

М.Н. КИРСАНОВ, д-р физ.-мат. наук, проф., В.Е. ХРОМАТОВ, канд. техн. наук, проф.
НИУ МЭИ, г. Москва

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ ТРЕУГОЛЬНОГО ОЧЕРТАНИЯ

Предлагается схема и аналитический расчет статически определимой стропильной фермы с произвольным числом панелей. В конструкции фермы используются три типоразмера стержневых элементов. Шарниры фермы приняты идеальными, стержни — упругими. Рассматриваются два вида нагружения — равномерное нагружение узлов нижнего прямолинейного пояса вертикальными силами и боковое нагружение одной из сторон фермы горизонтальными силами, имитирующими постоянную по высоте конструкции ветровую нагрузку. В программе, написанной на языке Maple, применяется метод вырезания всех узлов конструкции, приводящий к решению системы линейных уравнений. Прогиб вычислен по формуле Максвелла — Мора. Предполагается, что жесткости всех стержней одинаковы. Методом индукции с привлечением операторов символической математики Maple дан вывод зависимостей прогиба от числа панелей. Выясняется, что коэффициенты искомых зависимостей удовлетворяют линейным рекуррентным уравнениям, решения которых дают общие члены последовательностей метода индукции. Получены также формулы зависимостей для усилий наиболее сжатых и растянутых стержней фермы от числа панелей. Построены и проанализированы графики найденных зависимостей. Обнаружены некоторые асимптотические свойства решений в предположении о постоянстве длины пролета и общей нагрузки.

Ключевые слова: балочная ферма, прогиб, Maple, индукция, число панелей.

Постановка задачи

Фермы с треугольным очертанием верхнего пояса часто применяют как стропильные фермы при устройстве кровли зданий и сооружений. Наиболее известна стропильная ферма в задании московского Манежа (Бетанкур А.А., 1817). Предлагаемая схема стропильной фермы (рис. 1) статически определима и относится к числу регулярных [1], для аналитического расчета которых применим метод индукции. Ранее этим методом были рассчитаны некоторые плоские [2—9] и пространственные [10] фермы. Выведенные в этих работах формулы имеют достаточно компактный вид, позволяющий оценивать прогиб и усилия в наиболее сжатых и растянутых стержнях, не прибегая к сложным численным расчетам с применением программных комплексов. В настоящей работе также ставится задача получить аналитические выражения для прогиба и усилий, зависящие не только от размеров фермы и нагрузки, но и от числа панелей, что существенно расширяет область применения решения и дает возможность провести в первом приближении оптимизацию конструкции применительно к конкретной ситуации.

Ферма, содержащая n панелей в половине пролета, имеет $(n + 3)^2 + 3$ шарниров и $m = 2(n + 1)^2$ стержней. Одним из достоинств предлагаемой конструкции является то, что она состоит только из трех типовых стержневых элементов: горизонтальных длиной a , стоек высотой h и раскосов $c = \sqrt{a^2 + h^2}$.

Вертикальная нагрузка

Наиболее важным является расчет на вертикальную нагрузку. Пусть по узлам нижнего пояса равномерно приложены вертикальные силы P . Расчет начинается с определения усилий. Для этого используем программу [11], основой которой является метод вырезания узлов [12].

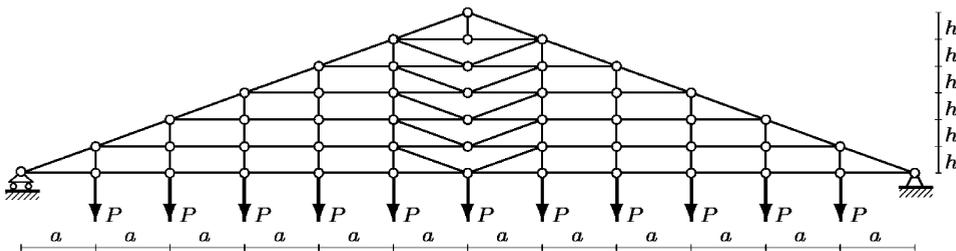


Рис. 1. Ферма, $n = 6$

Программа написана на языке символьной математики Maple и предназначена получать аналитические выражения для усилий произвольных плоских и пространственных статически определимых ферм в упругой стадии работы. Для ввода данных в программу требуется пронумеровать шарниры и задать их координаты. Нумеруются узлы и стержни фермы (рис. 2).

