УДК 517.5, 004.4 DOI: 10.17587/prin.8.422-432

И. С. Астапов, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., e-mail: velais@imec.msu.ru,
НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова,
Н. С. Астапов, канд. физ.-мат. наук, доц., ст. науч. сотр., Новосибирский государственный университет, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск

Алгоритмы символьного решения алгебраических уравнений

Предложены два новых алгоритма символьного представления корней уравнения третьей степени. Описан способ решения уравнения четвертой степени с помощью возвратного уравнения. Построены алгоритмы для символьного решения алгебраических уравнений пятой и шестой степеней специальных видов. Особое внимание уделено уравнениям, разрешимым в квадратных радикалах. Указаны разложения на множители некоторых полиномов высоких степеней. Эффективность предложенных способов проиллюстрирована сравнением с решениями, генерируемыми пакетом прикладных программ Mathematica.

Ключевые слова: *возвратные уравнения, решение в радикалах, формулы Кардано, резольвента, полином Муавра, модулярное уравнение, компьютерная алгебра, программное обеспечение*

Введение

В физико-технических расчетах часто возникает необходимость явного символьного (не численного) выражения корней алгебраических уравнений через буквенные коэффициенты этих уравнений для последующего исследования физических закономерностей. Для уравнений третьей и четвертой степеней обычно используют так называемые формулы Кардано. Однако эти формулы оказываются неконструктивными для уравнений с произвольными буквенными коэффициентами, так как не существует алгоритма извлечения кубического корня из произвольного комплексного числа. По этой причине формулы Кардано являются компьютерно трудно реализуемыми в случае, когда исходное кубическое уравнение или резольвента уравнения четвертой степени имеют три различных действительных корня.

Алгебраические уравнения пятой или более высокой степеней в общем виде не имеют решения в радикалах. Однако специальные виды уравнений, например, двучленные уравнения $x^n - a = 0$, решаются в радикалах, а уравнение пятой степени общего вида решается с помощью тэта-функций [1]. Более того, корни любого алгебраического уравнения могут быть выражены в виде обобщенных гипергеометрических функций от коэффициентов этого уравнения [1, 2]. В пакете прикладных программ Mathematica для решения алгебраических уравнений используют базисы Гребнера [3]. В работе [4] приведены аналитические выражения для представления всех корней произвольного алгебраического уравнения в виде отношения бесконечных определителей. Поэтому в результате значения корней выражаются в конечном виде численно и приближенно. В работе [5] дан способ выражения корней произвольного алгебраического уравнения, использующий интегральную формулу Меллина. В работе [6] представлен способ поиска корней уравнения в поле алгебраических чисел. Несмотря на то что предлагаемые в работах [4—6] способы пригодны для решения уравнений произвольных степеней, реализующие их алгоритмы оказываются трудоемкими даже для уравнений невысоких степеней, либо, например, в силу ограничений на коэффициенты уравнений, позволяют получить значения корней не в символьном виде.

В предисловии к монографии [2] отмечена актуальность поиска простых алгоритмов для решения алгебраических уравнений, приведены примеры инженерно-технических задач, в которых возникает необходимость решения алгебраических уравнений третьей—восьмой степеней. В работе [2] приведена обширная библиография, содержащая более 280 ссылок, подтверждающая актуальность настоящей работы.

В частных случаях, когда коэффициенты исходных уравнений связаны какими-либо дополнительными соотношениями, иногда удается выразить в конечном виде корни уравнений через коэффициенты существенно более просто, чем это реализовано, например, в системе Mathematica 8.0 [7].

Настоящая работа является естественным продолжением работы [7].

Кубическое уравнение

Уравнение третьей степени вида

$$z^3 + az^2 + bz + b^2/(3a) = 0 \qquad (1)$$

имеет корень $z = -b\big/\left(a + \sqrt[3]{3ab - a^3}\right)$, что проверяется подстановкой этого значения непосредственно в уравнение. С помощью замены переменной

$z = x - a/3$ приведем уравнение (1) к каноническому виду $x^3 + (3b - a^2)/3x + (3b - a^2)(3b - 2a^2)/(27a) = 0$. Обозначим коэффициент при первой степени неизвестного x через p, а свободный член — через q. Из полученной системы уравнений найдем a и b:

$$a = 9\left(-q \pm 2\sqrt{D}\right)/(2p),\ b = \left(3p + a^2\right)/3, \quad D = p^3/27 + q^2/4. \tag{2}$$

Итак, справедливо утверждение: одним из корней кубического уравнения в канонической форме $x^3 + px + q = 0$ является $x = a/3 - b/\left(a + \sqrt[3]{3ab - a^3}\right)$, где a и b определяются равенствами (2), причем в выражении для a можно взять любой знак. Остальные корни находятся с помощью формул Виета. Несмотря на то что этот способ решения кубического уравнения отличается от известных способов [7], при его использовании в неприводимом случае возникают те же затруднения. Однако изложенный способ решения произвольного кубического уравнения построен на разложении на множители кубического уравнения (1) частного вида. Ниже, пользуясь разложением на множители полинома шестой степени специального вида, будут даны новые, более плодотворные алгоритмы решения произвольных кубических уравнений.

Выясним, при каких условиях кубическое уравнение

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \tag{3}$$

с произвольными комплексными коэффициентами a, b и c умножением обеих частей уравнения на линейный двучлен $z + t$ приводится к возвратному уравнению четвертой степени, которое разрешимо в квадратных радикалах [7]. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в равенстве $(z^3 + az^2 + bz + c)(z + t) = z^3 + mz^2 + nz^2 + mlz + l^2$, имеем систему уравнений $(t + a)l = bt + c$, $l^2 = ct$. Если $t + a = 0$ и $c = -bt = ab$, то получим биквадратное уравнение $(z^3 + az^2 + bz + ab)(z - a) = (z^2 - a^2)(z^2 + b)$. Если $t + a \neq 0$, то, выбирая любой корень l резольвенты $l^3 - bl^2 + acl - c^2 = 0$, найдем значение $t = l^2/c$, с помощью которого уравнение (3) приводится умножением на линейный двучлен $z + t$ к возвратному уравнению.

С помощью средств компьютерной алгебры нетрудно проверить, что если коэффициенты кубического уравнения (3) связаны соотношением

$$2a^6 - 18a^4b + 4a^3c + 53a^2b^2 - 18abc - 50b^3 + 27c^2 = 0,$$

или, другими словами, соотношением

$$c = \left(a\left(9b - 2a^2\right) \pm 5\left(3b - a^2\right)\sqrt{2\left(3b - a^2\right)}\right)/27,$$

