

ИТОГОВЫЙ ОТЧЕТ (2012-2014) ПО ПРОЕКТУ РФФИ 12-01-00441-а

Динамические свойства систем классической механики по-прежнему привлекают внимание как теоретиков, так и специалистов по приложениям. Эти свойства существенно зависят от того, в каком классе лежит рассматриваемая система. В гамильтоновой динамике исследуется ряд задач, связанных с описанием хаоса в неинтегрируемых системах, не являющихся при этом гиперболическими. Понимание структуры хаоса требует создания новых методов построения инвариантных множеств, несущих хаотическую динамику. В этой области, в частности, лежит проблема диффузии Арнольда, которой в проекте уделяется особое внимание. В неголомомных системах чрезвычайно интересно понять, насколько конкретная система далека от гамильтоновой или от интегрируемой. В частности, имеется ли инвариантная мера, дополнительные первые интегралы и поля симметрии. Наряду с этими задачами рассматриваются проблемы управления такими системами. В диссипативных системах предлагаются новые модели, позволяющие понять такие явления как качение и скольжение в присутствии сухого трения.

При исследовании используются новейшие методы гамильтоновой механики, а именно: многомерное обобщение метода сепаратрисного отображения Заславского-Чирикова, полученное Д.В.Трещевым; метод антиинтегрируемого предела, разработанный в работах Обри и Маккея, а также его модификация для случая частично-гиперболических систем, разработанная Д.В.Трещевым. Построение хаотических траекторий основывается на вариационных методах и методах гиперболической динамики. Задача о существовании обобщенно-обратимых периодических решений второго рода по Пуанкаре задачи трех тел сводится к динамике дискретной лагранжевой системы с одной степенью свободы. Для ее исследования применяются вариационные методы. В задаче исследования динамики возмущения вполне интегрируемого симплектического отображения используются методы гиперболической динамики и теории возмущений гамильтоновых систем. Для решения задачи существования и продолжаемости решений эволюционных дифференциальных уравнений обобщаются на случай пространств Фреше ряд теорем о базисах Шаудера, которые в настоящий момент доказаны только для банаховых пространств. На основании этих обобщений получают теоремы о компактности в пространствах Фреше, которые вместе с априорными оценками позволяют изучать задачи существования и продолжаемости решений. В задаче о экспоненциально малом расщеплении нижнего собственного значения оператора Шредингера с потенциалом используются методы вариационного анализа. Такой подход для задач о расщеплении собственных значений является новым. Также используется комплексный метод ВКБ, разработанный В.П. Масловым.

Получены следующие результаты:

- Гипотеза о степени неприводимых полиномиальных интегралов обратимой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы и торическим пространством положений полностью доказана для систем с полиномиальным по импульсам первым интегралом четвертой степени. Указаны новые интегрируемые случаи с потенциалами, имеющими сингулярности.
- Доказано существование диффузии Арнольда в типичной априори неустойчивой гамильтоновой системе вне малой окрестности сильных резонансов.
- Доказана теорема о сохранении гиперболических торов в системах Гамильтона с медленно меняющимся параметром.
- Доказана теорема о существовании торов полной размерности в окрестности резонанса гамильтоновой системы, близкой к интегрируемой, и об оценке их меры.
- Изучены симметричные бильярды, для которых бильярдное отображение локально сопряжено жесткому повороту. Доказано, что если угол поворота рационально несоизмерим с π , то уравнение сопряжения для бильярдных областей имеет решение в категории формальных рядов.
- Доказана теорема об эргодичности трехпараметрического семейства полиморфизмов, включающего пример Трещева и Нейштадта. Изучены типичные особенности отображения при редукации задачи о разрушении адиабатического инварианта к задаче о динамике полиморфизма.
- Получено обобщение классической теоремы Титчмарша о свертке на случай относительных гармонических носителей непрерывных функций на прямой.
- Доказано существование обобщенно-обратимых периодических решений второго рода по Пуанкаре в задаче трех тел. Описан класс таких решений.
- Получены хаотические решения нелинейного эллиптического уравнения на торе.
- Рассмотрены уравнения движения точки по поверхности в форме уравнений Гамильтона в избыточных координатах. Приведены явные формулы вычисления скобки Пуассона.
- Рассмотрена задача о скольжении по горизонтальной плоскости однородного прямого цилиндра (шайбы) под действием сил сухого трения. Сформулированы и доказаны качественные свойства динамики произвольных шайб.
- Получены явные формулы для плотности распределения опорных точек для плоского твердого тела произвольной формы на плоскости со случайными неровностями. Показано существенное отличие рассмотренной модели сухого трения от стандартного закона Амонтона-Кулона.

