

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Ицкович Михаил Олегович

**О ДВИЖЕНИИ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ
ТЕЛ, ИМЕЮЩИХ С НЕЙ ОДНУ ИЛИ ДВЕ
ТОЧКИ СОПРИКОСНОВЕНИЯ**

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2017

А. А. Зобова

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Задачи о качении твердых тел по поверхности без проскальзывания считаются классическими задачами механики неголономных систем. Одной из таких задач является задача о качении по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости тяжелого динамически симметричного эллипсоида вращения. Из классических работ С.А. Чаплыгина и Х.М. Муштари известно, что решение этой задачи сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка с коэффициентами, зависящими от формы эллипсоида и распределения масс в нем. После того, как находится решение соответствующего уравнения, задача сводится к квадратурам. Однако ни одного случая, когда уравнения движения эллипсоида сводятся к квадратурам, прежде указано не было. Нахождение таких случаев представляет несомненный интерес.

Цель работы. Диссертация посвящена исследованию существования лиувиллевых решений у линейного дифференциального уравнения второго порядка, к интегрированию которого сводится решение задачи о движении динамически симметричного эллипсоида вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Исследуется также задача о движении по неподвижной горизонтальной плоскости твердого тела, состоящего из двух соединенных между собой одинаковых симметричных пластинок.

Методы исследования. Для получения условий существования лиувиллевых решений у линейного дифференциального уравнения второго порядка, к интегрированию которого сводится решение задачи о движении динамически симметричного эллипсоида вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, в работе используется так называемый алгоритм Ковачича – метод нахождения лиувиллевых решений линейного дифференциального уравнения второго порядка, впервые предложенный в работе американского математика Дж. Ковачича и детально описанный в Главе 1 данной диссертационной работы. Кроме того, в работе используются методы аналитической механики, качественной теории дифференциальных уравнений, а также теории устойчивости равновесий и стационарных движений механических систем.

Достоверность результатов. Все основные результаты диссертации получены аналитически с помощью методов дифференциальной теории Галуа, качественной теории дифференциальных уравнений и аналитической механики. Часть аналитических результатов подтверждена и проиллюстрирована с помощью численного анализа.

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в работе, являются новыми, ранее неизвестными. Впервые получены результаты о существовании лиувиллевых решений в задаче о движении динамически симметричного эллипсоида вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Доказано отсутствие лиувиллевых решений в данной задаче для почти всех значений параметров задачи. Представлено несколько случаев, когда решение задачи выражается через лиувиллевы функции. В задаче о движении по горизонтальной плоскости тела, состоящего из двух соединенных между собой пластинок, найдены все возможные положения равновесия данного тела на плоскости и получены условия их устойчивости.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете), в Федеральном исследовательском центре "Информатика и управление" Российской академии наук, в Математическом институте имени В.А. Стеклова Российской академии наук, в Институте проблем механики имени А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, в Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша Российской академии наук и других научно-исследовательских центрах.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

1. Международная научная конференция по механике "Шестые Поляховские чтения" Россия, г. Санкт-Петербург, 31 января – 3 февраля 2012 г.
2. X Международная Четаевская конференция "Аналитическая механика, устойчивость и управление" Россия, г. Казань, 12 – 16 июня 2012 г.
3. XL International Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics" (APM-2012). Russia, Saint-Petersburg (Repino), July 2 – 8, 2012.
4. XLI International Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics" (APM-2013). Russia, Saint-Petersburg (Repino), July 1 – 6, 2013.
5. Научная конференция "Ломоносовские чтения", Россия, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 17 – 26 апреля 2017 г.
6. XI Международная Четаевская конференция "Аналитическая механика, устойчивость и управление" Россия, г. Казань, 13 – 17 июня 2017 г.

7. Научный семинар "Аналитическая механика и теория устойчивости" имени В.В. Румянцева кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Москва, 2012, 2013, 2017 гг.
8. Научный семинар "Динамика относительного движения" кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Москва, 2012, 2017 гг.

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в десяти печатных работах, три из которых [1-3] опубликованы в журналах, соответствующих "Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова". Список работ приведен в конце автореферата.

Личный вклад. Работы [1-10] выполнены в соавторстве с научным руководителем к.ф.-м.н. Кулешовым А.С., которому принадлежат постановки задач и методы их исследования, а также консультации в процессе исследования. Все результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 87 наименований, включая работы автора. В диссертации приведено 10 рисунков. Общий объем диссертации – 126 страниц.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации, сформулирована цель работы, приведен краткий обзор литературы, связанной с тематикой диссертации, и кратко изложено содержание диссертации.

Первая глава диссертации посвящена обсуждению теоретических основ алгоритма Ковачича. В ней также дается описание алгоритма и рассказывается о том, как с его помощью находятся лиувиллевы решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами.

Рассмотрим дифференциальное поле $\mathbb{C}(x)$ рациональных функций одного комплексного переменного x . Наша задача состоит в том, чтобы найти решение дифференциального уравнения

$$z'' + a(x)z' + b(x)z = 0, \quad (1)$$

где $a(x), b(x) \in \mathbb{C}(x)$, причем интересовать нас будут так называемые лиувиллевы решения данного уравнения. Решение называется лиувиллевым,

если оно является элементом лиувиллева поля, где лиувиллево поле определяется следующим образом.

Определение. Пусть F – дифференциальное поле функций одного комплексного переменного x , которое содержит $\mathbb{C}(x)$, то есть F – поле характеристики ноль с операцией дифференцирования $()'$, действующей на элементы этого поля по правилу $(a + b)' = a' + b'$ и $(ab)' = a'b + ab'$ для любых a и b из F . Поле F называется лиувиллевым, если существует последовательность (башня) конечных расширений полей

$$\mathbb{C}(x) = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_n = F,$$

получающаяся присоединением одного элемента, такая, что для любого $i = 1, 2, \dots, n$

$$F_i = F_{i-1}(\alpha), \text{ где } \frac{\alpha'}{\alpha} \in F_{i-1}$$

(то есть F_i образуется присоединением экспоненты неопределенного интеграла над F_{i-1})

или

$$F_i = F_{i-1}(\alpha), \text{ где } \alpha' \in F_{i-1}$$

(то есть F_i образуется присоединением интеграла над F_{i-1})

или F_i является конечным алгебраическим расширением над F_{i-1} (то есть $F_i = F_{i-1}(\alpha)$ и α удовлетворяет полиномиальному уравнению конечной степени вида

$$a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0,$$

где $a_j \in F_{i-1}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$ и не все равны нулю). $\square$

Таким образом, лиувиллевы решения строятся последовательно из рациональных функций при помощи алгебраических операций, неопределенного интегрирования и взятия экспоненты заданного выражения.