то уравнение (3) приводится умножением на линейный двучлен $z + t$ к разрешимому в квадратных радикалах уравнению четвертой степени

$$\left(z^3 + az^2 + bz + c\right)(z + t) = (z + m)^4 + \left(\left(3b - a^2\right)/2\right)^2 = 0,$$

$$t = \left(a \mp \sqrt{8\left(3b - a^2\right)}\right)/3,$$

$$m = (t + a)/4 = \left(a \mp \sqrt{\left(3b - a^2\right)/2}\right)/3.$$

Для кубического уравнения в каноническом виде эти формулы упрощаются следующим образом. Так, кубическое уравнение вида

$$x^3 + px \pm 5p\sqrt{6p}/9 = 0, \tag{4}$$

где p — произвольное комплексное число, имеет корни $x_1 = -2\sqrt{p/6}$, $x_{2,3} = \sqrt{p/6} \pm 3\sqrt{-p/6}$, если в уравнении (4) выбран знак "+"; и имеет корни $x_1 = 2\sqrt{p/6}$, $x_{2,3} = -\sqrt{p/6} \pm 3\sqrt{-p/6}$, если в уравнении (4) выбран знак "–". Таким образом, кубическое уравнение специального вида (4) разрешимо в квадратных радикалах. Заметим, что система прикладных программ Mathematica 8.0 выдает для корней уравнений вида (4), например, для уравнения $x^3 + \left(\sqrt{2} + \sin 3\right)x + 5\left(\sqrt{2} + \sin 3\right)\sqrt{6\left(\sqrt{2} + \sin 3\right)}/9 = 0$ громоздкие выражения. Решение, построенное для кубического уравнения (4), можно использовать и для решения алгебраических уравнений высоких степеней специального вида, подставляя вместо величины p квадрат многочлена от x. Так, например, при $p = \left(ax^2 + bx + c\right)^2/6$ уравнение $x^3 + \left(ax^2 + bx + c\right)^2 x/6 \pm 5\left(ax^2 + bx + c\right)^3/54 = 0$ оказывается возвратным уравнением шестой степени частного вида. Корни этого уравнения выражаются через квадратные радикалы и находятся среди корней квадратных уравнений $x = \pm\left(ax^2 + bx + c\right)/3$, $x = \left(ax^2 + bx + c\right)(1 \pm 3i)/6$ и $x = -\left(ax^2 + bx + c\right)(1 \pm 3i)/6$, что проверяется непосредственной подстановкой.

Далее, при рассмотрении возвратных уравнений шестой степени будут даны два новых способа решения кубических уравнений.

Уравнение четвертой степени

В работе [7] доказана теорема о том, что любое уравнение четвертой степени

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \tag{5}$$

с произвольными комплексными коэффициентами a, b, c и d приводится к возвратному относительно x уравнению подстановкой $z = x + t$, где t — какой-либо корень кубического уравнения (резольвенты)

$$t^3\left(a^3 - 4ab + 8c\right) + t^2\left(a^2b + 2ac - 4b^2 + 16d\right) + t\left(a^2c + 8ad - 4bc\right) + a^2d - c^2 = 0. \tag{6}$$

Так, для корней уравнения $z^4 + \left(4 + \sqrt{3}\right)z^3 + \left(6 + 3\sqrt{3}\right)z^2 + \left(4 + 2\sqrt{3}\right)z + 2 = 0$ Mathematica 8.0 генерирует длинные выражения с использованием кубических корней. Однако резольвента (6) этого уравнения имеет корень $t = -1$. Поэтому с помощью подстановки $z = x - 1$ это уравнение приводится к возвратному уравнению $x^4+\sqrt{3}x^3-\sqrt{3}x+1=0$, корни которого $x_{1,2}=\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\pm i\left(\sqrt{5}-1\right)\right)/4$, $x_{3,4}=\left(-\sqrt{15}-\sqrt{3}\pm i\left(\sqrt{5}+1\right)\right)/4$ выражаются через квадратные радикалы.

Рассмотрим несколько случаев, когда уравнение (6) легко разрешимо. Если коэффициенты исходного уравнения (5) связаны равенством $a^3-4ab+8c=0$, то резольвента принимает вид $\left(d-\left(a^2-4b\right)^2/64\right)\left(4t+a\right)^2=0$ и, следовательно, $t=-a/4$ является двукратным корнем резольвенты. В этом случае уравнение (5) подстановкой $z=x-a/4$ приводится к биквадратному уравнению (частному случаю обобщенного возвратного уравнения)

$$x^4-\left(3a^2-8b\right)x^2/8+\left(5a^4-16a^2b+256d\right)/256=0.$$

Таким образом, уравнение $z^4+az^3+bz^2+\left(a^3-4ab\right)z/8+d=0$ с произвольными комплексными коэффициентами a, b и d разрешимо в квадратных радикалах.

При выполнении равенства $d=\left(a^2-4b\right)^2/64$ резольвента (6) принимает вид

$$\left(a^3-4ab+8c\right)\times$$
$$\times\left(t^3+at^2/4+\left(a^2-4b\right)t/8+\left(a^3-4ab-8c\right)/64\right)=0$$

и при дополнительном условии $b=5a^2/24$ имеет корень $t=-a/12+\sqrt[3]{c/8-7a^3/3456}$. Следовательно, уравнение

$$z^4+az^3+5a^2z^2/24+cz+a^4/2304=0$$

приводится подстановкой $z=x=t$ к возвратному относительно x уравнению.

Если выполняется равенство $d=\left(a^2-4b\right)^2/64$ и равенство $a^3-4ab-8c=0$, то уравнение (5) является возвратным и, следовательно, разрешимо в квадратных радикалах.

Далее, при рассмотрении возвратных уравнений шестой степени будет представлен новый способ решения уравнения четвертой степени.

Уравнение пятой степени

При построении алгоритмов для решения алгебраических уравнений пятой степени здесь будем использовать известные теоретические результаты, подробно изложенные в монографии [1].

Рассмотрим уравнение пятой степени специального вида

$$x^5+ax^3+a^2/5\,x+b=0, \tag{7}$$

с многочленом Муавра в левой части (см. [1], с. 226). Уравнение (7) имеет корни

$$x_j=w^j\sqrt[5]{t_1}+w^{4j}\sqrt[5]{t_2},\ \ j=0,1,2,3,4, \tag{8}$$

где t_1 и t_2 — корни квадратного уравнения $t^2+bt-\left(a/5\right)^5=0$, а w — любой примитивный корень пятой степени из единицы (см. [1], с. 211), например, $w=e^{2\pi i/5}=\left(\sqrt{5}-1+i\sqrt{2\sqrt{5}+10}\right)/2$. То есть уравнение (7) решается в радикалах. Если коэффициенты a и b уравнения (7) связаны соотношением $a=-5\sqrt[5]{\left(b/2\right)^2}$, то $t_1=t_2=-b/2$ и $x=-2\sqrt[5]{b/2}$ является корнем уравнения (7). Например, уравнение $x^5-10x^3+20x+8\sqrt{2}=0$ имеет корень $x=-2\sqrt{2}$.

Тригонометрический способ Виета. По аналогии со способом Виета для решения кубических уравнений построим, пользуясь тождеством $\sin 5\alpha=16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha$, алгоритм решения алгебраических уравнений пятой степени. Умножая это тождество на $2R^5$ и обозначая $x=2R\sin\alpha$, получим тождество $x^5-5R^2x^3+5R^4x+b=0$, где $b=-2R^5\sin 5\alpha$. Следовательно, уравнение

$$x^5-5R^2x^3+5R^4x+b=0 \tag{9}$$

при условии $R>0$, $-2R^5\leqslant b\leqslant 2R^5$ имеет пять действительных корней

$$x_k=2R\sin\left[\left(\arcsin\left(b/-2R^5\right)+2\pi k\right)/5\right],$$

$k=0,1,2,3,4$. Если выполняется равенство $b=\pm 2R^5$, то уравнение (9) имеет два двукратных корня. Проведем в уравнении (9) замену $-5R^2=a$, получим уравнение (7). Следовательно, для уравнения пятой степени специального вида (7) с многочленом Муавра в левой части имеем два различных представления корней уравнения: через радикалы и с помощью тригонометрических функций. Заметим, что оба способа пригодны и для уравнений с комплексными коэффициентами. Аналогичный результат получим и в том случае, если воспользуемся тождеством $\cos 5\alpha=16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha$. Интересно отметить, что с помощью своего способа Ф. Виет решил алгебраическое уравнение сорок пятой степени специального вида (см. [8], с. 106—108).