- Рассмотрена задача о движении однородного кругового цилиндра (шайбы) по горизонтальной плоскости с вязким трением. Коэффициент вязкого трения линейно зависит от нормального давления в точке контакта. Получены уравнения движения и исследованы свойства движения.

- В задаче о качении без проскальзывания по горизонтальной плоскости шара, содержащего внутри управляемую систему, показано, что при сферической симметрии уравнения движения имеют лагранжеву структуру. Рассмотрена задача оптимального управления таким шаром с тремя роторами.

- Рассмотрены задачи динамики, возникающие при взаимодействии абсолютно твердого шара с деформируемым плоским основанием. Основание представляет собой достаточно жесткую вязкоупругую среду Кельвина–Фойгта. Произведен подробный анализ различных стадий движения. Дано сравнение с традиционными моделями взаимодействия твердых тел.

- Исследованы различные кинематические свойства качения одного твердого тела по другому как для классической модели качения без проскальзывания, так и для модели rubber-качения. Найдены случаи, когда уравнения движения подвижного шара представлены в форме системы Чаплыгина, в конформно-гамильтоновой и гамильтоновой форме.

- Введено понятие слабого решения системы Даламбера–Лагранжа в неголономном случае. Построена теория абсолютно упругого удара в неголономных системах. Полученные результаты применены к задаче об ударе шара о шероховатую поверхность.

- Рассмотрены задачи о движении твердых тел, соударяющихся с шероховатыми поверхностями, в рамках модели ударного взаимодействия, учитывающей трение. Найдены периодические режимы движения и условия выхода системы на эти режимы.

- Предложен новый метод получения предельных уравнений для механических систем, подвергающихся быстрой вибрации, при частоте, стремящейся к бесконечности. Рассмотрен ряд примеров применения этих уравнений для конкретных систем.

- Изучена двумерная задача о движении твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности. Тело снабжено гироскопом, а также ротором Флеттнера. Численно, с использованием генетических алгоритмов, решена задача оптимального управления телом для различных типов управляющих воздействий.

- Доказано существование бесконечного числа негиперболических периодических траекторий в задаче Кирхгофа о движении твердого тела в идеальной жидкости, а также в двойственной ей задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой в силовом поле с квадратичным потенциалом.

- Исследованы свойства специальных периодических траекторий гамильтоновых систем (либраций). Получена новая формула для энергетического расщепления нижнего уровня многомерного оператора Шредингера с потенциалом с двумя симметричными ямами.

- Изучен спектр двумерного оператора Шредингера с периодическим по одной переменной и возрастающим к бесконечности по другой потенциалом. Получены асимптотические формулы для ширины зон, выраженные в терминах действия на траекториях системы с перевернутым потенциалом.

- В начальной задаче для системы ОДУ в условиях теоремы Пеано получено семейство решений, которое зависит от начальных данных как измеримая функция.

- Получена теорема существования для эволюционной задачи с квазилинейной правой частью и нелипшицевой зависимостью от искомой функции в локально выпуклом пространстве.

Аннотации публикаций

S. Bolotin, P. H. Rabinowitz Hybrid mountain pass homoclinic solutions of a class of semilinear elliptic PDEs // Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire, 31 (2014), 103-128.

Получены хаотические решения нелинейного эллиптического уравнения на торе.

D. Burlakov, D. Treschev A rigid body on a surface with random roughness // Regul. Chaotic Dyn., 19:3 (2014), 296-309.

Пусть отрезок лежит на горизонтальной прямой со случайными неровностями. С вероятностью 1 он подпирается в двух точках, в одной слева и другой – справа от центра. Мы вычисляем распределение вероятности для положений этих точек в случае мелких неровностей. Аналогичные задачи решены для окружности и диска на плоскости со случайными неровностями.

Зубелевич О.Э. Эволюционные дифференциальные уравнения с нелипшицевыми нелинейностями // Дифференциальные уравнения, 2014, т. 50, No.9, стр. 1287-1288.

Предложен вариант обобщения теоремы Пеано (существования решения задачи Коши для дифференциальной системы) на случай бесконечномерного фазового пространства.

