Центры тяжести и геометрия

Гашков С. Б.

1 Центры тяжести плоских фигур и планиметрия

Методы вычисления центров тяжести, или, что тоже самое, центров масс (далее для разнообразия используются оба термина), составляют один из важнейших разделов статики, и являются самым древним разделом механики (да и физики вообще). Их основы были заложены знаменитым Архимедом. Его подход к этим задачам был в значительной мере геометрическим, и с тех пор методы нахождения центров масс простых плоских фигур составляют своеобразный раздел геометрии[1]. Как и саму геометрию, их можно излагать аксиоматически.

1.1 Центр масс конечной системы материальных точек

Например, в качестве аксиом можно взять следующие, кажущиеся достаточно очевидными, утверждения.

Ax 0. У любой конечной системы точек центр масс существует и определен однозначно.

Ax 1. Центр масс точки совпадает с ней.

Ax 2. Центр масс двух точек с массами m_i делит отрезок, их соединяющий, в отношении $m_1 : m_2$, и расположен ближе к большей массе (если они равны, то он находится посередине).

Ax 3. Если множество точек M разбито на два непересекающихся подмножества M_i с суммарными массами m_i и центрами масс A_i, $i = 1, 2$, то центр масс множества M совпадает с центром масс системы из двух точек A_i с массами m_i.

[1] Далее мы в значительной степени следуем прекрасному учебнику теоретической механики профессора Московского университета Н. Е. Жуковского [1], написанному в истинно геометрическом стиле. Многие (но не все) излагаемые далее факты взяты из этой книги (но доказательства часто даются другие).

Этих аксиом достаточно, чтобы вычислить центр масс любого конечного множества точек A_i с массами m_i, $i = 1, \ldots, n$. Для этого можно заменить с помощью аксиомы 3 точки A_1, A_2 на одну точку $A_{1,2}$ с массой $m_1 + m_2$, определив положение точки $A_{1,2}$ с помощью аксиомы 2. Если $n > 2$, то к полученному $(n-1)$-точечному множеству $\{A_{1,2}, A_3, \ldots, A_n\}$ повторяем тот же прием, пока не получим одну точку $A_{1,2,\ldots,n}$ с массой $m_1 + \ldots + m_n$, которая согласно аксиоме 1 является центром масс системы точек A_i, $i = 1, \ldots, n$.

Указанный прием можно, конечно, применять к данному множеству точек различными способами, например, на первом шаге можно вместо точек A_1, A_2, взять любую пару различных точек A_i, A_j, но согласно аксиоме 1 результат от порядка выбора точек не зависит.

Независимость результата от выбранного порядка выполнения указанных операций выглядит не столь уж и очевидной. Например, при нахождении тремя возможными способами центра тяжести системы из трех точек равных массы, получается «бесплатно» известная всем школьникам теорема о пересечении медиан в треугольнике. Действительно, центр масс лежит на каждой из медиан, значит и на их пересечении, поэтому они пересекаются, а пересекаться они могут только в одной точке.

Используя понятие центра масс, можно легко доказать многие геометрические теоремы. Например, поместив в вершины треугольника массы, равные 2, и заменяя каждую из них на две единичные массы, сосредоточенные в той же вершине, заметим, что центр масс полученной системы из шести точек по-прежнему находится в точке пересечения медиан. Заменяя каждую пару точек, лежащих в разных вершинах, на точку с массой 2, лежащей в середине стороны, соединяющей эти вершины, получим три точки, лежащие в вершинах срединного треугольника, образованного средними линиями исходного треугольника . Согласно аксиоме 2 точка пересечения медиан срединного треугольника совпадает с точкой пересечения медиан исходного треугольника (можно, конечно, еще доказать, что эти два треугольника гомотетичны с коэффициентом два относительно их общей точки пересечения медиан).

2 Центры тяжести и векторная алгебра

Если выбрать на плоскости произвольную точку O и провести из нее радиус-векторы v_i в точки A_i, то радиус-вектор $v = OA$, где A— найденный выше центр масс системы точек A_i с массами m_i, вычисляется следующим образом

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n,\ \alpha_i = \frac{m_i}{m},\ m = m_1 + \ldots + m_n.$$

Из этой формулы видно, что в случае равных масс их центр тяжести не зависит от величины массы. Далее его для краткости будем называть *центроидом*[2].

Приведенную выше формулу легко доказать, если воспользоваться свойствами векторов. Сначала докажем ее для $n = 2$ (т.е. выведем аксиому 2 из известных свойств векторов).