Для уравнения пятой степени общего вида английским математиком А. Кэли были найдены условия, при выполнении которых уравнение разрешимо в радикалах, а также получены в явном виде корни этих разрешимых уравнений. Оказывается, любое уравнение пятой степени без кратных корней можно привести к виду

$$x^5+ax+b=0, \tag{10}$$

решая при этом лишь уравнения второй и третьей степени (см. [1], с. 222—225), а это уравнение в случае $a\neq 0$ с помощью линейной подстановки $x=\left(a/5\right)^{1/4}t$ приводится к виду $t^5+5t+c=0$.

Для уравнения (10) с рациональными коэффициентами a и b в монографии [1], приведено конструктивное доказательство следующей теоремы, которую можно использовать для построения алгоритма решения уравнения (10) и тогда, когда коэффициенты a и b не являются рациональными.

Теорема. ([1, с. 228—231]) *Пусть a и b — такие рациональные числа, что многочлен пятой степени $x^5 + +ax + b$ неприводим. Тогда уравнение (10) разрешимо в радикалах в том и только том случае, когда существуют такие рациональные числа $\varepsilon = \pm 1$, $c \geqslant 0$ и $f \neq 0$, что*

$$a = \frac{5f^4(3-4\varepsilon c)}{c^2+1},\; b = \frac{-4f^4(11\varepsilon + 2c)}{c^2+1}.$$

В этом случае корни уравнения имеют вид

$$x_j = f\left(w^j u_1 + w^{2j} u_2 + w^{3j} u_3 + w^{4j} u_4\right), \quad j = 0, 1, 2, 3, 4, \tag{11}$$

где $w = e^{2\pi i/5} = \left(\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{2\sqrt{5}+10}\right)\Big/2$,

$$u_1 = \left(v_1^2 v_3 / D^2\right)^{1/5},\; u_2 = \left(v_3^2 v_4 / D^2\right)^{1/5}, \quad u_3 = \left(v_2^2 v_1 / D^2\right)^{1/5},\; u_4 = \left(v_4^2 v_2 / D^2\right)^{1/5}, \tag{12}$$

$$v_1 = \sqrt{D} + \sqrt{D - \varepsilon\sqrt{D}},\; v_2 = -\sqrt{D} - \sqrt{D + \varepsilon\sqrt{D}}, \quad v_3 = -\sqrt{D} + \sqrt{D + \varepsilon\sqrt{D}},\; v_4 = \sqrt{D} - \sqrt{D - \varepsilon\sqrt{D}}, \quad D = c^2 + 1. \tag{13}$$

Резольвентой уравнения (10) является уравнение шестой степени

$$r^6 + 8ar^5 + 40a^2r^4 + 160a^3r^3 + 400a^4r^2 + \left(512a^5 - 3125b^4\right)r + \left(256a^6 - 9375ab^4\right) = 0, \tag{14}$$

которое имеет рациональные корни, если выполнены условия теоремы. Окончательно для решения уравнения (10) с рациональными коэффициентами предлагается следующий алгоритм.

Шаг 1. Находим какой-либо рациональный корень r уравнения (14) с рациональными коэффициентами [7] (несколько новых способов символьного решения уравнений шестой степени специального вида будут приведены в следующем пункте).

Шаг 2. Если $(3r - 16a)/(4(r + 3a)) > 0$, то полагаем $\varepsilon = 1$, иначе полагаем $\varepsilon = -1$.

Шаг 3. Вычисляем $f = -5b\varepsilon/(2(r + 2a))$.

Шаг 4. Вычисляем значение $D = c^2 + 1 = 25\left(r^2 + 16a^2\right)/\left(16(r + 3a)^2\right)$. Заметим, что в работе [1] выражение для $c^2 + 1$ дано с опечаткой.

Шаг 5. По формулам (13) вычисляем значения v_1, v_2, v_3 и v_4.

Шаг 6. По формулам (12) вычисляем значения u_1, u_2, u_3 и u_4.

Шаг 7. По формулам (11) вычисляем все пять корней уравнения (10).

Замечание. Если коэффициенты a и b связаны равенством

$$256a^5 - 9375b^4 = 0, \tag{15}$$

то резольвента (14) имеет корень $r = 0$, и все формулы алгоритма упрощаются. Например, для уравнения

$$x^5 + 15x + 12 = 0 \tag{16}$$

последовательно получим: $r = 0$, $\varepsilon = -1$, $c = 4/3$, $D = 25/9$, $f = 1$,

$$u_1 = -\left(\frac{21\sqrt{10}}{125} + \frac{3}{5}\right)^{1/5},\; u_2 = -\left(\frac{72\sqrt{10}}{125} - \frac{9}{5}\right)^{1/5},$$

$$u_3 = \left(\frac{72\sqrt{10}}{125} + \frac{9}{5}\right)^{1/5},\; u_4 = \left(\frac{21\sqrt{10}}{125} - \frac{3}{5}\right)^{1/5},$$

и по формуле (11) при $j = 0$ получим единственный ([1], с. 236) действительный корень $x_0 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$.

Равенство (15) можно записать в виде $(a/5)^5 - 3(b/4)^4 = 0$. Это равенство выполняется в том и только том случае, когда $a = 3\cdot 5^5 k^4$, $b = 3\cdot 4\cdot 5^5 k^5$, т. е. $b = 4ka$, где k — любое комплексное число. Так как для $r = 0$ значения величин ε, c, D, v_i и u_i зависят только от коэффициента a и лишь значение величины f зависит от двух коэффициентов a и b, то корни уравнения (10) при условии (15) получаются из корней уравнения (16) умножением на f, для определения которого достаточно выполнить шаг 3 алгоритма. Например, уравнение $x^5 + cx + c = 0$, не разрешимое в радикалах для произвольного c ([9], с. 17), при $c = 3\cdot 5^5 \cdot 4^{-4}$ имеет своими корнями умноженные на $f = 5/4$ корни уравнения (16). Уравнение $x^5 + \sqrt{3}x - 4\sqrt[8]{75^3}/25 = 0$ имеет своими корнями умноженные на $f = -1/\sqrt[8]{75}$ корни уравнения (16) потому, что для его коэффициентов также выполнено равенство (15). Для уравнения $x^5 + 9375x + 37500i = 0$ с комплексным коэффициентом b по формуле шага 3 получим множитель $f = 5i$.

Еще несколько разложений на множители многочленов пятой степени специального вида будут приведены в следующем пункте.

Уравнение шестой степени

Найдем условия, при которых полином шестой степени в каноническом виде можно представить в виде произведения полиномов третьей степени в каноническом виде

$$x^6 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g = \left(x^3 + px + q\right)\left(x^3 + rx + k\right), \tag{17}$$

где коэффициенты c, d, e, f, g — произвольные комплексные числа. В этом случае уравнение шестой степени

$$x^6 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g = 0 \tag{18}$$

решается в радикалах, например, одним из способов, изложенных в работе [7]. Оказывается справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы выполнялось равенство (17) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$g\left(c^2 - 4e\right) - cdf + d^2e + f^2 = 0\,. \tag{19}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть выполняется равенство (19). Рассмотрим два возможных случая. Если кроме равенства (19) дополнительно выполняется равенство $c^2 - 4e = 0$, то, подставляя в равенство (19) выражение $e = c^2/4$, найдем $f = cd/4$. В этом случае разложение (17) имеет вид

$$\begin{gathered} x^6 + cx^4 + dx^3 + \frac{c^2}{4}x^2 + \frac{cd}{2}x + g = \\ = \left(x^3 + \frac{c}{2}x + \frac{d+v}{2}\right)\left(x^3 + \frac{c}{2}x + \frac{d-v}{2}\right), \end{gathered} \tag{20}$$

где $v = \sqrt{d^2 - 4g}$. Если выполняется неравенство $c^2 - 4e \neq 0$, то, выражая из равенства (19) коэффициент g, получим разложение

$$\begin{gathered} x^6 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + \frac{cdf - d^2e - f^2}{c^2 - 4e} = \\ = \left(x^3 + \frac{c+w}{2}x + \frac{d}{2} + \frac{cd - 2f}{2w}\right)\times \\ \times\left(x^3 + \frac{c-w}{2}x + \frac{d}{2} - \frac{cd - 2f}{2w}\right), \end{gathered} \tag{21}$$

где $w = \sqrt{c^2 - 4e}$. Справедливость разложения (21) легко проверяется перемножением скобок.