Для того, чтобы привести исходное дифференциальное уравнение к более простому виду, сделаем следующую замену переменных:

$$y(x) = z(x) e^{\frac{1}{2} \int a(x) dx}. \quad (2)$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$y'' = h(x) y, \quad h(x) = \frac{1}{2}a' + \frac{1}{4}a^2 - b, \quad h(x) \in \mathbb{C}(x). \quad (3)$$

В дальнейшем в работе предполагается, что дифференциальное уравнение второго порядка, с которым имеет дело алгоритм, записывается в виде (3).

Следующая теорема, доказанная Дж. Ковачичем, определяет структуру решения данного дифференциального уравнения.

Теорема 1. Для дифференциального уравнения (3) справедливы только следующие 4 случая.

1. Дифференциальное уравнение имеет решение вида $\eta = e^{\int \omega(x) dx}$ и $\omega(x) \in \mathbb{C}(x)$ (лиувиллево решение типа 1).
2. Дифференциальное уравнение имеет решение вида $\eta = e^{\int \omega(x) dx}$, где $\omega(x)$ – алгебраическая функция степени 2 над $\mathbb{C}(x)$, и Случай 1 не имеет места (лиувиллево решение типа 2).
3. Все решения дифференциального уравнения (3) являются алгебраическими над $\mathbb{C}(x)$ и Случаи 1 и 2 не имеют места. Решение уравнения (3) имеет в данном случае вид $\eta = e^{\int \omega(x) dx}$ и $\omega(x)$ – алгебраическая функция степени 4, 6 или 12 над $\mathbb{C}(x)$ (лиувиллево решение типа 3).
4. Дифференциальное уравнение (3) не имеет лиувиллевых решений.

□

Следующая теорема, доказанная в работе Дж. Ковачича, определяет условия, необходимые для того, чтобы один из трех первых случаев, перечисленных в Теореме 1, мог иметь место.

Теорема 2. Для дифференциального уравнения (3) следующие условия являются необходимыми для того, чтобы один из трех первых случаев, перечисленных в Теореме 1, имел место, то есть чтобы у уравнения (3) существовало лиувиллево решение специального вида, указанного при описании соответствующего случая.

1. Каждый полюс функции $h(x)$ имеет порядок 1 или четный порядок. Порядок $h(x)$ в точке $x = \infty$ четный или выше, чем второй.
2. $h(x)$ имеет по меньшей мере один полюс или порядка 2 или нечетного порядка, большего чем 2.
3. Функция $h(x)$ не имеет полюсов порядка большего, чем 2. Порядок $h(x)$ в $x = \infty$ по меньшей мере равен 2. Если разложение функции $h(x)$ в сумму простейших дробей имеет вид

$$h(x) = \sum_i \frac{\alpha_i}{(x - c_i)^2} + \sum_j \frac{\beta_j}{x - d_j},$$

то

$$\sqrt{1 + 4\alpha_i} \in \mathbb{Q} \quad \text{для любого } i,$$

$$\sum_j \beta_j = 0$$

и, кроме того,

$$\sqrt{1+4\gamma} \in \mathbb{Q}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j d_j.$$

□

Для нахождения лиувиллева решения типа 1 дифференциального уравнения (3) алгоритм Ковачича формулируется следующим образом. Предположим, что необходимые условия существования решения в Случае 1 выполнены, и обозначим через Γ множество конечных полюсов функции $h(x)$.

Шаг 1. Для каждого $c \in \Gamma \cup \{\infty\}$ определим рациональную функцию $\left[\sqrt{h}\right]_c$ и два комплексных числа α_c^+ и α_c^- так, как описано ниже.

(c_1) Если $c \in \Gamma$ и c – полюс порядка 1, то

$$\left[\sqrt{h}\right]_c = 0, \quad \alpha_c^+ = \alpha_c^- = 1.$$

(c_2) Если $c \in \Gamma$ и c – полюс порядка 2, то

$$\left[\sqrt{h}\right]_c = 0.$$

Пусть b – коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^2}$ в разложении функции $h(x)$ в сумму простейших дробей. Тогда

$$\alpha_c^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4b}.$$

(c_3) Если $c \in \Gamma$ и c – полюс порядка $2\nu \geq 4$ (необходимо четного порядка в силу соответствующих условий Теоремы 2), тогда функция $\left[\sqrt{h}\right]_c$ представляет собой сумму членов, которые включают в себя все $\frac{1}{(x-c)^i}$ для $2 \leq i \leq \nu$ в разложении функции $\sqrt{h(x)}$ в ряд Лорана в окрестности точки c . Причем для функции $\left[\sqrt{h}\right]_c$ имеются два значения, различающиеся знаком; любое из них может быть выбрано. Таким образом,

$$\left[\sqrt{h}\right]_c = \frac{a}{(x-c)^\nu} + \dots + \frac{d}{(x-c)^2}.$$

Пусть b – коэффициент при $\frac{1}{(x-c)^{\nu+1}}$ у функции $h - \left[\sqrt{h}\right]_c^2$. Тогда

$$\alpha_c^\pm = \frac{1}{2} \left(\pm \frac{b}{a} + \nu \right).$$

(∞_1) Если порядок функции $h(x)$ в точке $x = \infty$ больше, чем 2, то

$$\left[\sqrt{h}\right]_{\infty} = 0, \quad \alpha_{\infty}^+ = 0, \quad \alpha_{\infty}^- = 1.$$

(∞_2) Если порядок функции $h(x)$ в точке $x = \infty$ равен 2, то

$$\left[\sqrt{h}\right]_{\infty} = 0.$$

Пусть b – коэффициент при $\frac{1}{x^2}$ в разложении в ряд Лорана функции $h(x)$ в окрестности точки $x = \infty$. Тогда

$$\alpha_{\infty}^{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4b}.$$

(∞_3) Если порядок функции $h(x)$ в точке $x = \infty$ равен $-2\nu \leq 0$ (и является четным в силу условий Теоремы 2), тогда функция $\left[\sqrt{h}\right]_{\infty}$ представляет собой сумму членов со степенями x^i , $0 \leq i \leq \nu$ разложения в ряд Лорана функции $\sqrt{h(x)}$ в точке $x = \infty$ (может быть выбрана любая из двух возможностей). Тогда

$$\left[\sqrt{h}\right]_{\infty} = ax^{\nu} + \dots + d.$$

Пусть b – коэффициент при $x^{\nu-1}$ в $h - \left(\left[\sqrt{h}\right]_{\infty}\right)^2$. Тогда

$$\alpha_{\infty}^{\pm} = \frac{1}{2} \left(\pm \frac{b}{a} - \nu \right).$$

Шаг 2. Для каждого семейства $s = (s(c))_{c \in \Gamma \cup \{\infty\}}$, где $s(c)$ может быть как знаком $+$, так и знаком $-$, положим

$$d = \alpha_{\infty}^{s(\infty)} - \sum_{c \in \Gamma} \alpha_c^{s(c)}. \quad (4)$$

