображение области на единичный круг зависит только от топологии области, а не от расположения скважин на ней.

Кроме того, полученные решения, в отличие от численных методов методов, позволяют исследовать проблемы как оптимального управления процессами добычи нефти, так и оптимального размещения добывающих и нагнетательных скважин.

Это используется при нахождении оптимальных управлений в следующих задачах:

- получения максимальной добычи нефти при заданном ресурсе закачки воды,
- использования минимального ресурса закачки воды для добычи заданного объёма нефти,
- получения максимального количества нефти при заданных финансовых затратах на закачку и нагрев воды,
- минимизации финансовых затрат на закачку и нагрев воды при заданном уровне добычи нефти.

В данном подходе нахождение оптимальных уровней распределения давления и насыщенности зависит только от физических свойств пористой среды и геометрии области D , в то время как нахождение интенсивностей добычи нефти и закачки воды определяется взаимным расположением скважин, а также их удаленностями от границы области. Для нахождения интенсивностей мы используем принцип максимума энтропии.

Отметим, что в настоящее время при расчёте фильтрации используются в основном численные методы, представляющие собой различные модификации либо Impes-метода [1] или метода

опорных операторов [23] с неявными схемами по давлению и явными схемами по насыщенности вытесняющего реагента. О применении аналитических методов мало, что известно.

Четвертая глава содержит сведения из геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений, необходимые для понимания материала предыдущих глав.

При проведении расчетов, связанных с построением сингулярных решений, мы использовали пакеты `DifferentialGeometry` и `JetCalculus`, написанные Андерсоном (I. Anderson) для системы символьных вычислений `Maple`.

Разделы 2.3 и 3.3 написаны П.В. Бибиковым, часть 3 раздела 2.1 написана А.А. Гориновым, а раздел 3.4 — С.Н. Тычковым. Компьютерные программы для расчета и визуализации многозначных и разрывных решений, а также аттракторов, были составлены И.А. Борониным, А.А. Гориновым, А.М. Сальниковым, А.А. Шевляковым и Е.А. Ярошенко.

Все они принимали живое участие в обсуждении результатов, представленных в книге, и всем им мы выражаем свою искреннюю благодарность.

В книге представлены результаты исследований, поддержанных грантом Российского научного фонда (проект № 15-19-00275).

Авторы

Глава 1

Модели двухфазной фильтрации

1.1 Законы сохранения

Рассмотрим фильтрацию двух несмешивающихся жидкостей (например, нефти и воды) в изотропной пористой среде. Эти жидкости будем называть фазами. Предполагаем, что пористая среда — односвязная область $D \subset \mathbb{R}^3$, причём граница этой области ∂D является непроницаемой для обеих фаз.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — декартовы координаты в области D и t — время. Декартовы координаты мы иногда будем обозначать через x, y, z , полагая, что ось z вертикальна.

Система дифференциальных уравнений, описывающая фильтрацию, представляет собой законы сохранения для массы, импульса и энергии (см., например, [36]):

- **Закон сохранения массы** для каждой фазы в отсутствии источников и стоков имеет вид:

$$\frac{\partial(m\rho_i s_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{U}_i) = 0, \quad (1.1)$$

где ρ_i , s_i , \mathbf{U}_i — плотность, водонасыщенности и скорость i -й фазы соответственно, m — коэффициент пористости, т.е. доля объёма пор в общем объёме пористой среды. Водонасыщенность s_i — это безразмерная величина, показывающая какую часть занимает i -ая фаза в единице объёма пор ($0 \leq s_i \leq 1$).

- **Закон сохранения импульса** или закон Дарси для каждой фазы:

$$\mathbf{U}_i = -\frac{k}{\mu_i} f_i(s_i) (\nabla p_i - g\rho_i \nabla z), \quad (1.2)$$

где $f_i(s_i)$ — относительная фазовая проницаемость i -й фазы (безразмерная величина, $0 < f_i(s_i) < 1$), p_i — парциальное давление i -й фазы, ∇p_i — градиент парциального давления, k — коэффициент проницаемости пористой среды, μ_i — динамическая вязкость i -й фазы соответственно, g — ускорение свободного падения.

- **Закон сохранения энергии.** Здесь рассматривается однотемпературная модель, то есть предполагается, что обе фазы и пористая среда имеют одну и ту же температуру и рассеяние энергии отсутствует. Это влечет мгновенную передачу тепла и закон сохранения энергии может быть записан в виде уравнения переноса тепла

$$\frac{\partial(C\theta)}{\partial t} + \operatorname{div}(\theta\rho_1 c_1 \mathbf{U}_1 + \theta\rho_2 c_2 \mathbf{U}_2) = 0, \quad (1.3)$$

где $\theta = \theta(t, \mathbf{x})$ — отклонение температуры от равновесного состояния,

$$C = (1 - m)c_0\rho_0 + mc_1\rho_1s_1 + mc_2\rho_2s_2, \quad (1.4)$$

c_0 , c_1 , c_2 — удельные теплоёмкости пористой среды, первой и второй фаз соответственно, которые считаем постоянными, ρ_0 — плотность пористой среды.

Рассмотрим параметры пористой среды и фаз подробнее.

Относительные насыщенности. Сумма относительных насыщенностей равна единице:

$$s_1 + s_2 = 1$$

Ниже за относительную водонасыщенность мы будем принимать функцию s_1 и обозначать ее через σ .

Коэффициент пористости m в общем случае является функцией от координат, температуры и давления.

Динамические вязкости μ_i в общем случае зависят от температуры и давления. Их зависимость от температуры дается, например, законом Френкеля (см. [25]):

$$\mu = \alpha \exp \frac{\beta}{\theta}, \quad (1.5)$$

где α и β — постоянные.

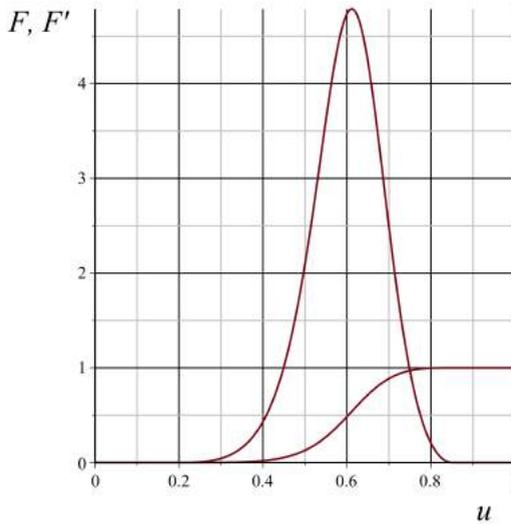
Фазовые проницаемости. Вид функции f_i зависит от выбранной модели среды (см., например, [58]). В гидродинамических расчетах удобно пользоваться эмпирическими зависимостями значений относительной фазовой проницаемости от насыщенности, полученными из экспериментальных данных. Например, при оценочных расчетах можно использовать следующие эмпирические формулы (см. [8]):

$$f_w(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq \sigma < 0.2, \\ ((\sigma - 0.2)/0.8)^{3.5}, & \text{если } 0.2 \leq \sigma \leq 1, \end{cases}$$

и

$$f_o(\sigma) = \begin{cases} ((0.85 - \sigma)/0.8)^{2.8}(1 + 2.4\sigma), & \text{если } 0 \leq \sigma < 0.85, \\ 0, & \text{если } 0.85 \leq \sigma \leq 1. \end{cases}$$

Здесь $f_1 = f_w$ и $f_2 = f_o$ — относительные фазовые проницаемости воды и нефти соответственно.

Рис. 1.1: Графики функции F и F'

Функция

$$F(\sigma) = \frac{f_1(\sigma)}{f_1(\sigma) + \mu f_2(1 - \sigma)} \quad (1.6)$$

называется *функцией Бакли-Леверетта*. Здесь

$$\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

и $\mu_1 = \mu_w, \mu_2 = \mu_o$ — динамические вязкости воды и нефти соответственно.

Графики функции F и ее производной F' приведены на Рис.1.1.

Примем следующие предположения:

- обе фазы несжимаемы, т.е. ρ_1 и ρ_2 — постоянные,
- отсутствует массоперенос между фазами.

Тогда закон Дарси (1.2) запишется в виде:

$$\mathbf{U}_i = -h_i(s_i)\nabla p_i \quad (1.7)$$

где

$$h_i(s_i) = \frac{k f_i(s_i)}{\mu_i}.$$

Уравнения (1.1) примут вид:

$$\begin{cases} m \frac{\partial s_1}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{U}_1 = 0, \\ m \frac{\partial s_2}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{U}_2 = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

или

$$\begin{cases} m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{U}_1 = 0, \\ -m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{U}_2 = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Сложим эти уравнения почленно:

$$\operatorname{div}(\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2) = 0.$$

Обозначая

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2,$$

получим

$$\begin{cases} m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{U}_1 = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{U} = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Заметим, что

$$\mathbf{U}_1 = F\mathbf{U}, \quad \mathbf{U}_2 = (1 - F)\mathbf{U},$$

поэтому первое уравнение (1.10) можно записать в виде

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div}(F\mathbf{U}) = 0$$

или, эквивалентно, в виде

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \mathbf{U}(F) = 0. \quad (1.11)$$

Введем функцию

$$G = \frac{1}{c}(\rho_1 c_1 F + \rho_2 c_2(1 - F)).$$

Тогда уравнение баланса тепла (1.3) примет вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + G\mathbf{U}(\theta) = 0. \quad (1.12)$$

Окончательно получаем:

$$\begin{cases} m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \mathbf{U}(F) = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + G\mathbf{U}(\theta) = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{U} = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

1.2 Изотермические модели

Кроме предположений, сделанных на стр. 12, примем следующие.

- Фильтрация считается изотермической, т.е. уравнение (1.3) не принимается во внимание.
- Нефтяной пласт представляет собой плоскую горизонтальную область; в этом случае гравитация не влияет на процесс фильтрации.
- Динамические вязкости μ_i считаются постоянными.
- Пористая среда однородная и недеформируемая, т.е. коэффициент пористости m одинаков для всех точек области D и не меняется во времени $m = \text{const}$.

Модель Бакли–Леверетта

Модель Бакли–Леверетта [40] получается если кроме сделанных допущений пренебречь влиянием капиллярных сил. В этом случае парциальные давления фаз одинаковы, т.е.

$$p_1 = p_2 = p. \quad (1.14)$$

Тогда уравнения (1.10) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div}(A(\sigma) \nabla p) = 0, \\ \operatorname{div}(B(\sigma) \nabla p) = 0, \end{cases} \quad (1.15)$$

где

$$A(\sigma) = - \frac{k f_1(\sigma)}{\mu_1} = -h_1(\sigma),$$

$$B(\sigma) = -k \left(\frac{f_1(\sigma)}{\mu_1} + \frac{f_2(1-\sigma)}{\mu_2} \right) = -h_1(\sigma) - h_2(\sigma).$$

Учитывая, что $A = BF$, где F — функция Бакли–Леверетта (1.6), получаем:

$$\begin{cases} m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div}(B(\sigma) F(\sigma) \nabla p) = 0, \\ \operatorname{div}(B(\sigma) \nabla p) = 0, \end{cases} \quad (1.16)$$

В случае одной пространственной переменной уравнения (1.16) принимают вид

$$\begin{cases} m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(B(\sigma) F(\sigma) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(B(\sigma) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Поэтому первое уравнение этой системы можно записать в виде

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} (F(\sigma)) = 0, \quad (1.18)$$

где функция

$$U = B(\sigma) \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.19)$$

не зависит от переменной x , а является функцией времени.

Модель Рапопорта–Лиса

Модель Рапопорта–Лиса [56] отличается от модели Бакли–Левретта тем, что в ней учитывается влияние капиллярных сил, что приводит к замене предположения о равенстве парциальных давлений на следующее: разность парциальных давлений зависит от водонасыщенности $s_1 = \sigma$:

$$p_2 - p_1 = p(\sigma). \quad (1.20)$$

Функция $p(\sigma)$ считается известной. Она зависит от свойств пористой среды и свойств обеих фаз.

Таким образом, мы получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m \frac{\partial \sigma}{\partial t} = k \frac{f_1(\sigma)}{\mu_1} \Delta p_1 + k \frac{f_1'(\sigma)}{\mu_1} (\nabla \sigma, \nabla p_1), \\ B(\sigma) \Delta p_1 + \frac{k}{\mu_2} (f_2(1 - \sigma)p''(\sigma) + f_2'(1 - \sigma)p'(\sigma)) |\nabla \sigma|^2 + \\ + \frac{k}{\mu_2} f_2(1 - \sigma)p'(\sigma) \Delta \sigma + B'(\sigma) (\nabla \sigma, \nabla p_1) = 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

Эту систему можно записать в более компактной форме:

$$\begin{cases} m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div}(B(\sigma)F(\sigma)\nabla p_1) = 0, \\ \operatorname{div}(B(\sigma)\nabla p_1) + \operatorname{div}(R(\sigma)\nabla \sigma) = 0, \end{cases} \quad (1.22)$$

где

$$R(\sigma) = B(\sigma)(F(\sigma) - 1)p'(\sigma).$$

Уравнения (1.22) будем называть *уравнениями Рапопорта–Лиса*.

В случае одной пространственной переменной уравнение Рапопорта–Лиса имеет вид [35]:

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial f_w(\sigma)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(k(\sigma) f_w(\sigma) \frac{\partial J(\sigma)}{\partial x} \right) = 0, \quad (1.23)$$

где ε — числовой параметр, зависящий геометрических свойств пористой среды и от свойств фаз, $k(\sigma)$ — коэффициент относительной проницаемости, $J(\sigma)$ — функция Леверетта.

1.3 Неизотермическая модель

Предполагаем, что пористая среда — плоская односвязная область $D \subset \mathbb{R}^2$ и $x = (x_1, x_2)$ — декартовы координаты в области D .

Примем следующие допущения.

- Коэффициент пористости зависит от температуры и точки области D : $m = m(x, \theta)$, а динамические вязкости фаз и плотности пористой среды и фаз зависят от температуры: $\mu_i = \mu_i(\theta)$, $\rho_j = \rho_j(\theta)$ ($i = 1, 2; j = 0, 1, 2$). Полагаем, что функции m , μ_i и ρ_j известны.
- Пренебрежем капиллярными силами. Тогда парциальные давления совпадают: $p_1 = p_2 = p$ и закон Дарси (1.2) принимает вид:

$$\mathbf{U}_i = -h_i(s_i, \theta) \nabla p, \quad (1.24)$$

где

$$h_i(s_i, \theta) = \frac{k f_i(s_i)}{\mu_i(\theta)}.$$

- Граница области D является непроницаемой для тепла.

При этих допущениях уравнения фильтрации примут вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(m\rho_1 s_1)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{U}_1) = 0, \\ \frac{\partial(m\rho_2 s_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{U}_2) = 0, \\ \frac{\partial(C\theta)}{\partial t} + \operatorname{div}(\theta\rho_1 c_1 \mathbf{U}_1 + \theta\rho_2 c_2 \mathbf{U}_2) = 0. \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Глава 2

Одномерные модели фильтрации

В этой главе рассмотрим модель двухфазной фильтрации для одной пространственной переменной. Несмотря на кажущуюся простоту, такая модель является хорошим приближением в случае, когда скважины расположены горизонтально параллельно друг другу. Мы рассмотрим как изотермический, так и неизотермический случаи, а также модель Рапопорта–Лиса.

Итак, пусть нагнетательные и добывающие скважины расположены в нефтяном пласте в одной горизонтальной плоскости параллельно друг другу, причем скважины этих двух типов чередуются. Такая схема расположения представлена на Рис. 2.1, нагнетательная скважина помечена крестиком, а добывающая — точкой.

Вытесняющая жидкость закачивается через вертикальные стволы нагнетательных скважин и поступает в горизонтально вытянутые трещины гидроразрыва. Отсюда под действием давления фильтрационные потоки направляются к аналогичным трещинам добывающих скважин и через вертикальные стволы откачиваются на поверхность.

Описанный способ добычи наиболее эффективен при разработке нефтяных месторождений с трудноизвлекаемыми запасами, когда для эффективного вытеснения нефти требуется физико-химические управляющие воздействия. В частности, вытеснение нефти растворами активных реагентов (растворами полимеров, поверхностно-активных веществ, углекислого газа и др.), тепловыми (закачка горячей воды и пара, внутрипластовое горение и др.) и волновыми (гидродинамическими, электромагнитными и ультразвуковыми) воздействиями, либо их комбинациями.

Введем пространственную координату x , показывающая удаленность точки от горизонтального канала (трещины гидроразрыва). Ось OX направим перпендикулярно этому каналу, а начало координат O выберем на нем. Будем считать, что проницаемость порового пространства не меняется вдоль оси OX .

2.1 Модель Бакли–Леверетта

Рассмотрим модель Бакли–Леверетта, описанную в главе 1. В случае одной пространственной переменной уравнения (1.16) имеют следующий вид:

$$\begin{cases} m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(B(\sigma) F(\sigma) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(B(\sigma) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

В стандартной модели Бакли–Леверетта принимается допущение о постоянстве градиента давления, что делает возможным применение к уравнению метода характеристик. В обобщенной модели Бакли–Леверетта, рассматриваемой в данной работе, такое допущение не делается, а считается, что градиент давления q удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (2.3). В этом случае метод характеристик уже невозможно применить напрямую.

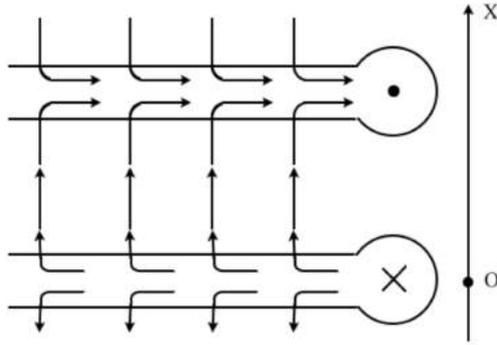


Рис. 2.1: Схема фильтрационных потоков (вид сверху)

1. Покажем, что для любых (дифференцируемых) функций B и F решение системы (2.1) может быть найдено в квадратурах. Для этого мы используем преобразование Бэклунда и для полученного уравнения построим контактное преобразование, приводящее его к волновому уравнению.

Первое уравнение этой системы можно записать в виде

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + B(\sigma) \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (F(\sigma)) = 0. \quad (2.2)$$

Вводя переменную

$$q = \frac{\partial p}{\partial x},$$

вместо системы двух дифференциальных уравнений второго порядка (2.1) получаем систему уравнений первого порядка

$$\begin{cases} m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + B(\sigma) F'(\sigma) q \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \\ B'(\sigma) q \frac{\partial \sigma}{\partial x} + B(\sigma) \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Далее частные производные будем обозначать индексами, например, $q = p_x$.

Из системы (2.3) можно исключить градиент давления и получить уравнение только на водонасыщенность. Действительно, из первого уравнения системы (2.3) получаем:

$$B(\sigma)q = -\frac{m\sigma_t}{F'(\sigma)\sigma_x} \quad (2.4)$$

Так как производная функции $B(\sigma)q$ по переменной x равна нулю, то

$$F'(\sigma)(\sigma_x\sigma_{tx} - \sigma_t\sigma_{xx}) - F''(\sigma)\sigma_t\sigma_x^2 = 0.$$

и мы получаем нелинейное дифференциальное уравнение относительно функции σ :

$$\frac{\sigma_x\sigma_{tx} - \sigma_t\sigma_{xx}}{\sigma_t\sigma_x^2} = \frac{F''(\sigma)}{F'(\sigma)}.$$

Это уравнение можно записать в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\sigma), \quad (2.5)$$

где

$$\Phi(\sigma) = \ln F'(\sigma).$$

Примерный график функции $\Phi(\sigma)$ представлен на Рис.2.2. Применим к уравнению (2.5) преобразование Бэклунда:

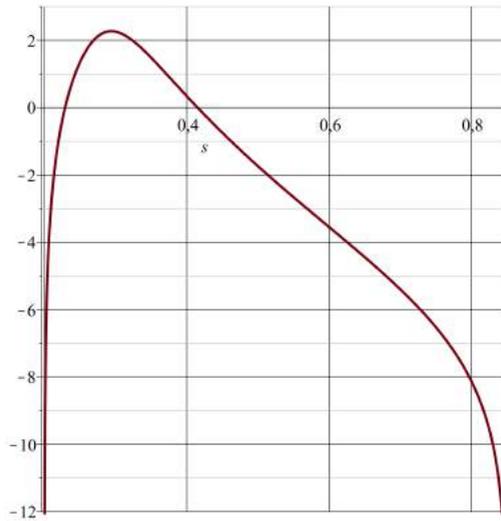
$$\begin{cases} u_t = \frac{\sigma_t}{\sigma_x} \\ u_x = \Phi(\sigma). \end{cases} \quad (2.6)$$

Тогда

$$u_{tx} = \Phi'(\sigma)\sigma_t, \quad u_{xx} = \Phi'(\sigma)\sigma_x$$

и, следовательно,

$$\frac{u_{tx}}{u_{xx}} = \frac{\sigma_t}{\sigma_x} = u_t.$$

Рис. 2.2: Примерный график функции $\Phi(\sigma)$

Итак, в результате преобразования Бэклунда мы получили нелинейное гиперболическое уравнение типа Монжа–Ампера для функции $u = u(t, x)$:

$$u_{tx} - u_t u_{xx} = 0. \quad (2.7)$$

Ему отвечает дифференциальная 2-форма на пространстве 1-джетов $J^1(\mathbb{R}^2)$ (см. [17, 48] или главу 4)

$$\omega = 2u_1 du_2 \wedge dx_1 + dx_1 \wedge du_1 - dx_2 \wedge du_2,$$

Здесь $x_1 = t$, $x_2 = x$, u , u_1 , u_2 — канонические координаты на пространстве $J^1(\mathbb{R}^2)$.

Преобразование Лежандра

$$\varphi : (x_1, x_2, u, u_1, u_2) \mapsto (-u_1, -u_2, u - x_1 u_1 - x_2 u_2, x_1, x_2)$$

переводит её в 2-форму

$$\varphi^*(\omega) = -2x_1 du_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge du_1 - dx_2 \wedge du_2,$$

которой отвечает линейное гиперболическое уравнение

$$u_{x_1 x_2} - x_1 u_{x_1 x_1} = 0, \quad (2.8)$$

общее решение которого имеет вид:

$$u(x_1, x_2) = e^{-x_2} F_1(x_1 e^{x_2}) + F_2(x_2), \quad (2.9)$$

где F_1 и F_2 — произвольные функции.