Необходимость. Пусть выполняется равенство (17). Следовательно, множество корней уравнения (18) распадается на две группы, в каждой из которых сумма корней равна нулю. Обозначим корни так: m, n, $-(m+n)$ и s, t, $-(s+t)$ и запишем равенство (17) в виде

$$\begin{gathered} x^6 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g = \\ = (x-m)(x-n)(x+m+n)(x-s)(x-t)(x+s+t). \end{gathered}$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, выразим коэффициенты c, d, e, f, g через корни m, n, s и t. С помощью средств компьютерной алгебры получим следующие выражения:

$$\begin{gathered} c = -\left(m^2 + mn + n^2 + s^2 + st + t^2\right), \\ d = m^2n + mn^2 + s^2t + st^2, \\ e = \left(m^2 + mn + n^2\right)\left(s^2 + st + t^2\right), \\ c^2 - 4e = \left(m^2 + mn + n^2 - s^2 - st - t^2\right)^2, \\ f - cd/2 = \\ = \left(m^2 + mn + n^2 - s^2 - st - t^2\right)\left(m^2n + mn^2 - s^2t - st^2\right)/2. \end{gathered} \tag{22}$$

Рассмотрим два возможных случая. Если выполняется равенство $c^2 - 4e = 0$, то, используя выражения (22), имеем $m^2 + mn + n^2 - s^2 - st - t^2 = 0$, следовательно, выполняется равенство $f - cd/2 = 0$. Из этих двух равенств получим равенство (19). Если выполняется неравенство $c^2 - 4e \neq 0$, то, используя выражения (22), с помощью средств компьютерной алгебры получим равенство $\left(cdf - d^2e - f^2\right)/\left(c^2 - 4e\right) = mn(m+n)st(s+t) = g$, т. е. равенство (19).

Следствие 1. При $g = d^2/4$ разложение (20) принимает вид

$$x^6 + cx^4 + dx^3 + \frac{c^2}{4}x^2 + \frac{cd}{2}x + \frac{d^2}{4} = \left(x^3 + \frac{c}{2}x + \frac{d}{2}\right)^2.$$

В этом случае уравнение (18) имеет три двукратных корня.

Следствие 2. График функции

$$y = x^6 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + \frac{cdf - d^2e - f^2}{c^2 - 4e}$$

при $e \neq c^2/4$ получается из графика функции $\varphi(x) = x^6 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$ параллельным переносом вдоль оси Oy. И хотя в общем случае уравнение (18) в радикалах неразрешимо, при $e \neq c^2/4$ можно выразить в радикалах абсциссы точек пересечения графика функции $\varphi(x) = 0$ с графиком прямой линии $y = g - \dfrac{cdf - d^2e - f^2}{c^2 - 4e}$, где коэффициенты c, d, e, f, g — действительные числа.

Следствие 3. Разрешая уравнение (19) относительно переменной f, получим вместо разложений (20) и (21) разложение

$$\begin{gathered} x^6 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + \frac{cd \pm vw}{2}x + g = \\ = \left(x^3 + \frac{c+w}{2}x + \frac{d \mp v}{2}\right)\left(x^3 + \frac{c-w}{2}x + \frac{d \pm v}{2}\right), \end{gathered} \tag{23}$$

которое при $w = \sqrt{c^2 - 4e} = 0$ совпадает с разложением (20), а при $w = \sqrt{c^2 - 4e} \neq 0$ совпадает с разложением (21).

Пример (модулярное уравнение). Рассмотрим уравнение шестой степени

$$x^6 - t^5x^5 + 4tx + t^6 = 0, \tag{24}$$

симметричное относительно переменных x и t. Это уравнение возникает при решении уравнений пятой степени с помощью тэта-функций ([1], с. 264) и называется модулярным. Найдем значения параметра t, при которых левую часть этого уравнения можно представить в виде (17) и тем самым выразить корни уравнения через радикалы от параметра t. С помощью подстановки $x = z + t^5/6$ приведем уравнение (24) к каноническому виду (18) и найдем, что условие (19) выполняется только для таких t (кроме $t = 0$), когда $t^{24} = 256$ или $t^{24} = -64$:

$$\begin{aligned} &cdf - d^2e - f^2 - g\left(c^2 - 4e\right) = \\ &= t^2\left(t^3 - 2\right)\left(t^3 + 2\right)\left(t^6 + 4\right)\left(t^8 + 4\right)\left(t^{12} + 16\right)\left(t^{16} - 4t^8 + 16\right)/1024 = \\ &= t^2\left(t^{24} - 256\right)\left(t^{24} + 64\right)/2^{10} = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет всего четыре действительных корня: $t_{1,2} = 0,\ \ t_{3,4} = \pm\sqrt[3]{2}$. По формуле (21) найдем разложение при $t = \sqrt[3]{2}$ и, возвращаясь с помощью подстановки $z = x - t^5/6$ к исходным переменным, для уравнения (24) получим искомое разложение

$$\begin{aligned} &x^6 - 2\sqrt[3]{4}x^5 + 4\sqrt[3]{2}x + 4 = \\ &= \left(x^3 - \sqrt[3]{4}x^2 + \sqrt[3]{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)x - 2\right)\times \\ &\times\left(x^3 - \sqrt[3]{4}x^2 - \sqrt[3]{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)x - 2\right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (24) при $t = \sqrt[3]{2}$ разрешимо в радикалах. Теперь с помощью средств компьютерной алгебры находим корни этого уравнения. Приведем здесь выражение в радикалах одного из двух действительных корней

$$x_1 = \left(2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{50} + 4\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[6]{20}\right)/6 \approx 1,45935.$$

Заметим, что в работе [1], с. 267, приведено решение модулярного уравнения (24) при $t = \sqrt[4]{2}$ с помощью тэта-функций.

Следствие 4. Некоторые коэффициенты уравнения (18) могут быть равны нулю. Так, разрешая уравнение (19) относительно переменной e, при $c = 0$ и $d^2 - 4g \neq 0$ получим разложение

$$\begin{aligned} &x^6 + dx^3 - \frac{f^2}{u^2}x^2 + fx + g = \\ &= \left(x^3 - \frac{f}{u}x + \frac{d + u}{2}\right)\left(x^3 + \frac{f}{u}x + \frac{d - u}{2}\right), \end{aligned}$$

где $u = \sqrt{d^2 - 4g}$.

