СУБЪЕКТИВНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Пытьев Ю.П., Фаломкина О.В.

Неопределенный элемент. Меры правдоподобия Pl и доверия Bel.

$M(x) = (\Omega, \mathcal{A}, \Pr(\cdot; x))$ или $M(x) = (\Omega, \mathcal{P}(X), \mathrm{P}(\cdot; x))$
$(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \widehat{\mathcal{L}}$,
$\mathcal{L} = ([0,1], \leqslant, +, \times) \stackrel{\text{def}}{=} ([0,1], \leqslant, \max, \min)$,
$\widehat{\mathcal{L}} = ([0,1], \widehat{\leqslant}, \widehat{+}, \widehat{\times}) \stackrel{\text{def}}{=} ([0,1], \geqslant, \min, \max)$

$$\forall\, E \in \mathcal{P}(X),$$

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E) = \sup_{x \in E} t^{\widetilde{x}}(x), \tag{1}$$

$$\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E) = \inf_{x \in X \setminus E} \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x),$$

$$t^{\widetilde{x}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x),\ \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x),\ x \in X. \tag{2}$$

$t^{\widetilde{x}}(\cdot) : X \to \mathcal{L}$, $\widehat{t}^{\widetilde{x}}(\cdot) : X \to \widehat{\mathcal{L}}$
$E = \bigcup\limits_{x \in E} \{x\} = \bigcap\limits_{x \in X \setminus E} (X \setminus \{x\})$.

Определения (1), (2) — следствия условий:

• М.-и. *может предложить модель* $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ н. э. $\widetilde{x}$, указав в (2), насколько, по его мнению, *относительно правдоподобны* равенства $\widetilde{x} = x$, $x \in X$, и насколько *следует относительно доверять* неравенствам $\widetilde{x} \neq x$, $x \in X$.

«Относительно» означает, что в $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$

1) *численные значения* $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E)$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E)$, $E \in \mathcal{P}(X)$, в (1),

отличные от 0 *и* 1, *не могут быть содержательно истолкованы*. *Существенна лишь их упорядоченность*.

2) меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\mathrm{Pl}'^{\widetilde{x}}(\cdot)$ ($\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\mathrm{Bel}'^{\widetilde{x}}(\cdot)$) *эквивалентны*, если $\exists\, \gamma(\cdot) \in \Gamma$

$$\forall\, E \in \mathcal{P}(X) \quad \gamma(\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E)) = \mathrm{Pl}'^{\widetilde{x}}(E) \quad (\gamma(\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E)) = \mathrm{Bel}'^{\widetilde{x}}(E)),$$

где класс Γ — группа непрерывных, строго монотонных функций $\gamma(\cdot)\colon\ [0,1] \to [0,1]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$, с групповой операцией «$\circ$», $\gamma \circ \gamma'(a) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(\gamma'(a))$, $a \in [0,1]$.

Группы $\overline{\Gamma}$ автоморфизмов шкал $\mathcal{L}$, $\widehat{\mathcal{L}}$ и $\overline{\overline{\Gamma}}$ изоморфизмов.

- Согласно условиям 1), 2)

класс Γ функций $\gamma(\cdot):\ [0,1]\to[0,1]$ определяет:

① *группу* $\overline{\Gamma}$ *автоморфизмов* $\gamma:\mathcal{L}\to\mathcal{L}$, $\gamma:\widehat{\mathcal{L}}\to\widehat{\mathcal{L}}$ *шкал* $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$:

$\forall\,\gamma(\cdot)\in\Gamma\ \gamma[0,1]=[0,1]$,

$\forall\,a,b\in[0,1]\ \gamma(a*b)=\gamma(a)*\gamma(b)$, $*-+,\ \widehat{+},\ \times,\ \widehat{\times}$,

$a\leqslant b\Leftrightarrow\gamma(a)\leqslant\gamma(b)$, $a\widehat{\leqslant}b\Leftrightarrow\gamma(a)\widehat{\leqslant}\gamma(b)$;

равенства $a+b=a\widehat{\times}b=\max\{a,b\}$, $a\times b=a\widehat{+}b=\min\{a,b\}$,

$a,b\in[0,1]$, следуют из:

непрерывности и коммутативности операции $*$: $[0,1]^2\to[0,1]$,

$\forall\,a,b\in[0,1]\ a\leqslant b\Leftrightarrow b\widehat{\leqslant}a$,

свойств 0 и 1: $\forall\,a\in[0,1]\ a+0=a\widehat{\times}0=a\times1=a\widehat{+}1=a$,

$a+1=a\widehat{\times}1=1$ и $a\times0=a\widehat{+}0=0$.