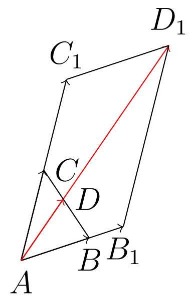

Рис. 1: Вычисление центра тяжести двух точечных масс и сложение векторов

На рис. 1 изображены вектора $v_1 = \overrightarrow{AB}, v_2 = \overrightarrow{AC}, m_1 v_1 = \overrightarrow{AB_1}, m_2 v_2 = \overrightarrow{AB_2}$, где $m_1 = |AB_1|/|AB|$, $m_2 = |AC_1|/|AC|$ согласно определению умножения вектора на число, и $m_1 v_1 + m_2 v_2 = \overrightarrow{AD_1}$, где ABD_1C — параллелограмм согласно правилу сложения векторов. Согласно Ax 2 центр тяжести двух масс m_1 и m_2, расположенных в точках B, C находится в точке D отрезка BC, такой, что $CD : DB = m_1 : m_2$, откуда имеем $CD : CB = m_1 : (m_1 + m_2)$, значит вектор $\overrightarrow{CD}$ равен

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{CB} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}),$$

поэтому вектор

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{AB} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{AC} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2}{m_1 +}$$

что и доказывает формулу при $n = 2$.

[2]Например, центроидом треугольника является точка пересечения его медиан.

Для доказательства формулы

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n,\ \alpha_i = \frac{m_i}{m},\ m = m_1 + \ldots + m_n$$

в общем случае применим индукцию. Базис ($n = 2$) уже доказан. Его можно применить и для выполнения шага индукции. Покажем, что независимо от порядка выполнения указанных выше операций, получится данная выше формула для центра масс. Без ограничения общности можно считать, что точки A_1 и A_2 заменяются вначале точкой A_{12} массы $M_1 = m_1 + m_2$, расположенной в их центре тяжести. Согласно базису индукции, этот центр тяжести находится в конце радиус вектора $V_1 = \frac{m_1}{M_1}v_1 + \frac{m_2}{M_1}v_2$. Для нахождения центра масс системы точек $\{A_1, \ldots, A_n\}$ согласно аксиоме 2 нужно найти центр масс системы точек $\{A_{12}, A_3, \ldots, A_n\}$. Согласно предположению индукции он находится в конце радиус-вектора

$$\frac{1}{m}(V_1 M_1 + v_3 m_3 + \ldots + v_n m_n).$$

Но $\frac{1}{m}V_1 M_1 = \frac{1}{m}(m_1 v_1 + m_2 v_2)$, значит

$$\frac{1}{m}(V_1 M_1 + v_3 m_3 + \ldots + v_n m_n) = \frac{1}{m}(m_1 v_1 + \ldots + m_n v_n).$$

С помощью доказанной формулы центр масс любой конечной системы точек можно вычислить чисто алгебраически. Более того, указанную формулу можно взять в качестве определения центра масс, тогда указанные выше аксиомы превратятся в теоремы элементарной геометрии. Точнее, если выбрать на плоскости произвольную точку O и провести из нее радиус-векторы v_i в точки A_i, то центр масс данной системы точек с массами m_i определяется радиус-вектор $v = OA$, где

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n,\ \alpha_i = \frac{m_i}{m},\ m = m_1 + \ldots + m_n,$$

точка A при этом не зависит от выбора точки O (начала координат). Другое определение центра масс данной системы точек таково: это такая точка A, для которой радиус-вектора V_i, направленные из A в A_i удовлетворяют равенству

$$m_1 v_1 + \ldots + m_n v_n = 0.$$

Но и здесь надо доказывать существование и единственность такой точки.

Доказательства Ax 0 —Ax 3 удобно проводить пользуясь не обычной евклидовой аксиоматикой геометрии, а векторной аксиоматикой, в которой все понятия геометрии формулируются на языке векторов и операций над ними.

Задача 1. *Докажите равносильность обоих определений*

Указание: использовать векторную алгебру.

Применяя второе из приведенных выше определений центра масс, легко доказать Ах 2 проще, чем сделано выше.

Но верно и обратное, из указанных аксиом для понятия центра масс можно вывести все теоремы геометрии, в которых не используется метрические понятия : расстояние между точками и величина угла между прямыми.

Например, сочетательный закон сложения трех векторов можно вывести из теоремы о точке пересечения медиан в треугольнике, которая вытекает из теоремы о центре тяжести трех точек с равными массами. На языке центров тяжести можно определить понятие отрезка между двумя точками: это просто множество всех позиций, которые может занимать центр тяжести системы из этих двух точек при всех возможных значениях масс этих точек. Если n точек лежат на одной прямой, то множество всех позиций,которые может занимать центр тяжести системы из этих точек при всех возможных значениях масс также образует отрезок (верно, конечно, и обратное утверждение). Если массы этих точек равны, а сами точки распределены на этом отрезке равномерно, т.е. расстояния между соседними точками равны, то центр тяжести лежит точно в середине этого отрезка. Если не все из n точек лежат на одной прямой, то множество всевозможных положений центра масс этой системы точек образует выпуклый m-угольник, который совпадает с выпуклой оболочкой данной системы точек. В частности, если данные n точек лежат в вершинах выпуклого n-угольника, то его выпуклая оболочка с ним совпадает. При $n = 3$ получается определение треугольника на языке центров масс.