Следствие 5. Если в разложении (21) положим $g = \dfrac{cdf - d^2e - f^2}{c^2 - 4e} = 0$ и разрешим уравнение $cdf - d^2e - f^2 = 0$ относительно переменной f, то получим разложение на множители полинома пятой степени

$$\begin{aligned} &x^5 + cx^3 + dx^2 + ex + \frac{d\left(c \pm w\right)}{2} = \\ &= \left(x^2 + \frac{c \pm w}{2}\right)\left(x^3 + \frac{c \mp w}{2}x + d\right), \end{aligned} \tag{25}$$

где $w = \sqrt{c^2 - 4e}$. Разложение (25) проще получить из разложения (23), полагая $g = 0$. Если разрешить уравнение $cdf - d^2e - f^2 = 0$ относительно переменной e, то при $d \neq 0$ получим разложение

$$\begin{aligned} &x^5 + cx^3 + dx^2 + \frac{cdf - f^2}{d^2}x + f = \\ &= \left(x^2 + \frac{f}{d}\right)\left(x^3 + \frac{cd - f}{d}x + d\right). \end{aligned}$$

Следствие 6. В приведенных выше разложениях в качестве коэффициентов можно выбирать произвольные функции, в том числе функции нескольких переменных, в частности, полиномы. Например, если в разложении (21) положить $c = 3,\ \ e = 2$, а затем в полученном разложении

$$\begin{aligned} &x^6 + 3x^4 + dx^3 + 2x^2 + fx - 2d^2 + 3df - f^2 = \\ &= \left(x^3 + x - d + f\right)\left(x^3 + 2x + 2d - f\right) \end{aligned} \tag{26}$$

сделать замену коэффициентов

$$\begin{aligned} d &= x^4 - 2x^3 + (k + 1)x^2 + (p - 3)x + m + n, \\ f &= x^4 - 3x^3 + (k + 2)x^2 + (p - 4)x + m + 2n, \end{aligned}$$

где $k = p(rs - pt)/s^2,\ \ m = pt/s$ и $n = s/p$, то с помощью компьютерной алгебры получим разложение на множители полинома шестой степени частного вида

$$\begin{aligned} &x^6 + \frac{s^3 + p^2\left(rs - pt\right)}{ps^2}x^4 + px^3 + rx^2 + sx + t = \\ &= \left(x^2 + \frac{s}{p}\right)\left(x^4 + \frac{p\left(rs - pt\right)}{s^2}x^2 + px + \frac{pt}{s}\right), \end{aligned} \tag{27}$$

в котором коэффициенты p, r, s, t — произвольны $(ps \neq 0)$. Для сравнения этого разложения с разложением (21) обозначим в разложении (27) $p = d$, $r = e$, $s = f$. Коэффициент при x^4 обозначим через c и разрешим полученное равенство $c = \left(s^3 + p^2\left(rs - pt\right)\right)/ps^2$ относительно t. После указанных подстановок разложение (27) примет вид

$$\begin{aligned} &x^6 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + \frac{f\left(f^2 - cdf + d^2e\right)}{d^3} = \\ &= \left(x^2 + \frac{f}{d}\right)\left(x^4 + \frac{cd - f}{d}x^2 + dx + \frac{f^2 - cdf + d^2e}{d^2}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

Если для коэффициентов уравнения (18) выполняется равенство $g = f\left(f^2 - cdf + d^2e\right)/d^3$ и равенство $g = -\left(f^2 - cdf + d^2e\right)/\left(c^2 - 4e\right)$, то справедливы разложения (28) и (21), причем $w = \sqrt{c^2 - 4e} = \sqrt{-d^3/f}$. Легко проверить, что в этом случае $x = +\sqrt{-f/d}$ является корнем уравнения $x^3 + \dfrac{c-w}{2}x + \dfrac{d}{2} - \dfrac{cd-2f}{2w} = 0$, а $x = -\sqrt{-f/d}$ является корнем уравнения $x^3 + \dfrac{c+w}{2}x + \dfrac{d}{2} + \dfrac{cd-2f}{2w} = 0$, следовательно, уравнение (18) решается в квадратных радикалах.

Следствие 7. Сделаем следующую подстановку в разложении (26): $d = x^6 + (c-2)x^3 + mx^2 + nx + j$, $f = x^6 + (c-3)x^3 + (m+1)x^2 + (a+n-1)x + b + j$, где $m = d - ac + 1$, $n = a^2c + a - ad - bc + e - 3$ и $j = v - a^3c + a^2d + 2abc - ae + b - bd$. В результате с помощью средств компьютерной алгебры получим разложение на множители полинома восьмой степени частного вида

$$x^8 + ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + vx^2 + gx + bh = (x^2 + ax + b)\times \tag{29}$$
$$\times\left(x^6 + cx^3 + (d-ac)x^2 + (a^2c - ad - bc + e)x + h\right),$$

где $g = ah + b(a^2c - ad - bc + e)$, $h = v - a^3c + a^2d + 2abc - ae - bd$, а коэффициенты a, b, c, d, e, v — произвольны.

Если в разложении (26) положить

$$d = x^6 + kx^4 - (k+2)x^3 + mx^2 + nx + j,$$
$$f = x^6 + kx^4 - (k+3)x^3 + (m+1)x^2 + nx + j - k,$$

то получим разложение на множители полинома восьмой степени специального вида

$$x^8 + x^7 - \left(k^2 + k - m + 1\right)x^4 + \left(k^2 + m + n + 1\right)x^3 +$$
$$+(j + 2k - km + n + 2)x^2 + (j - kn - k)x - jk - k^2 =$$
$$= (x^2 + x - k)\times$$
$$\times\left(x^6 + kx^4 - kx^3 + (m-1)x^2 + (n+2)x + j + k\right),$$

отличающееся от разложения (29). Из последнего разложения при $k = -1$, $m = 1$, $n = -3$, $j = 2$ получим разложение $x^8 + x^7 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^6 - x^4 + x^3 - x + 1)$, которое является решением олимпиадной задачи (см. [10], стр. 74, № 854).

Теорема 2. *Обобщенное возвратное уравнение шестой степени*

$$x^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + chx^2 + bh^2x + h^3 = 0 \tag{30}$$

имеет корни $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$, *где* α, β, γ, δ — *корни уравнения четвертой степени*

$$z^4 + sz^3 - bz^2 + qz + h = 0, \tag{31}$$

коэффициенты которого s и q находятся из системы уравнений

$$sq - c - h = 0,\ q^2 + d + h(s^2 + 2b) = 0. \tag{32}$$

Доказательство. Запишем с помощью формул Виета коэффициенты уравнения (31) через корни: $s = -\alpha - \beta - \gamma - \delta$, $b = -\alpha\beta - \alpha\gamma - \alpha\delta - \beta\gamma - \beta\delta - \gamma\delta$, $q = -\alpha\beta\gamma - \alpha\beta\delta - \alpha\gamma\delta - \beta\gamma\delta$, $h = \alpha\beta\gamma\delta$. Теперь так же выразим с помощью средств компьютерной алгебры коэффициенты следующего уравнения шестой степени

$$\begin{aligned}&(x-\alpha\beta)(x-\alpha\gamma)(x-\alpha\delta)(x-\beta\gamma)(x-\beta\delta)(x-\gamma\delta) = \\ &= x^6 + px^5 + mx^4 + nx^3 + kx^2 + lx + r = 0\end{aligned} \tag{33}$$

через его корни. Легко видеть, что коэффициенты p и r разложения (33) выражаются через коэффициенты уравнения четвертой степени (31) так: $p = b$, $r = h^3$. Кроме того, с помощью средств компьютерной алгебры убеждаемся, что коэффициенты m, n, k и l уравнения (33) также однозначно находятся по коэффициентам s, b, q и h уравнения (31):

$$m = sq - h,\ n = -q^2 - h(s^2 + 2b),\ k = hm,\ l = h^2b. \tag{34}$$

Сравнивая выражения (34) с равенствами (32) и коэффициентами уравнения (30), находим, что $c = m$, $d = n$, $ch = k$, $bh^2 = l$, т. е. коэффициенты уравнений (30) и (33) равны. Следовательно, уравнение (30) имеет те же корни, что и уравнение (33). Теорема доказана.