Если d является неотрицательным целым числом, то для данного семейства s введем функцию

$$\theta = \sum_{c \in \Gamma} \left(s(c) \left[\sqrt{h}\right]_c + \frac{\alpha_c^{s(c)}}{x-c} \right) + s(\infty) \left[\sqrt{h}\right]_{\infty}.$$

Если d не является неотрицательным целым числом, то соответствующее семейство s исключается из рассмотрения. Если таким образом из рассмотрения будут исключены все возможные семейства s , значит Случай 1 не имеет места.

Шаг 3. Для каждого семейства s , сохраненного на предыдущем шаге, будем искать многочлен P степени d (постоянная d определяется формулой (4)) с комплексными коэффициентами, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$P'' + 2\theta P' + (\theta' + \theta^2 - h) P = 0.$$

Если такой многочлен отыщется для какого-либо из семейств s , то

$$\eta = P e^{\int \theta(x) dx}$$

является искомым решением дифференциального уравнения (3). Если ни для одного из семейств s многочлен P найти не удалось, то Случай 1 не имеет места для дифференциального уравнения (3).

Аналогично алгоритм Ковачича формулируется для поиска лиувиллевых решений типа 2 и типа 3 у дифференциального уравнения (3).

Во второй главе диссертации алгоритм Ковачича применяется для нахождения лиувиллевых решений в задаче о движении динамически симметричного эллипсоида вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

В §2.1 дана общая постановка задачи о качении тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

Пусть твердое тело, симметричное по форме и распределению масс относительно оси $G\zeta$, проходящей через центр тяжести G тела, опирается в точке M о неподвижную горизонтальную плоскость Oxy . Обозначим: θ – угол между осью симметрии тела и вертикалью, φ – угол между меридианом $M\zeta$ тела и какой-либо фиксированной меридианной плоскостью, ψ – угол между горизонтальной касательной MQ меридиана $M\zeta$ тела и осью Ox . Положение тела будет вполне определено углами θ , ψ , φ и координатами x и y точки M .

Кроме того, введем систему координат $G\xi\eta\zeta$, движущуюся и в пространстве и в теле так, что ось $G\xi$ все время лежит в плоскости вертикального меридиана $M\zeta$, а ось $G\eta$ перпендикулярна этой плоскости (Рис. 1). Пусть векторы скорости $\mathbf{v}$ центра масс G , угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела, угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ трехгранника $G\xi\eta\zeta$ и реакции плоскости $\mathbf{R}$ задаются в системе координат $G\xi\eta\zeta$ компонентами $v_\xi, v_\eta, v_\zeta; p, q, r; \Omega_\xi, \Omega_\eta, \Omega_\zeta$ и R_ξ, R_η, R_ζ соответственно. Пусть m – масса тела, A_1 – его момент инерции относительно осей $G\xi$ и $G\eta$, а A_3 – момент инерции относительно оси симметрии $G\zeta$.

Заметим, что расстояние GQ от центра тяжести G до плоскости Oxy будет функцией угла θ , т.е. $GQ = f(\theta)$. Координаты ξ, η, ζ точки M касания тела и

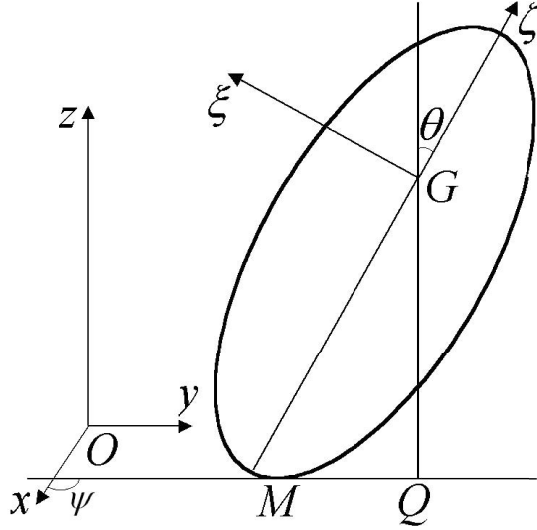


Рис. 1. Качение тела вращения: основные системы координат.

опорной плоскости в системе координат $G\xi\eta\zeta$ также будут функциями только угла θ , причем $\eta = 0$, а

$$\xi = -f(\theta) \sin \theta - f'(\theta) \cos \theta, \quad \zeta = -f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \sin \theta. \quad (5)$$

Так как ось $G\zeta$ неподвижна в теле, то $\Omega_\xi = p$, $\Omega_\eta = q$. Плоскость $G\xi\zeta$ все время остается вертикальной, поэтому $\Omega_\zeta = \Omega_\xi \operatorname{ctg} \theta$. Скорость точки тела, находящейся в соприкосновении с опорной плоскостью, равна нулю, поэтому

$$v_\xi + q\zeta = 0, \quad v_\eta + r\xi - p\zeta = 0, \quad v_\zeta - q\xi = 0.$$

Закон изменения импульса в проекции на ось $G\eta$ и закон изменения кинетического момента относительно осей $G\xi$ и $G\zeta$ после простых преобразований дают:

$$\frac{d(p\zeta - r\xi)}{dt} - (\zeta \operatorname{ctg} \theta + \xi) pq = \frac{R_\eta}{m}, \quad (6)$$

$$A_1 \frac{dp}{dt} + (A_3 r - A_1 p \operatorname{ctg} \theta) q = -\zeta R_\eta, \quad A_3 \frac{dr}{dt} = \xi R_\eta.$$

Отбрасывая в дальнейшем частный случай $\theta = \operatorname{const}$ и имея в виду, что $q = -\dot{\theta}$, после исключения R_η из системы (6) получим

$$A_1 \frac{dp}{d\theta} + A_3 \frac{\zeta}{\xi} \frac{dr}{d\theta} = -A_1 p \operatorname{ctg} \theta + A_3 r, \quad (7)$$

$$\zeta \frac{dp}{d\theta} - \frac{A_3 + m\xi^2}{m\xi} \frac{dr}{d\theta} = -(\zeta \operatorname{ctg} \theta + \xi + \zeta') p + \xi' r.$$