2.1 Барицентрические координаты

Произвольную точку внутри треугольника можно рассматривать как центр подходяще подобранных масс m_i, $i = 1, 2, 3$, помещенных в его вершины. Набор чисел $(m_1 : m_2 : m_3)$ очевидно однозначно определяет соответствующий центр масс (согласно доказанной выше формуле на векторном языке он задается радиус-вектором $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$, где $\alpha_i = m_i/m$, $m = m_1 + m_2 + m_3$, v_i — радиус-вектора вершин треугольника). Этот набор называется *барицентрическими координатами* точки. Они, очевидно, определены не однозначно, а с точностью до умножения на произвольную константу[3] Это свойство барицентрических координат

[3]При умножении масс на одно и то же число положение центра масс не меняется.

называется *однородностью*[4] и во многих случаях оно оказывается очень удобным. Для того, чтобы определить координаты точек на границе треугольника, удобно ввести понятие нулевой массы. Тогда, например, координатами вершин треугольника будут $(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)$, а координаты точки, делящей сторону, соединяющую 1-ю вершину со 2-й в отношении $a:b$ (считая от 1-й вершины) будут $(b:a:0)$.

Задача 2. *Докажите, что барицентрические координаты точки пересечения медиан будут* $(1:1:1)$.

Барицентрические координаты можно сделать однозначно определенными, если наложить на них дополнительное условие $m_1 + m_2 + m_3 = 1$. Такие координаты иногда называют *ареальными*[5] Причина названия проста: если треугольник имеет площадь единица и точка внутри него имеет ареальные координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, то площади трех треугольников, на которые он разбивается этой точкой в точности равны $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (α_i — площадь треугольника, противоположного вершине с массой m_i, а сумма всех α_i единице).

Задача 3. *Докажите это свойство ареальных координат.*

Барицентрические (и ареальные) координаты можно приписать (если хочется) и любой точке плоскости вне треугольника, если для их определения использовать отрицательные массы[6]

О барицентрических координатах (открытых немецким математиком А.Ф.Мёбиусом) можно написать целую книгу (сам Мёбиус и написал). Значительная часть книги [2] им посвящена. В ней описаны, в частности, применения этих координат в химии и металлургии (для описания смесей, сплавов и растворов), колориметрии (для задания произвольного цвета используют так называемые RGB-координаты), популяционной генетике (интерпретация закона Харди-Вейнберга) и, естественно, в математике (подразделения полиэдров в топологии, интерполяция функций многих переменных).

---

[4]Именно из-за него в определении барицентрических координат вместо запятых стоят двоеточия.

[5]От слова area — площадь.

[6]С физической точки зрения отрицательные массы бессмысленны, но здесь они используется чисто формально.

3 Центроид четырехугольника и параллелограмм Вариньона

Для того, чтобы найти центр тяжести четырех равных масс, можно применить следующий прием. Разбиваем эти массы произвольным образом на две пары, заменяем каждую пару точкой удвоенной массы, расположенной точно посередине между точками этой пары, тогда задача сведется к нахождению центра масс системы из двух построенных точек. Так как их массы равны, искомый центр находится ровно посередине между построенными серединами. Указанное построение работает всегда, в том числе и когда одна или несколько точек совпадают. В этом случае задачу можно рассматривать как нахождение центра тяжести трех или двух точек уже с не обязательно равными массами. В этом случае задачу можно также решить указанным выше способом.

Если все четыре точки различным, то их вершины образуют четырехугольник, четыре из шести пар вершин образуют его стороны , а две — диагонали[7]. Отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон иногда называют *бимедианами*. К двум бимедианам можно добавить отрезок, соединяющий центры диагоналей. Тогда из приведенного выше рассуждения вытекает, что все три указанных отрезка (две бимедианы и отрезок, соединяющий середины диагоналей) пересекаются в одной точке — центре тяжести равных масс, расположенных в вершинах четырехугольника, и эта точка служит их общим центром. Четырехугольник, образованный серединами сторон данного четырехугольника, имеет указанные бимедианы в качестве диагоналей. Отсюда следует, что этот срединный четырехугольник является параллелограммом (см. рис 2). Он называется *параллелограммом Вариньона* в честь французского математика и механика 17-го века. Из сказанного выше следует, что отрезок, соединяющий середины диагоналей, в своей середине совпадает с центром параллелограмма Вариньона.

Задача 4. *Докажите, что стороны параллелограмма Вариньона параллельны диагоналям данного четырехугольника и равны их половинам.*

Указание: применить теорему о средней линии треугольника.

Задача 5. *Докажите, что площадь четырехугольника вдвое больше площади его параллелограмма Вариньона.*

[7]Формально говоря, таких четырехугольников будет несколько, но мы выберем из них несамопересекающийся, он определен однозначно, но не обязан быть выпуклым, и может вырождаться в треугольник в том смысле, что две соседние стороны могут лежать на одной прямой.