Так как преобразование Лежандра является контактным, то при этом преобразовании многозначные решения уравнения (2.7) переходят в решения уравнения (2.8). Обратное же преобразование φ^{-1} переводит классические решения линейного уравнения (2.8) в многозначные решения уравнения (2.7). Применяя преобразование φ^{-1} к решениям (2.9), мы находим общее многозначное решение уравнения (2.7) в параметрической форме:

$$\begin{aligned} t &= \pm \frac{e^{u_2}}{u_1} F_1'(\ln |u_1| - u_2), \\ x &= -e^{u_2} (F_1(\ln |u_1| - u_2) - F_1'(\ln |u_1| - u_2)) + F_2'(u_2), \\ u &= e^{u_2} ((u_2 - 1)(F_1'(\ln |u_1| - u_2) - F_1(\ln |u_1| - u_2)) + \\ &= F_2(u_2) + u_2 F_2'(u_2)). \end{aligned}$$

Координаты u_1 и u_2 , отвечающие частным производным u_t и u_x соответственно, выступают здесь в роли параметров.

Для упрощения записи введем новые параметры

$$a = u_2 - \ln |u_1|, \quad b = u_2,$$

и новые функции

$$k(a) = F_1(a), \quad r(b) = F_2(b).$$

Плоскость с координатами a и b мы назовем *плоскостью импульсов* и обозначим через Π , а плоскость с координатами t и x — *плоскостью пространства-времени*, которую обозначим через Γ .

В этих обозначениях общее многозначное решение уравнения (2.7) примет вид:

$$\begin{aligned} t &= \pm e^a k'(a), \\ x &= -e^b(k'(a) + k(a)) + r'(b), \\ u &= e^b(1 - b)(k'(a) + k(a)) + br'(b) - r(b), \\ u_1 &= \pm e^{b-a}, \\ u_2 &= b, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $k = k(a)$ и $r = r(b)$ — произвольные дифференцируемые функции.

При заданных функциях k и r первые две формулы в (2.10) задают отображение плоскости Π в плоскость Γ . Такое отображение, вообще говоря, не является взаимно однозначным и особым точкам этого отображения соответствуют геометрические особенности (каустики) многозначных решений уравнения (2.7).

Изохронам $t = \text{const}$ на плоскости пространства-времени отвечают прямые, параллельные оси b на плоскости импульсов. Таким образом, введение параметра a вместо переменной t означает перенормировку времени. Пусть значению времени $t = 0$ отвечает значение a_0 параметра a , т.е.

$$k'(a_0) = 0. \quad (2.11)$$

Прямым $x = \text{const}$ на плоскости пространства-времени отвечают кривые на плоскости импульсов. В частности, прямой $x = 0$ отвечает кривая

$$-e^b(k'(a) + k(a)) + r'(b) = 0. \quad (2.12)$$

Итак, формулы (2.10) дают параметрическое представление многозначных решений уравнения (2.7). В свою очередь формулы (2.6) позволяют построить параметрическое представление многозначных решений уравнений (2.1).

2. Покажем как из построенного общего решения уравнений (2.3) выделить решения, отвечающие заданным начальным и граничным условиям на закачивающей скважине:

$$\sigma(0, x) = \sigma_0(x), \quad q(0, x) = q_0(x). \quad (2.13)$$

и

$$\sigma(t, 0) = \sigma^0(t), \quad q(t, 0) = q^0(t). \quad (2.14)$$

Здесь в правых частях стоят заданные функции. Мы считаем, что закачивающая скважина расположена в точке с координатой $x = 0$. Граничные условия задают режим закачивания воды в нефтяной пласт. Как правило, на закачивающей скважине водонасыщенность и градиент давления поддерживаются постоянными, что отвечает постоянным функциям $\sigma^0(t)$ и $q^0(t)$ в формуле (2.14).

Начальные и граничные условия для функций σ и q влекут соответствующие условия на функцию u . Найдем их.

Из условия (2.13) следуют условия на частные производные функций σ при $t = 0$:

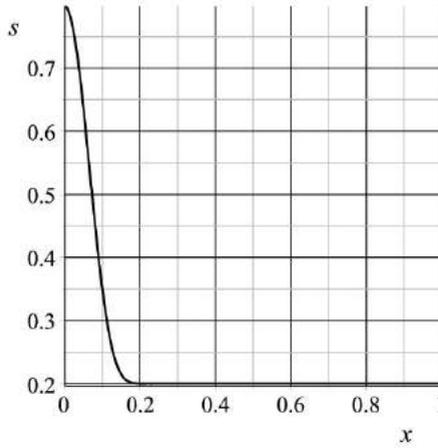
$$\sigma_x|_{t=0} = \sigma'_0(x), \quad \sigma_t|_{t=0} = \frac{\kappa}{m} h(\sigma_0(x)) F'(\sigma_0(x)) q_0(x) \sigma'_0(x).$$

Поэтому при $t = 0$ из формулы (2.6) мы получаем начальные значения производных функции u :

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad u_x|_{t=0} = \phi(x), \quad (2.15)$$

где

$$\psi(x) = \frac{\kappa}{m} h(\sigma_0(x)) F'(\sigma_0(x)) q_0(x), \quad \phi(x) = \Phi(\sigma_0(x)).$$

Рис. 2.3: Данные Коши $\sigma_0(x)$

Теперь обратимся к граничным условиям. Из первого условия (2.14) находим, граничное условие при $x = 0$ для частных производных функции σ :

$$\sigma_t|_{x=0} = (\sigma^0(t))', \quad \sigma_x|_{x=0} = \frac{m(\sigma^0(t))'}{\kappa h(\sigma^0(t))F'(\sigma^0(t))q^0(t)}.$$

Поэтому из первого уравнения системы (2.6) мы получаем граничное условие на производную u_t :

$$u_t|_{x=0} = \gamma(t) = \frac{\kappa}{m} h(\sigma^0(t))F'(\sigma^0(t))q^0(t). \quad (2.16)$$

Заметим, что градиент давления вблизи скважины $x = 0$ отрицательный, т.е. $q^0(t) < 0$, а остальные множители в левой части формулы (2.16) положительны. Поэтому функция $\gamma(t)$ отрицательна для любого значения t .

Из формулы (2.6) получаем граничное условие на производную u_x :

$$u_x|_{x=0} = \Phi(\sigma^0(t)).$$

Покажем теперь как выбрать функции k и r чтобы выполнялись полученные начальные и граничные условия для функции u .

Из последней формулы системы (2.10) и начального условия (2.15):

$$b + \phi(r'(b) - \xi e^{-b}) = 0, \quad (2.17)$$

где в силу (2.11)

$$\xi = k'(a_0) + k(a_0) = k(a_0).$$

Функция Φ в рассматриваемой области $0.2 < \sigma < 0.85$ является монотонно убывающей, функция $\sigma_0(x)$ также монотонно убывает, Поэтому функция $\phi = \Phi \circ \sigma_0$ является монотонно возрастающей и уравнение (2.17) можно разрешить относительно производной функции r :

$$r'(b) = \xi e^{-b} + \phi^{-1}(-b), \quad (2.18)$$

где ϕ^{-1} — обратная функция для ϕ .

Таким образом, мы определили вид функции r' с точностью до постоянной ξ , которую мы пока не знаем.

Подставив найденное значение производной $r'(b)$ в формулу (2.12), мы найдем уравнение кривой на плоскости импульсов, которой отвечает прямой $x = 0$ на плоскости пространства-времени:

$$e^{-b}(ak'(a) - k(a)) + r'(b) = 0,$$

или

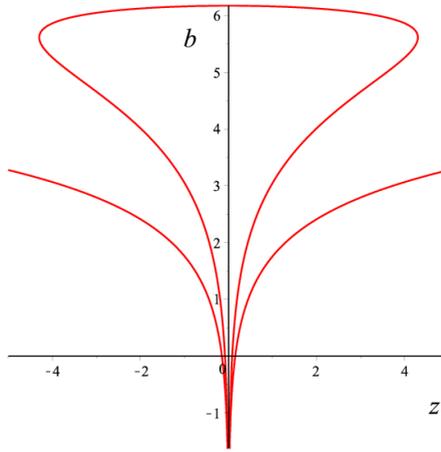
$$e^{-b}(ak'(a) - k(a) + \xi) + \phi^{-1}(-b) = 0. \quad (2.19)$$

Наконец, мы получаем уравнение для нахождения параметра b :

$$b + \phi(-ze^{-b}) = 0, \quad (2.20)$$

где

$$z = ak'(a) - k(a) + \xi.$$

Рис. 2.4: Кривая $b + \phi(-ze^{-b}) = 0$

Из этого уравнения выразим b как функцию от z :

$$b = B(z).$$

Теперь мы можем записать это граничное условие (2.16) на плоскости импульсов:

$$-e^{B(z)-a} = \gamma(-e^a k'(a)). \quad (2.21)$$

В левой части этой формулы мы ставим знак минус т.к. функция γ отрицательна. Это означает, что мы берем многозначное решение (2.10) у которого в первой и четвертой формулах стоит знак минус.

Уравнение (2.21) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение для нахождения функции k . В общем случае это неразрешенное относительно производной уравнение. Однако в случае, когда функция $\gamma(t)$ постоянная и функция B монотонная, мы можем разрешить его относительно $k'(a)$. Этот

случай отвечает ситуации, когда градиент давления q и водонасыщенность σ поддерживаются постоянными на нагнетательной скважине. Далее мы рассмотрим именно этот случай.

Пусть $\gamma(t) = \gamma = \text{const}$. Тогда решая уравнение (2.21) относительно z , мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции k :

$$k' + k = g(a) + \xi, \quad (2.22)$$

где

$$g(a) = B^{-1}(a + \eta), \quad \eta = \ln(-\gamma).$$

Покажем теперь как выбрать значение a_0 . Положив в формуле (2.22) $a = a_0$, мы получим что $g(a_0) = 0$, т.е. $B^{-1}(a_0 + \eta) = 0$, откуда следует, что $B(0) = a_0 + \eta$. Таким образом, нужно взять

$$a_0 = B(0) - \eta.$$

К уравнению (2.22) нужно добавить условие Коши:

$$k(a_0) = \xi.$$

Решение этой задачи Коши имеет вид:

$$k(a) = e^{-a} \left(\int_{a_0}^a e^{\tau} (g(\tau) + \xi) d\tau + \xi e^{a_0} \right). \quad (2.23)$$

Легко проверить, что $k'(a_0) = g(a_0) = 0$, что соответствует выбору значения a_0 (см. формулу (2.11)).

Заметим, что число ξ мы можем выбрать любым, в частности мы можем положить $\xi = 0$. Тогда формулы для функций k и r упростятся.

Опишем алгоритм построения многозначного решения системы дифференциальных уравнений (2.3), удовлетворяющего начальным и граничным условиям. Заметим, что предлагаемый нами метод сводит задачу решения такой системы к решению функциональных уравнений, что позволяет сделать вывод об интегрируемости уравнения Бакли – Леверетта при любой функций F .

Шаг 1. Решая уравнение

$$b + \phi(-ze^{-b}) = 0,$$

находим b как функцию от параметра z : $b = B(z)$. (см. уравнение (2.20)).

Шаг 2. Вычисляем значение параметра a , отвечающего моменту $t = 0$:

$$a_0 = -\gamma e^{B(0)}.$$

Шаг 3. Вычисляем функцию

$$g(a) = B^{-1}(\ln(-a/\gamma)).$$

Шаг 4. Вычисляем функцию

$$k(a) = a \int_{a_0}^a \frac{g(\tau)}{\tau^2} d\tau.$$

Шаг 5. Вычисляем функцию

$$r'(b) = \phi^{-1}(-b).$$

Шаг 6. Решаем уравнение

$$t = k'(a)$$

относительно переменной a . Пусть $a = \alpha(t)$ — это решение.

Шаг 7. Решаем уравнение

$$x = e^{-b}(\alpha(t)k'(\alpha(t)) - k(\alpha(t))) + r'(b)$$

относительно переменной b . Пусть $b = \beta(t, x)$ — это решение.

Шаг 8. Решаем уравнение

$$\Phi(\sigma) + \beta(t, x) = 0$$

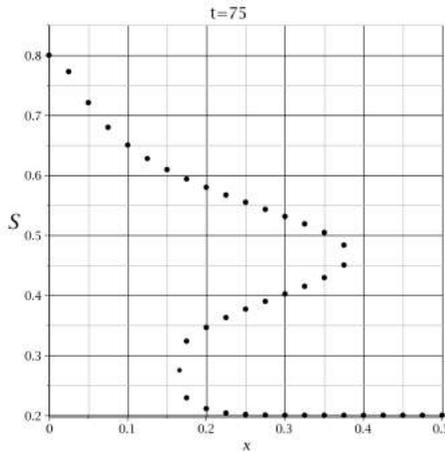


Рис. 2.5: Сечение многозначного решения

относительно переменной σ . Пусть $\sigma = \sigma(t, x)$ — это решение.

Шаг 9. Решаем уравнение

$$h'(\sigma)\sigma_x q + h(\sigma)q_x = 0$$

с условиями (2.13) относительно переменной q .

На рис. 2.5 показано сечение многозначного решения для фиксированного момента времени, построенное по описанному алгоритму в системе символьных вычислений Maple.

Построенные многозначные решения мы используем для построения разрывных решений уравнений Бакли–Левретта.

3. Опишем другой способ построения решений, основанный на методе построения решений задачи Коши для систем дифференциальных уравнений типа Якоби [48]. Заметим, что система уравнений Бакли–Левретта принадлежит этому классу.

Для удобства проведем замену

$$A(\sigma) = \frac{k}{m} F_\sigma(\sigma), \quad B(\sigma) = h(\sigma).$$

Тогда система (2.3) принимает вид:

$$\begin{cases} \sigma_t + A(\sigma)B(\sigma)q\sigma_x = 0, \\ B_\sigma(\sigma)q\sigma_x + B(\sigma)q_x = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Этой системе отвечают две дифференциальные 2-формы на пространстве $N = \mathbb{R}^4$ с координатами t, x, σ, q :

$$\begin{cases} \omega_1 = A(\sigma)B(\sigma)qdt \wedge d\sigma + dx \wedge d\sigma, \\ \omega_2 = B_\sigma(\sigma)qdt \wedge d\sigma + B(\sigma)dt \wedge dq. \end{cases}$$

Вместо 2-форм ω_1 и ω_2 выберем новые дифференциальные 2-формы

$$\begin{cases} \Omega_1 = q(A(\sigma)B(\sigma) - B_\sigma(\sigma))dt \wedge d\sigma - B(\sigma)dt \wedge dq + dx \wedge d\sigma, \\ \Omega_2 = q(A(\sigma)B(\sigma) + B_\sigma(\sigma))dt \wedge d\sigma + B(\sigma)dt \wedge dq + dx \wedge d\sigma, \end{cases}$$

являющиеся их линейными комбинациями и удовлетворяющие условиям ортогональности и нормировки:

$$\Omega_1 \wedge \Omega_2 = 0, \quad \Omega_1 \wedge \Omega_1 = -\Omega_2 \wedge \Omega_2.$$

Построим поле эндоморфизмов A_E на N , определив его равенством

$$X \rfloor \Omega_2 = A_E X \rfloor \Omega_1.$$

Здесь \rfloor - оператор внутреннего умножения, а X — произвольное векторное поле на N . Это поле имеет вид:

$$A_E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2A(\sigma)B(\sigma)q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2\frac{B_\sigma(\sigma)}{B(\sigma)}q & -1 \end{pmatrix}.$$

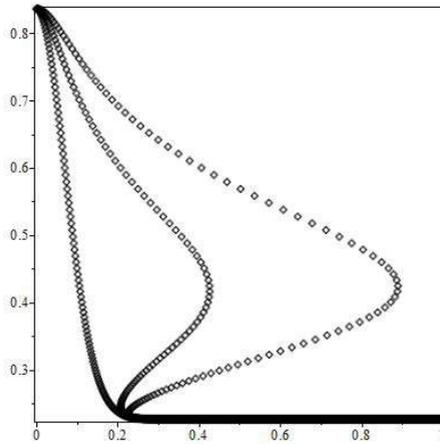


Рис. 2.6: Сечения многозначного решения

Собственные подпространства оператора A_E порождают два двумерных характеристических распределения на пространстве N :

$$V_+ = \text{Lin} \left\langle X_+ = \frac{\partial}{\partial q} - \frac{B(\sigma)}{B_\sigma(\sigma)q} \frac{\partial}{\partial \sigma}, \quad Y_+ = \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle$$

и

$$V_- = \text{Lin} \left\langle X_- = \frac{\partial}{\partial q}, \quad Y_- = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{A(\sigma)B(\sigma)q} \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle.$$

Находим два интеграла H_i распределения V_+ , удовлетворяющие условию $X_+(H_i) = Y_+(H_i) = 0$:

$$H_1 = t, \quad H_2 = B(\sigma)q. \quad (2.25)$$

Ограничения интегралов (2.25) на кривую граничных условий

$$\Gamma = (\sigma|_{x=0} = S(t)), \quad q|_{x=0} = Q(t))$$

имеют вид

$$H_1|_\Gamma = t, \quad H_2|_\Gamma = f(t) = B(S(t))Q(t).$$

Находим функцию F , такую, что $F(H_1|_\Gamma, H_2|_\Gamma) = 0$:

$$F(\alpha, \beta) = \beta - f(\alpha), \text{ или } F(H_1, H_2) = H_2 - f(H_1).$$

Положим

$$H = F(H_1, H_2) = B(\sigma)q - f(t)$$

и заметим, что $\Gamma \subset M_0$ если $H = 0$. Одномерное распределение

$$l_- = V_- \cap TM_0$$

порождено векторным полем

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} - A(\sigma)B(\sigma)q \frac{\partial}{\partial x} + \frac{f_t(t)}{B(\sigma)} \frac{\partial}{\partial q}.$$

Если водонасыщенность и градиент давления на нагнетательной скважине постоянные, т.е. $S(t) = \sigma_0$, $Q(t) = q_0$, то получаем: $f(t) = B(\sigma_0)q_0 = \text{const}$, или $f_t(t) = 0$. Таким образом векторное поле Z имеет вид

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} - A(\sigma)B(\sigma)q \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.26)$$

Построение многозначного решения сводится к построению сдвига кривой начальных данных вдоль траекторий векторного поля Z .

На рис. 2.6 представлены сечения графика многозначного решения σ для различных моментов времени, построенные по описанному методу, а на рис. 2.7 — сам график.

4. Построенные многозначные решения позволяют построить однозначные разрывные решения уравнения (2.5). Особые точки проекций многозначных решений уравнения (2.5) на плоскость (t, x) образуют каустики. В нашем случае каустика состоит из точек пересечения прямых

$$x = \bar{x} - F'(\sigma_0(\bar{x}))\tau \quad (2.27)$$

на плоскости (τ, x) , где $\tau = \tau(t)$ — перепараметризация времени. Здесь \bar{x} — параметр, задающий точку пересечения прямой с осью $\tau = 0$.

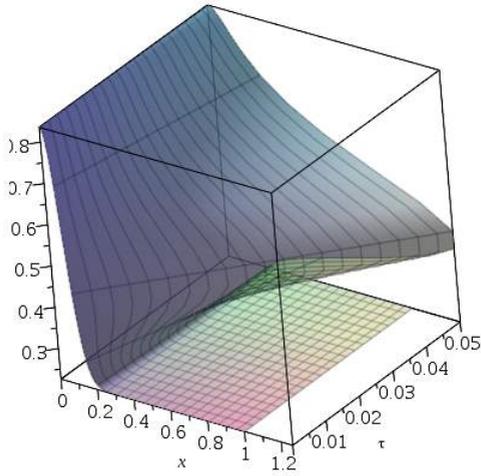


Рис. 2.7: График многозначного решения σ

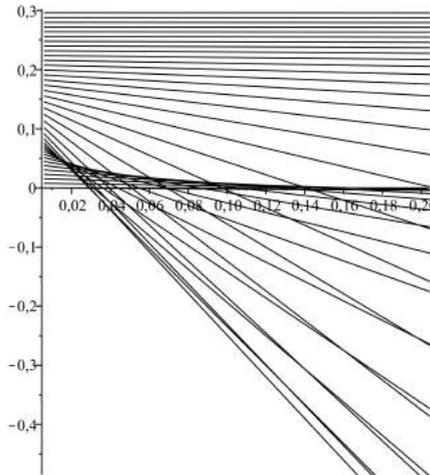


Рис. 2.8: Линии постоянной водонасыщенности

Сами прямые (2.27) представляют собой линии постоянной водонасыщенности (см. рис. 2.8).

Реальный разрыв решения возникает не в точках каустики, а вдоль кривой, которая определяется правилом Гюгонио–Ренкина и законом сохранения [48].

Отметим, что дифференциальное уравнение (2.5) записано в дивергентном виде, отвечающим закону сохранения

$$\omega = \Phi(\sigma)dx + \frac{\sigma_t}{\sigma_x}dt.$$

В самом деле, её внешний дифференциал

$$d\omega = \left[\left(\frac{\sigma_t}{\sigma_x} \right)_x - (H(\sigma))_t \right] dx \wedge dt$$

обращается в нуль на любом решении уравнения (2.5).

Рассмотрим сечение многозначного решения в фиксированный момент времени $t = t_0$. Это сечение определяет кривую Γ_σ на плоскости (x, σ) . Эта кривая, вообще говоря, не является графиком функции.

Найдем значение $x = x_0$ при котором возникает разрыв этой кривой. Для этого введем новую переменную S и построим отображение плоскости (x, σ) на плоскость (x, S) : $(x, \sigma) \mapsto (x, \Phi(\sigma))$. Пусть при этом отображении кривая Γ_σ переходит в кривую Γ_S .

Закон сохранения θ на плоскости (x, S) имеет вид

$$\omega|_{t=t_0} = Sdx.$$

Для таких законов сохранения применимо правило Максвелла и значение x_0 определится из условия равенства площадей криволинейных трапеций на плоскости (x, S) .

Заметим, что на плоскости (x, σ) правило равенства площадей не выполняется. Построив точки разрыва для каждого момента времени, мы найдем кривую на плоскости (t, x) , вдоль которой распространяется фронт вытеснения нефти.

