

УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ

Эглит М. Э.¹, Якубенко Т. А.², Якубенко А. Е.²¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова²Институт механики МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва

Рассматриваются динамические процессы в микroneоднородных анизотропных упругих средах, в частности, композитах, а также в тонких пластинах и стержнях. Предполагается, что отношение ε масштаба неоднородности, толщины пластины и стержня к типичной длине волн мало. Эффективным подходом при изучении таких процессов является применение некоторого осреднения. В работе демонстрируются различные асимптотически эквивалентные осредненные уравнения высшего порядка для микroneоднородных сред, тонких пластин и стержней, выведенные с использованием метода двухмасштабных асимптотических разложений по ε , и приводятся результаты исследования их свойств.

1. Введение. Исследование процессов в микroneоднородных средах, например, в композитах, когда отношение ε масштаба неоднородности среды к глобальному масштабу процесса мало, проводится с помощью моделей, которые возникают в результате некоторого осреднения. Для сред периодической структуры одним из методов получения эффективных осредненных уравнений, не требующий каких-либо предварительных гипотез о возможных видах локального напряженно-деформированного состояния, является метод двухмасштабных асимптотических разложений по малому параметру ε , развитый в математической теории осреднения [1]. Этот алгоритм позволяет не только построить уравнения для средних по периоду величин, но и найти в некотором приближении локальные поля. После некоторых модификаций метод двухмасштабных асимптотических разложений может быть применен также для вывода осредненных уравнений пластин и стержней, если длины изучаемых волн много больше типичной толщины пластины или стержня.

Обычно осредненными уравнениями называют уравнения, получающиеся в нулевом приближении по ε . Для микroneоднородных линейно-упругих сред эти уравнения соответствуют упругим (в общем случае анизотропным) средам с некоторыми эффективными постоянными упругими модулями. Однако в микroneоднородных средах существуют эффекты, не описываемые обычными уравнениями теории упругости. Одним из таких эффектов является дисперсия волн в безграничной среде. Для описания дисперсии волн необходим учет членов более высокого порядка по ε ; в этом случае уравнения содержат производные высшего порядка от перемещений по координатам и времени [1]. Другим эффектом, для описания которого требуются уравнения высокой точности по ε , является так называемый масштабный эффект: эффективные свойства среды зависят от размера неоднородностей, даже когда этот размер много меньше размера тела. Уравнения высокой точности по ε необходимы для описания процессов в узких зонах,

например, структуры ударной волны. Уравнения с высшими производными от различных параметров среды по времени и координатам вводились феноменологически, в частности, в моделях сжимаемых жидкостей и в моделях моментной теории упругости. Метод двухмасштабных асимптотических разложений позволяет получить выражения для коэффициентов этих уравнений в явной форме, если микроструктура среды известна.

2. Метод вывода осредненных уравнений микронеоднородных упругих сред. Для описания процессов с типичной длиной волн l , много большей периода свойств среды d , так что $\varepsilon = \frac{d}{l} \ll 1$, вводятся медленные переменные $x_j = \bar{x}_j/l$ и быстрые переменные $y_j = \bar{x}_j/d$, $\bar{x}_j$ — размерные координаты. Вектор перемещения $\mathbf{u}$ считается функцией быстрых и медленных переменных, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x_j, y_j, \varepsilon)$, и представляется в виде асимптотического ряда по степеням ε . Доказывается [1], что ряд имеет вид

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{v} + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m N_{l_1 l_2 l_3}^q(y_j) \frac{\partial^m \mathbf{v}}{\partial t^q \partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \partial x_3^{l_3}}, \quad (1)$$

где $m = q + l_1 + l_2 + l_3$, $N_{l_1 l_2 l_3}^q$ — периодические функции быстрых переменных, определяющиеся через структуру среды, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ не зависит от быстрых переменных и при надлежащем выборе $N_{l_1 l_2 l_3}^q$ представляет собой перемещение, осредненное по ячейке периодичности. Подстановка ряда (1) в исходное уравнение дает

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m-2} H_{l_1 l_2 l_3}^q(y_1, y_2, y_3) \frac{\partial^m \mathbf{v}}{\partial t^q \partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \partial x_3^{l_3}} \sim 0, \quad (2)$$

где $H_{l_1 l_2 l_3}^q$ выражаются через $N_{l_1 l_2 l_3}^q$ и их первые и вторые производные по y_j . Можно найти $N_{l_1 l_2 l_3}^q$ так, чтобы в выражении (2) коэффициенты при отрицательных степенях ε обратились в нуль, а при неотрицательных были бы равны некоторым константам:

$$H_{l_1 l_2 l_3}^q(y_1, y_2, y_3) = h_{l_1 l_2 l_3}^q = \text{const} = \langle H_{l_1 l_2 l_3}^q \rangle \text{ при } m \geq 2. \quad (3)$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначается среднее по ячейке. Дополнительно можно потребовать, чтобы $\langle N_{l_1 l_2 l_3}^q \rangle = 0$. Тогда $\mathbf{v} \sim \langle \mathbf{u} \rangle$. Осредненное уравнение бесконечного порядка точности по ε имеет вид

$$\sum_{m \geq 2} \varepsilon^{m-2} h_{l_1 l_2 l_3}^q \frac{\partial^m \mathbf{v}}{\partial t^q \partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \partial x_3^{l_3}} \sim 0, \quad m = q + l_1 + l_2 + l_3. \quad (4)$$

