

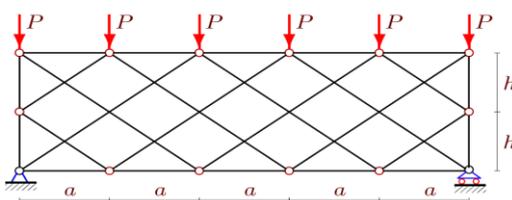
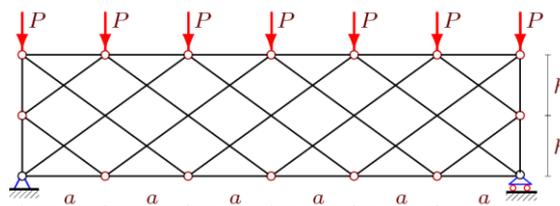
АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ МНОГОРЕШЕТЧАТОЙ ФЕРМЫ

Исследуются усилия в стержнях плоской статически неопределимой балочной фермы с двойной решеткой. Для получения аналитического решения при произвольном числе стержней фермы используется метод индукции и система компьютерной математики Maple. Отмечаются некоторые особенности в решении. Анализируется случай потери устойчивости одного из стержней фермы и критическое напряженное состояние конструкции.

Ключевые слова: ферма, решетка фермы, Maple, выпучивание, индукция, асимптотика, прогиб

Постановка задачи

Численный расчет усилий в многорешетчатой ферме с использованием различных программных средств не вызывает особых трудностей, несмотря на то, что ферма один раз статически неопределима. В настоящей работе ставится задача получить формулы для расчета таких ферм с произвольным числом стержней. Таким образом, в расчете должны быть три независимых параметра, характеризующих геометрию конструкции: размеры a и h , и число панелей n . Остановимся на частном случае фермы с двумя боковыми стойками (рис. 1). В многорешетчатых фермах число стержней на 1 больше удвоенного числа узлов. Однако с четным числом панелей ферма геометрически изменяема, даже при наличии лишнего стержня (рис. 2). Это отмечено в [1] со ссылкой на более раннюю работу Мюллер-Бреслау (1908). Рассмотрим фермы с нечетным числом панелей $n = 2k - 1$.

Рис. 1. $n=5$ Рис. 2. $n=6$

Исследуемая ферма имеет две опоры и нагружена силами P , приложенными к верхнему поясу. Для решения задачи используем метод индукции, разработанный как для плоских, так и пространственных систем [2-5]. Суть метода, позволяющего найти зависимость усилий в стержнях фермы от числа панелей, состоит в последовательном аналитическом расчете фермы сначала при $n=1$, затем $n=2$ и т. д. В процессе счета получают формулы, коэффициенты в которых образуют последовательности. Общие члены этих последовательностей можно найти, используя средства системы аналитических вычислений Maple. В этой же системе методом вырезания узлов определяются усилия в стержнях. Метод индукции имеет преимущества перед численным методом в том, что полученные аналитические формулы позволяют без потери точности и быстро рассчитывать сложные фермы с большим или очень большим числом стержней. Явная же зависимость решения от параметров задачи может подсказать проектировщику наиболее выгодные конструктивные решения.

Решение

Ферма с n панелями имеет $2n+4$ шарниров и $m=4n+9$ стержней с учетом трех стержней, моделирующих внешние опоры. Для раскрытия статической неопределенности используем метод сил. В качестве лишнего стержня возьмем нижнюю боковую стойку (рис. 3).

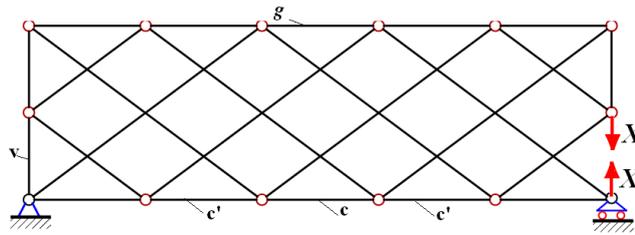


Рис. 3.