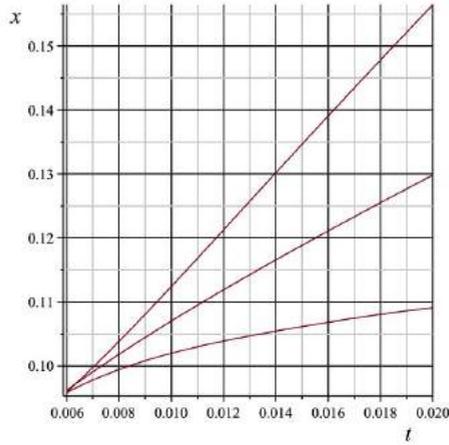
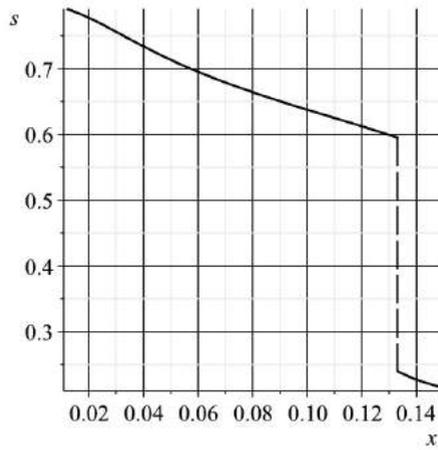


Рис. 2.9: Каустика и фронт ударной волны

Рис. 2.10: Сечение компоненты σ разрывного решения

5. Покажем, как можно управлять скоростью фильтрации с помощью разности давлений на закачивающей и добывающей скважинах.

Мы полагаем, что граничные условия на скважинах, т.е. в точках $x = 0$ и $x = L$ поддерживаются постоянные по времени давления $p_0 = p(t, 0)$ и $p_L = p(t, L)$ соответственно.

Разность давлений на скважинах равна

$$\Delta p = p_L - p_0 = \int_0^L \frac{\partial p}{\partial x} dx.$$

Учитывая, что функция U не зависит от переменной x , в силу формулы (1.19) получаем:

$$\Delta p = U \int_0^L \frac{dx}{B(\sigma)},$$

откуда

$$U = \frac{\Delta p}{\int_0^L \frac{dx}{B(\sigma)}}.$$

Эта формула и позволяет управлять скоростью фильтрации с помощью создания перепада давления на скважинах.

2.2 Динамики уравнений Рапопорта–Лиса

1. При исследовании поведения решений нелинейных эволюционных уравнений в частных производных аттракторы и проблемы устойчивости занимают центральное место. Основная сложность при этом состоит в том, что в настоящее время отсутствует сколь-нибудь общая теорема существования решений таких уравнений (скажем, в пространстве гладких функций).

Здесь мы опишем метод построения аттракторов эволюционных уравнений вида

$$u_t = \varphi(x, u, u_x, u_{xx}, \dots), \quad (2.28)$$

основанный на использовании конечномерных динамик [47, 55], и применим к уравнению,

$$u_t = A(u)_x + B(u)_{xx}, \quad (2.29)$$

обобщающему уравнение Рапопорта–Лиса¹ (1.23).

Уравнение (2.29) будем называть *обобщенным уравнением Рапопорта–Лиса* [6].

2. Покажем как строятся конечномерные подмногообразия в пространстве гладких функций, инвариантные относительно потока, задаваемым эволюционным уравнением.

Это, во-первых, позволяет избежать вопроса о существовании решений, ибо такие подмногообразия состоят из решений обыкновенных дифференциальных уравнений, а кроме того даёт конструктивный метод для их нахождения. Функции на соответствующих пространствах джетов, задающие эти подмногообразия, используются для оценки близости между решениями и, в частности, для определения аттрактора.

¹В этом разделе функции A и B — произвольные. Они не имеют отношения к функциям с такими же обозначениями в главе 1.

Нахождение конечномерных динамик основано на следующих наблюдениях.

Во-первых, конечномерное подмногообразие в пространстве функций от одной переменной x можно рассматривать как пространство решений обыкновенного дифференциального уравнения

$$F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0. \quad (2.30)$$

Во-вторых, условие, что уравнение (2.29) описывает эволюции на решениях уравнения (4.5), эквивалентно утверждению, что функция φ является производящей функцией (см. [43, 48] или главу 4) для симметрий уравнения (4.5).

3. Теория конечномерных динамик эволюционных уравнений является естественным развитием теории динамических систем. Суть её состоит в следующем [47, 48].

Пусть x, y_0, y_1, \dots, y_k — канонические координаты на пространстве $J^k(\mathbb{R})$ k -джетов функций одной переменной x .

Дифференциальное уравнение (4.5) определяет гиперповерхность

$$\mathcal{E} = \{F(x, y_0, y_1, \dots, y_k) = 0\} \subset J^k(\mathbb{R}) \quad (2.31)$$

в этом пространстве. Отметим, что функция $\phi(y_0, y_1, y_2)$ является производящей функцией симметрий уравнения (2.31), если выполнено следующее условие: для любой функции $y = u(0, x)$, удовлетворяющей уравнению (2.31), функция $u(t, x)$, которая является решением эволюционного дифференциального уравнения

$$u_t = \phi(u, u_x, u_{xx}), \quad (2.32)$$

для достаточно малых значений параметра t задаёт путь в пространстве решений уравнения (2.31).

Обыкновенное дифференциальное уравнение (2.31) называется *динамикой* для эволюционного уравнения (2.32), если ϕ является производящей функцией тасующих симметрий уравнения (2.31). Число k называется *порядком* динамики [55].

Следующая теорема указывает уравнение, решения которого дают конечномерные динамики.

Теорема 1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (2.31) является динамикой эволюционного уравнения (2.32) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=0}^k \frac{\partial F}{\partial y_j} D^j(\phi) = 0 \text{ mod } \mathbf{DF}, \quad (2.33)$$

где

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_0} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots$$

— оператор полной производной по переменной x , а

$$\mathbf{DF} = \langle F, D(F), D^2(F), \dots \rangle$$

— дифференциальный идеал в алгебре функций на пространствах джетов, порожденный функцией F .

Назовем *скобкой Пуассона – Ли* двух функций G и H на пространстве k -джетов функцию

$$[G, H] = \sum_{i=0}^k \left(\frac{\partial G}{\partial y_i} D^i(H) - \frac{\partial H}{\partial y_i} D^i(G) \right).$$

Отметим, что скобка Пуассона–Ли кососимметрична, \mathbb{R} -билинейна и удовлетворяет тождеству Якоби [48].

Следующая теорема указывает конструктивный способ вычисления конечномерных динамик в терминах скобки Пуассона–Ли.

Теорема 2. Уравнение (2.31) является динамикой эволюционного уравнения (2.32) тогда и только тогда, когда

$$[\phi, F] = aF + bD(F), \quad (2.34)$$

где a и b — некоторые функции на пространстве $J^{k+1}(\mathbb{R})$.

Замечание 1. Левая часть уравнения (2.33) является функцией на пространстве $(k+2)$ -джетов, а левая часть уравнения (2.34) — это функция на пространстве $(k+1)$ -джетов. Поэтому с вычислительной точки зрения уравнение (2.34) является предпочтительным.

В случае когда дифференциальное уравнение (2.31) разрешено относительно старшей производной, т.е. имеет вид

$$y_k = f(x, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}), \quad (2.35)$$

пространство его решений можно отождествить с пространством \mathbb{R}^k , задавая начальные условия в фиксированной точке x_0 . В этом случае динамика задается векторным полем

$$E_\phi = \bar{\phi} \frac{\partial}{\partial y_0} + D(\bar{\phi}) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + D^{k-1}(\bar{\phi}) \frac{\partial}{\partial y_{k-1}}, \quad (2.36)$$

определенном на пространстве на \mathbb{R}^k с координатами y_0, \dots, y_{k-1} .

Черта над функцией ϕ означает ее ограничение на уравнение (2.35).

4. Пусть $G[u]$ — значение функции $G(x, y_0, y_1, \dots, y_n)$ на n -джете функции $u(t, x)$, т.е. $G[u] = G(x, u, u_x, \dots, u_{x\dots x})$.

Определение 1. Динамика (2.31) является аттрактором для решения $u(t, x)$ эволюционного уравнения (2.32), если

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F[u] = 0.$$

Пусть

$$e = \frac{\partial \phi}{\partial y_0} + a, \quad p = \frac{\partial \phi}{\partial y_1} + b, \quad q = \frac{\partial \phi}{\partial y_2}.$$

Следующая теорема, основывающаяся на результатах работы [13], указывает условия, при которых динамика (2.31) является аттрактором для уравнения (2.32).

Теорема 3. Пусть $u(t, x)$ — решение уравнения (2.32) и $e[u], p[u], q[u]$ — ограниченные функции. Пусть, кроме того, выполнены следующие условия:

$$e[u] \leq -\beta < 0 \quad \text{и} \quad q[u] \geq \alpha > 0 \quad (2.37)$$

при некоторых постоянных α и β . Тогда динамика (2.31) является аттрактором для решения $u(t, x)$.

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 3 справедливо неравенство

$$|F[u]| \leq Ce^{-\beta t},$$

где C — некоторая положительная постоянная.

Отметим, что функции e и q являются функциями на пространстве $(k+1)$ -джетов, и поэтому условия (2.37) теоремы 3 определяют области в пространстве $(k+1)$ -джетов, попадание в которые $(k+1)$ -джета решения уравнения (2.32), означает экспоненциальное приближение решения $u(t, x)$ к динамике (2.31).

5. Для уравнений Рапопорта–Лиса (2.29) укажем динамики до третьего порядка включительно, справедливые для любых функций A и B [6].

Уравнение (2.29) может быть записано в виде

$$u_t = A'(u)u_x + B''(u)u_x^2 + B'(u)u_{xx}.$$

и поэтому функция ϕ на пространстве $J^2(\mathbb{R})$ имеет вид

$$\phi = A'(y_0)y_1 + B''(y_0)y_1^2 + B'(y_0)y_2.$$

Теорема 4. Пусть $B'(u) \neq 0$, тогда уравнение (2.29) имеет следующие конечномерные динамики:

– порядка 1:

$$y_1 \quad \text{и} \quad B'(y_0)y_1 + A(y_0) + \alpha y_0 + \beta; \quad (2.38)$$

– порядка 2:

$$B'(y_0)y_2 + B''(y_0)y_1^2 + (A'(y_0) + \alpha)y_1; \quad (2.39)$$

– порядка 3:

$$B'(y_0)y_1y_3 - B'(y_0)y_2^2 + B'''(y_0)y_1^4 + \\ + 2B''(y_0)y_1^2y_2 + A''(y_0)y_1^3. \quad (2.40)$$

Здесь α и β – произвольные постоянные.

При этом функции e, p, q , фигурирующие в теореме 3, имеют следующий вид:

– для нетривиальных динамик (2.38) первого порядка:

$$e = 2A''(y_0)y_1 + 2B'''(y_0)y_1^2 + B''(y_0)y_2 - \\ - \frac{(B''(y_0))^2y_1^2 + B''(y_0)A'(y_0)y_1 + B''(y_0)\alpha y_1}{B'(y_0)}, \\ p = A'(y_0) + \frac{(4B'(y_0)y_1 + A(y_0) + \alpha y_0 + \beta)B''(y_0)}{B'(y_0)}, \\ q = B'(y_0);$$

– для динамик (2.39) второго порядка:

$$e = A''(y_0)y_1 + B''(y_0)y_2 - \frac{(B''(y_0))^2y_1^2}{B'(y_0)}, \\ p = A'(y_0), \\ q = B'(y_0);$$

– для динамик (2.40) третьего порядка:

$$\frac{e}{2} = -B'''(y_0)y_1^2 - B''(y_0)y_2 + \left(\frac{y_2^2}{y_1^2} - \frac{y_3}{y_1}\right)B'(y_0) - \\ - \frac{(B''(y_0))^2y_1^2}{B'(y_0)}, \\ p = A'(y_0) - B''(y_0)y_1, \\ q = B'(y_0).$$

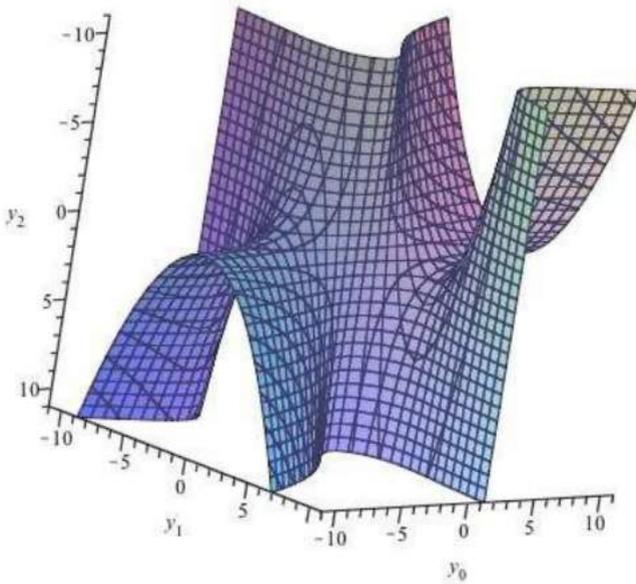


Рис. 2.11: Динамика второго порядка

Соответствующие векторные поля (2.36) для динамик (2.38) – (2.40) имеют вид:

– для нетривиальных динамик первого порядка:

$$E_\phi = \frac{\alpha(A(y_0) + \alpha y_0 + \beta)}{B'(y_0)} \frac{\partial}{\partial y_0};$$

– для динамик второго порядка:

$$E_\phi = \frac{\alpha y_1}{B'(y_0)} \left(-B'(y_0) \frac{\partial}{\partial y_0} + (B''(y_0)y_1 + A'(y_0) + \alpha) \frac{\partial}{\partial y_1} \right);$$

– для динамик третьего порядка:

$$E_\phi = \lambda \left(B'(y_0)y_1^2 \frac{\partial}{\partial y_0} + B'(y_0)y_1y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} - \gamma \frac{\partial}{\partial y_2} \right),$$

где

$$\lambda = \frac{A'(y_0)y_1 + B''(y_0)y_1^2 + B'(y_0)y_2}{B'(y_0)y_1^2},$$
$$\gamma = B'''(y_0)y_1^4 + 2B''(y_0)y_1^2y_2 + A''(y_0)y_1^3 - B'(y_0)y_2^2.$$

На рис. 2.2 представлена динамика второго порядка уравнения (2.29) при $A(y) = y^2$, $B(y) = y^3$ и $\alpha = -90$.

Найденные динамики третьего порядка позволили построить новый приближенный метод решения начально-краевых задач для обобщенных уравнений Рапопорта–Лиса для произвольных функций A и B , в том числе и для уравнений (1.23).

2.3 Симметрии уравнений Рапопорта–Лиса

В этом разделе мы приведем результаты вычислений алгебр симметрий обобщенного уравнения Рапопорта–Лиса

$$u_t = A(u)_x + B(u)_{xx} \quad (2.41)$$

для различных функций A и B .

Эти результаты разделяются на несколько случаев в зависимости от размерности алгебр симметрий. Отметим, что мы считаем функции A и B отличными от констант и имеющими полюс или ноль в точке $u = 0$ (этого всегда можно добиться, выбрав подходящий сдвиг аргумента u). Мы указываем общий вид производящей функции симметрий, базис из векторных полей, коммутационные соотношения и структуру алгебры симметрий.

Заметим, что симметрии сдвигов $a\partial_t + b\partial_x$ существуют для произвольных функций A, B . Поэтому размерность алгебры симметрий не может быть меньше 2.

Укажем случаи, в которых размерность алгебры симметрий заведомо равна 2. Нахождение симметрий сводится к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных на производящую функцию.

С помощью компьютерной системы Maple можно убедиться, что эта система дает только симметрии сдвигов в следующих ситуациях:

$$\det \begin{pmatrix} B_2u & B_2 & B_1 \\ B_3u + B_2 & B_3 & B_2 \\ B_4u + B_3 & B_4 & B_3 \end{pmatrix} = 0$$

или

$$\det \begin{pmatrix} A_3u + A_2 & A_3 & A_2 \\ A_4u + 2A_3 & A_4 & A_3 \\ A_5u + 3A_4 & A_5 & A_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Здесь индекс обозначает количество производных по переменной u .

Эти условия являются обыкновенными дифференциальными уравнениями на функции B и A . Решая их, мы находим

$$B(u) = \varepsilon(u + \gamma_1)^{\eta_1} + \delta_1 \quad \text{и} \quad A(u) = \lambda(u + \gamma_2)^{\eta_2} + \mu u + \delta_2.$$

Этот результат означает, что имеет смысл рассматривать уравнение Рапопорта–Лиса только для таких функций B и A , поскольку только для них могут существовать нетривиальные алгебры симметрий, автомодельные решения, конечномерные динамики и т.д.

Теперь опишем случаи, в которых размерность алгебры симметрий конечна и строго больше 2 (случай бесконечномерной алгебры симметрий соответствует линейным функциям A и B).

Размерность 3

Алгебра симметрий имеет размерность 3 в следующих трех случаях:

- $B(u) = \varepsilon u^\eta$, $A(u) = \lambda u^\eta + \mu u$, $\eta \neq \pm 1$;
- $B(u) = \varepsilon u^\eta$, $A(u) = \lambda u^{\frac{\eta+1}{2}} + \mu u$, $\eta \neq \pm 1$;
- $B(u) = \varepsilon u$, $A(u) = \lambda u^\eta + \mu u$, $\eta \neq 1, 2$.

В каждом из этих случаев алгебра симметрий разрешима.

Случай $B(u) = \varepsilon u^\eta$, $A(u) = \lambda u^\eta + \mu u$.

В этом случае производящая функция векторных полей из алгебры симметрий имеет вид

$$S = -(at + b)u_t - (a\mu t + C)u_x - \frac{a}{\eta - 1}u.$$

Алгебра симметрий порождается тремя векторными полями

$$X_1 = t\partial_t + \mu t\partial_x - \frac{u}{\eta - 1}\partial_u,$$

$$X_2 = \partial_t,$$

$$X_3 = \partial_x$$

со следующей таблицей коммутирования:

| $[\downarrow, \rightarrow]$ | X_1 | X_2 | X_3 |
|-----------------------------|-----------------|------------------|-------|
| X_1 | 0 | $-X_2 - \mu X_3$ | 0 |
| X_2 | $X_2 + \mu X_3$ | 0 | 0 |
| X_3 | 0 | 0 | 0 |

Алгебра симметрий является полупрямой суммой $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$ двух коммутативных подалгебр размерностей 1 и 2.

Алгебра дифференциальных инвариантов действия алгебры симметрий на пространстве решений уравнения Рапопорта–Лиса свободно порождается дифференциальными инвариантами

$$J = \frac{u_x}{u} \quad \text{и} \quad K = \frac{u_t + \mu u_x}{u^\eta}$$

и инвариантным дифференцированием

$$\nabla = \frac{1}{u^{\eta-1}} \left(\frac{d}{dt} + \mu \frac{d}{dx} \right).$$

Случай $B(u) = \varepsilon u^\eta$, $A(u) = \lambda u^{\frac{\eta+1}{2}} + \mu u$.

В этом случае производящая функция векторных полей из алгебры симметрий имеет вид

$$S = -au_t - (b(x - \mu t) + C)u_x + \frac{2b}{\eta - 1}u.$$

Алгебра симметрий порождается тремя векторными полями

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = (x - \mu t)\partial_x + \frac{2u}{\eta - 1}\partial_u, \quad X_3 = \partial_x$$

со следующей таблицей коммутирования:

| | | | |
|------------------|-----------|------------|--------|
| $[\cdot, \cdot]$ | X_1 | X_2 | X_3 |
| X_1 | 0 | $-\mu X_3$ | 0 |
| X_2 | μX_3 | 0 | $-X_3$ |
| X_3 | 0 | X_3 | 0 |

Алгебра симметрий является полупрямой суммой $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ двух коммутативных подалгебр размерностей 1 и 2.

Алгебра дифференциальных инвариантов действия алгебры симметрий на пространстве решений уравнения Рапопорта–Лиса свободно порождается дифференциальными инвариантами

$$J = u_x^2 \cdot u^{\eta-3} \quad \text{и} \quad K = \frac{u_t + \mu u_x}{u}$$

и инвариантным дифференцированием

$$\nabla = \frac{d}{dt} + \mu \frac{d}{dx}.$$

Случай $B(u) = \varepsilon u$, $A(u) = \lambda u^\eta + \mu u$.

В этом случае производящая функция векторных полей из алгебры симметрий имеет вид

$$S = -(at + b)u_t - ((a/2)(x + \mu t) + C)u_x - \frac{a}{2(\eta - 1)}u.$$

Алгебра симметрий порождается тремя векторными полями

$$X_1 = t\partial_t + \frac{1}{2}(x + \mu t)\partial_x - \frac{u}{2(\eta - 1)}\partial_u, \quad X_2 = \partial_t, \quad X_3 = \partial_x$$

со следующей таблицей коммутирования:

| | | | |
|------------------|----------------------------|-----------------------------|-------------------|
| $[\cdot, \cdot]$ | X_1 | X_2 | X_3 |
| X_1 | 0 | $-X_2 - \frac{1}{2}\mu X_3$ | $-\frac{1}{2}X_3$ |
| X_2 | $X_2 + \frac{1}{2}\mu X_3$ | 0 | 0 |
| X_3 | $\frac{1}{2}X_3$ | 0 | 0 |

Алгебра симметрий является полупрямой суммой $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$ двух коммутативных подалгебр размерностей 1 и 2.

Алгебра дифференциальных инвариантов действия алгебры симметрий на пространстве решений уравнения Рапопорта–Лиса свободно порождается дифференциальными инвариантами

$$J = \frac{u_x}{u^\eta} \quad \text{и} \quad K = \frac{u_t + \mu u_x}{u^{2\eta-1}}$$

и инвариантным дифференцированием

$$\nabla = \frac{1}{u^{2\eta-2}} \left(\frac{d}{dt} + \mu \frac{d}{dx} \right).$$

Размерность 4

Алгебра симметрий имеет размерность 4 в следующих трех случаях:

- $B(u) = \varepsilon u$, $A(u) = \lambda u^2 + \mu u$, $\mu \neq 0$;
- $B(u) = \varepsilon u^\eta$, $A(u) = \mu u$, $\eta \neq -1/3, -1$;
- $B(u) = \varepsilon/u$, $A(u) = \lambda/u + \mu u$.

Во всех этих случаях алгебра симметрий разрешима.