А.Г. Медведев Сохранение гиперболических торов в системах Гамильтона // Матем. заметки, 95:2 (2014), 227-233.

В 2000 г. Болотин и Трещев дали инвариантное определение гиперболического тора, обобщающее тра-

диционное координатное определение. Там же сформулирована гипотеза о том, что при стандартных предположениях о диофантовости, невырожденности и аналитичности гиперболический тор сохраняется при малых возмущениях. Эта гипотеза обобщает теорему Граффа. В данной статье показывается справедливость этой гипотезы.

A. Anikin, M. Rouleux Multidimensional tunneling between potential wells at non degenerate minima // Proceedings of the International Conference "Days on Diffraction 2014", St.Petersburg, Russia, pp. 17-23.

Было рассмотрено туннелирование между симметричными ямами для двумерного оператора Шредингера в квазиклассическом приближении для энергий, близких к минимуму потенциала. Получены новые асимптотические формулы для расщепления энергии, отвечающей состояниям, возбужденным вдоль меньшей частоты гармонического осциллятора. Изучена геометрия туннельных циклов для более общих возбужденных состояний с диофантовыми торами.

Sergey Y. Dobrokhotov, Anatoly Y. Anikin Tunneling, Librations and Normal Forms in a Quantum Double Well with a Magnetic Field. Chapter 5 in the book "Nonlinear Physical Systems. Spectral Analysis, Stability and Bifurcations", pp. 85-108.

Глава (Туннелирование, либрации и нормальные формы в квантовой двойной яме с магнитным полем) в книге. В задаче о туннелировании в квантовой двойной яме асимптотика энергетического расщепления нижнего состояния выражена в терминах либраций гамильтоновой системы. Предложена геометрическая интерпретация данной формулы в терминах циклов на лагранжевых многообразиях. Получена аналогичная асимптотика для случая двойной ямы в однородном магнитном поле.

Кугушев Е.И., Левин М.А. Некоторые свойства предельных уравнений механических систем на вибрирующем основании // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. МГУ, 2014, стр. 95.

Рассматриваются предельные уравнения механических систем на быстро вибрирующем основании при стремлении частоты колебаний к бесконечности. Выведены предельные уравнения движения для натуральных лагранжевых систем. Сформулирован критерий устойчивости положений равновесия натуральных лагранжевых систем. Рассмотрены системы на вибрирующем основании в однородном поле тяжести. Доказано, что если ось вибрации вертикальна, то все положения равновесия, которые существовали у механической системы в отсутствии вибрации, будут существовать и у соответствующей предельной системы на вибрирующем основании, и при достаточной интенсивности вибрации все эти положения равновесия становятся устойчивыми. С помощью полученных методов исследованы некоторые механические системы с вибрациями в предельном случае.

Д.В. Трещев Об одной задаче сопряжения в динамике бильярда // Труды МИАН (принята к печати).

Изучены симметричные бильярды, для которых бильярдное отображение локально (около эллиптической периодической орбиты периода 2) сопряжено жесткому повороту. Ранее мы получили уравнение (далее, уравнение сопряжения) для соответствующих бильярдных областей и доказали, что если угол поворота α рационально несоизмерим с π , то уравнение сопряжения имеет решение в категории формальных рядов. На основании численного исследования было также указано, что, по-видимому, для «хороших» углов поворота эти ряды имеют положительные радиусы сходимости. Проведено дальнейшее исследование (как аналитическое, так и численное) уравнения сопряжения. Обсуждаются симметрии, зависимость радиуса сходимости от α и другие аспекты.

A. Medvedev, A. Neishtadt, D. Treschev Lagrangian tori near resonances of near-integrable Hamiltonian systems // Nonlinearity (сдана в редакцию)

А.Г. Медведев, А. И. Нейштадт, Д. В. Трещев Лагранжевы торы в окрестности резонанса системы Гамильтона близкой к интегрируемой // Тезисы докладов Международной конференции по математической теории управления и механике, Суздаль, 2013 г., с. 166.

Изучены семейства лагранжевых торов, появляющихся в окрестности резонанса гамильтоновой системы близкой к интегрируемой. Эти семейства исчезают в интегрируемом пределе $\epsilon \rightarrow 0$. Динамика на таких торах колебательная в направлении резонансных фаз и вращательная относительно остальных угловых переменных. Показано, что для резонансов кратности 1 эти торы образуют в резонансных областях множества большой относительной меры в том смысле, что относительная мера дополнения оказывается порядка $\sqrt{\epsilon}$. Представлены результаты численного счета. Также обсуждается форма проекции этих торов на пространство переменных действие.