Узлы нумеруются слева направо по рядам, начиная с нижнего пояса. Начало координат выбирается в левой шарнирной опоре. Все действия производятся в циклах переменной длины:

$$k=0, \quad x_{i+k} = a(i+j-2), \quad y_{i+k} = (j-1), \quad i=1, \dots, 2(n-j)+3,$$

$$k = k + 2(n-j) + 3, \quad j=1, \dots, n.$$

Координаты вершины: $x_{(n+1)^2} = an, y_{(n+1)^2} = hn$.

Структура соединений стержней и узлов фермы задается вспомогательными векторами $\bar{N}_i, i=1, \dots, m$. Компоненты этих векторов являются номерами концов соответствующих стержней [2]. Матрица G системы уравнений равновесия содержит направляющие косинусы усилий в стержнях, вычисляемые по заданным координатам узлов, и согласуются с векторами $\bar{N}_i, i=1, \dots, m$. В нечетные строки матрицы вносятся направляющие косинусы с горизонтальной осью x , в четные — с осью y . Прогиб фермы (вертикальное смещение среднего шарнира $n+1$ нижнего пояса) определяется по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} \frac{S_i s_i l_i}{EF},$$

где S_i, s_i — усилия в i -м стержне фермы от приложенной нагрузки и от единичной вертикальной силы, приложенной к центральному узлу нижнего пояса, соответственно. Суммирование ведется по всем стержням фермы, кроме трех опорных, принятых недеформируемыми. Решая задачу о прогибе последовательно для ферм с числом панелей $n=1, 2, 3, \dots$, замечаем, что во всех случаях выражение прогиба имеет один и тот же вид (свойство регулярности системы)

$$\Delta_n EF = P \frac{A_n a^3 + H_n h^3 + C_n c^3}{2h^2}, \quad (2)$$

где $A_n = 2n^2 - n + 6, H_n = 3(n-2), C_n = n^2, n=3, 4, \dots$. Зависимости коэффициентов при степенях получены как решения рекуррентных уравнений с помощью операторов **rgf_findrecur** и **rsolve** системы Maple. Если общие члены последовательностей H_n и C_n достаточно очевидны и для получения их не требуется привлекать Maple, то для нахождения коэффициента A_n потребовалось составить, а потом и решить следующее рекуррентное уравнение третьего порядка

$$A_n = 3A_{n-1} - 3A_{n-2} + A_{n-3}.$$

Однако и это уравнение оказалось не самым сложным. Практика вывода точных решений для различных схем ферм описываемым методом показала, что в некоторых фермах (особенно решетчатых) порядок рекуррентных уравнений в несколько раз выше (до 17-го порядка [2]).

Принимая длину пролета $L = 2an$ и суммарную нагрузку на нижний пояс $P_0 = P(2n-1)$, проанализируем графически, как меняется безразмерная величина прогиба $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$ фермы при постоянном пролете в зависимости от числа панелей (рис. 3). Экстремальных точек на кривых нет. При больших n прогиб почти не меняется. Прослеживается очевидная горизонтальная асимптота. Величину нижнего предела прогиба в такой постановке дает следующий предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' = \frac{2L^3 + (4H^2 + L^2)^{3/2}}{32H^2 L}.$$