Два линейных дифференциальных уравнения первого порядка (7) относительно p и r можно свести к одному уравнению второго порядка относительно r :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\theta^2} + \left[\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{3m(A_1 \xi \xi' + A_3 \zeta \zeta')}{\Delta} - \frac{\frac{d}{d\theta}(\xi(\xi + \zeta'))}{\xi(\xi + \zeta')} \right] \frac{dr}{d\theta} + \\ + \frac{m\xi(\xi + \zeta')}{\Delta \sin \theta} \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{(A_1 \xi' - A_3 \zeta) \sin \theta}{\xi + \zeta'} \right) - A_3 \sin \theta \right] r = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\Delta = A_1 A_3 + A_1 m \xi^2 + A_3 m \zeta^2$.

Дальнейшее решение задачи сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка (8). В §2.2 диссертации рассматривается частный случай данной общей задачи, когда катящееся по горизонтальной плоскости тело является динамически симметричным эллипсоидом вращения. Пусть a_1 и a_3 – полуоси эллипсоида. Тогда высота центра масс эллипсоида над опорной плоскостью выражается формулой:

$$f(\theta) = \sqrt{a_1^2 \sin^2 \theta + a_3^2 \cos^2 \theta}.$$

Координаты ξ и ζ точки касания эллипсоида с плоскостью, вычисляемые по формулам (5), будут иметь вид:

$$\xi = -\frac{a_1^2 \sin \theta}{\sqrt{a_1^2 \sin^2 \theta + a_3^2 \cos^2 \theta}}, \quad \zeta = -\frac{a_3^2 \cos \theta}{\sqrt{a_1^2 \sin^2 \theta + a_3^2 \cos^2 \theta}}.$$

Уравнение второго порядка для определения компоненты угловой скорости эллипсоида в проекции на его ось симметрии записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\theta^2} + h_1 \frac{dr}{d\theta} + h_2 r = 0, \quad \theta \in (0, \pi) \quad (9) \\ h_1 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{4a_3^2 \cos \theta}{(a_1^2 \sin^2 \theta + a_3^2 \cos^2 \theta) \sin \theta} + \frac{3}{a_1^2 \sin^2 \theta + a_3^2 \cos^2 \theta} \times \\ \times \frac{(A_1 a_1^2 - A_3 a_3^2) m a_1^2 a_3^2 \sin \theta \cos \theta}{((A_1 + m a_3^2) A_3 a_3^2 - (A_3 + m a_1^2) A_1 a_1^2) \cos^2 \theta + (A_3 + m a_1^2) A_1 a_1^2} \\ h_2 = -\frac{1}{a_1^2 \sin^2 \theta + a_3^2 \cos^2 \theta} \times \\ \times \frac{m a_1^2 \left(A_3 (a_3^2 - a_1^2)^2 \sin^4 \theta + a_3^2 (A_1 a_1^2 - A_3 a_3^2) (1 + \cos^2 \theta) \right)}{((A_1 + m a_3^2) A_3 a_3^2 - (A_3 + m a_1^2) A_1 a_1^2) \cos^2 \theta + (A_3 + m a_1^2) A_1 a_1^2} \end{aligned}$$

В уравнении (9) сделаем замену независимой переменной по формуле $\cos^2 \theta = x$ и введем следующие обозначения:

$$\frac{A_3}{A_1} = A \in (0, 2), \quad \frac{ma_1^2}{A_1} = B, \quad \frac{a_3^2}{a_1^2} = C.$$

В результате уравнение (9) перепишется в виде:

$$\frac{d^2 r}{dx^2} + d_1 \frac{dr}{dx} + d_2 r = 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{3x-1}{2x(x-1)} + \frac{2C}{(x-1)((1-C)x-1)} + \\ &+ \frac{3(AC-1)BC}{2((1-C)x-1)((A+B-(1+BC)AC)x-(A+B))}, \\ d_2 &= \frac{\left(A(1-C)^2 x^2 + (C-A-A(1-C)(1-3C))x + C-A+2A(1-C)\right)B}{4x(x-1)((1-C)x-1)((A+B-(1+BC)AC)x-(A+B))}. \end{aligned}$$

Полученное уравнение (10) является исходным для применения алгоритма Ковачича. Если положить

$$a(x) = d_1, \quad b(x) = d_2,$$

то уравнение (10) будет в точности иметь вид уравнения (1). Рассмотрим сначала общий случай, т.е. будем считать, что

$$1-C \neq 0 \quad \text{и} \quad A+B-(1+BC)AC \neq 0.$$

Введем следующие обозначения

$$\frac{1}{1-C} = x_1, \quad \frac{A+B}{A+B-(1+BC)AC} = x_2.$$

Подставляя эти выражения в коэффициенты d_1 и d_2 , получим:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{3x-1}{2x(x-1)} + \frac{2(x_1-1)}{(x-1)(x-x_1)} + \frac{3(x_2-x_1)}{2(x-x_1)(x-x_2)}, \\ d_2 &= \frac{(x_2-x_1)(Ax^2 - ((A-1)(x_1^2-2x_1+3)-x_1+3)x - ((A-1)(x_1-2)-1)x_1)}{4(x_1-1)((A-1)(x_1-1)-1)(x-1)(x-x_1)(x-x_2)x}. \end{aligned}$$

При помощи замены вида (2) уравнение (10) приводится к виду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = E(x) y, \quad E(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (d_1) + \frac{1}{4} d_1^2 - d_2. \quad (11)$$