S. Bolotin, P. Negrini Variational approach to second species periodic solutions of Poincare of the 3 body problem // Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A, 33:3 (2013), 1009-1032.

Доказано существование обобщенно-обратимых периодических решений второго рода по Пуанкаре за-

дачи трех тел. Задача сводится к динамике дискретной лагранжевой системы с одной степенью свободы. Для ее исследования применены вариационные методы.

D. Treschev Billiard map and rigid rotation // *Physica D*, Volume 255, 15 July 2013, Pages 31-34.

Получены численные свидетельства существования нового класса локально интегрируемых бильярдов.

А.А.Зобова, Д.В.Трещев Шар на вязкоупругой плоскости // *Современные проблемы механики. Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика А.Г.Куликовского*. Тр. МИАН, 281, МАИК, М., 2013, 98-126.

Рассмотрены задачи динамики, возникающие при взаимодействии абсолютно твердого шара с деформируемым плоским основанием. Основание представляет собой достаточно жесткую вязкоупругую среду Кельвина–Фойгта, в недеформированном состоянии являющуюся горизонтальной плоскостью. Считается, что при деформации основание создает силы сухого трения, локально подчиняющиеся закону Кулона. Рассмотрено явление удара, возникающее при падении шара на прямую, а также исследовано движение шара "вдоль плоскости". Произведен подробный анализ различных стадий движения. Дано сравнение с традиционными моделями взаимодействия твердых тел.

А.Г. Медведев Гиперболические торы в системах Гамильтона с медленно меняющимся параметром // *Матем. сб.*, 204:5, 2013, с. 45-66.

А.Г. Медведев Гиперболические торы в системах Гамильтона с медленно меняющимся параметром // *Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2013»*.

Рассматривается система Гамильтона, периодически зависящая от параметра. Предполагается, что при каждом значении параметра система имеет гиперболическое периодическое решение. Методами КАМ-теории доказывается, что если придать гамильтониану возмущение, заставив параметр меняться с малой постоянной частотой, неавтономная система будет иметь в расширенном фазовом пространстве гиперболические двумерные торы.

С.В. Болотин, Т.В. Попова Об уравнениях движения системы внутри катящегося шара // *Нелинейная динамика*, 2013, т.9, №1, с. 51-58.

S.V. Bolotin, T.V. Popova On the motion of a mechanical system inside a rolling ball // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, 18 (1-2), pp. 159-165.

Рассматривается механическая система, стесненная идеальными связями и находящаяся внутри шара, катящегося без проскальзывания по плоскости. Показано, что если связи обладают сферической симметрией, то уравнения движения имеют лагранжеву форму. Без предположения симметрии это неверно.

А. В. Борисов, И. С. Мамаев, Д. В. Трещев Качение твердого тела без проскальзывания и верчения: кинематика и динамика // *Нелинейная динамика*, 2012, 8 (4), с. 783-797.

A.V. Borisov, I.S. Mamaev, D.V. Treschev Rolling of a Rigid Body Without Slipping and Spinning: Kinematics and Dynamics // *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 2, no. 2, pp. 161-173.

Исследованы различные кинематические свойства качения одного твердого тела по другому как для классической модели качения без проскальзывания (скорости тел в точке контакта совпадают), так и для модели rubber-качения (дополнительно исключается прокручивание тел относительно друг друга). Кроме того, в случае, когда оба тела ограничены сферическими поверхностями и одно из них неподвижно, уравнения движения подвижного шара представлены в форме системы Чаплыгина. Если при этом центр масс подвижного шара совпадает с его геометрическим центром, уравнения движения представлены в канонно-гамильтоновой форме, а в случае, когда радиусы подвижной и неподвижной сфер совпадают - в гамильтоновой.

D. Treschev, O. Zubelevich On Weak Solutions to The Lagrange-d'Alembert Equation // *Applicationes Mathematica (Warsaw)*, 40:3 (2013), 383–392.

Введено понятие слабого решения системы Даламбера-Лагранжа в неголономном случае. Построена теория абсолютно упругого удара в неголономных системах. Полученные результаты применены к задаче об ударе шара о шероховатую поверхность.