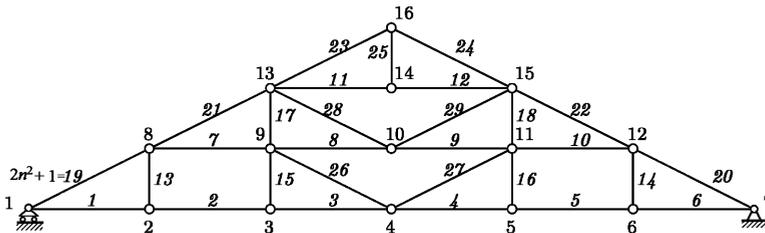


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней, $n = 3$

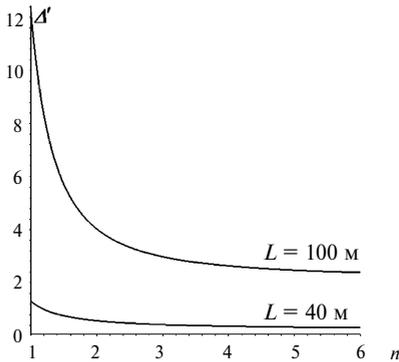


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей

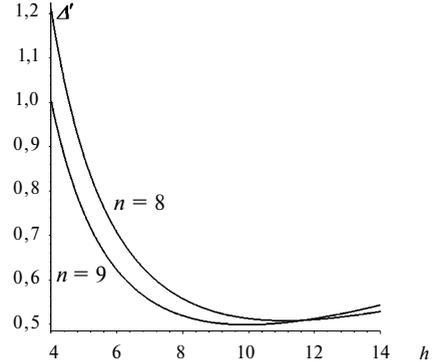


Рис. 4. Зависимость прогиба от высоты

Зависимость же прогиба от высоты фермы имеет совершенно реальный минимум (рис. 4, $L = 100$ м), указывающий на возможность оптимизации фермы по жесткости. Характерна также и точка пересечения кривых — одинаковый прогиб для равного числа панелей и одной и той же высоте ячейки h .

Боковая горизонтальная нагрузка

Разработанный алгоритм позволяет легко перестроить решение на другие нагрузки и перемещения. Рассмотрим действие горизонтальной (ветровой) нагрузки на ферму. Аналитические решения для ферм с такой нагрузкой редки [13, 14]. Реализация боковой нагрузки возможна только в пространственной конструкции, состоящей из нескольких ферм, объединенных горизонтальными связями и плоскостью кровли, создающей аэродинамическое сопротивление. В первом приближении такая нагрузка может быть принята равномерной и разнесена по узлам одной стороны конструкции.

Вычислим прогиб от действия этой нагрузки. Используем ту же формулу Максвелла – Мора и метод индукции. Опуская несложные выкладки, сводящиеся к решению только одного рекуррентного уравнения, приведем результат

$$\Delta EF = P \frac{(n^2 - 2)a^2}{2h}, \quad n > 2. \quad (3)$$

Асимптотические свойства этого решения можно проследить в тех же предположениях, как и в предыдущем случае, т.е. при постоянной длине пролета и общей нагрузке, которая здесь выражается как $P_0 = Pn$. Имеем следующий предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' = L / (8H).$$

Усилия в критических стержнях

Для оценки прочности и устойчивости проектируемой конструкции требуются выражения для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях. Рассмотрим случай равномерной нагрузки по нижнему поясу. Расчет показывает, что это наибольшее растягивающее усилие будет в стержнях нижнего пояса, более того, эти усилия равны при такой нагрузке (рис. 2):

$$S_1 = S_2 = \dots = S_{2n} = (2n - 1)Pa / (2h). \quad (4)$$

Наибольшие сжимающие усилия оказываются в нижних боковых стержнях

$$S_{2n^2+1} = S_{2n^2+2} = -(2n - 1)Pc / (2h).$$

При боковой нагрузке (рис. 5) стержень с наибольшим растягивающим усилием находится во всех стержнях верхнего пояса со стороны нагрузки (кроме самого верхнего, рис. 2)

$$S_{2n^2+1} = S_{2n^2+3} = \dots = S_{2n^2+2n-1} = (n + 1)Pc / (4a). \quad (5)$$

По сравнению с результатом для нагружения нижнего пояса замечаем, что в этом случае зависимость от размеров принципиально иная. Если в знаменателе (4) стоит высота h , то в (5) — длина панели a . В этих двух случаях рост усилий при изменении параметров конструкции имеет