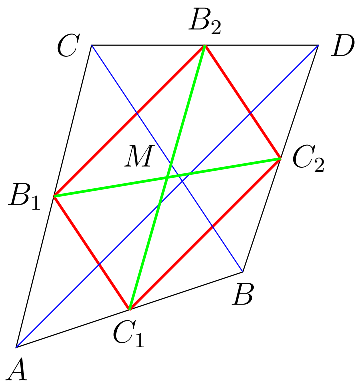

Рис. 2: Параллелограмм Вариньона и центр четырех равных масс

Указание: треугольники, отсекаемые от четырехугольника его параллелограммом Вариньона, подобны с коэффициентом 2 треугольникам, отсекаемым от него диагоналями. В случае невыпуклого четырехугольника использовать не только сложение, но и вычитание площадей.

Задача 6. *Докажите, что центр тяжести вершин четырехугольника (центр его параллелограмма Вариньона) совпадает с точкой пересечения диагоналей тогда и только тогда, когда данный четырехугольник — параллелограмм.*

Указание: центр параллелограмма Вариньона совпадает с серединой отрезка, соединяющего центры диагоналей. Если диагонали в точке пересечения не делятся обе пополам, то указанная середина не совпадает с точкой пересечения диагоналей, а если обе делятся пополам, то указанная середина вырождается в их точку пересечения. Четырехугольник, у которого обе диагонали делятся точкой пересечения пополам, является параллелограммом.

4 Как найти центры тяжести треугольника и многоугольников

Возвращаясь к понятию центра масс, рассмотрим вопрос, как находить центры масс бесконечных систем точек. Например, как найти центр масс отрезка данной массы m? Если разбить его n точками на равные отрезки и в каждую поместить массу m/n, то центр масс такой системы находится в центре отрезка независимо от n. Естественно предположить, что центр отрезка с равномерно распределенной по нему массой m также находится в его центре. Мы примем этот факт за аксиому. В отличие от аксиом, касающихся конечных систем точек, доказать это утверждение в рамках элементарной геометрии затруднительно, хотя бы потому, что не ясно, как точно определить понятие равномерно распределенной массы. Попытка дать такое определение приводит к парадоксам, связанным с тем, что неясно, как в этом случае определить массу произвольной точки отрезка: если она всегда больше нуля, то отрезок должен иметь бесконечную массу, а если она всегда равна нулю, то и масса отрезка нуль. Выход из этих парадоксов дает теория пределов в рамках дифференциального и интегрального исчисления. В интегральном исчислении дается определение центра тяжести достаточно произвольных фигур и тел с достаточно произвольным, а не только равномерным, распределением масс в них, и это определение имеет вид интеграла. Далее мы будем рассматривать только простейшие фигуры и тела, например многоугольники, и только равномерное распределение масс.

Для того, чтобы найти центр тяжести треугольника можно его представить состоящим из попарно непересекающихся отрезков, параллельных одной из сторон. Заменяя каждый из этих отрезков на точку с той же массой (можно считать, например, что масса отрезка равна его длине), сводим задачу к нахождению центра масс системы точек, лежащих на отрезке (используем при этом соответствующее обобщение аксиомы 2). Как отмечалось выше, этот центр масс лежит на этом отрезке — медиане треугольника [8]. Найти его сразу затруднительно, но это и не нужно — ведь такое же рассуждение показывает, что он лежит и на двух других медианах тоже, а значит совпадает с их точкой пересечения[9].

Аналогично доказывается, что центр масс трапеции с равномерно распределенной массой лежит на отрезке, соединяющем середины параллельных сторон трапеции. Как его найти точно, укажем чуть позднее.

После того как найден центр тяжести треугольника, можно найти центр тяжести и произвольного (не обязательно выпуклого) многоугольника. Для этого его достаточно произвольным образом разрезать на треугольники. Проще всего это сделать только проводя диагонали в многоугольнике, не допуская их самопересечений в точках, отличных от его вершин, до тех пор, пока это возможно. В результате получится разбие-

[8]Строго говоря, выше это утверждалось для конечных систем точек, а здесь система бесконечная, да и массы разные, т.е. фактически получилась задача о нахождении центра тяжести отрезка с неравномерным распределением масс (плотность распределения однако очень простая — задается линейной функцией от координаты точки.)

[9]Интересно, что такое рассуждение, восходящее к Архимеду, не требует никаких вычислений.

ние $n-$угольника на $n-2$ треугольника.

Возьмем любую триангуляцию многоугольника, заменим каждый треугольник на точкой, расположенной в точке пересечения его медиан, с массой, равной его площади, и потом найдем центр тяжести построенных масс указанным выше способом (с помощью векторной формулы). Согласно принятым выше аксиомам полученная точка и будет центром масс данного многоугольника. Применяя различные триангуляции, мы всегда получим один и тот же результат.