А.Ю. Аникин Либрации и расщепление нижних уровней оператора Шредингера с потенциалом типа двойной ямы в многомерном случае // *ТМФ*, 175:2 (2013), 193-205.

Anikin A.Yu. Asymptotic behavior of the Maupertuis action on a libration and tunneling in a double well // *Russian Journal of Mathematical Physics*, Volume 20, Issue 1, pp.1-10, 2013.

Выведена асимптотическая формула для расщепления нижних собственных значений n -мерного оператора Шредингера с потенциалом с двумя симметричными ямами. В отличие от известной формулы из работы Маслова, Доброхотова и Колокольцова полученная формула имеет вид $A(h)e^{-S/h} (1+o(1))$, где

S – действие на периодической траектории (либрации) классической системы с перевернутым потенциалом, а не действие на двоякоасимптотической траектории. В такой записи главный член предэкспоненциального множителя принимает более элегантный вид. При выводе используется просто преобразование асимптотических формул из указанной работы без выхода за пределы классической механики.

Кугушев Е.И., Никонов В.И. Относительные равновесия плоского твердого тела и точки под действием гравитационного притяжения // Современные проблемы математики и механики. Т. VII. Математика. Механика. Выпуск 2. М.: Изд-во Попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2013. С. 61-63.

Изучается плоская задача о движении твердого тела с дискретным распределением масс и материальной точки под действием взаимного притяжения. Находятся стационарные конфигурации такой системы в случае, когда масса точки пренебрежимо мала и тело вращается вокруг своего центра масс с ненулевой угловой скоростью. Показывается, что в такой системе всегда есть не менее двух различных положений относительного равновесия.

Кугушев Е.И., Попова Т.В. Экспериментальное определение коэффициента трения // Современные проблемы математики и механики. Т. VII. Математика. Механика. Выпуск 2. М.: Изд-во Попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2013. С. 64-69.

Предлагается методика лабораторной работы по определению коэффициента трения скольжения при поступательном движении шайбы по неподвижной горизонтальной плоскости с сухим трением. Начальную скорость шайба получает в результате удара по ней специальным телом, поэтому в работе определяется также коэффициент восстановления при неупругом ударе. Цель лабораторной работы - ознакомить студентов с практическим применением теоретических моделей контактного взаимодействия твердых тел.

Барбашова Т.Ф., Кугушев Е.И., Попова Т.В. Теоретическая механика в задачах. Лагранжева механика. Гамильтонова механика: Учебное пособие. М.: МЦНМО, 2013. 392 с.

Данное издание продолжает серию учебных пособий по теоретической механике, выпускаемых кафедрой теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова. В пособии приводятся подробные решения задач основных типов по курсу «Аналитическая механика». Издание предназначено для студентов и аспирантов естественно-научных факультетов университетов, а также преподавателей теоретической механики.

Левин М.А., Кугушев Е.И. Об уравнениях движения механических систем с быстро колеблющимися элементами. // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. МГУ, 2013.

Получены уравнения Лагранжа второго рода механических систем с вибрирующими элементами. Найдены предельные уравнения движения, получающиеся при стремлении частоты этих вибраций к бесконечности. Доказана сходимости решений исходных уравнений к решениям предельных уравнений, равномерная по обобщенным координатам и слабая (в пространстве L_2) по обобщенным скоростям. Выявлены некоторые общие свойства полученных уравнений и соответствующих им механических систем, в частности, свойства положений равновесия. Рассмотрено несколько примеров.

Н.В.Денисова, В.В.Козлов, Д.В.Трещев Замечания о полиномиальных интегралах высших степеней обратимых систем с торическим пространством конфигураций // Изв. РАН. Сер. матем., 76:5 (2012), 57-72.

Рассмотрены вопросы, связанные с известной гипотезой о степени неприводимых полиномиальных интегралов обратимой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы и торическим пространством положений. Основное внимание уделено исследованию особой системы, возникающей при анализе неприводимых полиномиальных интегралов четвертой степени. В частном случае имеем задачу о движении двух взаимодействующих частиц по окружности в заданных потенциальных силовых полях. Доказано, что если все три потенциала - гладкие непостоянные функции, то эта задача не допускает нетривиальных полиномиальных интегралов сколь угодно высокой степени. Упомянутая выше гипотеза полностью доказана для систем с полиномиальным по импульсам первым интегралом четвертой степени. Указаны новые интегрируемые случаи с потенциалами, имеющими сингулярности.