② *группу* $\overline{\overline{\Gamma}}$ *изоморфизмов* $\gamma : \mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$, $\gamma : \widehat{\mathcal{L}} \to \gamma\widehat{\mathcal{L}}$: $\forall\, \gamma(\cdot) \in \Gamma$ $\widehat{\mathcal{L}}, \mathcal{L} \ni a \to \gamma(a) \in \gamma\mathcal{L}, \gamma\widehat{\mathcal{L}}$, и *определены* операции $*$ и отношения $\leqslant, \widehat{\leqslant}$ в *шкалах* $\gamma\mathcal{L}$ и $\gamma\widehat{\mathcal{L}}$:
$a * b \to \gamma(a * b) = \gamma(a) * \gamma(b)$, $a \leqslant b \Leftrightarrow \gamma(a) \leqslant \gamma(b)$,
$a \widehat{\leqslant} b \Leftrightarrow \gamma(a) \widehat{\leqslant} \gamma(b)$, $a, b \in \mathcal{L}, \widehat{\mathcal{L}}$.
Согласно ② шкалы $\gamma\,\mathcal{L}$, $\gamma \in \overline{\overline{\Gamma}}$, и $\widehat{\gamma}\,\widehat{\mathcal{L}}$, $\widehat{\gamma} \in \overline{\overline{\Gamma}}$, (*координатные представления шкал* $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$) *эквивалентны*, м.-и. могут формулировать модели в *«своих»* шкалах $\gamma\mathcal{L}$, $\widehat{\gamma}\widehat{\mathcal{L}}$.
Сформулированные в парах шкал $\mathcal{L}'$, $\widehat{\mathcal{L}}'$ и $\mathcal{L}''$, $\widehat{\mathcal{L}}''$, модели считаются *эквивалентными*, если *существует* пара шкал

$$\mathcal{L} = \gamma'\mathcal{L}' = \gamma''\mathcal{L}'' \text{ и } \widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\gamma}'\widehat{\mathcal{L}}' = \widehat{\gamma}''\widehat{\mathcal{L}}'', \ \gamma', \gamma'', \widehat{\gamma}', \widehat{\gamma}'' \in \overline{\Gamma},$$

в которых формулировки совпадают.

В терминах операций в шкалах $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ $\quad \forall\, E \in \mathcal{P}(X)$

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E) = \underset{x \in E}{+}\, t^{\widetilde{x}}(x),$$

$$\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E) = \underset{x \in X \setminus E}{\widehat{+}}\, \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x),$$

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(X) = \underset{x \in X}{+}\, t^{\widetilde{x}}(x) \stackrel{\mathsf{def}}{=} 1,$$

$$\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varnothing) = \underset{x \in X}{\widehat{+}}\, \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x) = 0,\ \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varnothing) \stackrel{\mathsf{def}}{=} 0,$$

$$\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(X) \stackrel{\mathsf{def}}{=} 1.$$

Интегрирование. pl- и bel-интегралы

Обозначим $\mathcal{L}(X)$ ($\widehat{\mathcal{L}}(X)$) класс всех функций $g(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$ ($\widehat{g}(\cdot)\colon X \to \widehat{\mathcal{L}}$) с операциями $(g_1 * g_2)(x) \stackrel{\text{def}}{=} g_1(x) * g_2(x)$, $x \in X$, $((\widehat{g}_1 \,\widehat{*}\, \widehat{g}_2)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{g}_1(x) \,\widehat{*}\, \widehat{g}_2(x)$, $x \in X)$, где $*$ ($\widehat{*}$) — любая из операций $+$, $\times$ ($\widehat{+}$, $\widehat{\times}$).