Здесь $h_{l_1 l_2 l_3}^q$ — матрицы эффективных упругих коэффициентов, они вычисляются после того, как найдены $N_{l_1 l_2 l_3}^q$, по формулам $h_{l_1 l_2 l_3}^q = \langle H_{l_1 l_2 l_3}^q \rangle$. Для нахождения $N_{l_1 l_2 l_3}^q$ с помощью уравнений (3) надо решать статические задачи теории упругости на ячейке периодичности с некоторыми специальными массовыми силами и граничными условиями. При сложной структуре ячейки они решаются только численно. Существенно, что эти задачи не зависят от глобальных начальных и

граничных условий. Для данной структуры они должны быть решены один раз, после чего вычисляются коэффициенты осредненных уравнений и дальше можно решать конкретные задачи о поведении среды в тех или иных условиях.

3. Примеры результатов исследования осредненных уравнений высшего порядка. Доказываются следующие свойства осредненных уравнений для произвольных упругих периодических сред [2].

1. Осредненные уравнения не содержат нечетных производных по времени.
2. Матрицы коэффициентов при четных производных по координатам симметричны, при нечетных – антисимметричны $(h_{l_1 l_2 l_3}^q)^T = (-1)^{l_1+l_2+l_3} h_{l_1 l_2 l_3}^q$.
3. Можно получить различные асимптотически эквивалентные формы уравнений высшего порядка с теми же свойствами симметрии коэффициентов, используя операторы дифференцирования по времени и координатам и уравнения низшего приближения. В частности, можно исключить производные по времени порядка выше второго. При этом можно либо оставить смешанные производные по t, x_i , либо получить уравнения, не содержащие смешанных производных по t, x_i .

Для описания ряда эффектов, в частности, дисперсии волн, достаточно дополнительно к членам нулевого порядка по ε учесть в уравнениях (4) члены порядка ε и ε^2 , содержащие производные третьего и четвертого порядка от перемещений. Коэффициенты при этих производных в зависимости от изучаемых процессов и локальных свойств среды могут быть либо вычислены и исследованы аналитически, либо получены с применением численных методов. Например, для плоских волн в анизотропных стратифицированных средах и пластинах [3], в которых плотность и упругие модули — периодические функции быстрой координаты y_1 , а волны распространяются в произвольном относительно слоев направлении x , уравнение точности $O(\varepsilon^4)$, выведенное непосредственным применением метода двухмасштабных асимптотических разложений, имеет вид ($v = v_x(t, x)$)

$$\langle \rho \rangle \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = H_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon (h_1^2 \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} + h_3^0 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}) + \varepsilon^2 (h_0^4 \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + h_2^2 \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} + h_4^0 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4})$$

Одна из асимптотически эквивалентных форм этого уравнения такова

$$\langle \rho \rangle \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = H_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon H_3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \varepsilon^2 H_4 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}$$

Матрицы H_i зависят от свойств среды и направления распространения волн. Доказаны следующие свойства матриц H_i :

- 1) $H_2 \geq 0$;
- 2) H_2 и H_4 — симметричны, H_3 — антисимметрична;
- 3) $H_3 = 0$, если плотность и упругие модули — четные функции y_1 . Последнее верно, например, для двуслойной среды с произвольной анизотропией, а также для пластины из трех анизотропных слоев, симметричной относительно срединной плоскости.
- 4) $H_3 \neq 0$, если условие четности не выполнено, например, для двуслойной пластины.

Матрицы H_3 и H_4 определяют вид зависимости скорости волн от их частоты. Аналитически и численно получены следующие результаты. В слоистой среде с

произвольной анизотропией слоев скорости всех волн, распространяющихся ортогонально слоям, убывают с возрастанием частоты (отрицательная дисперсия). Для волн, распространяющихся параллельно слоям, по крайней мере одна обнаруживает отрицательную дисперсию. Для волн в пластинах по крайней мере одна обнаруживает положительную дисперсию.