В явном виде функция $E(x)$ записывается следующим образом:

$$E(x) = \frac{c_1}{x-1} + \frac{b_1}{(x-1)^2} + \frac{c_0}{x} + \frac{b_0}{x^2} + \frac{c_{x_1}}{x-x_1} + \frac{b_{x_1}}{(x-x_1)^2} + \frac{c_{x_2}}{x-x_2} + \frac{b_{x_2}}{(x-x_2)^2},$$

$$b_1 = \frac{3}{4}, \quad b_0 = b_{x_1} = b_{x_2} = -\frac{3}{16},$$

$$c_1 = -\frac{x_1 x_2 - 2x_1 - 4x_2 + 5}{4(x_1 - 1)(x_2 - 1)},$$

$$c_0 = \frac{(2x_1 x_2 - x_1 - 3x_2)(A - 1)}{8x_2((A - 1)x_1 - A)} -$$

$$-\frac{A(x_1 - 1)(2x_2 - 1)}{8x_1 x_2((A - 1)x_1 - A)} + \frac{A(x_2 - 1)(x_1 + 1)}{8x_1 x_2(x_1 - 1)((A - 1)x_1 - A)},$$

$$c_{x_1} = \frac{(3x_1 x_2 - 4x_1 + x_2)(x_1 - 1)A - 3x_1(x_1 x_2 - 2x_1 + x_2)}{8x_1(x_1 - 1)(x_1 - x_2)((A - 1)x_1 - A)},$$

$$c_{x_2} = \frac{A(x_2 - 1)^2}{4x_2(x_1 - 1)(x_1 - x_2)((A - 1)x_1 - A)} +$$

$$+ \frac{(x_1 + x_1 x_2 - 2)A - (A - 1)(2x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 - 4x_2)x_1}{8x_2(x_2 - 1)(x_1 - x_2)((A - 1)x_1 - A)}.$$

Таким образом, в общем случае функция $E(x)$ будет иметь четыре конечных полюса в точках $x = 0$, $x = 1$, $x = x_1$ и $x = x_2$. Учитывая, что параметры A , B и C удовлетворяют условиям $A > 0$, $B > 0$ и $C > 0$, а также принимая во внимание явные выражения x_1 и x_2 через A , B и C , убеждаемся, что для значений x_1 и x_2 справедливы следующие условия:

$$x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0, \quad x_1 \neq 1, \quad x_2 \neq 1.$$

Разложение функции $E(x)$ в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид

$$E(x)|_{x=\infty} = \frac{b_\infty}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

$$b_\infty = -\frac{3}{16} + \frac{A(x_1 - x_2)}{4(x_1 - 1)((A - 1)x_1 - A)}.$$

Тот факт, что коэффициент при $\frac{1}{x^2}$ в разложении функции $E(x)$ в окрестности точки $x = \infty$ зависит от параметров задачи, существенно усложняет ее решение. В зависимости от параметров коэффициент b_∞ может быть равным нулю, может быть таким, что выражение

$$\sqrt{1 + 4b_\infty} \quad (12)$$

является иррациональным или рациональным. Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (11) приводит к следующему результату.

Теорема 3. *Если все конечные полюсы функции $E(x)$ различны, и число, определяемое выражением (12), является иррациональным, то уравнение (11) не имеет лиувиллевых решений. $\square$*

Выражение (12) принимает иррациональные значения для почти всех значений параметров задачи. Следовательно, для почти всех значений параметров задачи дифференциальное уравнение (11) не имеет лиувиллевых решений. Полученный результат позволяет сделать вывод, что при выполнении условия (11) лиувиллевы решения будут отсутствовать и у дифференциального уравнения (9). В следующих параграфах диссертации рассмотрено несколько случаев, когда выражение (12) является рациональным числом.

В §2.3 диссертации рассматривается случай $b_\infty = 0$. Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (11) в этом случае приводит к следующему результату.

Теорема 4. *Если все конечные полюсы функции $E(x)$ различны, и справедливо условие $b_\infty = 0$, то уравнение (11) не имеет лиувиллевых решений. $\square$*

В §2.4 диссертации рассматривается случай $b_\infty = \frac{5}{16}$. В этом случае исходные параметры задачи связаны соотношением

$$A_3 (a_3^2 - a_1^2) (2A_1 + ma_1^2) + 2m (A_3 a_3^4 - A_1 a_1^4) = 0. \quad (13)$$

Из соотношения (13) получаем:

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{2ma_1^4}{(2A_1 + ma_1^2)(a_3^2 - a_1^2) + 2ma_3^4}.$$

Выражение, стоящее в правой части последнего равенства, должно принадлежать интервалу $(0, 2)$. Таким образом, выполнение условия $b_\infty = \frac{5}{16}$ возможно в случае, когда параметры системы удовлетворяют соотношению:

$$2(A_1 + ma_3^2 + ma_1^2)(a_3^2 - a_1^2) + ma_1^2 a_3^2 > 0. \quad (14)$$

Соотношение (14) заведомо выполняется в случае вытянутого эллипсоида вращения ($a_3^2 > a_1^2$). Если же эллипсоид сжат ($a_1^2 > a_3^2$), то соответствующее

условие будет справедливо только в случае

$$\frac{a_3^2}{a_1^2} \in \left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}, 1 \right).$$

Условие $b_\infty = \frac{5}{16}$ через параметры A , x_1 и x_2 записывается следующим образом:

$$A = \frac{2x_1(x_1 - 1)}{2x_1^2 - 5x_1 + x_2 + 2}. \quad (15)$$

Теорема 5. Если все конечные полюсы функции $E(x)$ различны, и справедливо условие (15), то общее решение уравнения (11) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} y(x) = & C_1 (x(x - x_1)(x - x_2))^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{P(x)}{x - 1}} \times \\ & \times \exp \left(\int \frac{x - 1}{2P(x)} \sqrt{\frac{(x_1x_2 - 2x_1 + 1)(4x_1 - x_2 - 2)}{x(x - x_1)(x - x_2)}} dx \right) + \\ & + C_2 (x(x - x_1)(x - x_2))^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{P(x)}{x - 1}} \times \\ & \times \exp \left(- \int \frac{x - 1}{2P(x)} \sqrt{\frac{(x_1x_2 - 2x_1 + 1)(4x_1 - x_2 - 2)}{x(x - x_1)(x - x_2)}} dx \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$P(x) = x^2 - x_2x + x_1x_2 - 2x_1 + 1.$$

□

Таким образом, в случае $b_\infty = \frac{5}{16}$ удастся построить общее решение уравнения (11). Аналогично, в **§2.5** и **§2.6** диссертации общее решение дифференциального уравнения (11) построено в случаях, когда $b_\infty = \frac{21}{16}$ и когда $b_\infty = \frac{45}{16}$.