Коэффициенты канонического уравнения метода сил $\delta X + \Delta_p = 0$, где X – неизвестное усилие в стойке, получаем по формуле Максвелла – Мора

$$EF\delta = (4h^2 + \gamma_k(a^3 + 2c^3)) / h^2, \quad (1)$$

$$EF\Delta_p = -P(\alpha_k h^3 + \beta_k(a^3 + 2c^3)) / h^2, \quad c = \sqrt{a^2 + h^2},$$

где

$$\alpha_k = 1 + 2k - (-1)^k, \quad \beta_k = 3k^2 - k(1 + (-1)^k) + ((-1)^k - 1) / 2, \quad \gamma_k = 2(2k - 1).$$

Решение (усилие в лишнем стержне) имеет вид: $X = -\Delta_p / \delta$. Усилия в стержнях статически неопределимой фермы получаем по формуле $N_i = N_i^P + X n_i$, где N_i^P , n_i – усилия в стержне $i=1, \dots, m$ от действия внешней нагрузки и единичных сил по направлению X соответственно. Если общий член последовательности γ_k был очевиден, то для нахождения коэффициентов α_k и β_k потребовалось получить последовательности 4, 8, 8, 12, 16... и 16, 52, 80, 148, 292,... Для автоматического формирования последовательностей коэффициентов удобно использовать оператор **coeff**. Например, если требуется вывести на экран коэффициент α_k в выражении Dp при a^3 , необходимо применить оператор **coeff(Dp, a^3)**. Для этих полученных последовательностей (а длина их в этом расчете достигала 19) с помощью оператора **rgf_findrecur** можно найти соответствующие рекуррентные уравнения

$$\alpha_k = \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2} - \alpha_{k-3},$$

$$\beta_k = \beta_{k-1} + 2\beta_{k-2} - 2\beta_{k-3} - \beta_{k-4} + \beta_{k-5}.$$

Решение этих уравнений с помощью оператора **rsolve** дает искомые зависимости.

Экстремальные усилия

Анализируя напряженное состояние конструкции, естественно предположить, что растягивающее усилие в центральном стержне нижнего пояса (обозначим его N_c) максимально. Методом индукции найдем

$$N_c = P \frac{(\varphi_k(a^3 + 2c^3) + \psi_k h^3)a}{((2k-1)(a^3 + 2c^3) + 2h^3)h},$$

где

$$\varphi_k = (4k^3 - 6k^2 - 8\zeta_k k - 3 + 4\zeta_k - (-1)^k) / 8,$$

$$\psi_k = (2k^2 - 2k + 3 - 4\zeta_k + (-1)^k(1 - 2k)) / 4,$$

$$\zeta_k = \sin(\pi k / 2) + \cos(\pi k / 2). \quad (2)$$

Для получения коэффициента ψ_k пришлось проанализировать достаточно большую последовательность чисел 2,6,4, 12, 14, 26, 24, 40, 42, 62, 60, 84, 86, 114, 112..., для которой было найдено рекуррентное уравнение высокого порядка

$$\psi_k = \psi_{k-1} + \psi_{k-2} - \psi_{k-3} + \psi_{k-4} - \psi_{k-5} - \psi_{k-6} + \psi_{k-7}.$$

Решение уравнения найдено оператором **rsolve**. Аналогично, для получения коэффициента φ_k была проанализирована последовательность 1,3, 5,11, 23,37, 52,76, 111,149, 189,243, 313,387, 464... Соответствующее рекуррентное уравнение имеет вид

$$\varphi_k = 3\varphi_{k-1} - 4\varphi_{k-2} + 4\varphi_{k-3} - 2\varphi_{k-4} - 2\varphi_{k-5} + 4\varphi_{k-6} - 4\varphi_{k-7} + 3\varphi_{k-8} - \varphi_{k-9}.$$

Коэффициенты в знаменателе имели простую зависимость от k и применение средств Maple для их вычисления не потребовалось. График зависимости относительного усилия N_c / P от числа панелей при фиксированном пролете фермы $L = (2k - 1)a$ обнаруживает странную аномалию вблизи $k = 4$ (рис. 4).

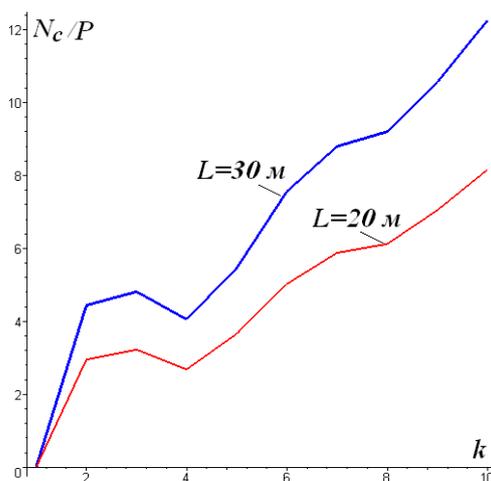


Рис. 4. Зависимость усилия N_c от числа стержней при $h=3$ м

Это заставляет более внимательно рассмотреть усилия в стержнях, соседних с центральным. Обозначим их усилия $N_{c'}$. Вполне возможно, что максимальное усилие растяжения имеет не центральный стержень. При $k = 3$ имеем следующие значения