Определение. Назовем pl- (bel-) интегралом функцию $\mathrm{pl}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ ($\mathrm{bel}(\cdot)\colon \widehat{\mathcal{L}}(X) \to \widehat{\mathcal{L}}$),

- однородную: $\forall\, a \in [0,1]\ \forall\, g(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$ $\mathrm{pl}((a \times g)(\cdot)) = a \times \mathrm{pl}(g(\cdot))$ ($\forall\, a \in [0,1]\ \forall\, \widehat{g}(\cdot)\colon X \to \widehat{\mathcal{L}}$ $\mathrm{bel}((a \,\widehat{\times}\, \widehat{g})(\cdot)) \equiv \mathrm{bel}(a \,\widehat{\times}\, \widehat{g}(\cdot)) = a \,\widehat{\times}\, \mathrm{bel}(\widehat{g}(\cdot)))$, и
- *вполне* аддитивную: $\forall\, g_j(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$, $j \in J$, $\mathrm{pl}((\underset{j\in J}{+} g_j)(\cdot)) = \underset{j\in J}{+} \mathrm{pl}(g_j(\cdot))$, ($\forall\, \widehat{g}_j(\cdot)\colon X \to \widehat{\mathcal{L}}$, $j \in J$, $\mathrm{bel}((\underset{j\in J}{\widehat{+}} \widehat{g}_j)(\cdot)) = \underset{j\in J}{\widehat{+}} \mathrm{bel}(\widehat{g}_j(\cdot)))$.

Определим меры $\mathrm{Pl}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$ и $\mathrm{Bel}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \widehat{\mathcal{L}}$: $\forall\, E \in \mathcal{P}(X)$ $\mathrm{Pl}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{pl}(\chi_E(\cdot))$ и $\mathrm{Bel}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{bel}(\chi_E(\cdot))$, где $\chi_E(x) = 1$, $x \in E$, $\chi_E(x) = 0$, $x \in X \setminus E$.

Теорема

$$\forall\, \mathrm{pl}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}\ \ \exists\, t(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}\ \ \forall\, g(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$$

$$\mathrm{pl}(g(\cdot)) = \sup_{x\in X} \min\{t(x), g(x)\} \equiv \underset{x\in X}{+}(t(x) \times g(x)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{pl}_t(g(\cdot)); \tag{3}$$

$$\forall\, \mathrm{bel}(\cdot)\colon \widehat{\mathcal{L}}(X) \to \widehat{\mathcal{L}}\ \ \exists\, \widehat{t}(\cdot)\colon X \to \widehat{\mathcal{L}}\ \ \forall\, \widehat{g}(\cdot)\colon X \to \widehat{\mathcal{L}}$$

$$\mathrm{bel}(\widehat{g}(\cdot)) = \inf_{x\in X} \max\{\widehat{t}(x), \widehat{g}(x)\} \equiv \underset{x\in X}{\widehat{+}}(\widehat{t}(x)\,\widehat{\times}\,\widehat{g}(x)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{bel}_{\widehat{t}}(\widehat{g}(\cdot)). \tag{4}$$

где $t(y) = \mathrm{pl}(\chi_{\{y\}}(\cdot)) = \mathrm{pl}_t(\chi_{\{y\}}(\cdot)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Pl}_t(\{y\})$, $y \in X$;

$\widehat{t}(y) = \mathrm{bel}(\chi_{X\setminus\{y\}}(\cdot)) = \mathrm{bel}_{\widehat{t}}(\chi_{X\setminus\{y\}}(\cdot)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Bel}_{\widehat{t}}(X \setminus \{y\})$, $y \in X$.

Следствия

1. $\forall\, E \in \mathcal{P}(X)\ \mathrm{Pl}(E) = \mathrm{pl}_t(\chi_E(\cdot)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Pl}_t(E) = \underset{x\in E}{+} t(x)$,

$\mathrm{Bel}(E) = \mathrm{bel}_{\widehat{t}}(\chi_E(\cdot)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Bel}_{\widehat{t}}(E) = \underset{x\in X\setminus E}{\widehat{+}} \widehat{t}(x)$;