Третья глава диссертации посвящена исследованию другой механической системы. Рассматривается задача о движении по неподвижной горизонтальной плоскости твердого тела, состоящего из двух соединенных между собой одинаковых симметричных пластинок. Пластинки соединены перпендикулярно друг другу так, что их оси симметрии образуют единую ось симметрии полученного тела. Данное тело при движении по горизонтальной плоскости в каждый момент времени касается ее двумя точками (Рис. 2). В

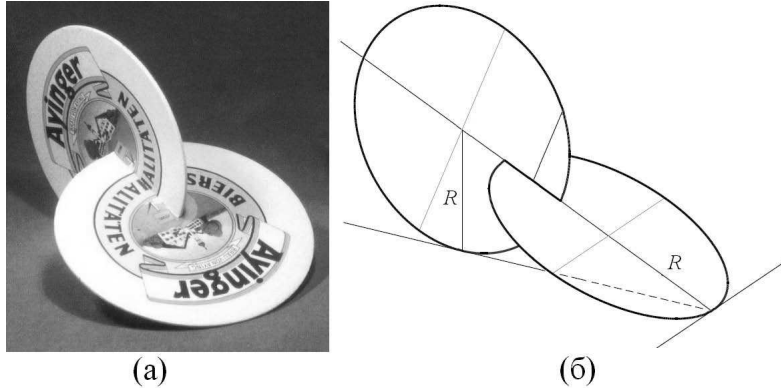


Рис. 2. Тело, составленное из двух симметричных пластинок.

§3.1 диссертации дана общая постановка задачи о движении тела, состоящего из двух симметричных пластинок.

Пусть расстояние между центрами масс C_1 и C_2 пластинок равно $2l$. Поскольку пластинки являются совершенно одинаковыми, центр масс G тела лежит в середине отрезка C_1C_2 : $GC_1 = GC_2 = l$.

Для описания движения тела введем подвижную систему координат $Gx_1x_2x_3$: ось Gx_2 направим по оси симметрии тела, ось Gx_3 - перпендикулярно плоскости первой пластинки, а ось Gx_1 - перпендикулярно плоскости второй пластинки (Рис. 3). Обозначим единичные векторы системы координат $Gx_1x_2x_3$ через e_1, e_2, e_3 .

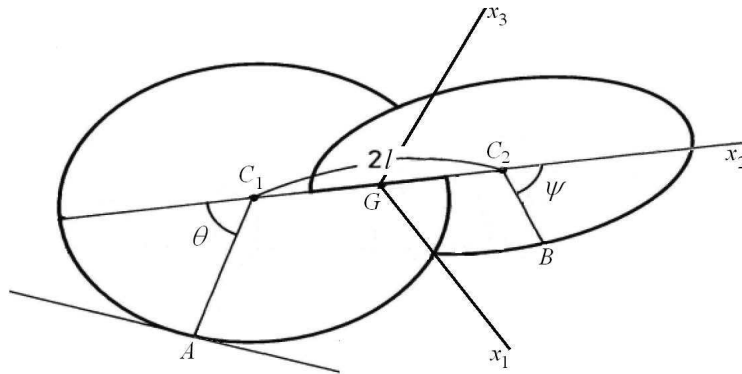


Рис. 3. Система координат $Gx_1x_2x_3$ и основные переменные задачи.

Пусть A и B – точки касания тела с горизонтальной плоскостью. Положение точки A будем определять углом θ между прямой GC_1 и прямой C_1A , направленной из центра масс C_1 первой пластинки в точку касания A (Рис. 3). Будем считать, что форма пластинки полностью определена, если задана зависимость расстояния C_1A от θ : $C_1A = r(\theta)$. Аналогично, положение точки B на второй пластинке будем определять углом ψ между прямой GC_2 и прямой C_2B , направленной из центра масс C_2 второй пластинки в точку касания B (Рис. 3). Форма второй пластинки определяется соотношением $C_2B = r(\psi)$.

Поскольку мы рассматриваем две совершенно одинаковые пластинки, будем считать, что их форма задается одной и той же функцией $r(\cdot)$, но зависящей от разных аргументов: $C_1A = r(\theta)$, $C_2B = r(\psi)$. Тогда радиус-вектор точки A относительно системы координат $Gx_1x_2x_3$ имеет вид:

$$\overrightarrow{GA} = \mathbf{r}_1 = r(\theta) \sin \theta \mathbf{e}_1 - (l + r(\theta) \cos \theta) \mathbf{e}_2,$$

а радиус-вектор точки B – вид

$$\overrightarrow{GB} = \mathbf{r}_2 = (l + r(\psi) \cos \psi) \mathbf{e}_2 - r(\psi) \sin \psi \mathbf{e}_3.$$

Рассматриваемая механическая система является системой с одной степенью свободы. Поэтому существует соотношение, связывающее между собой переменные θ и ψ . В явном виде это соотношение записывается следующим образом:

$$(r'_\psi(\psi) \sin \psi + r(\psi) \cos \psi) \Phi(\theta) + (r'_\theta(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta) \Phi(\psi) = 0, \quad (17)$$

$$\Phi(x) = r^2(x) + lr(x) \cos x + lr'_x(x) \sin x.$$

В дальнейшем будем считать, что из соотношения (17) определяется зависимость $\psi = \psi(\theta)$. В §3.2 диссертации находится общее выражение для потенциальной энергии тела, состоящего из двух симметричных пластинок и обсуждаются положения равновесия тела на плоскости. В явном виде выражение для потенциальной энергии записывается следующим образом:

$$V = \frac{Mg \Phi(\theta) \Phi(\psi)}{\sqrt{\left(r^2(\theta) + (r'_\theta(\theta))^2\right) \Phi^2(\psi) + \left(r'_\psi(\psi) \cos \psi - r(\psi) \sin \psi\right)^2 \Phi^2(\theta)}}.$$

Критические точки потенциальной энергии соответствуют положениям равновесия тела на плоскости. Они определяются уравнением:

$$\begin{aligned} & (r(\theta) r'_\theta(\theta) + lr'_\theta(\theta) \cos \theta - lr(\theta) \sin \theta) \Phi(\psi) r(\psi) \sin \psi + \\ & + \frac{\Phi(\theta) r(\theta) r(\psi) \sin \theta \sin \psi}{2} (r'_\psi(\psi) \sin \psi + r(\psi) \cos \psi) - \\ & - (r(\psi) r'_\psi(\psi) + lr'_\psi(\psi) \cos \psi - lr(\psi) \sin \psi) \Phi(\theta) r(\theta) \sin \theta - \\ & - \frac{\Phi(\psi) r(\theta) r(\psi) \sin \theta \sin \psi}{2} (r'_\theta(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Анализируя соотношение (18), можно сделать следующие выводы о положениях равновесия тела на плоскости.

Утверждение 1. При выполнении условия

$$\Phi(\theta)(r'_\theta(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta) = 0 \quad (19)$$

у твердого тела существует положение равновесия $\psi = \theta$.