Случай $B(u) = \varepsilon u$, $A(u) = \lambda u^2 + \mu u$

В этом случае производящая функция векторных полей из алгебры симметрий имеет вид

$$S = -(at + b)u_t - ((a/2)(x + \mu t) + (\lambda Ct + D))u_x - \frac{1}{2}(au - C).$$

Алгебра симметрий порождается четырьмя векторными полями

$$X_1 = t\partial_t + \frac{1}{2}(x + \mu t)\partial_x - \frac{1}{2}u\partial_u,$$

$$X_2 = \partial_t,$$

$$X_3 = \lambda t\partial_x + \frac{1}{2}\partial_u,$$

$$X_4 = \partial_x$$

со следующей таблицей коммутирования:

| $[\cdot, \cdot]$ | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 |
|------------------|-----------------------------|----------------------------|-------------------|------------------|
| X_1 | 0 | $X_2 + \frac{1}{2}\mu X_4$ | $-\frac{1}{2}X_3$ | $\frac{1}{2}X_4$ |
| X_2 | $-X_2 - \frac{1}{2}\mu X_4$ | 0 | $-\lambda X_4$ | 0 |
| X_3 | $\frac{1}{2}X_3$ | λX_4 | 0 | 0 |
| X_4 | $-\frac{1}{2}X_4$ | 0 | 0 | 0 |

Алгебра дифференциальных инвариантов действия алгебры симметрий на пространстве решений уравнения Рапопорта–Лиса свободно порождается дифференциальными инвариантами

$$J = \frac{(u_t + u_x(2\lambda u + \mu))^2}{u_x^3},$$

$$K = \frac{(u_t^3 + (2\lambda u + \mu)u_x u_t^2 - \varepsilon u_x(2\lambda u_t u_{tx} - \mu u_x u_{tt}))^2}{u_x^9}$$

и инвариантным дифференцированием ∇ . К сожалению, дифференцирование ∇ не может быть вычислено в радикалах.

Случай $B(u) = \varepsilon u^\eta$, $A(u) = \mu u$, $\eta \neq -1/3$.

В этом случае производящая функция векторных полей из алгебры симметрий имеет вид

$$S = -(at + b)u_t - ((a/2 + C)x + (a/2 - C)\mu t + D)u_x + \frac{2C}{\eta - 1}u.$$

Алгебра симметрий порождается четырьмя векторными полями

$$X_1 = (x - \mu t)\partial_x + \frac{2u}{\eta - 1}\partial_u,$$

$$X_2 = \partial_x,$$

$$X_3 = t\partial_t + \mu t\partial_x - \frac{u}{\eta - 1}\partial_u,$$

$$X_4 = \partial_t + \mu\partial_x$$

со следующей таблицей коммутирования:

| $[\cdot, \cdot]$ | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 |
|------------------|-------|--------|-------|--------|
| X_1 | 0 | $-X_2$ | 0 | 0 |
| X_2 | X_2 | 0 | 0 | 0 |
| X_3 | 0 | 0 | 0 | $-X_4$ |
| X_4 | 0 | 0 | X_4 | 0 |

Алгебра симметрий является прямой суммой $\mathfrak{a}_1(2) \oplus \mathfrak{a}_2(2)$ двух аффинных подалгебр $\mathfrak{a}_1(2) = \langle X_1, X_2 \rangle$ и $\mathfrak{a}_2(2) = \langle X_3, X_4 \rangle$.

Алгебра дифференциальных инвариантов действия алгебры симметрий на пространстве решений уравнения Рапопорта–Лиса свободно порождается дифференциальными инвариантами

$$J = \frac{u_t + \mu u_x}{u_x^2 u^{\eta-2}} \quad \text{и} \quad K$$

и инвариантным дифференцированием ∇ .

Отметим, что инвариант K и дифференцирование ∇ не могут быть вычислены в радикалах для произвольного η .

Случай $B(u) = \varepsilon/u$, $A(u) = \lambda/u + \mu u$.

В этом случае производящая функция векторных полей из алгебры симметрий имеет вид

$$S = - (at + b)u_t - (a\mu t + Ce^{(\lambda/\varepsilon)\cdot(x-\mu t)} + D)u_x + \\ + (a/2 - (\lambda/\varepsilon)Ce^{(\lambda/\varepsilon)\cdot(x-\mu t)})u.$$

Алгебра симметрий порождается четырьмя векторными полями

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\varepsilon}{\lambda}\partial_x, \\ X_2 &= e^{(\lambda/\varepsilon)\cdot(x-\mu t)}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\partial_x - u\partial_u\right), \\ X_3 &= t\partial_t + \mu t\partial_x + \frac{1}{2}u\partial_u, \\ X_4 &= \partial_t + \mu\partial_x \end{aligned}$$

со следующей таблицей коммутирования:

| $[\cdot, \cdot]$ | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 |
|------------------|-------|--------|-------|--------|
| X_1 | 0 | $-X_2$ | 0 | 0 |
| X_2 | X_2 | 0 | 0 | 0 |
| X_3 | 0 | 0 | 0 | $-X_4$ |
| X_4 | 0 | 0 | X_4 | 0 |

Алгебра симметрий является прямой суммой $\mathfrak{a}_1(2) \oplus \mathfrak{a}_2(2)$ двух аффинных подалгебр $\mathfrak{a}_1(2) = \langle X_1, X_2 \rangle$ и $\mathfrak{a}_2(2) = \langle X_3, X_4 \rangle$.

Алгебра дифференциальных инвариантов действия алгебры симметрий на пространстве решений уравнения Рапопорта–Лиса свободно порождается дифференциальными инвариантами

$$J = \frac{(u_t + \mu u_x)u^3}{(\lambda u + \varepsilon u_x)^2}$$

и K и инвариантным дифференцированием ∇ .

Отметим, что инвариант K и дифференцирование ∇ не могут быть вычислены в радикалах для произвольного μ . Для $\mu = 0$ они выглядят следующим образом:

$$K = \frac{uu_{tt}}{u_t^2}, \quad \nabla = \frac{u}{u_t} \frac{d}{dt}.$$

Размерность 5

Алгебра симметрий имеет размерность 5 в следующих случаях:

- $B(u) = \varepsilon u^{-1/3}$, $A(u) = \mu u$;
- $B(u) = \varepsilon u$, $A(u) = \lambda u^2$.

Случай $B(u) = \varepsilon u^{-1/3}$, $A(u) = \mu u$.

В этом случае производящая функция векторных полей из алгебры симметрий имеет вид

$$S = -(at + b)u_t - (C(x - \mu t)^2 + 2D(x - \mu t) + a\mu t + E)u_x - 3(C(x - \mu t) + D - a/4)u.$$

Алгебра симметрий порождается пятью векторными полями

$$\begin{aligned} X_1 &= (x - \mu t)^2 \partial_x - 3(x - \mu t)u \partial_u, \\ X_2 &= \mu \partial_t + (x - \mu t) \partial_x - \frac{3}{2}u \partial_u, \\ X_3 &= t \partial_t + \mu t \partial_x + \frac{3}{4}u \partial_u, \quad X_4 = \partial_x, \quad X_5 = \partial_t \end{aligned}$$

со следующей таблицей коммутирования:

| $[\cdot, \cdot]$ | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 | X_5 |
|------------------|--------|---------|---------|-------|--------|
| X_1 | 0 | $-2X_1$ | $-X_2$ | 0 | 0 |
| X_2 | $2X_1$ | 0 | $-2X_3$ | 0 | 0 |
| X_3 | X_2 | $2X_3$ | 0 | 0 | 0 |
| X_4 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-X_5$ |
| X_5 | 0 | 0 | 0 | X_5 | 0 |

Алгебра симметрий является прямой суммой $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{a}(2)$ алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ и аффинной алгебры $\mathfrak{a}(2)$. Радикалом алгебры симметрий является подалгебра $\mathfrak{a}(2) = \langle X_1, X_2 \rangle$.

Алгебра дифференциальных инвариантов действия алгебры симметрий на пространстве решений уравнения Рапопорта–Лиса свободно порождается дифференциальными инвариантами

$$J = \frac{9\mu u^{7/3}(u_t + \mu u_x) - \varepsilon(3uu_{tx} + \mu u_x^2 - 3u_t u_x)}{u^{7/6}(u_t + \mu u_x)^{3/2}},$$

$$K = \frac{9\mu^2 u^{7/3}(u_t + \mu u_x) - \varepsilon(3u(u_{tt} + 2\mu u_{tx}) + 4\mu^2 u_x^2)}{(u_t + \mu u_x)^2}$$

и инвариантным дифференцированием

$$\nabla = \frac{u}{u_t + \mu u_x} \left(\frac{d}{dt} + \mu \frac{d}{dx} \right).$$

Случай $B(u) = \varepsilon u$, $A(u) = \lambda u^2$.

В этом случае производящая функция векторных полей из алгебры симметрий имеет вид

$$S = -(at^2 + 2bt + C)u_t - ((at + b)x + (Dt + E))u_x - (at + b)u - \frac{1}{2}(\mu(at + b) - (ax + D)).$$

Алгебра симметрий порождается пятью векторными полями

$$X_1 = t^2 \partial_t + tx \partial_x + \frac{1}{2}(x - \mu t - 2tu) \partial_u,$$

$$X_2 = 2t \partial_t + x \partial_x - (u + \mu/2) \partial_u,$$

$$X_3 = \partial_t,$$

$$X_4 = t \partial_x + \frac{1}{2} \partial_u,$$

$$X_5 = \partial_x$$

со следующей таблицей коммутирования:

| | | | | | |
|------------------|--------|---------|---------|-------|--------|
| $[\cdot, \cdot]$ | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 | X_5 |
| X_1 | 0 | $-2X_1$ | $-X_2$ | 0 | $-X_4$ |
| X_2 | $2X_1$ | 0 | $-2X_3$ | X_4 | $-X_5$ |
| X_3 | X_2 | $2X_3$ | 0 | X_5 | 0 |
| X_4 | 0 | $-X_4$ | $-X_5$ | 0 | 0 |
| X_5 | X_4 | X_4 | 0 | 0 | 0 |

Алгебра симметрий является полупрямой суммой $\mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ подалгебры $\mathfrak{sl}(2)$ и коммутативной подалгебры \mathbb{R}^2 . Радикалом алгебры симметрий является подалгебра $\mathbb{R}^2 = \langle X_4, X_5 \rangle$.

Алгебра дифференциальных инвариантов действия алгебры симметрий на пространстве решений уравнения Рапопорта–Лиса свободно порождается дифференциальными инвариантами

$$J = \frac{(\varepsilon(2\lambda u_x^2 + u_{tx}) + 2\lambda u(u_t + 2\lambda uu_x))^3}{(u_t + 2\lambda uu_x)^4},$$

$$K = \frac{(\varepsilon u_{tt} + 8\lambda^2 uu_x(2\varepsilon u_x + \lambda u^2) + 4\lambda\varepsilon(uu_{tx} + u_t u_x) + 4\lambda^2 u^2 u_t)^3}{(u_t + 2\lambda uu_x)^5}$$

и инвариантным дифференцированием

$$\nabla = \frac{1}{(u_t + 2\lambda uu_x)^{2/3}} \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda u \frac{d}{dx} \right).$$

Глава 3

Двумерные модели фильтрации

3.1 Неизотермическая фильтрация

Безразмерные уравнения

Рассмотрим неизотермическую фильтрацию на плоскости, модель которой была построена в разделе 1.3. Уравнения этой модели имеют вид (1.25).

Введем следующие характерные величины: T — для интервала времени, L — для линейных размеров области D , M — для динамической вязкости (например, минимальное значение вязкости одной из фаз), P — для давления, K — для коэффициента проницаемости среды. Тогда в новых безразмерных переменных

$$\bar{t} = \frac{t}{T}, \quad \bar{x}_i = \frac{x_i}{L}, \quad \bar{\mu}_i = \frac{\mu_i}{M}, \quad \bar{p} = \frac{p}{P}, \quad \bar{k} = \frac{k}{K}$$

которые далее обозначаем теми же буквами без черты сверху,

система (1.25) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial(m\rho_1 s_1)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{U}_1) = 0, \\ \varepsilon \frac{\partial(m\rho_2 s_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{U}_2) = 0, \\ \varepsilon \frac{\partial(C\theta)}{\partial t} + \operatorname{div}(\theta\rho_1 c_1 \mathbf{U}_1 + \theta\rho_2 c_2 \mathbf{U}_2) = 0, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

где

$$\varepsilon = \frac{ML^2}{TKP} \quad (3.2)$$

— безразмерный параметр, характеризующий как сам нефтяной пласт, так и процесс его разработки. Этот параметр будем называть *характеристическим числом*.

Будем считать характеристическое число малым, т.е.

$$\varepsilon < 1.$$

Как и выше, обозначим $s_1 = \sigma$ и $s_2 = 1 - \sigma$. При сделанных предположениях система (3.1) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \left(\sigma \frac{\partial(m\rho_1)}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial t} + m\rho_1 \frac{\partial\sigma}{\partial t} \right) = h_1\rho_1\Delta p + \\ \quad + \frac{\partial(h_1\rho_1)}{\partial\theta}(\nabla\theta, \nabla p) + \rho_1 \frac{\partial h_1}{\partial\sigma}(\nabla\sigma, \nabla p), \\ \varepsilon \left((1-\sigma) \frac{\partial(m\rho_2)}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial t} - m\rho_2 \frac{\partial\sigma}{\partial t} \right) = h_2\rho_2\Delta p + \\ \quad + \frac{\partial(h_2\rho_2)}{\partial\theta}(\nabla\theta, \nabla p) + \rho_2 \frac{\partial h_2}{\partial\sigma}(\nabla\sigma, \nabla p), \\ \varepsilon \left(\theta \frac{\partial C}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial t} + m\theta(c_1\rho_1 - c_2\rho_2) \frac{\partial\sigma}{\partial t} \right) = A\Delta p + \\ \quad + \frac{\partial A}{\partial\theta}(\nabla\theta, \nabla p) + B(\nabla\sigma, \nabla p), \end{array} \right. \quad (3.3)$$

где Δ — оператор Лапласа, $(\nabla\theta, \nabla p)$ — скалярное произведение градиентов,

$$A = \theta(c_1\rho_1 h_1 + c_2\rho_2 h_2), \quad B = \theta \left(c_1\rho_1 \frac{\partial h_1}{\partial \sigma} + c_2\rho_2 \frac{\partial h_2}{\partial \sigma} \right).$$

Асимптотические разложения

Будем искать асимптотические представления решений системы (3.3) в виде степенных рядов по малому параметру ε :

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \sum_{k \geq 0} p_k(x, t) \frac{\varepsilon^k}{k!}, \\ \sigma(x, t) &= \sum_{k \geq 0} \sigma_k(x, t) \frac{\varepsilon^k}{k!}, \\ \theta(x, t) &= \sum_{k \geq 0} \theta_k(x, t) \frac{\varepsilon^k}{k!}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В силу предположения о непроницаемости границы ∂D для фаз и для тепла, функции p_k и θ_k удовлетворяет граничным условиям

$$\left. \frac{\partial p_k}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial D} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial \theta_k}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial D} = 0 \quad (3.5)$$

для $k \geq 0$. Здесь \mathbf{n} — внутренняя нормаль к границе ∂D .

Предположим, что определитель

$$\det \begin{vmatrix} h_1\rho_1 & \frac{\partial(h_1\rho_1)}{\partial \theta} & \rho_1 \frac{\partial h_1}{\partial \sigma} \\ h_2\rho_2 & \frac{\partial(h_2\rho_2)}{\partial \theta} & \rho_2 \frac{\partial h_2}{\partial \sigma} \\ A & \frac{\partial A}{\partial \theta} & B \end{vmatrix} \neq 0.$$

Это предположение вполне естественно, т.к. входящие в матрицу функции известны из опыта приближенно. Тогда нулевые члены

представлений решений удовлетворяют уравнениям

$$\Delta p_0 = 0, \quad (\nabla p_0, \nabla \sigma_0) = 0, \quad (\nabla p_0, \nabla \theta_0) = 0, \quad (3.6)$$

т.е. функция p_0 является гармонической.

Предположим, что в точках a_j области D расположены скважины, и заданы интенсивности $c_j(t)$ изменения давления на скважине a_j . На закачивающих скважинах эти функции положительны, а на добывающих — отрицательны. Интенсивности $c_j(t)$ являются управляющими параметрами.

Функцию $p_0(x, t)$, находим как решение задачи Неймана для уравнения

$$\Delta p_0 = \sum_j c_j(t) \delta_{a_j}, \quad (3.7)$$

с граничным условием

$$\left. \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial D} = 0. \quad (3.8)$$

Здесь \mathbf{n} — внутренняя нормаль к границе ∂D , а δ_{a_j} — дельта-функция Дирака: $\delta_{a_j} = \delta(x - a_j)$.

Необходимым и достаточным условием существования решения задачи Неймана является условие

$$\sum_{j=1}^m c_j(t) = 0,$$

которое мы предполагаем выполненным. Физический смысл этого условия заключается в том, что в каждый момент времени суммарный объем фаз внутри области D остается неизменным — количество жидкости, поступающей в нагнетательные скважины, равно количеству отбираемой из добывающих скважин жидкости.

Предложение 1. Задача Неймана (3.7), (3.8), также как и система дифференциальных уравнений (3.6), инвариантна относительно группы конформных преобразований плоскости, т.е. если $p_0(x, t)$ — решение задачи Неймана в области D , функция

$\sigma_0(x, t)$ удовлетворяет уравнению (3.6) в области $D \setminus \bigcup_j \{a_j\}$, а $\varphi : D' \rightarrow D$ — конформное преобразование, то $\varphi^*(p_0) = p_0 \circ \varphi$ являются решением задачи Неймана (3.7), (3.8) в области D' с фиксированными точками a'_j , где $\varphi(a'_j) = a_j$, функция $\varphi^*(\sigma_0)$ также удовлетворяет уравнению (3.6) в области $D' \setminus \bigcup_j \{a'_j\}$.

Используя это предложение и теорему Римана об отображении, утверждающую, что для всякой односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей, существует конформное отображение $\varphi : D \rightarrow \mathcal{D}$ этой области на единичный круг \mathcal{D} , можно свести задачу (3.7), (3.8) к аналогичной задаче на единичном круге \mathcal{D} .

Отметим, что конформное отображение $\varphi : D \rightarrow \mathcal{D}$ в теореме Римана не единственно. Оно определяется с точностью до преобразований Мёбиуса, т.е. дробно-линейных преобразований, сохраняющих единичный диск. Эти преобразования образуют трехмерную группу Ли $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{R})$.

Итак, пусть $\varphi : D \rightarrow \mathcal{D}$ — конформное преобразование, $\bar{a}_j = \varphi(a_j)$ — образы скважин $a_j \in D$ при этом преобразовании, а q — решение следующей задачи Неймана на единичном диске:

$$\begin{cases} \Delta q = \sum_j c_j(t) \delta_{\bar{a}_j}, \\ \left. \frac{\partial q}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S^1} = 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

где S^1 — единичная окружность.

Решение задачи Неймана (3.9) представим в виде:

$$q(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_j c_j(t) \ln |x - \bar{a}_j| + \tilde{q}(x, t),$$

где $\tilde{q}(x, t)$ — гармоническая функция, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D}$.

Граничные условия (3.9) для функции $q(x, t)$ дают следующие граничные условия для функции $\tilde{q}(x, t)$:

$$\left. \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S^1} = \frac{1}{2\pi} \sum_j c_j(t) \frac{1 - (\eta, \bar{a}_j)}{|\eta - \bar{a}_j|^2}$$

в точке $\eta = (\cos \psi, \sin \psi) \in S^1$.

В силу формулы Дини (см., например, [14]), функция \tilde{q} имеет вид:

$$\tilde{q}(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \mathbf{n}} \ln |x - \eta| d\psi,$$

или окончательно

$$q(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_j c_j(t) \times \\ \times \left[\ln |x - \bar{a}_j| + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\ln |x - \eta|}{|\eta - \bar{a}_j|^2} (1 - (\eta_j, \bar{a}_j)) d\psi \right]. \quad (3.10)$$

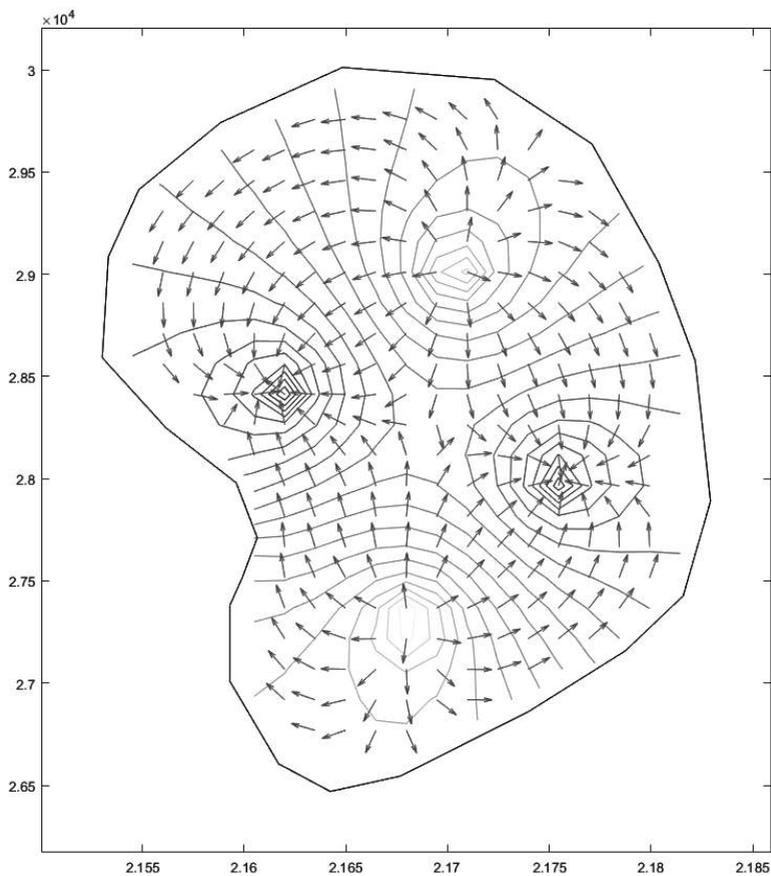
Формула (3.12) даёт способ вычисления члена нулевого порядка в асимптотическом представлении давления.

Фильтрационные потоки в области D и в полученном из неё с помощью конформного отображения φ единичном круге \mathcal{D} при наличии двух нагнетательных и двух добывающих скважин изображены на рис. 3.1, 3.1. Стрелками показан градиент давления, а сплошными линиями — изобары.

Отметим, что функция q является гармонической в области $\mathcal{D} \setminus \bigcup_j \{\bar{a}_j\}$, а отвечающая ей гармонически сопряженная функция v в силу условий Коши–Римана, также является первым интегралом векторного поля ∇q .

