Материал, в научно-популярной форме иллюстрирующий основные результаты проекта

Настоящий проект посвящен анализу динамики негладких систем, которые в разных областях фазового пространства описываются разными дифференциальными уравнениями. Примерами таких систем служат системы с сухим трением, системы с односторонними связями, виброударные системы и т.п.

При изучении динамики соприкасающихся тел, в частности, качении твердого тела по опорной поверхности в поле силы тяжести, основным вопросом постановки задачи является выбор модели взаимодействия твердых тел. Механика контактного взаимодействия является важной областью исследований для фундаментальной науки и инженерных приложений. В этой обширной области исследования интенсивно ведутся в нескольких направлениях. Классическое направление – трибология, где контактное взаимодействие изучается методами теории упругости и пластичности. Однако получаемые выражения для сил и моментов зачастую применимы лишь для статических и квази-статических задач (стационарные движения). Для аналитического изучения задач, в которых существенна динамика тел, эти методы не применяются.

В теоретической механике при изучении динамики твердых тел на опорных поверхностях чаще всего используются модели, в которых предполагается точечный контакт между телами и используется одна из следующих моделей трения - гладкая плоскость, абсолютно-шероховатая плоскость, сухое трение Кулона или вязкое трение. Однако еще в середине прошлого века Контенсу обратил внимание, что модель сухого трения и точечный контакт ведут к ошибкам при применении их к задачам, в которых тело имеет ненулевую скорость вращения – вращательно-поступательные движения. Факт уменьшения силы трения при вращении тела повторно попал в фокус внимания специалистов с 1998 года. С этого времени ведется интенсивная разработка и изучение моделей трения (В.Ф. Журавлев, А.П. Иванов, А.В. Карапетян, А.А. Кириенков, Д.В. Трещев и другие). В этих моделях точечный контакт между телами заменен на пятно контакта, а силы и моменты трения получаются интегрированием инфинитезимальных вертикальных реакций и сил трения по пятну контакта. Полученные результирующие компоненты трения скольжения, верчения и качения зависят от материалов контактирующих тел, размеров и формы пятна контакта, и от кинематических характеристик движения. В результате чего они не являются независимыми величинами и могут меняться в течение движения.

В данном проекте проведено исследование динамики различных твердых тел и их систем на неподвижной или вибрирующей, горизонтальной или наклонной плоскости. В некоторых задачах аналитические результаты, полученные в рамках классических моделей трения, согласовываются с естественными представлениями или натурными экспериментами. Однако в целом ряде задач для описания эффектов, имеющих место в действительности, потребовались новые, разработанные авторским коллективом, модели трения. Кроме того, в результате работы над проектом удалось дать качественный анализ динамики тела на плоскости с трением без уточнения конкретной модели, а только лишь на основе некоторых естественных свойств компонент трения.

Аннотации статей:

1. Карапетян А.В., Муницына М.А. Динамика неоднородного эллипсоида на горизонтальной плоскости // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 3. С. 328-333.

   Рассматривается задача о динамике эллипсоида вращения со смещенным центром масс на горизонтальной плоскости с трением. Предполагается, что центр масс эллипсоида лежит на оси его динамической симметрии. Дается качественный анализ динамики с помощью обобщенных диаграмм Смейла. Находятся все движения эллипсоида, на которых проскальзывание отсутствует, и доказывается, что каждая точка на обобщенной диаграмме инвариантна относительно фазового потока системы.

2. Кугушев Е.И., Никонов В.И. Оценка числа относительных равновесий гравитирующих точечного плоского тела и материальной точки // Вестник МГУ, 2014 (в печати)

   Рассматривается плоская задача о движении твердого тела с дискретным распределением масс и материальной точки под действием взаимного притяжения. Изучаются стационарные конфигурации такой системы в случае, когда масса точки пренебрежимо мала и тело вращается вокруг своего центра масс с ненулевой угловой скоростью, а также в общем случае взаимного влияния тела и точки. Показывается, что в такой системе всегда есть не менее двух различных положений относительного равновесия.+

3. Кулешов А.С., Рыбин В.В. Об управляемости системы А.Ю. Ишлинского // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Вып. 2. С. 278-283.

   В 1965 году А.Ю. Ишлинский привёл пример неголономной механической системы малой размерности, которая не является системой Чаплыгина. Данная система состоит из трёх шероховатых цилиндров, два из которых катаются без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости. Третий цилиндр катается без проскальзывания по первым двум цилиндрам. В работе рассматриваются вопросы управляемости системы Ишлинского. При помощи теоремы Чжоу -- Рашевского доказана управляемость данной системы.

4. A.V. Karapetyan, M.A. Munitsyna The Dynamics of a Heavy Rigid Ellipsoid on a Horizontal Plane with Friction // Proceedings of the 12th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2014 (в печати).

   Рассматривается задача о динамике эллипсоида вращения со смещенным центром масс на горизонтальной-плоскости с трением. Предполагается, что центр масс эллипсоида лежит на оси его динамической симметрии. В рамках общей теории инвариантных множеств механических систем с симметрией исследуются стационарные движения эллипсоида, дается геометрическая интерпретация результатов с помощью обобщенных диаграмм Смейла. Рассматриваются результаты численных экспериментов, подтверждающие и иллюстрирующие полученные результаты.