Замечание. Система двух уравнений (32) с двумя неизвестными s и q сводится к биквадратному уравнению, например, относительно s:

$$hs^4 + (d + 2bh)s^2 + (c + h)^2 = 0. \tag{35}$$

Таким образом, если выполнены условия теоремы, то уравнение шестой степени (30) решается в радикалах. Отметим, что идея этой теоремы навеяна олимпиадной задачей (см. [11], стр. 63, № 21.7).

Заметим, что исходное уравнение шестой степени (30) восстанавливается по уравнению четвертой степени (31) однозначно. Однако уравнение (31), которое строится по уравнению (30), в общем случае может иметь два существенно различных набора корней в зависимости от корней квадратного относительно s^2 уравнения (35). Например, для уравнения шестой степени

$$x^6 - 35x^5 + 476x^4 - 3220x^3 + 11\,424x^2 -$$
$$- 20\,160x + 13\,824 = 0$$

получим уравнение (31) в виде $z^4 + sz^3 + 35z^2 + +qz + 24 = 0$, где s — любой корень биквадратного уравнения (35), а q находится из первого соотношения (32). Так, из уравнения $24s^4 - 4900s^2 + 250000 = 0$ находим $s_{1,2} = \pm 10$, $s_{3,4} = \pm 25/\sqrt{6}$, а из соотношения $q = (c+h)/s$ находим $q_{1,2} = \pm 50$, $q_{3,4} = \pm 20\sqrt{6}$. Поэтому для определения корней α, β, γ, δ можно выбрать уравнение (31) в одном из следующих четырех видов:

$z^4 \pm 10z^3 + 35z^2 \pm 50z + 24 = 0$, $z^4 \pm 25/\sqrt{6}\,z^3 + 35z^2 \pm \pm 20\sqrt{6}z + 24 = 0$. Корни первых двух уравнений находятся просто: $\alpha_{1,2} = \mp 1$, $\beta_{1,2} = \mp 2$, $\gamma_{1,2} = \mp 3$, $\delta_{1,2} = \mp 4$. Однако для корней последних двух уравнений получаем громоздкие символьные выражения, приближенные численные значения которых равны: $\alpha_{1,2} \approx \mp 1,225$; $\beta_{1,2} \approx \mp 1,633$; $\gamma_{1,2} \approx \mp 2,449$; $\delta_{1,2} \approx \mp 4,899$. В этом случае для попарных произведений этих приближенных значений, т. е. для корней исходного уравнения шестой степени, находим приближенные значения: 2,000; 3,000; 3,999; 6,001; 8,000; 12,00.

Следствие 1. *Возвратное уравнение шестой степени*

$$x^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + cx^2 + bx + 1 = 0$$

имеет корни $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$, *где* α, β, γ, δ — *корни уравнения четвертой степени*

$$z^4 + sz^3 - bz^2 + (c+1)/sz + 1 = 0,$$

а коэффициент $s \neq 0$ *находится из биквадратного уравнения*

$$s^4 + (d + 2b)s^2 + (c+1)^2 = 0.$$

Так как теорема справедлива для любых h, то, полагая в уравнении (30) $h = 0$, получим следующее утверждение.

Следствие 2 (новый способ решения кубического уравнения). *Уравнение третьей степени*

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (36)$$

тогда и только тогда имеет корни $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, *когда* α, β, γ *являются корнями уравнения*

$$z^3 \pm c/\sqrt{-d}\,z^2 - bz \pm \sqrt{-d} = 0. \qquad (37)$$

Интересно отметить, что дискриминант D_2 уравнения (37) связан с дискриминантом D_1 уравнения (36) равенством $D_2 = -D_1/d$, поэтому при положительных d дискриминанты уравнений (36) и (37) имеют разные знаки. Данное следствие предлагает новый способ [7] решения уравнений третьей степени, так как в некоторых случаях решить уравнение (37) оказывается проще, чем решить исходное уравнение (36). Например, уравнение $x^3 + 7/\sqrt{15}\,x^2 + x + \sqrt{15}/9 = 0$ имеет два комплексных и один действительный корень, для которого пакет прикладных программ Mathematica 8.0 вырабатывает громоздкое точное выражение (приближенно равное $-1,291$) с использованием корней шестой степени из двучленов, содержащих квадратные корни. Связанное с ним уравнение (37) с комплексными коэффициентами $z^3 - i\sqrt[4]{27/5}z^2 - 7/\sqrt{15}\,z + i\sqrt[4]{5/27} = 0$ имеет три комплексных корня $z_1 = i/\sqrt[4]{15}$, $z_{2,3} = (i \pm 2)/\sqrt[4]{15}$, а произведение двух последних корней равно точному значению действительного корня исходного уравнения $z_2 z_3 = -\sqrt{15}/3 \approx -1,291$, т. е. выражается всего лишь через один квадратный радикал. Рассмотрим кубическое уравнение $x^3 - 3x^2 - 2x + \sqrt{129}/9 + 1 = 0$, имеющее три действительных корня. После приведения связанного с ним уравнения (37) к каноническому виду получим уравнение $t^3 + t(\sqrt{129} + 3)/4 = 0$, с помощью которого находим точные выражения корней исходного уравнения через квадратные радикалы: $x_1 = (\sqrt{129} + 9)/6$, $x_{2,3} = \left(9 - \sqrt{129} \pm 3\sqrt{34 - 2\sqrt{129}}\right)/12$.

Теорема 3 (еще один новый способ решения кубического уравнения). *Уравнение третьей степени*

$$t^3 + bt^2 + ct + d = 0 \qquad (38)$$

тогда и только тогда имеет корни $\alpha\beta + 1/\alpha\beta$, $\alpha\gamma + 1/\alpha\gamma$, $\alpha\delta + 1/\alpha\delta$, *когда* α, β, γ, δ *являются корнями уравнения четвертой степени*

$$z^4 + sz^3 - bz^2 + (c+4)/s\,z + 1 = 0, \qquad (39)$$

где коэффициент $s \neq 0$ находится из биквадратного уравнения

$$s^4 + (d + 4b)s^2 + (c+4)^2 = 0. \qquad (40)$$

Для доказательства этой теоремы сделаем в уравнении (38) подстановку $t = x + 1/x$ и умножим результат на x^3. Получим возвратное уравнение шестой степени $x^6 + bx^5 + (c + 3)x^4 + (d + 2b)x^3 + (c + 3)x^2 + bx + 1 = 0$. Затем применим следствие 1 теоремы 2. Заметим, что уравнение (39) является возвратным тогда и только тогда, когда $d + 4b = 2(c + 4)$ или $d + 4b = -2(c + 4)$. В этом случае один из корней уравнения (38) равен 2 или, соответственно, -2, т. е. корни уравнения (38) выражаются через квадратные радикалы. Примерами таких кубических уравнений являются уравнения $x^3 + cx \pm 2(c + 4) = 0$, где c — произвольное комплексное число, в том числе уравнения $x^3 - x - 6 = 0$ и $x^3 - 19x + 30 = 0$, подробно рассмотренные в работе [7].