Т.В.Сальникова, Д.В.Трещев, С.Р.Галлямов Движение свободной шайбы по шероховатой горизонтальной плоскости // Нелинейная динам., 8:1 (2012), 83-101.

Tatiana Salnikova, Dmitrii Treschev Free puck on a rough horizontal plane // Тезисы доклада 8-th European Solid Mechanics Conference, Graz, Austria, 9-13, July, 2012.

Рассматривается задача о скольжении шайбы по горизонтальной плоскости под действием сил сухого трения. Модель основана на трех гипотезах. Закон взаимодействия малого элемента поверхности шайбы с плоскостью - закон Амонтона–Кулона, распределение давления по пятну контакта - линейная (вообще го-

вора, меняющаяся со временем) функция декартовых координат, высота шайбы невелика. Уравнения движения обладают богатой группой симметрий, благодаря чему оказался возможным подробный качественный анализ задачи.

Трещев Д.В., Ермакова Н.Н., Иванова Т.Б., О финальном движении цилиндрических тел по шероховатой плоскости // *Нелинейная динамика*, 2012, 8 (3), с. 585-603.

Рассматривается задача о скольжении по горизонтальной плоскости однородного прямого цилиндра (шайбы) под действием сил сухого трения. Пятно контакта цилиндра с плоскостью совпадает с его основанием. Мы рассматриваем осесимметричные шайбы, то есть предполагается, что основание цилиндра симметрично относительно оси, лежащей в плоскости основания. Основное внимание уделено исследованию качественных свойств динамики шайб, опирающихся на шероховатую плоскость круглым основанием, треугольным основанием и тремя точками.

D.Treschev Arnold diffusion far from strong resonances in multidimensional a priori unstable Hamiltonian systems // *Nonlinearity* 25 (2012) 2717-2757.

Доказано существование диффузии Арнольда в типичной априори неустойчивой гамильтоновой системе вне малой окрестности сильных резонансов.

Е.А.Горин, Д.В.Трещев Относительный вариант теоремы Титчмарша о свертке // *Функц. анализ и его прил.*, 46:1 (2012), 31-38.

Для обобщенной функции, являющейся преобразованием Фурье равномерно непрерывной ограниченной функции на прямой, вводится два варианта понятия множества сингулярностей. Эти понятия мотивированы приложениями в динамике и, вероятно, в таком виде вводятся впервые. Описаны основные свойства множеств сингулярностей. Получено обобщение классической теоремы Титчмарша о свертке на случай относительных гармонических носителей непрерывных функций на прямой.

С.М. Рамоданов, В.А. Тененев, Д.В. Трещев Самопродвижение в идеальной жидкости тела с твердой оболочкой и переменной циркуляцией // *Нелинейная динамика*, 2012, Т.8, №4, с. 799-813.

Изучена двумерная задача о движении твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности. Тело снабжено гиростатом, а также ротором Флеттнера, благодаря которому на тело действует гироскопическая сила (эффект Магнуса). Угловые скорости вращения гиростата и ротора предполагаются известными функциями времени (управлениями). Уравнения движения представлены в виде уравнений Кирхгофа, и в случае кусочно-постоянных управлений указаны законы сохранения. С их помощью уравнения движения приведены к неавтономной системе дифференциальных уравнений первого порядка на группе перемещений конфигурационного пространства. Численно, с использованием генетических алгоритмов, решена задача оптимального управления телом для различных типов управляющих воздействий.

Bolotin S. The Problem of Optimal Control of a Chaplygin Ball by Internal Rotors // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, 17 (6), pp. 559-570.

С.В. Болотин Задача оптимального управления качением шара с роторами // *Нелинейная динамика*, 2012, 8 (4), с. 837-852.

В работе исследуется оптимальное управление с помощью трех гиростатов качением без проскальзывания динамически несимметричного уравновешенного шара. Уравнения оптимальных траекторий сводятся к уравнениям вакономной механики. С помощью принципа максимума Понтрягина получены гамильтоновы уравнения экстремалей для различных функционалов качества. В случае шаровой симметрии эти уравнения можно проинтегрировать в эллиптических функциях.