Для нахождения функции v заметим, что функция, гармонически сопряженная с функцией $\frac{1}{2\pi} \ln |x - \bar{a}_j|$, равна $\frac{1}{2\pi} \arg(\bar{a}_j - x)$, а функция \tilde{v} , сопряженная к функции \tilde{q} , может быть также найдена при помощи формулы Дини:

$$\tilde{v} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \mathbf{n}} \arg(x - \eta) d\psi.$$

Рис. 3.1: Фильтрационные потоки в области D

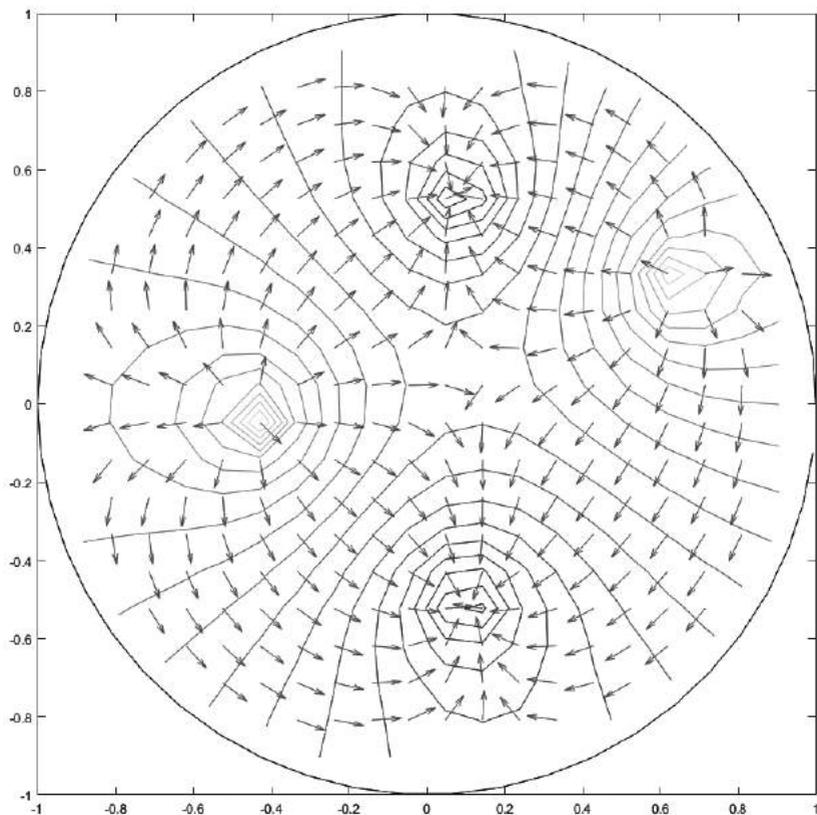


Рис. 3.2: Фильтрационные потоки в диске D

Осюда получаем, что сопряженная функция v равна:

$$v(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_j c_j(t) \left[\arg(\bar{a}_j - x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\arg(x - \eta)}{|\eta - \bar{a}_j|^2} (1 - (\eta_j, \bar{a}_j)) d\psi \right]. \quad (3.11)$$

Отметим, что функция v многозначна и ее значение меняется на $c_j(t)$ при обходе вокруг точки \bar{a}_j по малой окружности.

Из уравнений (3.6) следует, что функции σ_0 и θ_0 также являются интегралами векторного поля ∇p_0 (или ∇q , в случае единичного диска) и поэтому каждая из них функционально зависима с функцией v :

$$\sigma_0(x, t) = f(v(x, t), t), \quad \theta_0(x, t) = g(v(x, t), t).$$

Регулярные интенсивности

Рассмотрим группу \mathbb{R} действительных чисел относительно сложения и выделим в ней подгруппу $G_t \subset \mathbb{R}$, порожденную интенсивностями $c_j(t)$, в фиксированный момент времени t .

Значение t назовём *регулярным*, если подгруппа G_t замкнута в \mathbb{R} , т.е. $\bar{G}_t = G_t$, где \bar{G}_t — замыкание G_t , и *сингулярно* — в противном случае.

Лемма 1. Пусть $G \subset \mathbb{R}$ подгруппа аддитивной группы действительных чисел \mathbb{R} , и $G \neq \{0\}$, $G \neq \mathbb{R}$. Тогда G либо замкнута в \mathbb{R} , $\bar{G} = G$, либо всюду плотна в \mathbb{R} , $\bar{G} = \mathbb{R}$. В том случае, когда G замкнута в \mathbb{R} , она является циклической подгруппой \mathbb{R} , т.е. G порождена единственным элементом $c > 0$.

Доказательство. Рассмотрим замыкание \bar{G} подгруппы G и предположим, что $\bar{G} \neq \mathbb{R}$. Положим,

$$c = \inf\{x \in \bar{G} \mid x > 0\}.$$

Очевидно, что $\overline{G} = \mathbb{R}$, если $c = 0$. Пусть $c > 0$, и пусть $x \in \overline{G}$, $x > 0$. Тогда, $nc \leq x < (n+1)c$, для некоторого натурального числа $n \in \mathbb{N}$. Тем самым $x - nc \in \overline{G}$ и $0 \leq x - nc < c$, что возможно только в том случае, когда $x = nc$. Таким образом \overline{G} , как и подгруппа G порождена элементом $c > 0$. \square

Применяя эту лемму к подгруппе G_t видим, что векторное поле ∇p_0 имеет только тривиальные первые интегралы в единичном диске, если значение t сингулярно. Поэтому будем говорить, что распределения интенсивностей $c_1(t), \dots, c_m(t)$ *регулярно* если подгруппы G_t замкнуты для всех значений t .

Таким образом, распределение интенсивностей $c_1(t), \dots, c_m(t)$ регулярно тогда и только тогда, когда $c_j(t) = n_j c(t)$ для всех значений $j = 1, \dots, m$ для некоторой положительной функции $c(t)$ и для некоторых целых чисел n_j . Далее рассматриваются только регулярные интенсивности.

Суммируя полученные выше результаты, дадим следующее описание начальных членов асимптотического разложения решений уравнения Бакли–Левретта.

Теорема 5. Пусть в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей заданы скважины $a_j \in D$ с регулярным распределением интенсивностей $c_j(t)$, и пусть $\varphi : D \rightarrow \mathcal{D}$ — конформное отображение области D на единичный диск \mathcal{D} . Тогда решение системы дифференциальных уравнений, определяющей начальный член асимптотики (3.4) с граничным условием

$$\frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial D} = 0,$$

имеет вид: $p_0 = \varphi^*(q)$, $\sigma_0 = \varphi^*(f(\omega, t))$, где $c_j(t) = n_j c(t)$, $n_j \in \mathbb{Z}$, $c(t) > 0$ и $f(\omega, t)$ — периодическая функция: $f(\omega+1, t) = f(\omega, t)$, $0 \leq f(\omega, t) \leq 1$, а

$$q(x, t) = \frac{c(t)}{2\pi} \sum_j n_j \left[\ln |x - \bar{a}_j| + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\ln |x - \eta|}{|\eta - \bar{a}_j|^2} (1 - (\eta, \bar{a}_j)) d\psi \right], \quad (3.12)$$

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_j n_j \left[\arg(\bar{a}_j - x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\arg(x - \eta)}{|\eta - \bar{a}_j|^2} (1 - (\eta, \bar{a}_j)) d\psi \right]. \quad (3.13)$$

и $\eta = (\cos \psi, \sin \psi)$.

Расход тепловой энергии

Используем нулевые приближения решений уравнений Бакли–Левретта для оценки расходов горячей воды на нагнетательных скважинах.

Вычислим расходы, затраченные на поддержание давления и нагрев первой фазы (воды) на нагнетательных скважинах. Согласно закону Дарси

$$\mathbf{U}_1 = h_1(\sigma_0, \theta_0) \nabla p_0.$$

Функция давления p_0 в достаточно малой окрестности точки a_j может быть записана в виде:

$$p_0 = \frac{c(t)n_j}{2\pi} \ln |x - a_j| + \tilde{p}_j,$$

а функция v , гармонически сопряженная к функции p_0 , в этой окрестности имеет вид:

$$v = \frac{c(t)n_j}{2\pi} \arg(a_j - x) + \tilde{v}_j.$$

Здесь \tilde{p}_j и \tilde{v}_j — однозначные гармонические функции, определенные в этой окрестности.

Следовательно, линии уровня давления $S_j = \{p_0 = \alpha_j\}$ в рассматриваемой малой окрестности являются замкнутыми кривыми, содержащими точку a_j . Векторное поле градиента ∇p_0 ортогонально кривой S_j и поэтому изменение объема при потоке через кривую S_j за единицу времени равно

$$\int_{S_j} h_1(\sigma_0, \theta_0) |\nabla p_0| dl, \quad (3.14)$$

где l — функция длины на S_j .

Выберем функцию $\tau = v/c(t)$ в качестве координаты на S_j , где $0 \leq \tau \leq n_j$. Длины дифференциалов $d\tau$ и dp_0 связаны соотношением

$$|d\tau| = \frac{|dp_0|}{c(t)},$$

а поскольку $|dp_0| = |\nabla p_0|$, то на кривой S_j

$$d\tau = |d\tau| dl = \frac{1}{c(t)} |\nabla p_0| dl,$$

и, тем самым, интеграл (3.14) может быть переписан следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{S_j} h_1(\sigma_0, \theta_0) |\nabla p_0| dl &= c(t) \int_0^{n_j} h_1(f(\tau, t), g(\tau, t)) d\tau = \\ &= n_j c(t) \int_0^1 h_1(f(\tau, t), g(\tau, t)) d\tau. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Отметим также, что дифференциальная 1-форма

$$h_1(f(\tau, t), g(\tau, t)) d\tau$$

замкнута, а поэтому интеграл (3.15) не меняется при малых деформациях кривой S_j и, следовательно, не зависит от выбора конкретной замкнутой кривой в рассматриваемой окрестности.

Для каждой из двух фаз введем функции

$$\begin{aligned} L_1(t) &= \int_0^1 h_1(f(\tau, t), g(\tau, t)) d\tau d\tau, \\ L_2(t) &= \int_0^1 h_2(1 - f(\tau, t), g(\tau, t)) d\tau. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Теорема 6. Расход жидкости фазы i на скважине a_j за время T равен

$$Q_i = n_j \int_0^T c(t) L_i(t) dt. \quad (3.17)$$

Функция (1.4) на кривой S_j имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\tau, t) &= ((1 - m(g(\tau, t)))c_0\rho_0(g(\tau, t)) + \\ &+ m(g(\tau, t))c_1\rho_1(g(\tau, t))f(\tau, t) + \\ &+ m(g(\tau, t))c_2\rho_2(g(\tau, t))(1 - f(\tau, t))). \end{aligned}$$

Поэтому расход тепловой энергии при потоке через кривую S_j за единицу времени равен

$$n_j c(t) \int_0^1 \tilde{C}(\tau, t) h_1(\sigma_0, \theta_0) d\tau.$$

Введем функцию

$$K(t) = \int_0^1 \tilde{C}(\tau, t) h_1(\sigma_0, \theta_0) d\tau$$

Теорема 7. Расход тепловой энергии на нагнетательной скважине a_j за время T равен

$$P_j = n_j \int_0^T c(t) K(t) dt.$$

Разобьем скважины на две группы:

- нагнетательные $W = \{j, n_j > 0\}$
- добывающие $N = \{j, n_j < 0\}$.

Пусть

$$n = \sum_{j \in W} n_j = - \sum_{j \in N} n_j.$$

Тогда объемные расходы в первой и второй группах равны

$$Q_W = n \int_0^T c(t)L_1(t)dt \quad \text{и} \quad Q_N = n \int_0^T c(t)L_2(t)dt. \quad (3.18)$$

соответственно. Расход тепловой энергии на скважинах первой группы равен

$$P_W = n \int_0^T c(t)K(t)dt.$$

3.2 Оптимальное управление

Пусть y и z — стоимость закачки в скважину и стоимость нагрева одной единицы воды соответственно. Тогда стоимость закачки горячей воды в первую группу скважин равна

$$R = yQ_W + zP_W.$$

Предположим, что функция $c(t)$ постоянна, т.е. $c(t) = c$, а функции $f(\tau, t)$ и $g(\tau, t)$ не зависят от t .

Рассмотрим следующие задачи оптимального управления разработкой нефтяного месторождения: найти распределение интенсивностей $c_j = n_j c$ и периодические функции $f(\tau)$ и $g(\tau)$, удовлетворяющие условиям

$$0 < f(\tau) < 1 \quad \text{и} \quad 0 < g(\tau) < 1 \quad (3.19)$$

и такие, чтобы

- либо количество добываемой нефти Q_N было максимальным при заданной стоимости R ,
- либо количество затрат R было минимально при заданном уровне добычи Q_N .
- либо количество добываемой нефти Q_N было максимальным при заданном расходе воды Q_W ,
- либо количество использованной воды Q_W было минимально при заданном уровне добычи Q_N .

При сделанных предположениях имеем:

$$Q_W = ncTL_W, \quad Q_N = ncTL_N, \quad R = yncTL_W + zncTG$$

где

$$\begin{aligned} L_W &= \int_0^1 h_1(f(\tau), g(\tau)) d\tau, \\ L_N &= \int_0^1 h_2(1 - f(\tau), g(\tau)) d\tau, \\ G &= \int_0^1 \tilde{C}(\tau) h_1(f(\tau), g(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Поэтому две первые задачи сводятся к нахождению минимума функционала

$$\frac{R}{Q_N} = \frac{yL_W + zG}{L_N}, \quad (3.20)$$

а две последние — к нахождению минимума функционала

$$L_W/L_N.$$

Экстремали функционалов

Нахождение экстремалей функционала (3.20), как функционала, зависящего от периодических функций f и g — крайне сложная задача. Поэтому ограничимся рассмотрением случая, когда

эти функции являются тригонометрическими полиномами степени m , т.е. имеют вид

$$a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos(2\pi k\tau) + b_k \sin(2\pi k\tau)), \quad (3.21)$$

а также предположим, что функции $f_1(\sigma)$ и $f_2(1 - \sigma)$, известные только из экспериментов, также являются полиномами.

Опишем класс периодических функций (3.21), удовлетворяющих условию (3.19). Обозначим множество таких тригонометрических полиномов через \mathcal{F}_m . В силу теоремы Феджера–Рисса [44] условие положительности тригонометрического полинома $f(\tau)$ эквивалентно тому, что коэффициенты этого полинома представляются в виде

$$a_0 = \sum_{k=0}^m |c_k|^2, \quad a_k - ib_k = 2 \sum_{j=0}^{m-k} c_{k+j} \bar{c}_j \quad (k = 1, \dots, m) \quad (3.22)$$

для некоторых комплексных чисел c_0, \dots, c_m . С другой стороны, условие $f(\tau) < 1$, эквивалентно условию положительности: $1 - f(\tau) > 0$, и, следовательно, аналогично (3.22), найдутся комплексные числа h_0, \dots, h_m , такие, что

$$1 - a_0 = \sum_{k=0}^m |h_k|^2, \quad a_k - ib_k = -2 \sum_{j=0}^{m-k} h_{k+j} \bar{h}_j \quad (3.23)$$

для $k = 1, \dots, m$.

Условия (3.22) и (3.23) означают, что векторы $(c_0, \dots, c_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$ и $(h_0, \dots, h_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$ не произвольны, а удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^m (|c_k|^2 + |h_k|^2) = 1, \\ \sum_{j=0}^{m-k} (c_{k+j} \bar{c}_j + h_{k+j} \bar{h}_j) = 0, \end{cases} \quad (3.24)$$

Обозначим через $\Phi_r \subset \mathbb{C}^{2m+2}$ пространство решений системы (3.24). Это пространство является замкнутым подмножеством сферы $S^{4m+3} \subset \mathbb{C}^{2m+2}$ и, стало быть, компактно.

Решение системы (3.24) не изменятся, если заменим все c_j на $e^{i\alpha}$, а h_j на $e^{i\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Это в точности соответствует утверждению о единственности в теореме Феджера–Рисса. Иначе говоря, двумерный тор $T^2 = S^1 \times S^1$, рассматриваемый как компактная группа Ли, действует на Φ_r следующим образом: если $g = (e^{i\alpha}, e^{i\beta}) \in T^2$ и $(c, h) \in \Phi_r$, то действие g на (c, h) равно

$$g(c, h) = (e^{i\alpha}c, e^{i\beta}h) \in \Phi_r, \quad (3.25)$$

а теорема Феджера–Рисса означает, что полиномы (3.21) в точности отвечают орбитам группы T^2 на множестве Φ_r . А поскольку T^2 и Φ_r компактны, то и множество орбит \mathcal{F}_r также компактно. Таким образом приходим к следующему результату.

Теорема 8. Пространство \mathcal{F}_r является компактным многообразием, совпадающим с пространством орбит Φ_r/T^2 действия (3.25) двумерного тора на пространстве решений Φ_r системы (3.24).

Рассмотрим функционалы вида $\int_0^1 P(f(\tau))d\theta$, входящие в формулу (3.20), полагая что P — полином, а функция f имеет (3.21) и удовлетворяет условию (3.19). Можно показать, что такие функционалы являются полиномиальными функциями на \mathcal{F}_m .

Теорема 9.

1) Функционал (3.20) является положительной рациональной функцией на компактном многообразии \mathcal{F}_m всех тригонометрических полиномов степени m , удовлетворяющих условию (3.19).

2) Для каждого натурального числа m найдется такой тригонометрический полином $f_m \in \mathcal{F}_m$, где функционал L_N/L_W принимает максимальное значение.

3) Значение функционала L_N/L_W на полиноме \mathcal{F}_m не превосходит значения на полиноме f_{m+1} .

4) Коэффициент nc , входящий в определение интенсивностей, равен:

$$nc = \frac{Q_W}{TL_W(f_m)} \quad (3.26)$$

для задачи управления с заданным расходом Q_W и

$$nc = \frac{Q_N}{TL_N(f_m)} \quad (3.27)$$

для задачи управления с заданным уровнем добычи Q_N .

Таким образом, задача нахождения экстремалей функционала (3.20) сведена к задаче нахождения экстремумов рациональной функции на компактном многообразии, решение которой может быть получено известными методами.

Интенсивности закачки и отбора

Представим интенсивности $c_j = n_j c$ в виде:

$$c_j = p_j \cdot nc \quad \text{для } j \in W \quad \text{и} \quad c_j = -q_j \cdot nc \quad \text{для } j \in N,$$

где $p_j = \frac{n_j}{n}$ $j \in W$, $q_j = \frac{-n_j}{n}$, $j \in N$ и $\sum_{j \in W} p_j = 1$, $\sum_{j \in N} q_j = 1$.

Отметим, что для оптимальных режимов управления, величина nc может быть вычислена на основе формул (3.26) или (3.27).

Для нахождения $\{p_j\}$ и $\{q_j\}$, которые мы будем интерпретировать как распределения вероятностей на множествах скважин W и N соответственно, мы воспользуемся принципом максимума энтропии и геометрией взаимного расположения скважин.

Для нахождения интенсивностей c_j или, что эквивалентно, “вероятностей” p_j или q_j , мы воспользуемся принципом максимума энтропии и рассмотрим отдельно два случая:

1) заданы случайные величины X_i , $i \in W$ или $i \in N$;

2) задана случайная величина X_{ij} , где $i, j \in N$ и W .

Например,

$$1) X_i = \max_j (|a_i - a_j|), i \in W, j \in N.$$

$$2) X_{ij} = |a_i - a_j|, i \in W, j \in N.$$

3) Значения $X_i, i \in N$, характеризуют мощность нефтяного пласта на скважине a_i .

Энтропия распределения $\{p_i\}$ равна

$$s(p) = - \sum_{i \in W} \ln p_i.$$

Пусть

$$\bar{X} = \sum_{i \in W} p_i x_i$$

— среднее значение величины X . Распределение $\{p_i\}$ ищется из условия максимальности энтропии $s(p)$, при заданном значении A среднего \bar{X} .

Рассмотрим функцию

$$F = S(p) + \lambda_0 \left(\sum_{j \in W} p_j - 1 \right) + \lambda \left(\sum p_i X_i - A \right),$$

где λ_0, λ — множители Лагранжа. Тогда условие

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = 0$$

приводит к соотношениям:

$$p_i = e^{\lambda_0 - 1} e^{\lambda x_i}.$$

Далее, связи $\sum p_i = 1$ и $\langle x \rangle = A$ показывают, что

$$p_i = \frac{1}{Z(\lambda)} e^{\lambda x_i}, \quad (3.28)$$

где

$$Z(\lambda) = \sum_i e^{\lambda x_i},$$

а параметр λ находится из уравнения:

$$Z'_\lambda = AZ. \quad (3.29)$$

В случае, когда задана случайная величина X_{ij} вычисления распределения вероятностей $\{p_{ij}\}$ полностью аналогично и приводит к соотношениям

$$p_{ij} = \frac{1}{Z(\lambda)} e^{\lambda x_{ij}}, \quad (3.30)$$

где

$$Z(\lambda) = \sum_{i,j} e^{\lambda x_i},$$

и параметр λ определяется также из соотношения (3.29). При этом,

$$p_i = \sum_j p_{ij}, \quad q_j = \sum_i p_{ij}$$

Теорема 10. Распределения интенсивностей p_i, q_j дающие максимальное значение энтропии при заданных средних A , дается формулами (3.28) или (3.30), где параметр λ определяется из уравнения (3.29).

Отметим, что эта теорема иллюстрирует использование вероятностных методов для нахождения распределений интенсивностей на скважинах при условиях выбора оптимального управления. Величины X_i , $i \in W$ или $i \in N$, а также X_{ij} , $i \in W$, $j \in N$ могут быть выбраны в зависимости от геометрии области и геометрии распределения скважин, а также с учетом мощностей нефтяного пласта.

3.3 Симметрии уравнений Бакли–Левверетта

Проведем классификацию симметрий уравнений модели Бакли–Левверетта (1.15), т.е. системы вида

$$\begin{cases} \sigma_t + \operatorname{div}(A(\sigma)\nabla p) = 0 \\ \operatorname{div}(B(\sigma)\nabla p) = 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

Рассмотрим пространство J^1 1-джетов с каноническими координатами

$$t, x, y, \sigma, p, \sigma_t, p_t, \dots$$

В этих координатах дифференциальные 1-формами Картана имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_{01} &= d\sigma - \sigma_t dt - \sigma_x dx - \sigma_y dy, \\ \omega_{02} &= dp - p_t dt - p_x dx - p_y dy. \end{aligned}$$

Пусть J^2 — пространство 2-джетов функций от переменных t, x, y . Система Бакли–Левверетта (3.31) задает поверхность \mathcal{BL} :

$$\begin{cases} \sigma_t + A'(\sigma)(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y) + A(\sigma)(p_{xx} + p_{yy}) = 0 \\ B'(\sigma)(\sigma_x p_x + \sigma_y p_y) + B(\sigma)(p_{xx} + p_{yy}) = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

в пространстве J^2 .