Предлагаемый способ может оказаться полезным, когда решение кубических уравнений стандартными способами затруднительно [7]. Например, для кубического уравнения

$$t^3 - \sqrt{3}t^2 + (\sqrt{3} - 9/2)t + 9\sqrt{3}/2 - 29/8 = 0,$$

имеющего отрицательный дискриминант (неприводимый случай), находим из биквадратного уравнения $s = \sqrt{2}$ и, приведя уравнение (39) с помощью подстановки $z = x - \sqrt{2}/4$ к каноническому виду, получим биквадратное уравнение $x^4 + (\sqrt{3} - 3/4)x^2 - \sqrt{3}/8 + 69/64 = 0$. Наконец, для исходного кубического уравнения находим выражения корней $t_1 = \sqrt{3} - 1/2$, $t_{2,3} = 1/4 \pm \sqrt{69/16 - \sqrt{3}/2}$, записанные лишь через квадратные радикалы.

С помощью теоремы 3 получим следующий способ решения алгебраического уравнения четвертой степени.

Следствие. Новый алгоритм решения уравнения четвертой степени.

Произвольное уравнение четвертой степени можно привести к виду (39) делением на свободный член и заменой переменной, поэтому будем считать, что исходное уравнение имеет вид (39). Из уравнения (40) находим $d = -s^2 - (c+4)^2/s^2 - 4b$ и решаем уравнение (38), т. е. получим значения корней $w_1 = \alpha\beta + 1/\alpha\beta$, $w_2 = \alpha\gamma + 1/\alpha\gamma$, $w_3 = \alpha\delta + 1/\alpha\delta$. Затем, для вычисления значений величин $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$ решаем три квадратных уравнения $v + 1/v = w_i$, $i = 1, 2, 3$. Тогда корни уравнения (39) находятся среди корней следующих восьми квадратных уравнений: $z^2 + sz + v_1 + v_2 + v_3$, где v_i — один из корней квадратного уравнения $v + 1/v = w_i$, $i = 1, 2, 3$. Заметим, что если корни кубического уравнения (38) выражаются через квадратные радикалы, то корни уравнения четвертой степени (39) также выражаются через квадратные радикалы.

Несколько разложений частного вида

1. Уравнение третьей степени вида $z^3 + az^2 + bz + a(bk^2 - ak + a)/k^3 = 0$ имеет корень $z = -a/k$, т. е. разрешимо в квадратных радикалах.

2. Уравнение третьей степени вида $z^3 + az^2 + bz + b^2(b - ak + k^2)/k^3 = 0$ имеет корень $z = -b/k$, т. е. разрешимо в квадратных радикалах.

3. Для любых комплексных a и b справедливо разложение

$$x^3 - 3a^2bx \pm a^3(b^3+1) = \\ = [x \pm a(b+1)][x^2 \mp a(b+1)x + a^2(b^2 - b + 1)]. \tag{41}$$

Отсюда при $b = 1$ получим разложение $x^3 - 3a^2x \pm 2a^3 = (x \pm 2a)(x \mp a)^2$. Из разложения (41) при $a = \sqrt[3]{q/3}$, $b = \sqrt[3]{2}$ получим разложение на множители кубического многочлена $x^3 - \sqrt[3]{6q^2}x \pm q$, а при $a = \sqrt{-p/\sqrt[3]{54}}$, $b = \sqrt[3]{2}$ получим разложение на множители многочлена $x^3 + px \pm \sqrt{-p^3/6}$.

4. Для любых комплексных a и r справедливо разложение

$$x^4 + 2ax^2 + r\sqrt{\pm r}x \pm ra + a^2 = \\ = (x^2 \pm \sqrt{\pm r}x + a)(x^2 \mp \sqrt{\pm r}x \pm ra + a).$$

5. Если в многочлене $x^6 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$ коэффициенты связаны соотношениями $f = d(4c-1)/4 - k(16e-1)/16$, $g = dk/4 + (16e-1)/64$, где $k = \pm\sqrt{1/2 - c}$, то справедливо разложение

$$x^6 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g = \\ = (x^2 - kx + 1/4)(x^4 + kx^3 + x^2/4 + dx + 4g). \tag{42}$$

6. Легко проверить, что разложение (42) остается справедливым, если коэффициенты c, f и k выразить через свободные коэффициенты d, e и g так: $c = 1/2 - k^2$, $f = d/4 - 4gk$, $k = (1 - 16e + 64g)/16d$. Тогда, полагая $g = 0$, получим разложение на множители многочлена пятой степени:

$$x^5 + cx^3 + dx^2 + ex + f = \\ = (x^2 - kx + 1/4)(x^3 + kx^2 + x/4 + d),$$

где $c = 1/2 - k^2$, $f = d/4$, $k = (1 - 16e)/16d$.

7. Если в многочлене $x^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$ коэффициенты связаны соотношениями $f = mc/2$, $g = nk$, где $m = -(bc - 2d)/2$, $n = (c^2 - 4e)/(4b)$, $k = (2b^2c - 4bd - c^2 + 4e)/(4b)$, то справедливо разложение

$$x^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + mcx/2 + nk = \\ = (x^3 + cx/2 - n)(x^3 + bx^2 + c\,x/2 - k). \tag{43}$$

Если $e = c^2/4$, то $n = 0$, $g = 0$ и из разложения (43) получим разложение на множители многочлена пятой степени

$$x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + c^2x/4 + mc/2 = \\ = (x^2 + c/2)(x^3 + bx^2 + c\,x/2 + m),$$

где $m = -(bc - 2d)/2$.

Заключение

В практически важных задачах часто возникают именно такие кубические уравнения, все три корня которых являются вещественными числами. А в этом случае известные способы решения (формулы Ферро-Тартальи, формулы Феррари-Кардано и др.) оказываются малопродуктивными [7]. В работе [12], например, доказывается, что однотипные величины треугольника (стороны, высоты, синусы углов и т. п.) являются корнями соответствующего кубического уравнения, коэффициенты которого выражаются через полупериметр p треугольника, радиус r вписанной в треугольник и радиус R описанной около треугольника окружности. Так, стороны треугольника являются корнями кубического уравнения $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4R)x - 4pRr = 0$, а тангенсы половинных углов являются корнями уравнения $px^3 - (4R + r)x^2 + px - r = 0$, и стандартными способами эти действительные величины выражаются через комплексные числа. Решение уравнений четвертой степени обычно сводится к решению уравнений третьей степени, а к решению этих уравнений приводит решение уравнений более высоких степеней.

Основная часть данной работы посвящена разложениям на множители полиномов пятой и, особенно, шестой степени специального вида. Исследование символьных решений возвратного уравнения шестой степени привело к построению новых алгоритмов для символьных решений уравнений третьей и четвертой степеней. Особое внимание в работе уделялось символьному выражению корней уравнений через квадратные радикалы. Найденные способы решения уравнений третьей степени (сведением к решению уравнений четвертой степени) и четвертой степени (сведением к решению уравнений третьей степени) отличаются дискриминантами и резольвентами от дискриминантов и резольвент известных способов [7]. Поэтому интересно построить итерационный процесс из различных способов решения этих уравнений и выяснить, приводит ли он за конечное число итераций к легко разрешимому уравнению. Таким образом, появляется возможность построить более универсальный алгоритм решения таких уравнений, чем известные алгоритмы.

Представленные результаты могут служить основой при проектировании программ, дополняющих имеющиеся пакеты прикладных программ простыми алгоритмами в части точного символьного решения алгебраических уравнений третьей, четвертой степеней и некоторых специальных видов уравнений более высоких степеней.