Бурлаков Д.С., Сеславина А.А. О движении цилиндрической шайбы по горизонтальной плоскости // *Вестник Удмуртского университета. Серия "Математика. Механика. Компьютерные науки"*. 2012. Вып. 4. с. 125-139.

Рассмотрена задача о скольжении однородного прямого цилиндра произвольной формы (шайбы) по горизонтальной плоскости под действием сил сухого трения. Пятно контакта цилиндра с плоскостью совпадает с его основанием, взаимодействия малого элемента поверхности шайбы с плоскостью описывается законом сухого трения Амонтона-Кулона. Основное внимание уделено качественному анализу уравнений движения системы, который позволил описать динамику при малых значениях кинетической энергии системы (финальную динамику). Сформулированы и доказаны качественные свойства динамики произвольных шайб. Приведены примеры, показывающие различие финальной динамики шайб, опирающихся на шероховатую плоскость круглым основанием, центрально-симметричным и произвольной формы.

М.Н. Давлетшин Скобка Пуассона движения точки по поверхности // *Нелинейная динамика*, 2012, т.8,

№3, с. 519-522.

Рассмотрены уравнения движения точки по поверхности в форме уравнений Гамильтона в избыточных координатах. Приведены явные формулы вычисления скобки Пуассона.

О. Зубелевич Обыкновенные дифференциальные уравнения с нелипшицевой правой частью // ДАН 2012, том 445, No 5, стр 1-5.

В начальной задаче для системы ОДУ в условиях теоремы Пеано получено семейство решений, которое зависит от начальных данных как измеримая функция. На основе данного результата доказана теорема существования обобщенного решения уравнения переноса.

Сальникова Т.В. Замкнутые геодезические на неодносвязных многообразиях // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 2. С. 233-236.

Существование бесконечного числа негиперболических периодических траекторий в задаче Кирхгофа о движении твердого тела в идеальной жидкости, а также в двойственной ей задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой в силовом поле с квадратичным потенциалом доказывается с помощью одной из теорем Клингенберга. Динамическая система рассматривается на неодносвязном многообразии четной размерности с римановой метрикой.

Кугушев Е.И., Маркеева А.А. Движение механических систем при наличии высокочастотных вибраций // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. МГУ, 2012.

Предложен новый метод получения предельных уравнений для механических систем, подвергающихся быстрой вибрации, при частоте, стремящейся к бесконечности. Рассмотрен ряд примеров применения этих уравнений для конкретных систем. В некоторых случаях найдены положения равновесия и исследована их устойчивость. Предложенный метод универсален, и потому аналогичным образом можно вывести предельные уравнения и для различных систем других видов, в том числе неголономных.

Кугушев Е.И., Осаковская Е.Д., Попова Т.В. О движении цилиндра по горизонтальной плоскости в модели вязкого трения с переменным коэффициентом // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. МГУ, 2012.

Рассматривается задача о движении однородного кругового цилиндра по горизонтальной плоскости с вязким трением. Коэффициент вязкого трения линейно зависит от нормального давления в точке контакта, распределение нормального давления определяется в рамках динамически совместной модели, предложенной А.П. Ивановым. Исследуются некоторые свойства движения.

Барбашова Т.Ф., Отраднова Л.С., Кугушев Е.И. О движении сферы с множественными соударениями // XII Международная конференция "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (Конференция Пятницкого), 5-8 июня 2012 г., Москва, Россия, тезисы докладов, с. 41-42.

В задаче о движении шара по инерции внутри сферы и внутри кругового цилиндра считается, что при ударе происходит мгновенное наложение и снятие связи, состоящее в том, что касательная составляющая скорости контактирующей точки шара равна нулю, то есть выполняется условие качения без проскальзывания. Показывается, что во всех случаях движение в пределе выходит на установившийся режим.

Кугушев Е.И., Отраднова Л.С. О движении механической системы с соударениями // Международная конференция по механике "Шестые Поляховские чтения", посвященная 95-летию со дня рождения С.В.Валландера, 2012, 31.01-03.02.2012, Санкт-Петербург, Россия, тезисы докладов, с. 50.

Рассматривается модель удара с трением, состоящая в том, что при ударе тела о шероховатую поверхность происходит мгновенное наложение и снятие связи качения без проскальзывания, состоящей в том, что равна нулю касательная составляющая к поверхности скорость контактирующей точки тела. Для удара тела о шероховатую поверхность выводятся уравнения удара.