Вычисления становятся много проще после перехода к комплексным координатам: $(x, y) \mapsto (z, \bar{z})$ где $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$. Система (3.32) преобразуется в следующую систему:

$$\begin{cases} \sigma_t + 2A'(\sigma)(\sigma_z p_{\bar{z}} + \sigma_{\bar{z}} p_z) + 4A(\sigma)p_{z\bar{z}} = 0 \\ B'(\sigma)(\sigma_z p_{\bar{z}} + \sigma_{\bar{z}} p_z) + 2B(\sigma)p_{z\bar{z}} = 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

в пространстве J^2 .

Чтобы вычислить симметрии системы Бакли–Левверетта, мы используем инфинитезимальную форму симметрий, т.е. вычислим векторные поля, порождающие алгебру Ли группы симметрий.

Согласно теореме Ли–Беклунда, каждое контактное векторное поле на пространстве J^2 2-джетов является продолжением некоторого векторного поля X на пространстве J^0 0-джетов.

Таким образом, чтобы найти контактные симметрии различных классов систем Бакли–Леверетта, необходимо получить соотношения на компоненты векторного поля X . Эти соотношения являются дифференциальными уравнениями на эти компоненты, которые могут быть решены.

Алгебры симметрий

Представим результаты вычислений алгебр симметрий для систем Бакли–Леверетта (3.31).

Результаты вычислений можно разделить на два класса, зависящих от структуры алгебр симметрий. Мы покажем общий вид производящей функции симметрий и базис алгебры симметрий из векторных полей.

Всюду далее мы предполагаем, что функции A и B не пропорциональны друг другу, т.е. что $A(\sigma) \neq \lambda \cdot B(\sigma)$.

Общий случай

В этом разделе мы опишем алгебру симметрий для систем Бакли–Леверетта (3.31) общего положения. Более точно, скажем, что система (3.33) является системой *общего положения*, если функция B не линейна, т.е. $B(\sigma) \neq \alpha\sigma + \beta$.

Теорема 11. 1. Алгебра симметрий \mathfrak{g} системы Бакли–Леверетта общего положения (3.33) состоит из векторных полей

$$X = T(t)\partial_t + (az+b)\partial_z + (c\bar{z}+d)\partial_{\bar{z}} + ((a+c-T'(t))p+G(t))\partial_p. \quad (3.34)$$

2. Количество независимых дифференциальных инвариантов для действия алгебры симметрий \mathfrak{g} на пространстве решений си-

стемы Балкея–Леверетта (3.31) общего положения представлено в следующей таблице:

| | | | | | |
|------------------------|---|---|---|---|------|
| порядок инвариантов | 0 | 1 | 2 | 3 | k |
| количество инвариантов | 1 | 1 | 6 | 9 | $3k$ |

3. Алгебра дифференциальных инвариантов действия алгебры \mathfrak{g} симметрий системы Бакли–Леверетта (3.31) общего положения порождается дифференциальными инвариантами

$$I_0 = \sigma, \quad I_1 = \frac{\sigma_z p_{\bar{z}}}{\sigma_{\bar{z}} p_z}, \quad J_1 = \frac{\sigma_{zz}}{\sigma_z^2}, \quad J_2 = \frac{\sigma_{z\bar{z}}}{\sigma_z \sigma_{\bar{z}}}, \quad J_3 = \frac{\sigma_{\bar{z}\bar{z}}}{\sigma_{\bar{z}}^2}$$

и инвариантными дифференцированиями

$$\nabla_1 = \frac{1}{\sigma_t} \frac{d}{dt}, \quad \nabla_2 = \frac{1}{\sigma_z} \frac{d}{dz}, \quad \nabla_3 = \frac{1}{\sigma_{\bar{z}}} \frac{d}{d\bar{z}}.$$

Доказательство. Первый пункт теоремы получается прямыми вычислениями.

Для доказательства второго пункта рассмотрим проекции

$$\pi_{k,k-1}: \mathcal{BL}_k \rightarrow \mathcal{BL}_{k-1},$$

последовательность джетов $\{\theta_k\}$, проектирующихся друг в друга (т.е. $\theta_k \in \mathcal{BL}_k$) и $\pi_{k,k-1}(\theta_k) = \theta_{k-1}$) и слои $V_{\theta_{k-1}}$ проекций $\pi_{k,k-1}$ над джетами θ_{k-1} .

Определим подалгебру изотропии $\widehat{\mathfrak{g}}_{\theta_{k-1}} \subset \widehat{\mathfrak{g}}^{(k)}$, состоящую из касательных векторов $\widehat{X}_{\theta_{k-1}}^{(k)}$, обращающихся в 0 в точке θ_{k-1} :

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{\theta_{k-1}} = \{\widehat{X}_{\theta_{k-1}}^{(k)} : \widehat{X}_{\theta_{k-1}}^{(k-1)} = 0\}.$$

Из формулы (3.34) следует, что векторы из подалгебры изотропии $\widehat{\mathfrak{g}}_{\theta_{k-1}}$ зависят от переменных $a, b, c, d, t_i = T^{(i)}(0)$ и $g_j = G^{(j)}(0)$, где $i \leq k+1$ и $j \leq k$.

Подалгебра изотропии $\widehat{\mathfrak{g}}_{\theta_{k-1}}$ действует на слое $V_{\theta_{k-1}}$. Количество независимых дифференциальных инвариантов чистого порядка k равно коразмерности орбиты общего положения этого действия.

Из уравнений (3.33) следует, что переменные

$$\sigma_{z\dots z\bar{z}\dots\bar{z}}, \quad p_{t\dots tz\dots z}, \quad p_{t\dots t\bar{z}\dots\bar{z}}$$

могут быть выбраны в качестве системы координат на слое $V_{\theta_{k-1}}$. Следовательно,

$$\dim V_{\theta_{k-1}} = (k+1) + 2(k+1) - 1 = 3k+2.$$

Теперь вычислим подалгебры изотропии. С помощью прямых вычислений, получаем, что подалгебры изотропии имеют следующий вид для $k \geq 3$:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{g}}_{\theta_0} = \{ & t_0 \partial_t + b \partial_z + d \partial_{\bar{z}} + g_0 \partial_p - t_1 \sigma_t \partial_{\sigma_t} - a \sigma_z \partial_{\sigma_z} - c \sigma_{\bar{z}} \partial_{\sigma_{\bar{z}}} + \\ & + ((a+c-2t_1)p + g_1) \partial_{p_t} + p_z (c-t_1) \partial_{p_z} + p_{\bar{z}} (a-t_1) \partial_{p_{\bar{z}}} \}, \end{aligned}$$

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{\theta_1} = \{-t_2(\sigma_t \partial_{\sigma_{tt}} + p_z \partial_{p_{tz}} + p_{\bar{z}} \partial_{p_{t\bar{z}}}) + (g_2 - 3t_2 p_t) \partial_{p_{tt}}\},$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{g}}_{\theta_{k-1}} = \{ & -t_k(\sigma_t \partial_{\sigma_{t\dots t}} + p_z \partial_{p_{t\dots tz}} + p_{\bar{z}} \partial_{p_{t\dots t\bar{z}}}) + \\ & + (g_k - (k+1)t_k p_t) \partial_{p_{t\dots t}} \} \end{aligned}$$

Наконец, искомая коразмерность орбиты общего положения действия подалгебры изотропии $\widehat{\mathfrak{g}}_{\theta_{k-1}}$ на слое $V_{\theta_{k-1}}$ равна 0 при $k \leq 2$, 1 при $k = 3$ и k при $k \geq 4$.

Значит, количество независимых дифференциальных инвариантов чистого порядка k равно

$$\dim V_{\theta_{k-1}} - \dim \mathfrak{g}_{\theta_{k-1}} = (3k+2) - 2 = 3k.$$

Это завершает доказательство второго пункта теоремы.

Осталось доказать третий пункт теоремы. Инвариантность функций I_0, I_1, J_1, J_2, J_3 и дифференцирований $\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3$ проверяется прямыми вычислениями.

Далее, рассмотрим инварианты

$$\nabla_3^q \nabla_2^p J_1, \quad \nabla_2^{k-2} J_3, \quad \nabla_3^q \nabla_1^{p+1} I_1, \quad \nabla_2^q \nabla_1^{p+1} I_1$$

порядка k (здесь $p + q = k - 2$). Количество таких инвариантов равно $(k - 1) + 1 + 2k = 3k$. Вычисляя символы этих инвариантов, легко убедиться в том, что они действительно функционально независимы.

Тем самым наша теорема полностью доказана. \square

Особый случай

В этом разделе мы опишем алгебру симметрий для особых систем Бакли–Леверетта (3.31). Напомним, что система Бакли–Леверетта называется особой, если функция B линейна, т.е.

$$B(\sigma) = \alpha\sigma + \beta.$$

Ниже мы для простоты предполагаем, что $B(\sigma) = \sigma$. В некотором роде этот случай является самым важным, поскольку каждая (даже неособая) система Бакли–Леверетта может быть сведена к такому случаю подходящим преобразованием переменной σ .

Теорема 12. 1. Если $B(\sigma) = \sigma$, то алгебра симметрий \mathfrak{g} соответствующей системы Бакли–Леверетта состоит из векторных полей вида

$$T(t)\partial_t + (az + b)\partial_z + (c\bar{z} + d)\partial_{\bar{z}} + \lambda\sigma\partial_\sigma + ((a + c + \lambda - T'(t))p + G(t))\partial_p.$$

2. Количество независимых дифференциальных инвариантов действия алгебры симметрий \mathfrak{g} на пространстве решений системы Бакли–Леверетта (3.31) представлено в следующей таблице:

| | | | | | |
|------------------------|---|---|---|---|------|
| порядок инвариантов | 0 | 1 | 2 | 3 | k |
| количество инвариантов | 0 | 1 | 6 | 9 | $3k$ |

3. Алгебра дифференциальных инвариантов действия алгебры симметрий \mathfrak{g} на пространстве решений системы Бакли–Левретта (3.31) порождается дифференциальными инвариантами

$$I_1 = \frac{\sigma_z p_{\bar{z}}}{\sigma_{\bar{z}} p_z}, \quad \tilde{J}_1 = \frac{\sigma \sigma_{zz}}{\sigma_z^2}, \quad \tilde{J}_2 = \frac{\sigma \sigma_{z\bar{z}}}{\sigma_z \sigma_{\bar{z}}}, \quad \tilde{J}_3 = \frac{\sigma \sigma_{\bar{z}\bar{z}}}{\sigma_{\bar{z}}^2}$$

и инвариантными дифференцированиями

$$\tilde{\nabla}_1 = \frac{\sigma}{\sigma_t} \frac{d}{dt}, \quad \tilde{\nabla}_2 = \frac{\sigma}{\sigma_z} \frac{d}{dz}, \quad \tilde{\nabla}_3 = \frac{\sigma}{\sigma_{\bar{z}}} \frac{d}{d\bar{z}}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 11.

3.4 Бегущие волны

Опишем метод построения точных решений вида бегущих волн, который применяется к моделям Бакли–Леверетта и Рапопорта–Лиса. Под бегущими волнами [57] понимаются решения вида

$$u(t, x) = U(a(t, x)),$$

где U — функция одной переменной, а a — некоторая функция двух переменных.

Модель Бакли–Леверетта

Рассмотрим сначала модель Бакли–Леверетта (1.15), т.е. система

$$\begin{cases} \sigma_t + \operatorname{div}(A(\sigma)\nabla p) = 0 \\ \operatorname{div}(B(\sigma)\nabla p) = 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Преобразование уравнений

Теорема 13. Существует функция h такая, что система уравнений (3.35) может быть переписана в форме

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} + G(s)(\nabla p, \nabla s) = 0, \\ \Delta p + (\nabla p, \nabla s) = 0, \end{cases} \quad (3.36)$$

с помощью подстановки $\sigma(t, x, y) = h(s(t, x, y))$.

Доказательство. Второе уравнение системы (3.35) можно записать в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = -\operatorname{div}(B\nabla p) = -B\Delta p - B'(\nabla p, \nabla \sigma) = 0$$

или

$$\Delta p + \frac{B'}{B}(\nabla p, \nabla \sigma) = 0. \quad (3.37)$$

Выберем функцию h такую что уравнение (3.37) примет вид

$$\Delta p + (\nabla p, \nabla s) = 0,$$

после подстановки $\sigma = h(s)$, а именно

$$\Delta p + h'(s) \frac{B'}{B} (\nabla p, \nabla s) = 0.$$

Легко видеть, что функция h удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{B'(h(s))}{B(h(s))} h'(s) = 1,$$

которое имеет общее решение вида $h(s) = B^{-1}(Ce^s)$, что доказывает существование функции h . Здесь C — произвольная постоянная.

Окончательно получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{A'(h(s))B(h(s))}{\phi} (\nabla p, \nabla s) = 0, \\ \Delta p + (\nabla p, \nabla s) = 0. \end{cases}$$

□

В дальнейшем мы будем изучать систему (3.36) вместо системы (3.35).

Решения типа бегущей волны

В этом параграфе мы находим решение типа бегущей волны системы (3.36). Иными словами, мы отыскиваем решение в виде

$$s(t, x, y) = S(a(t, x, y)), \quad p(t, x, y) = P(a(t, x, y)),$$

где функция a называется фронтом волны, а функции P и S суть значения давления и насыщенности на фронте волны.

Мы будем рассматривать случай, когда функция a такова, что ∇p не обращается в нуль. Следовательно, ни P' , ни ∇a в нуль не обращаются.

Предложение 2. Решения типа бегущей волны системы уравнений (3.36) получаются из решений следующей системы уравнений

$$\begin{cases} a_t = -P'G(S) (a_x^2 + a_y^2), \\ a_{xx} + a_{yy} + \left((\ln P')' + S' \right) (a_x^2 + a_y^2) = 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Система уравнений (3.38) может быть упрощена с помощью следующей теоремы.

Теорема 14. Найдётся функция H такая, что второе уравнение системы (3.38) перейдёт в уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ при подстановке $a(t, x, y) = H(u(t, x, y))$.

Доказательство. Сделав подстановку $a(t, x, y) = H(u(t, x, y))$ в систему (3.38), мы получим

$$\begin{cases} u_t = -\tilde{P}'G(\tilde{S}) (u_x^2 + u_y^2), \\ u_{xx} + u_{yy} + \left((\ln \tilde{P}')' + \tilde{S}' \right) (u_x^2 + u_y^2) = 0, \end{cases} \quad (3.39)$$

где

$$\tilde{P}(u) = P(H(u)), \quad \tilde{S}(u) = S(H(u)).$$

Если коэффициент $(\ln \tilde{P}')' + \tilde{S}'$ обращается в нуль, то

$$\begin{aligned} \ln \tilde{P}' + \tilde{S} &= c = \text{const}, \\ \tilde{P}' e^{\tilde{S}} &= c_1, \quad c_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Последнее выражение даёт нам следующее обыкновенное дифференциальное уравнение на функцию H

$$e^{S(H(u))} P'(H(u)) H'(u) = c_1.$$

Поскольку производная P' в нуль не обращается, это уравнение имеет решение.

Существование решения этого уравнения доказывает существование функции H , обладающего нужными свойствами. \square

Следствие 2. На волновых фронтах решений имеет место соотношение (3.40), связывающее давление и насыщенность смачивающей фазы.

Таким образом, мы можем рассматривать систему

$$\begin{cases} u_t = -\tilde{P}'G(\tilde{S})(u_x^2 + u_y^2), \\ u_{xx} + u_{yy} = 0. \end{cases} \quad (3.41)$$

Введя комплексные переменные $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, запишем систему (3.41) в виде

$$\begin{cases} u_t = E(u)u_z u_{\bar{z}}, \\ u_{z\bar{z}} = 0, \end{cases} \quad (3.41')$$

где

$$E(u) = -4\tilde{P}'G(\tilde{S}),$$

и

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Заметим, однако, что функции u и E должны быть вещественнозначными.

Прежде чем решать систему (3.41') мы опишем способ, которым можно найти давление и насыщенность.

Теорема 15. Давление \tilde{P} и насыщенность \tilde{S} на фронтах волн выражаются (неявно) следующим образом

$$\begin{aligned} e^{-\tilde{S}(u)}G(\tilde{S}(u)) &= -\frac{1}{4c_1}E(u), \\ \tilde{P}(u) &= c_1 \int e^{-\tilde{S}(u)} du, \end{aligned}$$

где константа c_1 должна быть найдена из начальных условий для насыщенности \tilde{S} .

Доказательство. Доказательство основывается на следствии 2 и виде системы (3.41'). \square

Функция E должна быть выбрана так, чтобы система (3.41') имела вещественные решения.

Обозначим правую часть первого уравнения системы (3.41') как q .

Система (3.41') может быть интерпретирована следующим образом. Решение второго уравнения (уравнения Лапласа) является начальным условием для первого уравнения. Заметим, что если любое решение второго уравнения можно выбрать в качестве начального условия для первого, тогда первое уравнение является симметрией второго.

С геометрической точки зрения, решения системы (3.41') представляют собой эволюцию решений второго уравнения вдоль контактного векторного поля

$$X_q = -Eu_{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} - Eu_z \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - Eu_z u_{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial u} + u_z^2 u_{\bar{z}} E' \frac{\partial}{\partial u_z} + u_z u_{\bar{z}}^2 E' \frac{\partial}{\partial u_{\bar{z}}},$$

отвечающего производящей функции q .

Уравнение для начальных условий

Сначала рассмотрим случай, когда первое уравнение системы (3.41') является симметрией второго.

Предложение 3. Уравнение $u_t = E(u)u_z u_{\bar{z}}$ является симметрией уравнения $u_{z\bar{z}} = 0$ тогда и только тогда, когда $E(u) = 0$.

Доказательство. Прямые вычисления показывают, что из условия $X_q(u_{z\bar{z}})|_{\{u_{z\bar{z}}=0\}} = 0$ вытекает $E = 0$. \square

Поэтому мы вынуждены рассмотреть более сильное условие.

Предложение 4. Условие

$$X_q(X_q(u_{z\bar{z}}))\Big|_{\{u_{z\bar{z}}=0, X_q(u_{z\bar{z}})=0\}} = 0 \quad (3.42)$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$E(u) = c_1 e^{Bu} + c_2 e^{-Bu}, \text{ или } E(u) = c_1 u + c_2,$$

где $c_1, c_2, B \in \mathbb{C}$ и $B \neq 0$.

Доказательство. С помощью прямых вычислений получим

$$X_q(X_q(u_{z\bar{z}}))\Big|_{\{u_{z\bar{z}}=0, X_q(u_{z\bar{z}})=0\}} = (E''E' - E'''E)u_z^3 u_{\bar{z}}^3.$$

Функция E может быть получена из решения обыкновенного дифференциального уравнения. \square

Таким образом, мы приходим к системе уравнений в частных производных на начальные условия

$$\begin{cases} X_q(u_{z\bar{z}}) = 0, \\ u_{z\bar{z}} = 0. \end{cases} \quad (3.43)$$

Рассмотрим подробнее каждый из случаев функции E .

Случай $E(u) = c_1 e^{Bu} + c_2 e^{-Bu}$

Теорема 16. Система (3.43) при

$$E(u) = c_1 e^{Bu} + c_2 e^{-Bu},$$

имеет решение следующего вида

$$u = \frac{1}{B} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{c_2}{c_1} \right) + \operatorname{arcsinh} (C_1(z - C_3)) + \operatorname{arccosh} (C_2(\bar{z} - C_4)) \right), \quad (3.44)$$

где $C_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, 4$.

Доказательство. Рассматриваемая система допускает алгебру Ли симметрий, порожденную векторными полями

$$\left\langle Z_1 = z \frac{\partial}{\partial z}, \quad Z_2 = \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad Z_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad Z_4 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\rangle.$$

Эта алгебра Ли является разрешимой и её структура задаётся следующими коммутационными соотношениями:

$$[Z_1, Z_3] = -Z_3, \quad [Z_2, Z_4] = -Z_4.$$

Остальные коммутаторы равны нулю.

Заметим, что в вещественном случае алгебра Ли симметрий порождается векторными полями

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle.$$

Это алгебра Ли соответствует группе подобий плоскости.

Рассматриваемая система формально интегрируема, и размерность пространства её решений равна четырём. В этом можно убедиться, вычислив скобку Майера [46], которая обращается в ноль.

Следовательно, четыре первых интеграла системы могут быть найдены с помощью теоремы Ли-Бьянки [48]:

$$-\frac{Bu_z}{2\sqrt{c_1c_2}} \frac{c_1 e^{Bu}(u_{\bar{z}\bar{z}} + Bu_z^2) + c_2 e^{-Bu}(u_{\bar{z}\bar{z}} - Bu_z^2)}{\sqrt{u_{\bar{z}\bar{z}}^2 - B^2 u_z^4}} = C_1,$$

$$\frac{B^2 u_z^3}{\sqrt{u_{\bar{z}\bar{z}}^2 - B^2 u_z^4}} = C_2,$$

$$z + \frac{1}{2B\sqrt{c_1c_2}C_1} \frac{1}{u_z} \left(c_1 e^{Bu} \left(C_2 + \sqrt{B^2 u_z^2 + C_2^2} \right) + c_2 e^{-Bu} \left(C_2 - \sqrt{B^2 u_z^2 + C_2^2} \right) \right) = C_3,$$

$$\bar{z} + \frac{\sqrt{B^2 u_{\bar{z}}^2 + C_2^2}}{BC_2 u_{\bar{z}}} = C_4.$$

С помощью этих интегралов можно найти решение

$$u = \frac{1}{B} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{c_2}{c_1} \right) + \operatorname{arcsinh} (C_1(z - C_3)) + \operatorname{arccosh} (C_2(\bar{z} - C_4)) \right).$$

□

Чтобы найти эволюцию во времени полученного решения (3.44), нужно рассмотреть константы C_1, \dots, C_4 как функции времени $\alpha_1(t), \dots, \alpha_4(t)$, подставить такое решение в первое уравнение системы (3.41') и решить полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений на функции $\alpha_1, \dots, \alpha_4$.