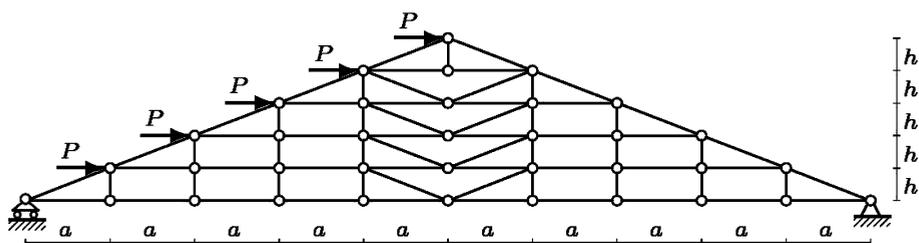


Рис. 5. Боковая нагрузка, $n = 5$

разную природу, и это лишний раз показывает, что трудно оптимизировать ферму на несколько видов нагрузок одновременно. Наибольшие сжимающие усилия имеют все стержни нижнего пояса в правой половине пролета. Интересно отметить, что результат не зависит от размеров фермы

$$S_1 = S_2 = \dots = S_{2n} = -(3n - 1)P / 4.$$

Заключение

Предлагаемая схема стропильной фермы допускает вывод аналитической зависимости прогиба от числа панелей. Это решение особенно редкое для ферм с треугольным очертанием. Можно привести много примеров подобных ферм, обладающих свойством регулярности и не имеющих точных решений для зависимости прогиба от числа панелей. Еще большее число таких ферм не обладают и свойством регулярности. На практике это проявляется в росте числа слагаемых в формуле вида (2) при увеличении числа панелей. В лучшем случае решение для таких ферм может быть получено в виде конечных сумм. Здесь же найдены компактные легко проверяемые формулы для двух случаев нагружения. Найдены асимптотические свойства решений. Результаты проведенных исследований могут быть применены в задачах оптимизации стержневых конструкций [15].

Обзор аналитических решений для прогиба плоских ферм приведен в [13,16].

Литература

1. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85, № 9. Pp. 607–617.
2. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции, 2017. № 1 (14). С. 27–30
3. Горбунова А.С., Кирсанов М.Н., Лепетуха В.А. Расчет прогиба симметричной фермы с решеткой STAR в аналитической форме // Строительная механика и конструкции. 2017. № 1 (14). С. 36–41
4. Кирсанов М.Н. Индуктивный метод вывода формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематического вырождения // Строительство и архитектура, 2017. Том 5. Выпуск 2 (15) С. 45–49. DOI 10.12737/25035
5. Белянкин Н., Бойко А., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с усиленной треугольной решеткой // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Вып. 2 (15) С. 42–44. DOI 10.12737/25106
6. Salimov M.S. The formula for deflection of a composite truss, loaded on the bottom flange // Научный альманах. 2017. N 2-3(28). С. 272–274. DOI: 10.17117/na.2017.02.03.272
7. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load// Научный альманах. 2016. N 4-3(18). С. 257–259.
8. Voropai R.A. Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice // Научный альманах. 2016. N 4-3(18). С. 238–240.
9. Shipaeva A.S. Calculation of the deflection of girder beam loaded on the bottom flange in the system Maple // Научный альманах. 2016. N 5-3(19). С. 236–239.
10. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. Pp. 52–58. doi: 10.5862/MCE.64.
11. Кирсанов М.Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. — 512 с.
12. Милин Л.С., Самсонов Ю.П., Хроматов В.Е. Сопrotивление материалов. Расчетные и тестовые задания: -3-е изд. —М.: Издательство Юрайт, 2017. — 224 с.
13. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247–254.
14. Казьмирук И.Ю. О деформации арочной фермы под действием боковой нагрузки // Научный альманах 2016. N 3-3(17). С. 75–78.

15. *Марутян А.С.* Оптимизация минимальных высот стропильных и перекрестных стальных ферм, включая типа «Пятигорск» // Строительная механика и расчет сооружений, 2014. № 2. С. 60–66.
16. *Тиньков Д.В.* Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.