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться, что условие (18) выполняется при $\theta = \psi$. Если подставить в соотношение (17) значение $\psi = \theta$, то в результате соотношение (17) будет иметь вид (19). Иными словами, положение равновесия $\psi = \theta$ существует только для тех значений θ , которые удовлетворяют условию (19). Утверждение доказано. $\square$

Утверждение 2. Положение равновесия $\theta = 0$ существует тогда и только тогда, когда точка $\theta = 0$ является точкой экстремума функции $r(\theta)$.

Доказательство. Подстановка значения $\theta = 0$ в соотношение (18) приводит его к виду

$$r'_\theta(\theta)|_{\theta=0}(l + r(0))(\Phi(\psi)r(\psi)\sin\psi)|_{\theta=0} = 0.$$

Выражение $\Phi(\psi)r(\psi)\sin\psi$ не может обращаться в ноль при $\theta = 0$. Поэтому для того, чтобы значение $\theta = 0$ соответствовало положению равновесия твердого тела на плоскости, должно выполняться $r'_\theta(\theta)|_{\theta=0} = 0$. Утверждение доказано. $\square$

В дальнейшем будем считать, что функция $r(\theta)$ имеет в точке $\theta = 0$ строгий минимум и является четной функцией. С учетом этих предположений можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 3. Если $r(\theta)$ – четная функция и θ удовлетворяет условию (19), то у твердого тела наряду с положением равновесия $\psi = \theta$ существует положение равновесия $\psi = -\theta$.

Доказательство. Если $r(\theta)$ является четной функцией, то $r'_\theta(\theta)$ – нечетная функция, а $r'_\theta(\theta)\sin\theta$ – четная функция. Следовательно, все функции, входящие в соотношение (17), являются четными функциями, и соотношение (17) не меняет своего вида при замене θ на $-\theta$. Условие (18) при замене θ на $-\theta$ также своего вида не изменяет. Утверждение доказано. $\square$

В §3.3 диссертации исследуется устойчивость найденных положений равновесия твердого тела, составленного из двух симметричных пластинок. Устойчивость положения равновесия определяется знаком второй производной потенциальной энергии V , вычисленной в соответствующем положении равновесия. Непосредственное вычисление второй производной потенциальной энергии V в положении равновесия $\psi = \theta$ приводит к следующему результату

Утверждение 4. Положение равновесия $\psi = \theta$ устойчиво при выполнении условия

$$2r(\theta) \sin \theta - \left(r^2(\theta) \sin^2 \theta + 2(l + r(\theta) \cos \theta)^2 \right) k > 0, \quad (20)$$

где k – кривизна ограничивающей пластинку кривой, вычисленная в соответствующем положении равновесия.

На основании условия (20) можно сделать вывод, что положение равновесия $\psi = \theta$ устойчиво при достаточно малых значениях l , т.е. тогда, когда центры масс пластинок, составляющих твердое тело, расположены достаточно близко друг к другу.

Получим теперь условие устойчивости положения равновесия $\theta = 0$. Заметим, что при $\theta = 0$ мы имеем $\psi = \psi_0$, и значение ψ_0 определяется из уравнения

$$r^2(\psi_0) + (r(0) + 2l) (r'_\psi(\psi_0) \sin \psi_0 + r(\psi_0) \cos \psi_0) = 0. \quad (21)$$

Из уравнения (21) можно выразить величину $r'_\psi(\psi_0)$ и воспользоваться ей при вычислении второй производной потенциальной энергии V в случае $\theta = 0$. В результате получим следующее утверждение.

Утверждение 5. Положение равновесия $\theta = 0$ устойчиво при выполнении условия

$$\begin{aligned} & 2l^2 + (r(0) + 3r(\psi_0) \cos \psi_0 - kr^2(\psi_0) \sin^2 \psi_0) l + \\ & + r(\psi_0) (r(0) \cos \psi_0 + r(\psi_0) - kr(0) r(\psi_0) \sin^2 \psi_0) > 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$k = \frac{r(0) - r''(0)}{r^2(0)}$$

кривизна ограничивающей пластинку кривой, вычисленная при $\theta = 0$.

Условие (22) имеет вид многочлена второй степени относительно l . Поскольку l^2 растет быстрее, чем l , то можно сделать вывод, что положение равновесия $\theta = 0$ будет устойчивым для достаточно больших значений l . Иными словами, положение равновесия $\theta = 0$ устойчиво, если центры масс пластинок, составляющих твердое тело, расположены достаточно далеко друг от друга.

В §3.4 диссертации общие выводы о существовании и устойчивости положений равновесия твердого тела, состоящего из двух симметричных пластинок, проиллюстрированы на примере тела, состоящего из двух одинаковых эллиптических пластинок. В случае, когда функция $r(\theta)$, определяющая границу каждой из пластинок, составляющих твердое тело, задана явно, удастся

построить траектории точек контакта тела с опорной плоскостью. Анализ этого вопроса посвящен §3.5 диссертации. В §3.6 диссертации исследуется задача о движении тела, составленного из двух круглых дисков.

Рассмотрим два одинаковых круглых диска радиуса R . На каждом из двух дисков отметим один из диаметров, а затем соединим эти диски перпендикулярно друг другу так, чтобы отмеченные диаметры образовывали единую ось симметрии (Рис. 3). Пусть расстояние между центрами дисков равно $2l$, $l < R$. Полученное таким образом твердое тело всегда будет иметь две точки касания с горизонтальной плоскостью. Как и прежде, введем систему координат $Gx_1x_2x_3$, жестко связанную с движущимся телом. Снова обозначим через A и B точки касания тела с горизонтальной плоскостью. Тогда радиус-вектор точки A имеет вид:

$$\overrightarrow{GA} = \mathbf{r}_1 = R \sin \theta \mathbf{e}_1 - (l + R \cos \theta) \mathbf{e}_2,$$

а радиус-вектор точки B может быть записан следующим образом:

$$\overrightarrow{GB} = \mathbf{r}_2 = (l + R \cos \psi) \mathbf{e}_2 - R \sin \psi \mathbf{e}_3.$$

Соотношение (17), связывающее переменные θ и ψ , в данном случае имеет вид

$$\cos \psi = -\frac{R \cos \theta}{R + 2l \cos \theta}. \quad (23)$$

Если ввести безразмерный параметр $p = \frac{l}{R}$, то соотношение (23) можно переписать в виде:

$$\cos \psi = -\frac{\cos \theta}{1 + 2p \cos \theta}. \quad (24)$$

Поскольку мы считаем, что $l < R$, то по физическому смыслу задачи параметр p должен изменяться в пределах $p \in (0, 1)$.