2. Полная аддитивность мер Pl_t и $\mathrm{Bel}_{\widehat{t}}$:

$$\mathrm{Pl}_t(\bigcup_{j\in J} E_j) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{pl}_t(\chi_{\bigcup_{j\in J} E_j}(\cdot)) \equiv \mathrm{pl}_t((\underset{j\in J}{+} \chi_{E_j})(\cdot)) =$$
$$= \underset{j\in J}{+} \mathrm{Pl}_t(E_j),$$

$$\mathrm{Bel}_{\widehat{t}}(\bigcap_{j\in J} E_j) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{bel}_{\widehat{t}}(\chi_{\bigcap_{j\in J} E_j}(\cdot)) \equiv \mathrm{bel}_{\widehat{t}}((\underset{j\in J}{\widehat{+}} \chi_{E_j})(\cdot)) = \underset{j\in J}{\widehat{+}} \mathrm{Bel}_{\widehat{t}}(E_j).$$

Неопределенный элемент как неопределенная высказывательная переменная

Теоретико-множественное представление логики высказываний: в $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ X — множество элементарных высказываний (э. в.), $a \leftrightarrow A = \bigcup\limits_{\substack{x \in X \\ x \to a}} \{x\} \equiv \{x \in X,\ x \to a\}$.

Э. в. $x \leftrightarrow \{x\}$: $\forall\ x \in X$ не следует ни из какого высказывания, кроме x и всегда ложного $\mathbf{0}$.

Если $a \leftrightarrow A$, $b \leftrightarrow B$, то $a \,\&\, b \leftrightarrow A \cap B$, $a \vee b \leftrightarrow A \cup B$, $\neg a \leftrightarrow X \setminus A$, $a \to b \equiv (\neg a) \vee b \leftrightarrow (X \setminus A) \cup B$, $\mathbf{1} \leftrightarrow X$, $\mathbf{0} \leftrightarrow \varnothing$.

Интерпретация: $t^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x)$ $(\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E))$ — *правдоподобие истинности* н. в., *согласно которому* $\widetilde{x} = x$ $(\widetilde{x} \in E)$, где $x \leftrightarrow \{x\}$ $(e \leftrightarrow E)$. Соответственно $\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x)$ $(\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E))$ — *доверие истинности* н. в.: $\widetilde{x} \in X \setminus \{x\}$ $(\widetilde{x} \in E)$, где $\neg x \leftrightarrow X \setminus \{x\}$ $(e \leftrightarrow E)$, $x \in X$.

Функция неопределенного элемента $\widetilde{x}$

Если $\varphi(\cdot) : X \to Y$ — некоторая функция, задающая н. э. $\widetilde{y} = \varphi(\widetilde{x})$, то $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}})$ — модель $\widetilde{y}$, в которой $\forall\, A \in \mathcal{P}(Y)$

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(A) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) \in A) = \sup_{y \in A} t^{\widetilde{y}}(y), \tag{5}$$

$$\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(A) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) \in A) = \inf_{y \in Y \setminus A} \widehat{t}^{\widetilde{y}}(y),$$

где $\forall\, y \in Y$

$$t^{\widetilde{y}}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} = y) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) = y) = \sup_{\substack{x \in X \\ \varphi(x) = y}} t^{\widetilde{x}}(x), \tag{6}$$

$$\widehat{t}^{\widetilde{y}}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} \neq y) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) \neq y) = \inf_{\substack{x \in X, \\ \varphi(x) = y}} \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)$$

суть правдоподобие истинности н. в., согласно которому $\varphi(\widetilde{x}) = y$, и *доверие истинности н. в., согласно которому* $\varphi(\widetilde{x}) \neq y$.

Отображение неопределенного элемента $\widetilde{x}$

Если $A^{\cdot}: X \to \mathcal{P}(Y)$ и $A_{\cdot}: Y \to \mathcal{P}(X)$ — взаимно обратные отображения: $\forall\, x \in X\ A^x = \{y \in Y,\ x \in A_y\}$, $\forall\, y \in Y$ $A_y = \{x \in X,\ y \in A^x\}$, то образ $A^{\widetilde{x}}$ н. э. $\widetilde{x}$ — *неопределенное множество* на $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ со значениями в $\mathcal{P}(Y)$. Индикаторные функции одноточечного покрытия $A^{\widetilde{x}}$:

$$t^{A^{\widetilde{x}}}(y) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(y \in A^{\widetilde{x}}) \equiv \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in A_y),\ y \in Y, \tag{7}$$

$$\widehat{t}^{A^{\widetilde{x}}}(y) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(y \in A^{\widetilde{x}}) \equiv \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in A_y), y \in Y;$$

значения $t^{A^{\widetilde{x}}}(y)$ и $\widehat{t}^{A^{\widetilde{x}}}(y)$ — правдоподобие и доверие истинности н. в., согласно которому $y \in A^{\widetilde{x}}$, $y \in Y$.