$$N_c = \frac{6aP}{h} \frac{h^3 + 2a^3 + 4c^3}{2h^3 + 5a^3 + 10c^3}, \quad N_{c'} = \frac{2aP}{h} \frac{h^3 + 4a^3 + 8c^3}{2h^3 + 5a^3 + 10c^3}.$$

Очевидно, $N_{c'} < N_c$. Однако, при $k = 4$ имеем

$$N_c = \frac{4aP}{h} \frac{h^3 + 5a^3 + 10c^3}{2h^3 + 7a^3 + 14c^3}, \quad N_{c'} = \frac{2aP}{h} \frac{4h^3 + 11a^3 + 22c^3}{2h^3 + 7a^3 + 14c^3}$$

и ситуация обратная – в центральном стержне усилие меньше $N_{c'} > N_c$. Этот же эффект наблюдается при $k = 5$, и только при $k = 6$ распределение усилий становится более естественным: $N_{c'} < N_c$.

Определим усилие в наиболее *сжатом* стержне. Вычисления показывают, что в зависимости от размеров конструкции это либо горизонтальный стержень верхнего пояса (усилие обозначим N_g , рис. 3), либо нижняя боковая стойка (усилие N_v). При $k=3$

$$N_g = -\frac{2aP}{h} \frac{h^3 + a^3 + 2c^3}{2h^3 + 5a^3 + 10c^3}, \quad N_v = -P \frac{4h^3 + 13a^3 + 26c^3}{2h^3 + 5a^3 + 10c^3}$$

Решая неравенство $N_g < N_v$, получим условие $h < 6a/39 \approx 0,15a$, при котором наиболее сжатый стержень будет в верхнем поясе. Аналогичное условие при $k=4$ имеет вид: $h < a$, а при $k=5$ $h < 132a/111 \approx 1,19a$. Решения неравенств (кроме случая $k=4$) получаются приближенно с помощью разложения в ряд.

Рассмотрим случай потери устойчивости среднего стержня в верхнем поясе. Безусловно, в закритической области стержень, потерявший устойчивость, еще поддерживает некоторую сжимающую нагрузку, но в силу ее относительной малости ею можно пренебречь и условно считать, что стержень полностью выключился из работы конструкции. Критическое значение нагрузки P можно вычислить, зная величину усилия в стержне g :

$$N_g = -\frac{aP(h^3 \mu_k + (a^3 + 2c^3)v_k)}{h^3 \delta}, \quad (3)$$

где δ определяется по формуле (1). Коэффициенты в числителе имеют вид

$$v_k = (5 + (-1)^k) / 4 - 2k - 3k^2 / 2 + k^3 + \zeta_k (2k - 1), \quad \mu_k = (-1)^k (1 - 2k) / 2 - 5 / 2 - k + k^2 + 2\zeta_k.$$

Функция ζ_k вычисляется по формуле (2).

После потери устойчивости стержня ферма становится статически определимой, рис. 5. Расчет усилий по прежней схеме методом индукции показывает, что при больших значениях k наиболее сжатым в образовавшейся ферме будет стержень g' верхнего пояса. Критическое значение k зависит от отношения a/h . При $h \approx a$ имеем условие $k > 3$, при котором стержень верхнего пояса g испытывает наибольшие усилия сжатия. В других случаях наиболее сжатый стержень будет нижней боковой стойкой, как и в статически неопределимой ферме. Методом индукции получим выражение

$$N_{g'} = -\frac{Pa}{2h} (\zeta_k + k^2 - k - 3). \quad (4)$$

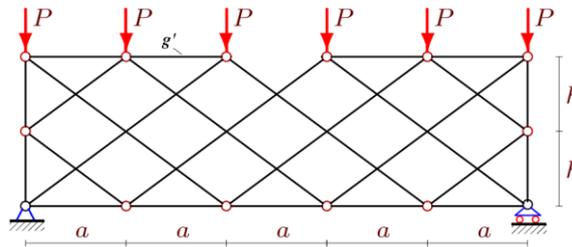


Рис. 5. Ферма после выключения из работы стержня, потерявшего устойчивость

В боковой нижней стойке усилие не зависит от размеров a , h и будет отрицательным