Для того чтобы найти центр масс произвольной, но достаточно «хорошей» плоской фигуры с равномерной распределенной массой достаточно вписать в эту фигуру $n-$угольник, найти его центр масс и выполнить переход к пределу при n, стремящемся к бесконечности. Под хорошей фигурой здесь понимается любая фигура, для которой упомянутый предельный переход можно строго обосновать. Мы не будем углубляться в эти вопросы, скажем только, что хорошими фигурами заведомо являются все фигуры, изучаемые в элементарной геометрии, т.е. фигуры, ограниченные отрезками прямых и/или дугами окружностей, а придумать «нехорошую» фигуру на самом деле трудная задача. Указанный метод вычисления центров масс придумал Архимед. Он умел применять его даже для не совсем элементарных фигур, например для сегментов параболы. Читатель, знакомый с теорией пределов, может самостоятельно попробовать повторить результаты Архимеда, например найти центр тяжести сектора круга с данным углом или соответствующего сегмента.

Для упрощения нахождения центров масс произвольных фигур полезно использовать два свойства, которые можно принять за аксиомы.

Ax 4. Если система материальных точек имеет ось симметрии (т.е. прямую, при зеркальном отражении от которой система точек переходит в сама в себя), то ее центр масс лежит на этой оси.

Ax 5. Если система материальных точек имеет центр вращения (т.е. точку, при повороте вокруг которой на угол, меньший 360 градусов, система переходит в себя), то ее центр масс совпадает с центром вращения. В частности, если система точек имеет центр симметрии, то центр масс с ним совпадает.

Эти свойства в случае конечной системы точек легко вытекают из аксиомы Ax 0, и доказанной выше векторной формулы для центра масс. Действительно, при зеркальном отражении или повороте система переходит в себя и поэтому ее центр масс остается на месте. Если же предположить, что утверждения Ax 4,5 не верны и воспользоваться упомянутой формулой (и теоремами элементарной геометрии), то центр масс при указанном движении перемещается в другую точку, что невозможно.

Однако для бесконечных систем точек все не так просто, хотя бы потому, что такая система может вообще не иметь центра масс (как, например, прямая, потому что она бесконечна в обе стороны или луч, потому, что он бесконечен в одну сторону), поэтому указанные свойства мы принимаем за аксиомы, и в их формулировку добавляем предположение о существовании у рассматриваемой системы точек центра масс.

Из указанных аксиом вытекает, например, что круг с равномерной распределенной массой имеет центр масс, совпадающий с центром круга, и то же самое верно для окружности с равномерной распределенной массой.

Аналогичные утверждения верны и для правильного многоугольника с равномерной распределенной массой и для правильного многоугольника с массой, равномерно распределенной по его периметру.

5 Центр тяжести периметра треугольника

К вопросу о быстром нахождении центра масс многоугольника мы далее вернемся, а сейчас рассмотрим, следуя [1], задачу о нахождении центра масс периметра произвольного треугольника (т.е. объединения трех его сторон). Этот вопрос представляет интерес, например, потому, что центр тяжести всего треугольника совпадает с центром тяжести только трех его вершин, в которых сосредоточена вся его масса, причем в каждой поровну, т.е. с точкой пересечения медиан. А что будет, если масса равномерно распределена по всему периметру? Оказывается, центр масс в этом случае совпадает с другой замечательной точкой треугольника — центром окружности, вписанной в срединный треугольник (см. рис. 3)

Действительно, заменим каждую сторону треугольник ее центром, предполагая, что вся масса стороны сосредоточена в ее середине. Согласно аксиоме 3, задача сводится к нахождению центра тяжести трех вершин треугольника, масса каждой из которых равна длине противоположной стороны. [10]

Для нахождения указанного центра тяжести применим описанный выше метод вычисления центра масс системы из трех точек. Согласно аксиоме 2 центр тяжести системы из точек A_1, B_1 с массами, пропорциональными $|B_1C_1|$ и $|A_1C_1|$ соответственно расположен в точке C_2, делящей сторону A_1B_1 пропорционально сторонам A_1C_1, B_1C_1. Но тогда

[10] Здесь безразлично, что понимается под длинами противоположных сторон — то ли речь идет о сторонах треугольника $\triangle ABC$, то ли о сторонах треугольника $\triangle A_1B_1C_1$, образованного центрами сторон $\triangle ABC$, так как $\triangle A_1B_1C_1$ является срединным треугольником для $\triangle ABC$, и согласно его известному свойству длины его сторон в два раза меньше длин соответствующих сторон $\triangle ABC$.

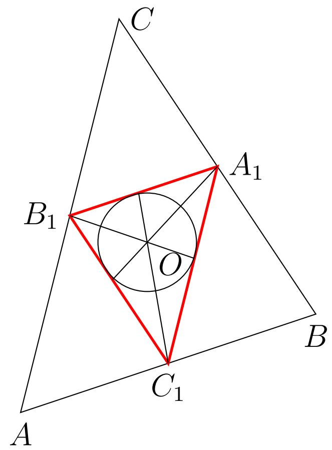

Рис. 3: Центр тяжести периметра треугольника

отрезок C_1C_2 совпадает с биссектрисой угла C_1 треугольника $\triangle A_1B_1C_1$ в силу известного из школьной геометрии свойства биссектрисы. Согласно аксиомам 2,3 искомый центр тяжести точек A_1, B_1, C_1 с массами $|B_1C_1|$, $|A_1C_1|$, $|A_1B_1|$ лежит на биссектрисе C_1C_2 треугольника $\triangle A_1B_1C_1$. Аналогичное рассуждение показывает, что он лежит и на остальных двух биссектрисах, а значит совпадает с их точкой пересечения, т.е. с центром вписанного в срединный треугольник $\triangle A_1B_1C_1$ круга.