Literatura

- Hutchinson R.G., Fleck N.A.* Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85. № 9. Pp. 607–617.
- Kirsanov M.N.* Vyivod formuly dlya progiba reshetchatoy fermy, imeyushey sluchai kinematischey izmenyaemosti // Stroitel'naya mehanika i konstruktzii, 2017. № 1 (14). S. 27–30
- Gorbunova A.S., Kirsanov M.N., Lepetyuha V.A.* Raschet progiba simmetrichnoy fermy s reshetkoy STAR v analiticheskoy forme // Stroitel'naya mehanika i konstruktzii. 2017. № 1 (14). S. 36–41
- Kirsanov M.N.* Induktivniy metod vyivoda formuly dlya progiba reshetchatoy fermy, imeyushey sluchai kinematischey vyirozheniya // Stroitel'stvo i arhitektura, 2017. Tom 5. Vyipusk 2 (15) S. 45–49. DOI 10.12737/25035
- Belyankin N., Boyko A., Kirsanov M.N.* Analiticheskiy raschet progiba balochnoy fermy s usilennoy treugolnoy reshetkoy // Stroitel'stvo i arhitektura. 2017. Tom 5. Vyip. 2 (15) S. 42–44. DOI 10.12737/25106
- Salimov M.S.* The formula for deflection of a composite truss, loaded on the bottom flange // Nauchniy almanah. 2017. N 2-3(28). S. 272-274. DOI: 10.17117/na.2017.02.03.272
- Ponamareva M.A.* The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load// Nauchniy almanah. 2016. N 4-3(18). S. 257–259.
- Voropai R.A.* Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice // Nauchniy almanah. 2016. N 4-3(18). S. 238–240.
- Shpaeva A.S.* Calculation of the deflection of girder beam loaded on the bottom flange in the system Maple // Nauchniy almanah. 2016. N 5-3(19). S. 236–239.
- Kirsanov M.N.* Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. Pp. 52–58. doi: 10.5862/MCE.64.
- Kirsanov M.N.* Maple i Maplet. Resheniya zadach mehaniki. SPb.: Izd-vo Lan, 2012. — 512 s.
- Minin L.S., Samsonov Yu.P., Hromatov V.E.* Soprotivlenie materialov. Raschetnyie i testovyye zadaniya:-3-e izd. —M.: Izdatel'stvo Yurayt, 2017. — 224 s.
- Kiyko L.K.* Analiticheskaya otsenka progiba arochnoy fermy pod deystviem vetrovoy nagruzki // Nauchniy vestnik. 2016. № 1 (7). S. 247–254.
- Kazmiruk I.Yu.* O deformatsii arochnoy fermy pod deystviem bokovoy nagruzki // Nauchniy almanah 2016. N 3-3(17). S. 75–78.
- Marutyan A.S.* Optimizatsiya minimalnykh vyisot stropilnykh i perekrestnykh stalnykh ferm, vklyuchaya tipa «Pyatigorsk» // Stroitel'naya mehanika i raschet sooruzheniy, 2014. № 2. S. 60–66.
- Tinkov D.V.* Sravnitel'niy analiz analiticheskikh resheniy zadachi o progibe fermennykh konstruktziy // Inzhenerno-stroitel'niy zhurnal. 2015. №5 (57). S. 66–73.

УДК 624.04: 519.6

А.В. ИГНАТЬЕВ, канд. техн. наук, доц., **В.А. ИГНАТЬЕВ**, д-р техн. наук, проф.
Волгоградский государственный технический университет

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ПЛОСКИХ РЕГУЛЯРНЫХ БАЛОЧНЫХ ФЕРМ СО СЛОЖНОЙ РЕШЕТКОЙ*

Статья посвящена анализу опубликованных М.Н. Кирсановым результатов расчета плоских ферм с решетками различных типов и выводов по ним. Анализ выполнен на основе разработанной авторами модификации метода вырезания узлов. Предложенный алгоритм кинематического анализа ферм не требует численного расчета и легко формализуется. Показана эффективность предложенного алгоритма на примере анализа плоских ферм с небольшим числом пролетов. Дано теоретическое обоснование выявленных М.Н. Кирсановым особенностей поведения под нагрузкой балочных ферм с различными типами сложных решеток. Выполнен подробный анализ выводов о влиянии числа панелей на изменяемость рассмотренных ферм и о том, что «непосредственный расчет фермы с произвольным числом панелей невозможен, как и решение системы линейных уравнений неопределенного порядка, полученных М.Н. Кирсановым по результатам проведенных им исследований. Сформулированы замечания и уточнения по этим выводам.

Ключевые слова: плоские балочные фермы, сложная решетка, особенности напряженно-деформированного состояния.

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ. Проект №16-41-340558