Приведем еще примеры уравнений высшего порядка для круглых однородных изотропных стержней и результатов исследования их свойств. В этом случае задачи на ячейке для определения функций $N_{l_1 l_2 l_3}^q$ решаются в явном виде, и можно получить выражения для эффективных упругих модулей любого порядка в виде формул [4]. Если их относить к величине модуля сдвига μ , то они будут выражаться только через коэффициент Пуассона ν . Уравнения точности $O(\varepsilon^n)$, полученные методом двухмасштабных асимптотических разложений, содержат производные перемещений по t, x до n -го порядка включительно. Однако с помощью низших приближений можно получить уравнения той же точности в других формах, в том числе с меньшим порядком входящих производных. Например, для свободных продольных колебаний стержня возможны следующие асимптотически эквивалентные безразмерные формы уравнений точности $O(\varepsilon^6)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= h_2^0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon^2 h_4^0 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \varepsilon^4 h_6^0 \frac{\partial^6 v}{\partial x^6}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= h_2^0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon^2 h_4^0 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \varepsilon^2 h_2^2 \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= h_2^0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon^2 h_2^2 \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} + \varepsilon^4 h_4^2 \frac{\partial^6 v}{\partial t^2 \partial x^4},\end{aligned}$$

Здесь

$$h_2^0 = 2(1 + \nu), \quad h_2^2 = \frac{\nu^2}{2}, \quad h_4^2 = -\frac{\nu^2(12\nu^4 + 4\nu^3 - 20\nu^2 - 4\nu + 7)}{48(1 - \nu^2)}.$$

Исследование показывает, что первые две формы уравнений не удовлетворяют условию корректности задачи Коши. Для третьей формы задача Коши корректна.

В качестве еще одного примера приведем осредненное уравнение точности $O(\varepsilon^8)$ для свободных поперечных колебаний круглого изотропного стержня. Уравнение, полученное непосредственно методом двухмасштабных асимптотических разложений, содержит производные до восьмого порядка включительно. Это уравнение можно преобразовать к следующему уравнению той же точности $O(\varepsilon^8)$, которое по форме аналогично уравнению Тимошенко [5]

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \varepsilon^2 (Q_0^4 \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + Q_2^2 \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} + Q_4^0 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}) \quad (5)$$

Здесь

$$Q_4^0 = -\frac{\nu + 1}{2}, \quad Q_2^2 = \frac{4\nu^2 + 15\nu + 10}{12(\nu + 1)}, \quad Q_0^4 = \frac{96\nu^4 - 4\nu^3 - 419\nu^2 - 494\nu - 167}{576(\nu + 1)^3}. \quad (6)$$

Уравнение Тимошенко [5], записанное в тех же безразмерных переменных, отличается от уравнения (5) только значениями коэффициентов при производных:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \varepsilon^2 (T_0^4 \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + T_2^2 \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} + T_4^0 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}), \quad \text{где} \quad (7)$$

$$T_4^0 = Q_4^0, \quad T_2^2 = \frac{1}{4K_2} + \frac{\nu + 1}{2K_3}, \quad T_0^4 = -\frac{1}{4K_1},$$

причем $K_1 = K_2 = K_3 = K$. В противоположность уравнению (5) точности $O(\varepsilon^8)$, уравнение (7) имеет точность $O(\varepsilon^4)$. Однако можно подобрать K_1 и $K_2 = K_3$ так, что $R_2^2 = \max_{0 \leq \nu \leq 1/2} |T_2^2/Q_2^2 - 1|$ и $R_0^4 = \max_{0 \leq \nu \leq 1/2} |T_0^4/Q_0^4 - 1|$ будут малы. А именно, при $K_1 = 0.90459121$ и $K_2 = K_3 = 0.936486487$ получим $R_2^2 \approx 0.038961039$, $R_0^4 \approx 0.046778875$. Таким образом, за счет выбора K_1, K_2, K_3 можно существенно повысить точность уравнения Тимошенко.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 15-01-00361, 15-01-08023).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
- [2] Бахвалов Н. С., Эглит М. Э. Вариационные свойства осредненных уравнений периодических сред // Труды МИАН СССР, 1990. Т. 192. С. 5–19.
- [3] Бахвалов Н. С., Эглит М. Э. Исследование эффективных уравнений с дисперсией, описывающих распространение волн в стратифицированных средах и тонких пластинах // Доклады РАН. 2002. Т. 383. № 6. С. 742–746.
- [4] Бахвалов Н. С., Эглит М. Э. Об уравнениях высокого порядка точности, описывающих колебания тонких стержней // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46. Вып. 3. С. 457–472.
- [5] Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967.

Eglit M. E., Yakubenko T. A., Yakubenko A. E. *Equations of higher order for dynamic processes in microinhomogeneous elastic media.* Dynamic processes in periodic inhomogeneous anisotropic elastic media as well as in thin plates and rods are considered. The ratio ε of the medium inhomogeneity scale or the thickness of plates and rods to the typical wave length is supposed to be small. The mathematical homogenization method based on two-scale asymptotic expansions on ε is used to derive the averaged effective equations. The averaged equations in zeroth approximation on ε cannot describe many effects taking place in microinhomogeneous media, e.g., dispersion of waves in elastic composites. In this paper various asymptotically equivalent forms of the higher order averaged effective equations are derived and investigated.