$$N_v = -\frac{P}{2} (2j^2 - 1 - (-1)^j), \quad \text{для нечетных значений } k = 2j - 1, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Для четных k эти стержни растянуты. Сопоставление усилий сжатия в стойке v и стержне h' верхнего пояса в статически определимой ферме дано на рисунке 6. Начиная с $k=5$ (а это соответствует девяти панелям) можно с уверенностью считать, что самым опасным местом в статически определимой ферме будет стержень g' верхнего пояса (и, конечно, симметричный ему стержень). Сопоставление усилия в стержне g до потери устойчивости и в стержне g' в статически определимой ферме после выключения стержня g дано на рисунке 7. Если не обращать внимание на те значения $k \leq 3$, при которых стержни растянуты, а не сжаты, то из расчетов ясно, что после потери устойчивости стержня g стержень g' в образовавшейся статически определимой ферме также потеряет устойчивость, так как усилие в этом стержне по модулю больше.

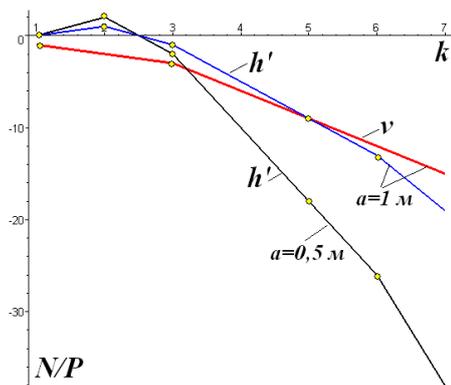


Рис. 6

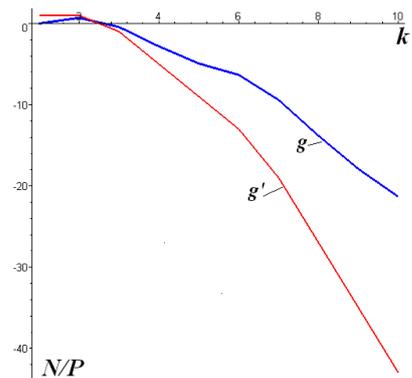


Рис. 7

Прогиб

Определим прогиб середины пролета фермы от действующей нагрузки. Прогиб определяем по формуле Максвелла-Мора. Единичная сила прикладывается к левому или правому концу среднего стержня нижнего пояса (стержень с на рис. 3). Методом индукции для четных значений $k=2j$ получаем:

$$EF\Delta = -\frac{P(p_k a^6 + q_k c^6 + r_k h^6 + s_k a^3 h^3 + t_k a^3 c^3 + u_k c^3 h^3)}{h^4 \delta}, \quad (5)$$

где

$$p_{2j} = j(40j^4 - 50j^3 + 6j^2 + 8j - 13) / 3 + 1 + (-1)^j(4j^2 + 3j - 1),$$

$$q_{2j} = 8j^3 - 6j^2 - 2j + 1 + (-1)^j(8j^2 + 2j - 1),$$

$$r_{2j} = 4j(1 - (-1)^j),$$

$$s_{2j} = 4j(5j^3 - 5j^2 + 7j - 1) / 3 - 2 - 2(-1)^j(4j^2 - 2j + 1),$$

$$t_{2j} = j(80j^4 - 100j^3 + 24j^2 + 7j - 29) / 3 + 5/2 + (-1)^j(12j^2 + 7j - 5/2),$$

$$u_{2j} = 22j^2 - 6j - 1 - (-1)^j(16j^2 - 6j - 1).$$

Аналогичный результат был получен для произвольных значений k , а не только для четных, принципиально он не отличается от (5), но коэффициенты оказались слишком громоздкими. Как и следовало ожидать, в решение для произвольного k при этом вошли функции (2), а порядок рекуррентных уравнений достигал 9. Кривые зависимости относительного прогиба $\tilde{\Delta} = \Delta EF / P$ от числа панелей (для четных k) при $L = 20$ м даны на рисунке 8. Для малой высоты фермы ($h=1$ м) прогиб с увеличением числа панелей при фиксированном пролете растет быстрее, чем для более высоких ферм. Более того, зависимость прогиба от высоты имеет экстремальное значение (рис. 9, $L = 20$ м), позволяющее выбрать размеры фермы оптимальным образом.