Список литературы

1. **Прасолов В. В., Соловьев Ю. П.** Эллиптические функции и алгебраические уравнения. М.: Факториал, 1997. 288 с.
2. **Кутищев Г. П.** Решение алгебраических уравнений произвольной степени: теория, методы, алгоритмы. М.: Изд-во URSS, 2010. 232 с.
3. **Прасолов В. В.** Многочлены. М.: МЦНМО, 1999. 336 с.
4. **Шмойлов В. И., Хисамутдинов М. В., Кириченко Г. А.** Решение алгебраических уравнений методом Рутисхаузера-Никипорца // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2015. Т. 15. № 1. С. 63—79.
5. **Михалкин Е. Н.** О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47. № 2. С. 365—371.
6. **Зеленова М. Е.** Решение полиномиальных уравнений в поле алгебраических чисел // Вестн. Моск. ун-та. Серия 1. Математика, механика. 2014. № 1. С. 25—29.
7. **Астапов И. С., Астапов Н. С.** Решение алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней с помощью компьютерной алгебры // Программная инженерия. 2014. № 10. С. 33—42.
8. **Никифоровский В. А.** Из истории алгебры XVI—XVII вв. М.: Наука, 1979. 208 с.
9. **Математика в** понятиях, определениях и терминах. Часть I. М.: Просвещение, 1978, 320 с.
10. **Вышенский В. А., Карташов Н. В., Михайловский В. И., Ядренко М. И.** Сборник задач киевских математических олимпиад. Киев: Вища школа, Изд-во при Киев. ун-те, 1984. 240 с.
11. **Зарубежные** математические олимпиады. / Под ред. И. Н. Сергеева. М.: Наука, 1987. (Б-ка мат. кружка). 416 с.
12. **Солтан В. П., Мейдман С. И.** Тождества и неравенства в треугольнике. Кишинев: Штиинца, 1982. 60 с.

Algorithms for Symbolic Solving of Algebraic Equations

I. S. Astapov, velais@imec.msu.ru, Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119192, Russian Federation, **N. S. Astapov,** nika@hydro.nsc.ru, Lavrentyev Institute of Hudrodynamics of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090, Russian Federation

Corresponding author:

Astapov Nikolay St., Senior Researcher, Lavrentyev Institute of Hudrodynamics SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russian Federation,
E-mail: nika@hydro.nsc.ru

Received on June 08, 2017
Accepted on June 19, 2017

In physical and technical simulations there is often a need to express symbolically (not numerically) the roots of algebraic equations as functions of the symbolic coefficients of these equations for a subsequent study of the phenomena of interest. In many technical problems we have a cubic equation with three real roots. In this case the well-known solutions (Ferro-Tartaglia`s and Ferrari-Cardano`s formulas) are difficult to implement accurately, since there is no efficient algorithm for finding the cube roots of a complex number. The general polynomial equations of degree five or higher have no solutions in radicals, although they can be expressed in terms of generalized hypergeometric functions of the coefficients of these equations. However, some special types of equations, for example, $x^n - a = 0$*, can be solved in radicals. Therefore, it is important to find simple algorithms to solve algebraic equations, in particular, of degree three to eight.*

The bulk of this work is devoted to factorizations of special polynomials of degree five and six. A modular equation is considered. A polynomial of degree six with a single coefficient parametrically dependent of the other arbitrary coefficients is factorized. Factorizations are found for some polynomials of higher degree. A study of symbolic solutions to a reciprocal equation has resulted in some new algorithms for solving equations of degree three and four. These algorithms are based on solutions to equations with discriminants and resolvents different from those of the original equations. New methods of reducing the equations of degree three and four to reciprocal equations are proposed. Particular attention is given to equations solved by square radicals. The performance of these methods is shown by a comparison with solutions generated in the software system Mathematica.

These results can be used in the design of simple computer programs to be used as supplementary to the programs of exact symbolic solving of algebraic equations available in the conventional software.

Keywords: *reciprocal equations, solution in radicals, Cardano's formula, resolvent, De Moivre's polynomial, modular equation, computer algebra, software*

For citation:

Astapov I. S., Astapov N. S. Algorithms for Symbolic Solving of Algebraic Equations, *Programmnaya Ingeneria,* 2017, vol. 8, no. 9, pp. 422—432.

DOI: 10.17587/prin.8.422-432

References

1. **Prasolov V. V., Solov'ev Iu. P.** *Ellipticheskie funktsii i algebraicheskie uravneniia* (Elliptic functions and algebraic equations), Moscow, Faktorial, 1997, 288 p. (in Russian).
2. **Kutishchev G. P.** *Reshenie algebraicheskikh uravnenii proizvol'noi stepeni: teoriia, metody, algoritmy* (Solution of algebraic equations of arbitrary degree: theory, methods, algorithms), Moscow, Izd-vo URSS, 2010, 232 p. (in Russian).
3. **Prasolov V. V.** *Mnogochleny* (Polynomials), Moscow, MCNMO, 1999, 336 p. (in Russian).
4. **Shmoilov V. I., Khisamutdinov M. V., Kirichenko G. A.** Reshenie algebraicheskikh uravnenii metodom Rutiskhauzera-Nikiportsa (Solution of algebraic equations by the Rutischauser-Nikiportz method), *Vestnik NGU. Series: Mathematics, mechanics, computer science,* 2015, vol. 15, no. 1, pp. 63—79 (in Russian).
5. **Mikhalkin E. N.** O reshenii obshchikh algebraicheskikh uravnenii s pomoshch'iu integralov ot elementarnykh funktsii (On the solution of general algebraic equations by means of integrals of elementary functions), *Sib. mat. zhurnal,* 2006, vol. 47, no. 2, pp. 365—371 (in Russian).
6. **Zelenova M. E.** Reshenie polinomial'nykh uravnenii v pole algebraicheskikh chisel (Solving polynomial equations over the field of algebraic numbers), *Vestn. Mosk. Un-ta. Series 1. Mathematics, mechanics,* 2014, no. 1, pp. 25—29 (in Russian).
7. **Astapov I. S., Astapov N. S.** Reshenie algebraicheskikh uravnenii tret'ei i chetvertoi stepenei s pomoshch'iu komp'iuternoi algebry (Solving third- and fourth-order algebraic equations by methods of competer algebra), *Programmnaya Ingeneria,* 2014, no. 10, pp. 33—42 (in Russian).
8. **Nikiforovskii V. A.** *Iz istorii algebry XVI—XVII vv.* (From the history of algebra XVI — XVII centuries), Moscow, Nauka, 1979, 208 p. (in Russian).
9. ***Matematika*** *v poniatiiakh, opredeleniiakh i terminakh* (Mathematics in terms, definitions and terms). Part I. Moscow, Prosveshchenie, 1978. 320 p. (in Russian).
10. **Vyshenskii V. A., Kartashov N. V., Mikhailovskii V. I., Iadrenko M. I.** *Sbornik zadach kievskikh matematicheskikh olimpiad* (Collection of problems of the Kiev Mathematical Olympiads) Kiev, Vishcha shkola, Izdatel'stvo pri Kievskom universitete, 1984, 240 p. (in Russian).
11. ***Zarubezhnye*** *matematicheskie olimpiady* (Foreign Mathematical Olympiads) / Editor I. N. Sergeev. Moscow, Nauka, 1987, 416 p. (in Russian).
12. **Soltan V. P., Meidman S. I.** *Tozhdestva i neravenstva v treugol'nike* (Identities and inequalities in the triangle), Kishinev, Shtiinca, 1982, 60 p. (in Russian).

ООО "Издательство "Новые технологии". 107076, Москва, Стромынский пер., 4
Технический редактор *Е. М. Патрушева.* Корректор *И. Е. Назарова*

Сдано в набор 10.07.2017 г. Подписано в печать 18.08.2017 г. Формат 60×88 1/8. Заказ PI917
Цена свободная.

Оригинал-макет ООО "Адвансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Адвансед солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1. Сайт: **www.aov.ru**