Для нахождения центра масс периметра произвольного многоугольника, или вообще произвольной конечной системы отрезков, можно, разумеется, аналогичным образом свести задачу к нахождению центра масс конечной системы точек, однако такого красивого ответа, как для треугольника, по-видимому не получится (за исключением случаев, когда рассмотренная система обладает тем или иным свойством симметрии).

Задача 7. *Докажите, что центроид треугольника совпадает с центром масс его периметра тогда и только тогда, когда он правильный.*

Указание. Так как для любого треугольника центр масс совпадает с центром масс его срединного треугольника, а центра масс периметра данного треугольника совпадает с центром круга, вписанного в срединный треугольник, а последний подобен данному треугольнику, достаточно доказать, что центр вписанного круга совпадает с центроидом треугольника тогда и только тогда, когда он правильный. Указанное совпадение возможно только в случае, когда биссектрисы являются медианами. Но биссектриса совпадает с медианой только у равнобедренного треугольника.

6 Центр масс четырехугольника и параллелограмм Виттенбауэра

Указанный выше прием для нахождения центра масс многоугольника можно, конечно, применить и для четырехугольника, но есть более быстрый способ. После того, как нашли центры масс двух треугольников, на которые четырехугольник разбивается диагональю, можно, не вычисляя его с помощью аксиомы 2 (для чего нужно будут вычислить площади треугольников), заметить, что искомый центр тяжести лежит на отрезке, соединяющем центры этих треугольников (см. рис. 4).

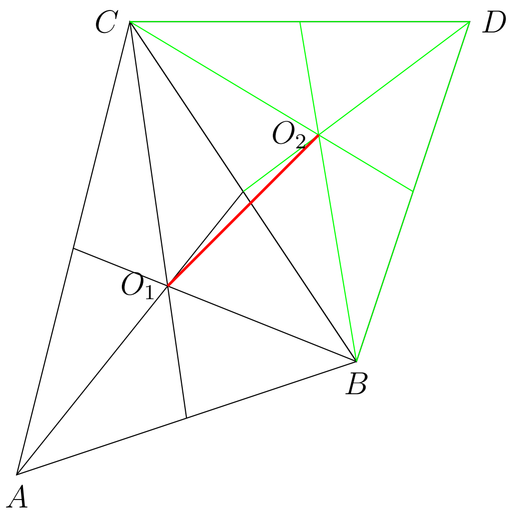

Рис. 4: Разбиение четырехугольника на два треугольника и их центры тяжести

Проведя другую диагональ, и повторяя эти рассуждения для двух треугольников, отсекаемых этой диагональю, получим второй отрезок, на котором тоже лежит искомый центр. Значит, он лежит на пересечении полученных отрезков (см. рис. 5).

Но есть и другой способ найти центр тяжести четырехугольника. Согласно книге известного немецкого геометра В. Бляшке [11] (эта ссылка дана в [3]). это можно сделать, найдя центр *параллелограмма Виттенбауэра* [12] (см. рис. 6).

[11] Projective Geometry, Basel 1954.
[12] F.Wittenbauer (1857-1922).

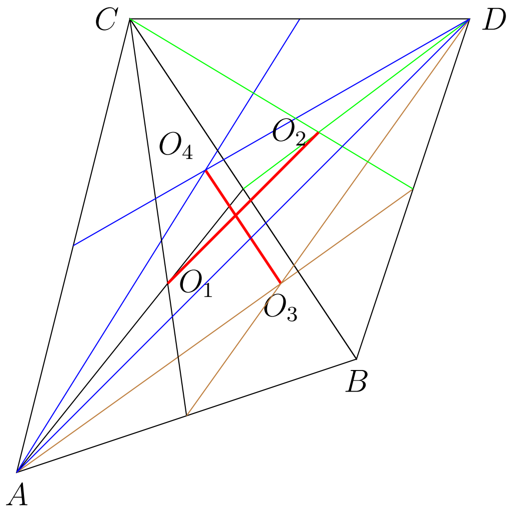

Рис. 5: Построение центра тяжести четырехугольника

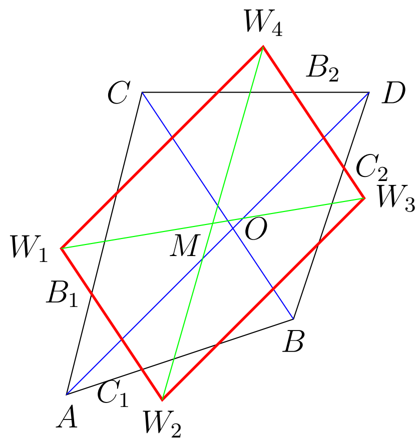

Рис. 6: Параллелограмм Виттенбауэра

Он определяется следующим образом: стороны четырехугольника разбиваются каждая парой точек на три равных отрезка, через каждую пару соседних точек деления, расположенных на смежных сторонах, проводятся прямые. Они и ограничивают параллелограмм (см. рис. 6).