Таким образом мы приходим к следующему результату

Теорема 17. Константы, задающие решение (3.44) изменяются во времени по следующему закону

$$C_1(t) = \frac{1}{\sqrt{at + b}}, \quad C_2(t) = \frac{-aB}{4\sqrt{c_1 c_2} \sqrt{at + b}},$$

$$C_3(t) = C_3 = \text{const}, \quad C_4(t) = C_4 = \text{const},$$

где $a, b \in \mathbb{C}$.

Теперь найдем вещественные решения системы (3.43), отвечающие рассматриваемому случаю.

Предложение 5. Если константы, задающие функцию E в системе (3.43), таковы что $B, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 c_2 < 0$, тогда система (3.43) имеет вещественное решение вида

$$u = \frac{1}{B} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{c_2}{c_1} \right) + \operatorname{arcsinh} (\rho e^{i\varphi} (x - a + i(y - b))) + \operatorname{arccosh} \left(\rho e^{-i\varphi - \frac{i\pi}{2}} (x - a - i(y - b)) \right) \right),$$

где $a, b, \varphi, \rho \in \mathbb{R}$.

Предложение 6. Если постоянные, задающие функцию E в системе (3.43) таковы что $\Re B = 0, c_1 = \bar{c}_2$, тогда вещественное решение системы (3.43) имеет вид

$$u = \frac{1}{B} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{c_2}{c_1} \right) + \operatorname{arcsinh} (\rho e^{i\varphi} (x - a + i(y - b))) + \operatorname{arccosh} \left(\rho e^{-i\varphi - \frac{i\pi}{2}} (x - a - i(y - b)) \right) \right),$$

где $a, b, \varphi, \rho \in \mathbb{R}$.

Случай $E(u) = c_1 u + c_2$

Теорема 18. Система (3.43) при

$$E(u) = c_1 u + c_2$$

имеет следующее решение

$$u = \frac{1}{c_1} \left(c_1 \sqrt{C_2(\bar{z} + C_4)} + \sqrt{c_1 C_1(z + C_3) + c_2^2 - c_2} \right),$$

где $C_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, 4$.

Доказательство. Эта система имеет ту же алгебру Ли симметрий, что и система в теореме 16. Первые интегралы могут быть получены с помощью теоремы Ли-Бьянки:

$$\begin{aligned} \frac{2u_z}{u_{z\bar{z}}} ((c_1 u + c_2) u_{z\bar{z}} + c_1 u_{z\bar{z}}^2) &= C_1, \\ \frac{-2u_{z\bar{z}}^3}{u_{z\bar{z}}} &= C_2, \\ \frac{(4c_1 u^2 - 4C_1 z + 8c_2 u) u_{z\bar{z}}^2 - 4C_2 (c_1 u + c_2) u_{z\bar{z}} + C_2^2 c_1}{4C_1 u_{z\bar{z}}^2} &= C_3, \end{aligned}$$

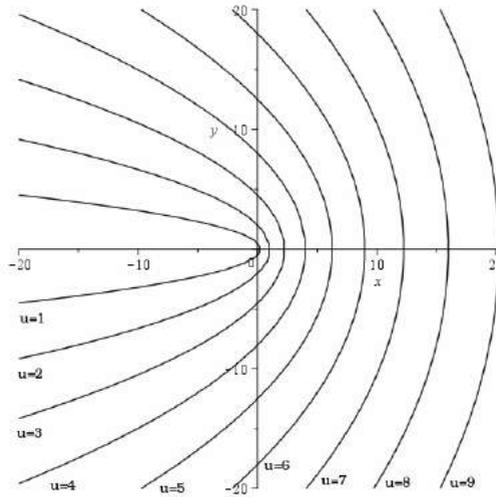


Рис. 3.3: Линии уровня вещественного решения

$$\frac{-4\bar{z}u_{\bar{z}}^2 + C_2}{4u_{\bar{z}}} = C_4.$$

Из найденных первых интегралов может быть выражена функция u . □

Предложение 7. Если постоянные $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, тогда вещественное решение имеет вид

$$u = \sqrt{e + if} \sqrt{x - a + i(y - b)} + \sqrt{e - if} \sqrt{x - a - i(y - b)}, \quad (3.45)$$

где $a, b, e, f \in \mathbb{R}$. Линии уровня $\{(x, y) \mid u(x, y) = C\}$ этой функции суть параболы с фокусом в точке (a, b) и директрисой

$$-2ex + \sqrt{1 - 4e^2}y + C^2 = 0.$$

Проделав процедуру, описанную в предыдущем параграфе, найдем эволюцию параметров e, f, a, b во времени.

Теорема 19. Параметры, задающие решение (3.45) изменяются во времени следующим образом:

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 t + a_1, & b(t) &= a_2 t + a_3, \\ e(t) &= 2a_0, & f(t) &= -2a_2, \end{aligned}$$

где $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

Линии уровня $u = k$ функции u при $a = b = f = 0$, $e = \frac{1}{2}$ для значения $k = 1, \dots, 9$ представлены на рис.3.4.

Модель Рапопорта–Лиса

Опишем теперь метод построения решений в виде бегущих волн для модели Рапопорта–Лиса (1.21), т.е. для уравнений

$$\begin{cases} m \frac{\partial \sigma}{\partial t} = k \frac{f_1(\sigma)}{\mu_1} \Delta p_1 + k \frac{f_1'(\sigma)}{\mu_1} (\nabla \sigma, \nabla p_1), \\ B(\sigma) \Delta p_1 + \frac{k}{\mu_2} (f_2(1 - \sigma) p''(\sigma) + f_2'(1 - \sigma) p'(\sigma)) |\nabla \sigma|^2 + \\ + \frac{k}{\mu_2} f_2(1 - \sigma) p'(\sigma) \Delta \sigma + B'(\sigma) (\nabla \sigma, \nabla p_1) = 0. \end{cases} \quad (3.46)$$

Решения типа бегущей волны будем искать в виде

$$\sigma(t, x, y) = S(a(t, x, y)), \quad p_w(t, x, y) = P(a(t, x, y)),$$

где функция a задает фронт волны, функции P и S суть значения давления и насыщенности смачиваемой фазы соответственно.

Будем рассматривать функцию a такую, что производная S' не обращается в нуль.

Предложение 8. Решения типа бегущей волны системы (3.46) получаются из решений системы

$$\begin{cases} \phi a_t S' = B_w(S) P' \Delta a + \frac{d}{da} (B_w(S) P') (a_x^2 + a_y^2), \\ \Delta a + \frac{d}{da} (\ln A(a)) (a_x^2 + a_y^2) = 0. \end{cases} \quad (3.47)$$

Здесь

$$A(a) = B_n \frac{d}{da} p_c(S(a)) + P'(B_n + B_w), \quad B_w = h_1, \quad B_n = h_1 + h_2.$$

Теорема 20. Существует функция H такая, что система уравнений (3.47) переходит в систему

$$\begin{cases} u_t = G(u)(u_x^2 + u_y^2), \\ \Delta u = 0, \end{cases}$$

при подстановке $a(t, x, y) = H(u(t, x, y))$.

Доказательство. На первом шаге мы исключаем оператор Лапласа из первого уравнения системы (3.47). Тогда после подстановки $a = H(u)$ мы получим

$$\begin{cases} \Delta u = - \frac{d}{du} (\ln \tilde{A}(u)) (u_x^2 + u_y^2), \\ u_t = \frac{1}{\phi \tilde{S}'(u)} \left(\frac{d}{du} (B_w(\tilde{S}(u)) \tilde{P}'(u)) - \right. \\ \left. - B_w(\tilde{S}(u)) \tilde{P}'(u) \frac{d}{du} \ln A(u) \right) \times (u_x^2 + u_y^2), \end{cases} \quad (3.48)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{S}(u) &= S(H(u)), \quad \tilde{P}(u) = P(H(u)), \\ \tilde{A}(u) &= B_n(\tilde{S}(u)) \frac{d}{du} p_c(\tilde{S}(u)) + (B_n(\tilde{S}(u)) + B_w(\tilde{S}(u))) \tilde{P}'. \end{aligned}$$

Условие

$$\frac{d}{du} \ln \tilde{A}(u) = 0, \quad (3.49)$$

приводит к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению на функцию H :

$$\begin{aligned} H' \left[B_n(S(H)) p'_c(S(H)) S'(H) + \right. \\ \left. + P'(H) (B_n(S(H)) + B_w(S(H))) \right] = c_0, \end{aligned}$$

где c_0 — постоянная.

Если мы предположим, что выражение в квадратных скобках не обращается в нуль, тогда это обыкновенное уравнение имеет решение, иными словами функция H существует.

Таким образом, мы можем переписать систему (3.48) в виде

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u_t = G(u) (u_x^2 + u_y^2), \end{cases} \quad (3.50)$$

где

$$G(u) = \frac{1}{\phi \tilde{S}'(u)} \frac{d}{du} \left(B_w(\tilde{S}(u)) \tilde{P}'(u) \right).$$

□

Заметим, что между функциями \tilde{S} и \tilde{P} имеет место соотношение (3.49).

Переписав систему (3.50) в комплексных переменных z и \bar{z} , получим:

$$\begin{cases} u_t = E(u) u_z u_{\bar{z}}, \\ u_{z\bar{z}} = 0, \end{cases} \quad (3.50')$$

где $E(u) = 4G(u)$.

Мы получили систему аналогичную системе (3.41'), решение которой было получено нами ранее.

Глава 4

Основы геометрии дифференциальных уравнений

В этой главе приводятся сведения из геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений, необходимые (но не достаточные) для понимания материала предыдущих глав. Более подробное изложение можно найти в монографиях [2, 9, 10, 48, 54], а также в работах [15–17, 49, 50, 53, 55].

4.1 Пространства джетов

Джеты функций

1. Понятие джета было введено в 50-х годах XX века Эресманом [42] для нужд дифференциальной геометрии.

Пусть M — гладкое многообразие размерности n или открытая область в пространстве \mathbb{R}^n , точка $a \in M$ и a_1, a_2, \dots, a_n — координаты этой точки в некоторой локальной системе координат. Рассмотрим максимальный идеал μ_a алгебры гладких функций

$C^\infty(M)$, состоящий из функций, которые обращаются в нуль в точке a :

$$\mu_a = \{f \in C^\infty(M) \mid f(a) = 0\}.$$

Пусть

$$\mu_a^k = \left\{ \sum f_1 \cdots f_k \mid f_1, \dots, f_k \in \mu_a \right\}$$

— k -я степень идеала μ_a . Идеал μ_a^k состоит из функций, частные производные которых до порядка $k - 1$ в точке a обращаются в нуль:

$$\mu_a^k = \left\{ f \in C^\infty(M) \mid \frac{\partial^{|\sigma|} f}{\partial x^\sigma}(a) = 0, 0 \leq |\sigma| < k - 1 \right\}.$$

Имеет место следующая фильтрация:

$$\mu_a \supset \mu_a^2 \supset \mu_a^3 \supset \dots \supset \mu_a^k \supset \dots$$

Фактор-алгебра

$$J_a^k(M) = C^\infty(M) / \mu_a^{k+1}$$

называется *пространством k -джетов функций в точке a* .

Элемент этой фактор-алгебры отвечающий функции f называется *k -джетом функции f в точке a* обозначается $[f]_a^k$:

$$[f]_a^k = f \bmod \mu_a^{k+1}.$$

Две функции f и g определяют один и тот же k -джет в точке a тогда и только тогда, когда их соответствующие частные производные до порядка k включительно в точке a совпадают:

$$f(a) = g(a), \quad \frac{\partial^{|\sigma|} f}{\partial x^\sigma}(a) = \frac{\partial^{|\sigma|} g}{\partial x^\sigma}(a)$$

для $|\sigma| \leq k$. Здесь $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ — мульти-индекс,

$$|\sigma| = \sigma_1 + \dots + \sigma_n$$

и

$$\frac{\partial^{|\sigma|} f}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial^{|\sigma|} f}{\partial x_1^{\sigma_1} \dots \partial x_n^{\sigma_n}}.$$

2. Введем структуру векторного пространства на фактор-кольце $J_a^k(M)$. Определим сумму двух джетов и произведение джета на действительное число следующим образом:

$$[f]_a^k + [g]_a^k \stackrel{\text{def}}{=} [f + g]_a^k, \quad \lambda [f]_a^k \stackrel{\text{def}}{=} [\lambda f]_a^k.$$

Теорема 21. k -джеты

$$[1]_a^k, [x - a]_a^k, \dots, \frac{1}{\sigma!} [(x - a)^\sigma]_a^k \quad (|\sigma| \leq k)$$

образуют базис векторного пространства $J_a^k(M)$.

k -джет функции $(x - a)^m$ в точке a является нулевым, если $k < m$: $[(x - a)^m]_a^k = [0]_a^k$.

Многочлен

$$f(a) + \sum_{|\sigma| \leq k} \frac{1}{\sigma!} \frac{\partial f^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma}(a) (x - a)^k$$

можно рассматривать как представителя k -джета $[f]_a^k$ в заданных координатах.

Объединение

$$J^k(M) = \bigcup_{a \in M} J_a^k(M)$$

называется *пространством k -джетов гладких функций* на M .

Введем на этом пространстве структуру гладкого многообразия.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ — локальные координаты на M . Локальные координаты $x_1, \dots, x_n, u, p_\sigma$ на $J^k(M)$ зададим следующим образом:

$$x_i([f]_a^k) = x_i(a), \quad u([f]_a^k) = f(a), \quad p_\sigma([f]_a^k) = \frac{\partial^{|\sigma|} f}{\partial x^\sigma}(a) \quad (|\sigma| \leq k).$$

Эти координаты называются *каноническими*. Таким образом,

$$\dim J^k(M) = n + \binom{k+n}{k}.$$

Для каждой гладкой функции f на M построим отображение

$$[f]^k : M \rightarrow J^k(M), \quad \text{где} \quad [f]^k : a \mapsto [f]_a^k.$$

Это отображение мы будем называть k -м *продолжением* функции f . График $\Gamma_f^k = [f]^k(M)$ этого отображения называется k -*графиком* функции f .

Расслоение

$$\pi_k : J^k(M) \rightarrow M, \quad \pi_k : [f]_a^k \mapsto a$$

является векторным расслоением, которое называется *расслоением k -джетов*.

По аналогии с джетами функций можно определить джеты отображений

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Пространства k -джетов таких отображений будем обозначать через $J^k(n, m)$.

4.2 Распределение Картана

Пусть $x_1, \dots, u, p_1, \dots, p_n$ — локальные канонические координаты на пространстве 1-джетов $J^1(M)$:

$$x_i([f]_a^1) = a_i, \quad u([f]_a^1) = f(a), \quad p_i([f]_a^1) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Распределение Картана \mathcal{C} на $J^1(M)$ — это распределение ко-размерности 1 на $J^1(M)$, заданное дифференциальной 1-формой

$$\omega_0 = du - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n. \quad (4.1)$$

или, что эквивалентно, векторными полями

$$\frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Это распределение определяет на $J^1(M)$ контактную структуру, т.е. максимальное неинтегрируемое распределение коразмерности 1 (см., например, [3]).

Пусть θ — точка пространства $J^1(M)$. Ограничение внешнего дифференциала $d\omega_0$ на пространство Картана $\mathcal{C}(\theta)$ определяет симплектическую структуру

$$\Omega_\theta = d\omega_0|_{\mathcal{C}(\theta)}$$

на этом подпространстве.

Диффеоморфизм $\varphi : J^1(M) \rightarrow J^1(M)$, сохраняющий распределение Картана, называется *контактным*.

Другими словами, контактные диффеоморфизмы являются симметриями распределения Картана. Это означает, что

$$\varphi^*(\omega_0) = \lambda_\varphi \omega_0$$

для некоторой гладкой функции λ_φ на $J^1(M)$.

Важный класс контактных преобразований получается продолжением *точечных преобразований*, т.е. диффеоморфизмов пространства $J^0(M)$.

Пусть

$$\varphi : (x, u) \mapsto (X(x, u), U(x, u))$$

— точечное преобразование. Преобразование

$$\varphi^{(1)} : (x, u, p) \mapsto (X(x, u), U(x, u), P(x, u, p)) \quad (4.2)$$

называется *первым продолжением* преобразования φ в пространство $J^1(M)$ если оно сохраняет распределение Картана, т.е. является контактным.

Легко проверить, что при $n = 1$ преобразование (4.2) является контактным если

$$P = \frac{U_x + p_1 U_u}{X_x + p_1 X_u}.$$

Векторное поле X на пространстве 1-джетов называется *контактным*, если локальная группа сдвигов φ_t этого поля состоит из контактных преобразований, то есть

$$\varphi_t^*(\omega_0) = \lambda_t \omega_0,$$

где λ_t — однопараметрическое семейство функций на $J^1(M)$.

Теорема 22. Векторное поле X является контактным тогда и только тогда, когда

$$L_X(\omega_0) \wedge \omega_0 = 0.$$

Каждое контактное поле X однозначно определяется значением формы Картана на нем, т.е. функцией $f = \omega_0(X)$. Эта функция называется *производящей* для контактного векторного поля X , которое традиционно обозначается X_f . В канонических координатах оно имеет следующий вид:

$$X_f = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \left(f - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Преобразования Ли

Распределение Картана

$$\mathcal{C}^k : J^k(M) \ni \theta \mapsto \mathcal{C}^k(\theta) \subset T_\theta J^k(M)$$

на пространстве $J^k(M)$ задается набором дифференциальных 1-форм вида

$$\omega_\sigma = dp_\sigma - \sum_{i=1}^n p_{\sigma+1_i} dx_i,$$

где $|\sigma| < k$ и $\mathbf{1}_i$ — мульти-индекс длины n , у которого на i -м месте стоит единица, а на остальных местах — нули. Подпространство

$$\mathcal{C}^k(\theta) = \bigcap_{|\sigma| < k} \ker \omega_{\sigma, \theta}$$

касательного пространства $T_\theta J^k(M)$ называется *подпространством Картана*.

Диффеоморфизмы пространства $J^k(M)$, сохраняющие распределение Картана \mathcal{C}^k , называются *преобразованиями Ли*.

Следующая теорема (см., например, [2]) описывает структуру преобразований Ли¹.

Теорема 23 (Ли–Бекдунд). Всякое преобразование Ли пространства $J^k(n, m)$ является продолжением либо контактного преобразования (при $m = 1$), либо точечного преобразования (при $m > 1$).

4.3 Геометрия уравнений

Многозначные решения

Многозначное решение дифференциального уравнения k -го порядка представляет собой подмногообразие в пространстве k -джетов, размерность которого равна числу независимых переменных в уравнении и которое является интегральным многообразием распределения Картана [10].

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение k -го порядка на гладком многообразии M :

$$F \left(x, v, \frac{\partial^{|\sigma|} v}{\partial x^\sigma} \right) = 0, \quad |\sigma| \leq k. \quad (4.3)$$

¹Здесь приводится её частный случай для пространства джетов скалярных функций.

Это уравнение можно рассматривать как гиперповерхность

$$\mathcal{E} = \{F(x, u, p_\sigma) = 0\} \subset J^k(M)$$

в пространстве k -джетов.

Теорема 24. Функция $v = h(x)$ является решением уравнения (4.3) если ее k -график лежит на гиперповерхности \mathcal{E} .

Эту гиперповерхность также будем называть *уравнением*.

n -мерное интегральное многообразие L распределения Картана называется *многозначным решением* дифференциального уравнения \mathcal{E} если $L \subset \mathcal{E}$.

В отличие от классического решения, многозначное решение, вообще говоря, не является графиком джета функции: проекция многозначного решения на пространство независимых переменных может иметь геометрические особенности — *каустики* [4]. Если у многозначного решения удалить точки, в которых появляется особенность, то оно распадется на регулярные подмногообразия, каждому из которых отвечают классические решения дифференциального уравнения.

Рассмотрим, например, дифференциальное уравнение

$$\frac{v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2}{(v_x^2 + v_y^2 + 1)^2} = 1.$$

Проекции его многозначных решений в пространство 0-джетов (пространство с координатами x, y, v) — сферы с единичными радиусами, а каустики — окружности единичного радиуса на плоскости независимых переменных x, y . Если у сферы вырезать экватор, то она распадется на две полусферы, каждая из которых является графиком классического решения данного уравнения: $v = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ и $v = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Сингулярные точки проекции $\pi : L \rightarrow M$ обозначим через L_Σ ($L_\Sigma \subset L$). Точки $\pi(L_\Sigma)$ образуют множество на M , которое называются *каустикой*.

Многозначное решение L без сингулярных точек, т.е. множество $L \setminus L_\Sigma$ можно рассматривать как объединение графиков классических решений дифференциального уравнения.

Для построения каустик нужно найти точки на многозначном решении L , в которых якобиан проекции π обращается в нуль:

$$\det J_\pi = 0. \quad (4.4)$$

В случае линейных уравнений всякому многозначному решению можно сопоставить обобщенное (в смысле С.Л. Соболева) решение [18]. Для доказательства этого факта используется конструкция, аналогичная каноническому оператору В.П. Маслова [21].

Таким образом, многозначные решения представляют собой естественное распространение теории обобщенных решений на нелинейные уравнения.

Отметим, что реальный разрыв решения происходит не в точках каустики — за появление разрыва отвечают условия Гюгонио-Ренкина, которые записываются исходя из законов сохранения и в линейном случае представляют собой уравнения Гамильтона-Якоби, решения которых и определяют поверхность разрыва. Это позволяет применить методы гамильтоновой механики для нахождения фронтов ударных волн.

Как будет показано ниже, многозначные решения служат “заготовками” для построения разрывных решений.

Обобщенная задача Коши

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение первого порядка на гладком многообразии M общего вида:

$$\mathcal{E} = \{F(x, u, p) = 0\}, \quad (4.5)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$.

Гладкое подмногообразие $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$ размерности $n - 1$, трансверсальное контактному векторному полю X_F , называется *даннами Коши* уравнения (4.5).

Многозначное решение L уравнения (4.5) называется *обобщенным решением задачи Коши*, если $L \supset \mathcal{K}$.

Теорема 25. [54] Пусть $\{\varphi_t\}_{t \in I}$ — локальная группа сдвигов вдоль контактного векторного поля X_F . Тогда гладкое многообразие

$$L = \bigcup_{t \in I} \varphi_t(\mathcal{K})$$

является обобщенным решением задачи Коши.

Данная теорема указывает способ решения обобщенной задачи Коши: кривую Коши \mathcal{K} нужно сдвинуть вдоль траекторий векторного поля X_F . При этом она заметёт поверхность, которая и будет являться многозначным решением обобщенной задачи Коши.