Субъективные модели абсолютного знания и абсолютного незнания модели (x) объекта исследования, инвариантные относительно выбора шкал $\gamma\mathcal{L}$ и $\widehat{\gamma}\widehat{\mathcal{L}}$, $\gamma, \widehat{\gamma} \in \overline{\Gamma}$

Модель «*абсолютного незнания*» модели $M(x)$:

$$t^{\widetilde{x}}(x) = 1,\ \widehat{t^{\widetilde{x}}}(x) = 0,\ \forall x \in X,\ \sup_{x \in X} t^{\widetilde{x}}(x) = 1,\ \inf_{x \in X} \widehat{t^{\widetilde{x}}}(x) = 0.$$

$$\Longrightarrow \forall\, \varphi(\cdot)\colon X \to Y,\ \widetilde{y} = \varphi(\widetilde{x})\colon\ t^{\widetilde{y}}(y) = 1,\ \widehat{t^{\widetilde{y}}}(y) = 0,\ \forall y \in Y;$$

Модель «*абсолютного знания*» модели $M(x)$:

$$t^{\widetilde{x}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x) = \begin{cases} 1, & x = x_0, \\ 0, & x \neq x_0, \end{cases}\ x \in X,\ x_0 \text{ — единственное}$$

правдоподобное значение $\widetilde{x}$,

$$\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x) = \begin{cases} 1, & x \neq x_0, \\ 0, & x = x_0, \end{cases}\ x \in X,\ x_0 \text{ — единственное}$$

значение, при котором неравенству $\widetilde{x} \neq x_0$ доверять нельзя,

$$\Longrightarrow t^{\widetilde{y}}(y) = \begin{cases} 1, & y = y_0, \\ 0, & y \neq y_0, \end{cases}\ y \in Y,\ \widehat{t^{\widetilde{y}}}(y) = \begin{cases} 1, & y \neq y_0, \\ 0, & y = y_0, \end{cases}\ y \in Y,$$

где $y_0 = \varphi(x_0)$.

Оптимальное оценивание неопределенного элемента

$\tilde{x} \in \mathcal{X}$ — наблюдаемый н.э., $\tilde{y} \in \mathcal{Y}$ — ненаблюдаемый н.э.,
$d(\cdot) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — стратегия оценивания, $y^* = d(\tilde{x})$ — оценка $\tilde{y}$
$t^{\tilde{x},\tilde{y}}(\cdot,\cdot) : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{L}$, $t^{\tilde{x},\tilde{y}}(x,y) = \mathrm{Pl}(\tilde{x} = x, \tilde{y} = y)$

$$\mathrm{Pl}(d(\cdot)) = \sup_{x \in \mathcal{X},\ y \in \mathcal{Y}} \min(t^{\tilde{x},\tilde{y}}(x,y), \tilde{l}(y, d(x))) \sim \min_{d(\cdot):\mathcal{X}\to\mathcal{Y}},$$

$$\Longrightarrow$$

$$\mathrm{Pl}(d,x) = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \min(t^{\tilde{x},\tilde{y}}(x,y), \tilde{l}(y,d)) \sim \min_{d \in \mathcal{Y}},\ x \in \mathcal{X}$$

$$\tilde{l}(y,d) = \begin{cases} 0, & y = d, \\ 1, & y \neq d, \end{cases} \quad y, d \in \mathcal{Y}.$$

$$t^{\tilde{x},\tilde{y}}(x,y) \sim \max_{y \in \mathcal{Y}},\ x \in \mathcal{X},$$

$\Longrightarrow\ d^* = d^*(x) = y_x^*,\ x \in X,$
y_x^* — оценка $\tilde{y}$ максимального правдоподобия.

Литература

1. Пытьев Ю. П. Математическое моделирование субъективных суждений модельера-исследователя о модели объекта исследования // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, № 4. – С. 102-125. – doi: 10.1134/S2070048213060094.

2. Пытьев Ю. П. Возможность как альтернатива вероятности. – 2 изд. – М. : Физматлит, 2014.