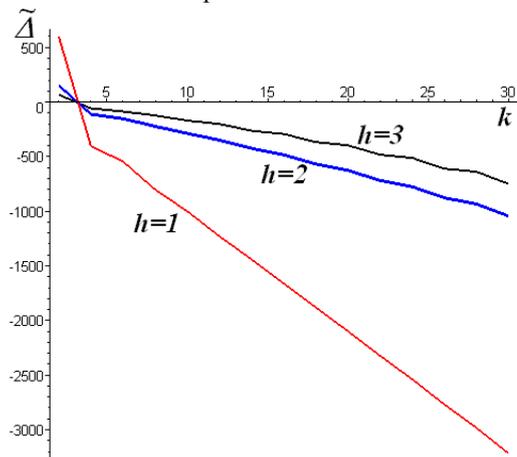


Рис. 8.

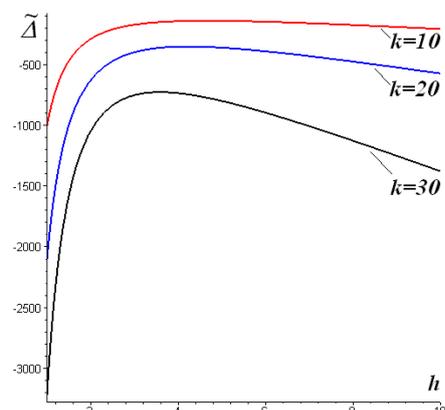


Рис. 9.

Заключение

Структура многорешетчатой фермы такова, что найти усилие или проверить вручную (метод Риттера, вырезание узла) уже готовое решение весьма затруднительно. Безусловно, требуется привлекать компьютерные программы расчета. Но и они не всегда удовлетворяют исследователя, во-первых, недостаточной информативностью, во-вторых, всегда хочется проверить решение, а повторять чужой численный счет занятие утомительное и неблагоприятное. Аналитический расчет – это прежде всего тестовый расчет. Но и готовый алгоритм, написанный в системе символьных преобразований, и дающий точный ответ в виде формулы не всегда годится для исследователя. Казалось бы, что может лучше – изменил данные, ввел число панелей, размеры, запустил программу и сиди, жди результаты. Но не надо обольщаться возможностями компьютера. Символьные вычисления значительно более медленные и время счета с увеличением сложности системы растет быстрее, чем при численном анализе. Нетерпеливый пользователь, не дождавшись результата (ждать можно очень долго даже при $n=20$) забросит все аналитические преобразования и возьмется опять за численный счет. Индуктивный же метод позволяет получить результат, анализируя небольшой отрезок последовательностей коэффициентов в решении. Сгенерированная при этом формула годится без ограничения для ферм с произвольным числом стержней. Особенно заметен успех индуктивного метода в решении таких сложных в расчете ферм как многорешетчатая. Заметим, что существует также генетический метод решения некоторых задач о ферме [7-9], где метод индукции может быть также полезен.

Литература

1. Рабинович И.М. Курс строительной механики стержневых систем. – М.: Оникс, 2012. – 377 с.
2. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. №3. С. 48-51.
3. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
4. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. №6 (24). С. 28-34.
5. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. №1. С. 49-53.
6. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. — СПб.: Изд-во Лань, 2012. — 512 с.
7. Кирсанов М.Н. Генетический алгоритм оптимизации стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. №2. с. 60-63.
8. Алексейцев А. В. Эволюционная оптимизация стальных ферм с учетом узловых соединений стержней // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 28-37.
9. Cazacu R., Grama L. Steel truss optimization using genetic algorithms and FEA // Procedia Technology. 2014. No 12. pp. 339 – 346.

MN Kirsanov, Dr. Sci. Sciences, prof., NRU MPEI

ANALYTICAL CALCULATION OF THE MULTILATTICE TRUSS

The forces in the bars of flat statically indeterminate truss with double bars are investigated. To obtain an analytical solution for an arbitrary number of rods the induction method and system of computer mathematics Maple are used. There have been some features in the solution. The case of the loss of stability of one of the rods and supercritical state of truss are analyzed.

Key words: plane trusses, induction, buckling, Maple, deflection

Кирсанов Михаил Николаевич
профессор НИУ МЭИ, д. ф.-м.н.,
кафедра теор.механики и мехатроники.

140002 Моск.обл.Люберцы, Калинина пос, 42, 267, т. 8-916-905-59-94,
раб.т. 8-495-362-73-14

mpei2004@Yandex.ru