Формально это процесс сводится к решению классической задачи Коши для следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_j = -\frac{\partial F}{\partial p_j}, \\ \dot{u} = F - \sum_{i=1}^2 p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_j = \frac{\partial F}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial F}{\partial u} \end{cases} \quad (4.6)$$

с начальными данными

$$x_j(0) = x_j^0, u(0) = u^0, p_j(0) = p_j^0, \quad (j = 1, 2)$$

где точка $(x^0, u^0, p^0) \in \mathcal{K}$.

Траектории контактного векторного поля X_F называются *ха-рактеристиками*.

Для квазилинейных уравнений

$$\sum_{i=1}^n A_i(x, v) \frac{\partial v}{\partial x_i} + B(x, v) = 0 \quad (4.7)$$

первые два уравнения системы (4.6) не зависят от частных производных неизвестной функции. Действительно, для уравнений (4.7) функция F имеет вид

$$F = \sum_{i=1}^n A_i(x, u) p_i + B(x, u).$$

Поэтому вместо пространства 1-джетов можно рассматривать пространство 0-джетов.

Кривую $\mathcal{K} \subset J^0(M)$ будем называть *кривой Коши для квазилинейного уравнения* (4.7), если траектории векторного поля

$$X_F^{(0)} = - \sum_{i=1}^n A_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + B(x, u) \frac{\partial}{\partial u}$$

пересекают её трансверсально. Векторное поле $X_F^{(0)}$ является проекцией векторного поля X_F на пространство 0-джетов. Сдвиг кривой Коши вдоль траекторий векторного поля $X_F^{(0)}$ порождает поверхность в пространстве $J^0(M)$. Эта поверхность является проекцией соответствующего многозначного решения.

4.4 Разрывные решения

Покажем как с помощью законов сохранения из многозначных решений можно строить разрывные решения дифференциальных уравнений.

Законом сохранения дифференциального уравнения \mathcal{E} с n независимыми переменными x_1, \dots, x_n называется дифференциальная $(n - 1)$ -форма вида

$$\theta = \sum_{i=1}^n A_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n$$

замкнутая на любом многозначном решении L этого уравнения, то есть $d\theta|_L = 0$. Здесь A_i — функции на пространстве джетов².

Законы сохранения позволяют находить условия Гюгонио-Ренкина для расчета фронтов ударных волн.

Пусть пространство независимых переменных делится гиперповерхностью M^0 на две части, то есть

$$M = M^- \cup M^0 \cup M^+.$$

Пусть M_0 является гиперповерхностью, на которой решение v дифференциального уравнения \mathcal{E} имеет разрыв, то есть график решения состоит из двух поверхностей: $v = v^- \cup v^+$. Функция v^- определена на замыкании $\overline{M^-}$, а v^+ — на замыкании $\overline{M^+}$. Пусть, кроме того, 1-графики функций v^- и v^+ являются частями одно-го многозначного решения $L \subset \mathcal{E}$.

Функция v называется *разрывным решением* уравнения \mathcal{E} , соответствующим закону сохранения θ , если

$$\int_M ds \wedge \theta|_{\Gamma_v^1} = 0$$

для любой функции s с компактным носителем. Здесь Γ_v^1 — 1-график функции v .

Теорема 26. Функция v является разрывным решением дифференциального уравнения \mathcal{E} тогда и только тогда, когда в области

²Знак $\widehat{}$ означает пропуск сомножителя.

$M \setminus M_0$ она является классическим решением этого уравнения и, кроме того, выполняется следующее условие:

$$\theta^+|_{M^0} = \theta^-|_{M^0}, \quad (4.8)$$

где $\theta^\pm = \theta|_{\Gamma_{v^\pm}^1}$.

Условие (4.8) называется условием *Гюгонио-Ренкина*.

Обобщенное уравнение Эйлера с одной пространственной переменной

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\Phi(x, v)) = 0 \quad (4.9)$$

имеет закон сохранения

$$\theta = u dx_2 - \Phi(x_2, u) dx_1. \quad (4.10)$$

Здесь $x_1 = t, x_2 = x$ — координаты на плоскости \mathbb{R}^2 .

Действительно, внешний дифференциал 1-формы θ равен

$$d\theta = du \wedge dx_2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial u} du \right) \wedge dx_1.$$

Пусть $u = v(t, x)$ — решение уравнения (4.9). Тогда ограничение дифференциальной 2-формы $d\theta$ на 1-график этого решения равно нулю:

$$d\theta = (v_t + \Phi_x + \Phi_v v_x) dt \wedge dx = 0.$$

Таким образом, дифференциальная 1-форма (4.10) является законом сохранения для уравнения (4.9).

Найдем уравнение кривой разрыва M^0 для дифференциального уравнения (4.9). Пусть уравнение этой кривой можно представить как график функции от t :

$$M^0 = \{x = \varphi(t)\}. \quad (4.11)$$

Согласно теореме 26, для разрывного решения v уравнения (4.9) выполняется условие Гюгонио-Ренкина (4.8). Так как

$$\theta|_{M^0} = u d\varphi - \Phi(\varphi(t), u) dt = [u\varphi' - \Phi(\varphi, u)] dt,$$

то это условие имеет вид:

$$u^+ \varphi' - \Phi(\varphi, u^+) = u^- \varphi' - \Phi(\varphi, u^-).$$

Отсюда следует, что функция φ является решением следующего обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Phi(\varphi, u^+) - \Phi(\varphi, u^-)}{u^+ - u^-}. \quad (4.12)$$

Это уравнение определяет движение фронта разрыва ударной волны. Начальное условие для решения этого уравнения определяется точкой возникновения каустики.

Для уравнения Эйлера с двумя пространственными переменными x, y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(A(v)) + \frac{\partial}{\partial y}(B(v)) = 0 \quad (4.13)$$

дифференциальная 2-форма

$$\theta = u dx_2 \wedge dx_3 - A(u) dx_1 \wedge dx_3 + B(u) dx_1 \wedge dx_2$$

является законом сохранения. Здесь $x_1 = t, x_2 = x, x_3 = y$. Найдем уравнение поверхности разрыва M^0 . Пусть уравнение этой поверхности можно представить как график функции от переменных x, y :

$$M^0 = \{t = S(x, y)\}. \quad (4.14)$$

Условие Гюгонио-Ренкина имеет вид:

$$(A(u^+) - A(u^-)) \frac{\partial S}{\partial x} + (B(u^+) - B(u^-)) \frac{\partial S}{\partial y} + u^+ - u^- = 0.$$

4.5 Симметрии

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение в частных производных порядка k общего вида

$$F\left(x, v, \frac{\partial^{|\sigma|} v}{\partial x^\sigma}\right) = 0, \quad |\sigma| \leq k. \quad (4.15)$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$ — независимые переменные.

Это уравнение можно рассматривать как гиперповерхность

$$\mathcal{E} = \{F(x, u, p_\sigma) = 0\} \subset J^k(M) \quad (4.16)$$

в пространстве k -джетов. *Симметрией* дифференциального уравнения (4.15) называется преобразование Ли, сохраняющее гиперповерхность (4.16).

Если Φ — симметрия уравнения (4.15), то

$$\Phi^*(F) = \lambda F \quad (4.17)$$

для некоторой функции $\lambda \in C^\infty(J^k(M))$.

Если функция F не зависит от переменной x_j то преобразование

$$\Phi : (x_1, \dots, x_n, u, p_\sigma) \mapsto (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + C, x_{j+1}, \dots, x_n, u, p_\sigma)$$

является симметрией уравнения (4.15) для любого числа C .

Теорема 27. Симметрии уравнения сохраняют класс его многозначных решений, т.е. если L — многозначное решение уравнения и Φ — симметрия этого уравнения, то $\Phi(L)$ также многозначное решение.

Отметим, что симметрии вообще говоря не сохраняют класс классических решений уравнения — классическое решение при преобразовании симметрии может переходить в решение многозначное.

Уравнение (4.17) представляет собой нелинейное функциональное уравнение, решить которое довольно сложно.

Софус Ли предложил искать только такие симметрии, которые являются сдвигами вдоль некоторых векторных полей. Для уравнений в частных производных это приводит к решению определенных систем линейных дифференциальных уравнений.

Как правило, такие уравнения решить проще, чем функциональное уравнение (4.17).

Векторное поле Ли называется *инфинитезимальной симметрией* уравнения \mathcal{E} , если локальная группа сдвигов вдоль этого поля состоит из симметрий этого уравнения.

Итак, пусть векторное поле Ли X является симметрией уравнения (4.15) и ϕ_t — преобразование сдвига вдоль траекторий этого векторного поля. Тогда $\phi_t(F) = \lambda_t F$ для некоторой функции λ_t . Дифференцируя это равенство по параметру t при $t = 0$, получаем:

$$L_X(F) = hF,$$

где

$$h = \left. \frac{d\lambda_t}{dt} \right|_{t=0}.$$

Ограничивая последнее равенство на гиперповерхность \mathcal{E} , получаем уравнение для нахождения инфинитезимальных симметрий уравнения (4.15):

$$X(F)|_{\mathcal{E}} = 0. \quad (4.18)$$

Это уравнение называется *уравнением Ли* для симметрий уравнения \mathcal{E} .

Как правило, оно представляет собой переопределенную систему относительно коэффициентов векторного поля X , которая может быть решена.

Теорема 28. Инфинитезимальные симметрии дифференциального уравнения образуют алгебру Ли относительно операции коммутирования, т.е. если X и Y — инфинитезимальные симметрии уравнения, то их коммутатор $[X, Y]$ и векторное поле $C_1X + C_2Y$ также являются инфинитезимальными симметриями, где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4.6 Уравнения Монжа–Ампера

Уравнение Монжа–Ампера имеет следующий вид:

$$Av_{xx} + 2Bv_{xy} + Cv_{yy} + D(v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2) + E = 0, \quad (4.19)$$

где A, B, C, D и E — функции от независимых переменных x, y , неизвестной функции $v = v(x, y)$ и ее первых производных v_x, v_y .³

Класс уравнений Монжа–Ампера выделяется из уравнений второго порядка тем, что он замкнут относительно контактных преобразований и содержит квазилинейные уравнения.

Этот факт был известен еще Софусу Ли, который в серии работ [51, 52] рассматривал проблему классификации гиперболических уравнений Монжа–Ампера.

В работе [17] предложено геометрическое описание широкого класса дифференциальных уравнений второго порядка на гладких многообразиях. Если размерность многообразия равна двум, то этот класс совпадает с классом уравнений Монжа–Ампера (4.19).

Основная идея заключается в представлении уравнений Монжа–Ампера и их многомерных аналогов дифференциальными формами на пространстве 1-джетов функций на гладком многообразии.

А именно, каждая дифференциальная 2-форма $\omega \in \Omega^2(J^1M)$ может рассматриваться как нелинейный дифференциальный оператор

$$\Delta_\omega : C^\infty(M) \rightarrow \Omega^2(M),$$

действующий на функцию $v \in C^\infty(M)$ по следующему правилу [17]:

$$\Delta_\omega(v) = \omega|_{\Gamma_1^v}. \quad (4.20)$$

Здесь $\Gamma_1^v \subset J^1M$ — график 1-джета функции v и $\omega|_{\Gamma_1^v}$ — ограничение дифференциальной формы ω на этот график.

³Мы полагаем, что функции A, B, C, D и E принадлежат классу C^∞ .

Оператор Δ_ω называется *оператором Монжа–Ампера*, а соответствующее уравнение $E_\omega = \{\Delta_\omega(v) = 0\}$ — *уравнением Монжа–Ампера*.

Преимуществом такого подхода перед классическим является редукция порядка пространства джетов: используется более простое пространство 1-джетов J^1M вместо пространства 2-джетов J^2M , в котором, будучи уравнениями второго порядка, *ad hoc* должны лежать уравнения Монжа–Ампера.

Два уравнения Монжа–Ампера E_{ω_1} и E_{ω_2} назовем *локально контактно эквивалентными в точке* $a \in J^1M$, если существует такой локальный контактный диффеоморфизм ϕ некоторой окрестности этой точки, что $\phi(a) = a$ и $\phi(E_{\omega_1}) = E_{\omega_2}$.

Проблема контактной эквивалентности невырожденных уравнений Монжа–Ампера линейным уравнениям была рассмотрена в работах [49, 50].

Литература

- [1] *Азиз Х., Сеттари Э.* Математическое моделирование пластовых систем. М.: – Ижевск: Ин-т комп. иссл., 2004. – 416 с.
- [2] *Алексеевский Д.В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии / Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. – Итоги науки и техники. Серия “Современные проблемы математики. Фундаментальные направления”. М.: ВИНТИ, 1988. – Т. 28. – 297 с.
- [3] *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. – 304 с.
- [4] *Арнольд В.И.* Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996. – 334 с.
- [5] *Ахметзянов А.В.* Геометрическая теория особых режимов в системах управления с распределенными параметрами / Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В. – Автоматика и телемеханика. 2013. № 11. – С. 81–102.
- [6] *Ахметзянов А.В.* Аттракторы в моделях фильтрации / Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В. – Доклады акад. наук. 2017. Т. 472. № 6. – С. 627–630.
- [7] *Ахметзянов А.В.* Управление фронтом вытеснения в двухфазной модели фильтрации несмешивающихся жидкостей.

- / Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В. – Доклады акад. наук. 2016. Т. 469. № 2. С. 139–142.
- [8] *Басниев К.С.* Подземная гидромеханика. / Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Каневская Р.Д., Максимов В.М. – М.–Ижевск, 2006. – 488 с.
- [9] *Бочаров А.В.* Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М. и [др]. – М.: Факториал Пресс, 2005. – 380 с.
- [10] *Виноградов А.М.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений / Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. – М.: Наука, 1986. – 336 с.
- [11] *Годунов С.К., Рябенский В.С.* Разностные схемы. Введение в теорию. М.: Наука, 1977. – 440 с.
- [12] *Горинев А.А., Кушнер А.Г.* Эволюция границ раздела двух сред в задачах нелинейной фильтрации // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 3. – С. 1631115-1–1631115-3.
- [13] *Ильин А.М.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа / Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. — Успехи мат. наук, 1962. Т. 17. Вып. 3 (105). – С. 3–146.
- [14] *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.–Л.: Физматлит, 1962. – 708 с.
- [15] *Лычагин В.В.* Локальная классификация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30:1 (181). – С. 101–171.

- [16] *Лычагин В.В.* Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка // ДАН СССР. 1978. Т. 238 (5). – С. 273–276.
- [17] *Лычагин В.В.* Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34 (1 (205)). – С. 137–165.
- [18] *Лычагин В.В.* Геометрическая теория особенностей решений нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. 1988. Т. 20. – С. 207–247.
- [19] *Лычагин В.В.* Геометрия и топология ударных волн // ДАН СССР. 1982. Т. 264 (3). – С. 551–555.
- [20] *Лычагин В.В.* Особенности решений, спектральные последовательности и нормальные формы алгебр Ли векторных полей // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1987. Т. 51:3. – С. 584–612.
- [21] *Маслов В.П.* Операторные методы. М.: Наука, 1973. – 544 с.
- [22] *Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. – 592 с.
- [23] *Самарский А.А.* Разностные схемы на нерегулярных сетках / Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. и [др.]. Минск, 1996. – 276 с.
- [24] *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: ЛГУ, 1950. – 255 с.
- [25] *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975. – 592 с.
- [26] *Чарный И.А.* Нагревание призабойной зоны при закачке горячей воды в скважину // Нефт. хоз. 1953. № 2, 3.

- [27] Чекалюк И.Б. Термодинамики нефтяного пласта. М.: Недра, 1965. – 239 с.
- [28] *Akhmetzyanov A.V.* Nonlinear Models of Oil Frontal Displacement and Shock Waves / Akhmetzyanov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V. – Proc. of the 7th IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management, and Control (MIM'2013) IFAC. Saint Petersburg, 2013. – P. 1186–1191.
- [29] *Akhmetzyanov A.V.* Integrable Models of Oil Displacement / Akhmetzyanov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V. – IFAC-PapersOnLine, 2015. V. 48. Issue 3. – P. 1264–1267.
- [30] *Akhmetzyanov A.V.* Mass and heat transport in two-phase Buckley – Leverett's model / Akhmetzyanov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V. – J of Geom. and Phys. 2016. DOI: 10.1016/j.geomphys.2016.06.010
- [31] *Akhmetzyanov A.V.* Integrability of Buckley–Leverett's filtration model. / Akhmetzyanov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V. – IFAC-PapersOnLine. 2016. V. 49 (12). P. 1251–1254.
- [32] *Akhmetzyanov A.V.* Shock waves in initial boundary value problem for filtration in two-phase 2-dimensional porous media / Akhmetzyanov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V. – Global and Stochastic Analysis. 2016. V. 3. No. 2. – P. 41–46.
- [33] *Akhmetzyanov A.V.* Long-time asymptotics for the Buckley-Leverett models of development of oil and gas fields / Akhmetzyanov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V. – Proc. of Conf. Appl. of Inform. and Commun. Technol. (AICT2017) Moscow, Russia, 20–22 Sept. 2017. V. 2. – P. 505–507.
- [34] *Akhmetzyanov A.V.* Optimal control of development of oil fields for the Buckley-Leverett model / Akhmetzyanov A.V., Kushner

- A.G., Lychagin V.V., Shevlyakov A.A. – Proc. of Conf. Appl. of Inform. and Commun. Technol. (AICT2017) Moscow, Russia, 20–22 Sept. 2017. V. 2. P. 463–465.
- [35] *L. Alvarez Diaz, C. Cunha.* Numerical solution of the Rapoport–Leas equation using the method-of-lines and the DASSL code // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., 1998. V. 38. N. 11. – P. 1928–1935.
- [36] *Barenblatt G.I.* Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks / Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. – Kluwer, 2010. – 396 p.
- [37] *Bibikov P.V.* Group Classification of Rapoport–Leas Equations // Lobachevskii J. of Math. 2017. V. 38. N. 1. – P. 116–124.
- [38] *Boronin I.A., Shevlyakov A.A.* Numerical modelling of the liquid phase boundary movement of the 2-phase filtration in a porous medium // Proc. of Intern. Conf. Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy’s Conference) IEEE. Moscow. 2016.
- [39] *Boronin I.A., Shevlyakov A.A.* Solution of the equations for one-dimensional, two-phase filtration in porous medium with heat exchange by geometric methods // Procedia Comp. Sc. 2017. V. 112. – P. 1189–1195.
- [40] *Buckley S.E., Leverett M.C.* Mechanism of fluid displacement in sands // Trans. AIME, SPE. 1942. N. 146. – P. 107–116.
- [41] *Boussinesq J.* Recherches théoriques sur écoulement des nappes d’eau infiltrées dans le sol. // J. de mathématiques pures et appliquées. 1904. V. 5 (X(1) 5–78) – P. 363–394.
- [42] *Ehresmann C.* Introduction a la theorie des structures infinitesimales et des pseudo-groupes de Lie // Coll. Geom. Differ. Strasbourg, C.N.R.S. 1953. – P. 97–110.

- [43] *Duzhin S.V., Lychagin V.V.* Symmetries of distributions and quadrature of ordinary differential equations // Acta Appl. Math. 1991. V. 24 (1). – P. 29–57.
- [44] *Fejer L.* Uber trigonometrische Polynome // J. Reine Angew. Math. 1916. N. 146. – P. 53–82.
- [45] *Krasil'shchik I.S.* Geometry of jet spaces and nonlinear partial differential equations / Krasil'shchik I.S., Lychagin V.V., Vinogradov A.M. – Advanced Studies in Contemporary Mathematics, V. 1. N.Y.: Gordon and Breach Sci. Publish., 1986. – P. xx+441.
- [46] *Kruglikov B., Lychagin V.* Mayer brackets and solvability of PDEs—I // Differential Geometry and its Applications. 2002. Elsevier BV, V. 17. – P. 251–272.
- [47] *Kruglikov B.S., Lychagina O.V.* Finite dimensional dynamics for Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov equation // Lobachevskii J. Math. 2005. N. 19 – P. 13–28.
- [48] *Kushner A.G.* Contact geometry and nonlinear differential equations / Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N. – Encyclopedia Math. Its Appl., **101**. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – xxii+496 P.
- [49] *Kushner A.G.* A Contact Linearization Problem for Monge–Ampere Equations and Laplace Invariants // Acta Appl. Math. 2008. V. 101 N. 1–3. – P. 177–189.
- [50] *Kushner A.G.* On contact equivalence of Monge–Ampere equations to linear equations with constant coefficients // Acta Appl. Math. 2009. V. 109. N.1. – P. 197–210.
- [51] *Lie S.* Ueber einige partielle Differential-Gleichungen zweiter Ordnung // Math. Ann. 1872. V. 5. – P. 209–256.

- [52] *Lie S.* Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungstransformationen // *Math. Ann.* 1874. V. 8. – P. 215–303.
- [53] *Lychagin V.V.* Singularities of multivalued solutions of nonlinear differential equations, and nonlinear phenomena // *Acta Appl. Math.* 1985 V. 3. N. 2. – P. 135–173.
- [54] *Lychagin V.V.* Lectures on geometry of differential equations. Vol. 1,2. Rome: La Sapienza, 1993.
- [55] *Lychagin V., Lychagina O.* Finite dimensional dynamics for evolutionary equations // *Nonlinear Dyn.* 2007. V. 48. – P. 29–48.
- [56] *Rapoport L.A., Leas W.J.* Properties of linear waterflood // *Trans. AIME.* 1953. V. 198. – P. 139–148.
- [57] *Tychkov S.N.* Travelling wave solution of the Buckley–Leverett equation // *Analysis and Mathematical Physics.* 2017. V. 7. Iss. 4. – P. 449–458.
- [58] *Van Genuchten M.Th.* A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // *Soil Sci. Soc. Am. J.* 1980. V. 44. – P. 892–989.
- [59] *Wyllie M. R. J.* Relative permeability. Petroleum production handbook. N. Y., 1962.
- [60] *Yaroshenko E.A., Salnikov A.M.* Obtaining of discontinuous solutions from multivalued solutions of nonlinear differential equations in the problem of multiphase filtration of hydrocarbons // *Proc. of the 10rd International Conference on Management of Large-Scale System Development (MLSD'2017), IEEE Xplore, 2017.*

Научное издание

к.т.н. **Ахметзянов** Атлас Валиевич,
д.ф.-м.н. **Кушнер** Алексей Гурьевич,
д.ф.-м.н. **Лычагин** Валентин Васильевич

Математические модели управления разработкой нефтяных месторождений

В печать от 12.12.2017

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 7,75

Тираж 100. Заказ 312

117997, Москва, Профсоюзная, 65
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова
Российской академии наук
www.ipu.ru