Используя равенство (24), можно выразить радиус-вектор точки B через переменную θ :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GB} = & \frac{R(p + (2p^2 - 1) \cos \theta)}{1 + 2p \cos \theta} \mathbf{e}_2 - \\ & - \frac{R \sqrt{(1 + (2p - 1) \cos \theta)(1 + (2p + 1) \cos \theta)}}{1 + 2p \cos \theta} \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (25)$$

Можно показать, что выражение (25) имеет смысл, только если $\cos \theta$ изменяется в пределах

$$\cos \theta \in \left[-\frac{1}{2p + 1}, 1 \right],$$

то есть будем накладывать следующие ограничения на введенные переменные θ и ψ :

$$\begin{aligned} -\arccos\left(-\frac{1}{2p+1}\right) &\leq \theta \leq \arccos\left(-\frac{1}{2p+1}\right), \\ -\arccos\left(-\frac{1}{2p+1}\right) &\leq \psi \leq \arccos\left(-\frac{1}{2p+1}\right). \end{aligned}$$

Легко видеть, что в силу специфической конструкции тела эти предположения выполняются. Потенциальная энергия твердого тела, состоящего из двух дисков, имеет вид:

$$V = MgR \frac{(1 + p \cos \theta)}{\sqrt{\sin^2 \theta + (1 + 2p \cos \theta)^2}}.$$

Критические точки потенциальной энергии соответствуют положениям равновесия рассматриваемой системы. Производная функции V имеет вид:

$$V' = MgR \frac{(2p^2 - 1) \sin \theta \cos \theta}{(\sin^2 \theta + (1 + 2p \cos \theta)^2)^{3/2}}.$$

Следовательно, система имеет два положения равновесия: $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$. Знак второй производной функции V , вычисленной в положении равновесия, определяет характер устойчивости данного равновесия. Для значения $\theta = 0$ имеем:

$$V'' \Big|_{\theta=0} = \frac{MgR (2p^2 - 1)}{(1 + 2p)^3}.$$

Следовательно, положение равновесия $\theta = 0$ устойчиво, если $2p^2 - 1 > 0$ и неустойчиво при $2p^2 - 1 < 0$. Аналогично, для положения равновесия $\theta = \frac{\pi}{2}$ получаем:

$$V'' \Big|_{\theta=\pi/2} = -\frac{MgR}{2\sqrt{2}} (2p^2 - 1),$$

откуда следует, что положение $\theta = \frac{\pi}{2}$ устойчиво, если $2p^2 - 1 < 0$ и неустойчиво, если $2p^2 - 1 > 0$.

Случай $2p^2 - 1 = 0$, т.е. $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ соответствует безразличному положению равновесия. Центр масс тела в этом случае будет все время находиться на постоянной высоте.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1. С помощью алгоритма Ковачича проведено исследование линейного дифференциального уравнения второго порядка, к интегрированию которого сводится решение задачи о движении тяжелого динамически симметричного эллипсоида вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Для почти всех значений параметров задачи доказано отсутствие лиувиллевых решений у соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка.
2. Получен ряд соотношений на параметры системы, при выполнении которых указанное выше линейное дифференциальное уравнение второго порядка имеет лиувиллевы решения, и выписан явный вид этих решений.
3. Рассмотрена задача о движении по неподвижной горизонтальной плоскости твердого тела, состоящего из двух соединенных между собой одинаковых симметричных пластинок. Найдены все возможные положения равновесия тела на плоскости и получены условия их устойчивости. Рассмотрены частные случаи, когда движущееся тело состоит из двух одинаковых эллиптических пластинок и двух одинаковых круговых пластинок. В указанных частных случаях построены траектории точек касания тела с опорной плоскостью. Отмечены случаи, когда эти траектории можно построить лишь численно, а когда удастся указать их уравнения в явном виде.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Кулешов А.С., Ицкович М.О.* О движении по горизонтальной плоскости тела, состоящего из двух эллиптических пластинок // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика, механика, астрономия. 2012. Вып. 3. С. 87–92.
2. *Ицкович М.О., Кулешов А.С.* О движении по горизонтальной плоскости тела, состоящего из двух симметричных пластинок // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2015. № 2. С. 36–41.
3. *Кулешов А.С., Ицкович М.О.* Несуществование лиувиллевых решений в задаче о движении эллипсоида вращения по абсолютно шероховатой плоскости // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 62. № 3. С. 291–299.
4. *Ицкович М.О., Кулешов А.С.* О движении твердого тела, состоящего из двух дисков, по горизонтальной плоскости // Современные проблемы математики и механики. К 190-летию П.Л. Чебышева: Сб. статей / Под

ред. А.Н. Ширяева, А.В. Лебедева, В.М. Федорова, А.С. Кулешова. М.: Изд-во МГУ. 2011. С. 140–150.

5. *Ицкович М.О., Кулешов А.С.* О движении тела, составленного из двух дисков, по горизонтальной плоскости // Аналитическая механика, устойчивость и управление. Труды X Международной Четаевской конференции. Казань: Изд-во Казанского государственного технического университета. 2012. Том 1. С. 230–239.
6. *Ицкович М.О., Кулешов А.С.* Лиувиллевы решения в задаче о качении эллипсоида вращения по абсолютно шероховатой плоскости // Аналитическая механика, устойчивость и управление. Труды XI Международной Четаевской конференции. Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ. 2017. Том 1. С. 214–224.
7. *Itskovich M.O., Kuleshov A.S.* Motion of the rigid body consisting of two disks // Proceedings of the XL Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics"(APM-2012). St. Petersburg: Polytechnic University Publishing House. 2012. P. 163–169.
8. *Itskovich M.O., Kuleshov A.S.* Motion of a Rigid Body Consisting of Two Symmetric Laminae on a Horizontal Plane // Proceedings of the XLI Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics"(APM-2013). St. Petersburg: Polytechnic University Publishing House. 2013. P. 298–303.
9. *Itskovich M.O., Kuleshov A.S.* Horizontal motion of a body consisting of two symmetric plates // Moscow University Mechanics Bulletin. 2015. Vol. 70. No 2. P. 28–33.
10. *Kuleshov A.S., Itskovich M.O.* Nonexistence of Liouvillian Solutions in the Problem of Motion of a Rotationally Symmetric Ellipsoid on a Perfectly Rough Plane // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics. Vol. 50. No 2. P. 173–179.