Задача 8. *Докажите, что параллелограмм Виттенбауэра действительно параллелограмм.*

Указание: его стороны параллельны соответствующим диагоналям данного четырехугольника.

Задача 9. *Докажите для любого четырехугольника, что стороны его параллелограмм Виттенбауэра составляют по длине две трети от параллельных им диагоналей этого четырехугольника.*

Указание: треугольники, отсекаемые от четырехугольника его параллелограммом Виттенбауэра, подобны с коэффициентом 3 треугольникам, отсекаемым от него диагоналями.

Задача 10. *Докажите для любого четырехугольника, что его параллелограмм Виттенбауэра подобен параллелограмму Вариньона с коэффициентом подобия 4/3 и найдите отношение его площади к площади этого четырехугольника.*

Задача 11. *Для любого четырехугольника центр соответствующего параллелограмма Виттенбауэра совпадает центром тяжести этого четырехугольника (с точкой пересечения отрезков, соединяющих центры пар треугольников, на которые данный четырехугольник разбивается диагоналями).*

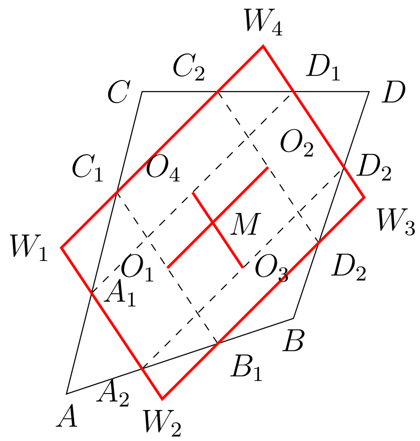

Рис. 7: Центр тяжести параллелограмма Виттенбауэра совпадает с центром тяжести четырехугольника

Указание. В таких случаях древние индусы писали: смотри (рис. 7). Действительно, точка O_1 является центром $\triangle ACB$, поэтому она делит пополам отрезок C_1B_1, где C_1C — треть стороны AC, а B_1B — треть стороны AB. Отрезок C_1B_1 параллелен CB и стороне W_1W_2 параллелограмма Виттенбауэра, значит $W_1C_1B_1W_2$ — параллелограмм и поэтому

$|C_1O_1| = |W_1W_2|/2$. Аналогично точка O_2 делит пополам отрезок C_2D2, $|C_2O_2| = |C_1O_1|$, $C_2O_2 \parallel C_1O_1$. Тогда $C_1O_1C_2O_2$ — параллелограмм, значит $O_1O_2 \parallel W_1W_4$, поэтому O_1O_2 лежит на средней линии параллелограмма Виттенбауэра. Аналогично O_3O_4 лежит на другой его средней линии. Поэтому точка пересечения O_1O_2 и O_3O_4 (центр масс четырехугольника $ABCD$) совпадает с центром параллелограмма Виттенбауэра.

Задача 12. *([3]). Докажите, что центр тяжести четырехугольника совпадает с его центроидом тогда и только тогда, когда этот четырехугольник — параллелограмм.*

Указание. Данное условие выполнено тогда и только тогда, когда центры параллелограммов Вариньона и Виттенбауэра совпадают (и являются их центром подобия). Достаточно доказать, что общий центр M обоих параллелограммов совпадает с точкой O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ и применить задачу 6. Допустим, что $M \neq O$ (см. рис. 6). Для получения противоречия достаточно доказать, что OM тогда параллельна всем сторонам параллелограммов. Докажем, например, что $OM \parallel W_1W_4$. Проведем через M прямую, параллельную диагонали CB четырехугольника $ABCD$ до пересечения со стороной W_1W_4 параллелограмма Виттенбауэра в точке P. Точку пересечения отрезка PM со стороной параллелограмма Вариньона обозначим Q. Из подобия этих параллелограммов (см. задачу 10) следует, что $PM : QM = 4 : 3$. Рассмотрим точки P_1, Q_1, в которых диагональ CB пересекается с теми же сторонами параллелограммов Виттенбауэра и Вариньона. Так как W_1W_4 отсекает от $\triangle ACO$ подобный ему (по двум углам) с коэффициентом $1/3$ треугольник, то $CP : CO = 1 : 3$, т.е. $OP : CO = 2 : 3$. Аналогично получаем, что $OQ : CO = 1 : 2$ (для обоснования можно также воспользоваться свойствами средней линии треугольника). Отсюда имеем $OP : OQ = 4 : 3$. Но так как $PM : QM = 4 : 3 = PO : QO$, $PM \parallel PO$ и пересекающие их стороны параллелограммов параллельны, то $OM \parallel W_1W_4$.