5. Карапетян А.В., Муницына М.А. Динамика параллелепипеда на горизонтальной вибрирующей плоскости // Автоматика и телемеханика. 2015. Вып. 3 (в печати).

Рассматривается динамика жесткого параллелепипеда на горизонтально вибрирующей жесткой опорной плоскости и возможность управления его колебаниями. Предполагается, что скольжение основания параллелепипеда вдоль плоскости отсутствует. Находятся такие параметры возбуждения, при которых параллелепипед отрывается от плоскости и совершает колебания, поочередно опираясь на опорные ребра. В случае гармонических колебаний плоскости находятся возможные режимы вынужденных колебаний. Исследуется вопрос об уменьшении амплитуды колебаний параллелепипеда с помощью математического маятника. Результаты представлены в виде амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик.

6. Кулешов А.С., Черняков Г.А. О качении параболоида вращения по неподвижной абсолютно шероховатой плоскости // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2015 (в печати).

   Рассматривается задача о качении динамически симметричного параболоида вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Дано качественное описание движения параболоида по плоскости. Показано, что следом точки касания M на поверхности параболоида будет кривая, состоящая из периодически повторяющихся волн и прикасающаяся поочерёдно к двум параллелям параболоида. След точки касания на неподвижной плоскости образует кривую такого же характера, заключённую между двумя концентрическими окружностями, которых точка M поочерёдно касается при движении параболоида. Описаны все стационарные движения параболоида (перманентные вращения и регулярные прецессии) и доказано, что все они являются устойчивыми.

7. Кулешов А.С., Ицкович М.О. О движении по горизонтальной плоскости тела, состоящего из двух симметричных пластинок // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2015 (в печати).

   Рассматривается задача о движении по неподвижной горизонтальной плоскости твердого тела, состоящего из двух соединенных между собой одинаковых симметричных пластинок. Пластинки соединены перпендикулярно друг другу так, что их оси симметрии образуют единую ось, являющуюся осью симметрии полученного тела. В работе найдены все возможные положения равновесия тела на плоскости и получены условия их устойчивости. Рассмотрен частный случай, когда движущееся тело состоит из двух одинаковых эллиптических пластинок.

8. Alexander S. Kuleshov, Gleb A. Chernyakov, Investigation of the problem of motion of a heavy dynamically symmetric body on a perfectly rough plane by the Kovacic algorithm // Proceedings of the VIII European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2014). Vienna, July 6 – 11, 2014. P. 453-458.

   Рассматривается задача о движении динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. С помощью алгоритма Ковачича указываются некоторые новые случаи, когда удаётся выразить решение данной задачи с помощью квадратур.

9. Alexander S. Kuleshov, Vadim V. Rybin. Controllability of the Ishlinsky System // Proceedings of the XLII Summer School – Conference "Advanced problems in mechanics" (APM 2014). St. Petersburg, June 30 – July 5, 2014. 2014. Saint-Petersburg: Institute of Problems of Mechanical Engineering. Russian Academy of Sciences. P. 184-190.

   Рассматривается задача управления неголономной механической системой, предложенной А.Ю. Ишлинским. При помощи теоремы Чжоу –Рашевского доказана полная управляемость данной системы во всём конфигурационном пространстве.

10. Gleb A. Chernyakov, Alexander S. Kuleshov. Motion of a Rotationally Symmetric Paraboloid on a Perfectly Rough Plane // Proceedings of the XLII Summer School – Conference "Advanced problems in mechanics" (APM 2014). St. Petersburg, June 30 – July 5, 2014. 2014. Saint-Petersburg: Institute of Problems of Mechanical Engineering. Russian Academy of Sciences. P. 177-183.

    Рассматривается задача о качении динамически симметричного параболоида вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Уравнения движения задачи сведены к квадратурам, дано качественное описание движения параболоида по плоскости.

Описаны все стационарные движения параболоида (перманентные вращения и регулярные прецессии) и доказано, что все они являются устойчивыми.

11. Зобова А.А. Аппроксимация сил и моментов трения в модели вязко-упругой плоскости. Труды конференции "XII Всероссийское совещание по проблемам управления, Россия, Москва, ИПУ РАН, 16-19 июня 2014 г." С. 1757 – 1765.

    Рассматривается модель вязко-упругой плоскости, которая состоит в следующем: предполагается, что в каждой инфинитезимальной области контакта действует вязко-упругая сила и сила трения Кулона. Силы и моменты, действующие со стороны плоскости на шар, вычисляются интегрированием плотностей по пятну контакта. За счет вязкой компоненты вертикальной силы размер и форма пятна контакта и распределение нормальных давлений зависят от скорости центра масс шара, что качественно отличает рассматриваемую модель от аналогичных моделей со статическими моделями распределения давлений в пятне контакта (модель трения Контенсу-Эрисмана и ее модификации). Подробное обсуждение этой модели и аналитическое решение задачи о прямом ударе и качении шара по плоскости с начальными условиями общего вида опубликовано в 2013 году (А.А. Зобова, Д.В. Трещев). Там же были предложены аппроксимации сил и моментов трения на различных этапах движения шара. Целью данной статьи является проведение численных расчетов движения шара в полной постановке (т.е. путем численного суммирования возникающих плотностей сил в пятне контакта) и с полученными аппроксимациями, а также сравнение фазовых траекторий.