Довольно длинное решение задачи 12 с использование векторной алгебры имеется в [4].

6.1 Сравнение двух способов построения центра масс четырехугольника

На первый взгляд кажется, что способ Виттенбауэра построения центра масс проще. В нем проводятся 6 прямых (стороны параллелограмма и его диагонали). А в первом методе надо у каждого треугольника найти центр (для этого проводятся две прямые), а потом точку пересечения двух диагоналей получившегося четырехугольника — всего 10 прямых. Но надо учитывать сложность построения точек, делящих на три равные части стороны четырехугольника. Тогда способ Виттенбауера оказывается более сложным.

Начнем с построения центра масс треугольника. Его можно построить, проведя всего 5 линий. Действительно, рассмотрим $\triangle ABC$, и сложим вектора AC, CB, построив вектор CC_1, сделав 2 засечки окружностями (см. рис. 8). Аналогично построим точку A_1. Заметим, что из двух нужных для этого окружностей одна (с центром в B) уже была построена, поэтому всего в указанной части построения использовалось 3 окружности. Проведя прямые CC_1, AA_1, получаем в их пересечении центр $\triangle ABC$. Если предположить, что прямые AB и CB были проведены, то проведенное построение дает также середины сторон AB, AC, и две из трех медиан $\triangle ABC$.

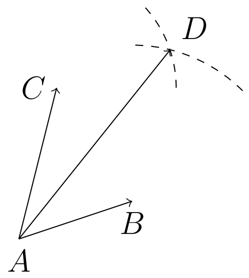

Рис. 8: Построение суммы двух векторов

Оценим сложность построения центра масс четырехугольника $ABCD$ первым способом. Предположим, что стороны четырехугольника $ABCD$ даны. Построим указанным выше способом центры треугольников ABC, ACD. Для этого проведено 10 линий и построены середины всех сторон четырехугольника $ABCD$. Чтобы найти центры треугольников ABD, ADC достаточно в каждом из них провести по две медианы (еще 4 линии) и в точках их пересечения получаем центры треугольников ABD, ADC. Остается в полученном четырехугольнике, образованном построенными центрами, провести две диагонали. Общая сложность построения — 16 линий. Если стороны четырехугольника не заданы, то их придется провести. В этом случае сложность построения возрастает на 4. Читателю предлагаем попробовать уменьшить сложность, используя параллелограмм Виттенбауэра. Вряд ли ему это удастся.

7 Центр тяжести трапеции

Центр тяжести трапеции можно найти более быстрым способом, чем центр тяжести произвольного четырехугольника. Укажем, следуя [1], два способа, как это сделать. Первый способ очевиден из следующего рис. 9.

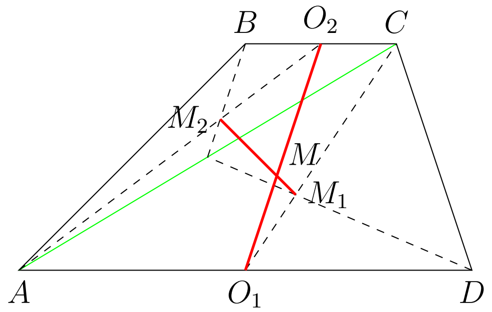

Рис. 9: Построение центра тяжести трапеции

Действительно, согласно сделанному в разделе 4 замечанию, центр масс трапеции лежит на прямой O_1O_2, соединяющей центры оснований. С другой стороны, он, как и у любого четырехугольника, лежит на отрезке M_1M_2, соединяющем центры масс $\triangle ABC$, $\triangle ACD$.

Оценим сложность этого построения. Вначале в нем для двух треугольников, на которые трапеция делится одной диагональю, строятся их центры со сложностью 10. При этом попутно строятся середины оснований (в предположении, что эти основания уже даны). Остается провести еще 2 прямые и найти точку их пересечения (см. рис. 9). Боковые стороны (и диагонали) при этом не предполагаются данными. Если не даны и основания, то сложность увеличивается на 2.

Второй способ показан на следующем рис. 10. На нем $A_1A = BC$, $C_1C = AD$.

Его обоснование не так очевидно и показано на рис. 11. Обозначим длины оснований трапеции через a, b, а длину отрезка O_1O_2, соединяющей их центры, через l. Точка M_2 — центр $\triangle ABC$ делит AO_2 в отношении $2:1$. Аналогично расположена точка M_1. На рис. 11 проведены прямые M_iN_i, $i = 1, 2$, параллельно основаниям трапеции до пересечения с прямой O_1O_2. Через M обозначена точка пересечения M_1M_2 с O_1O_2 (центр масс трапеции). Пары $\triangle AO_2O_1, \triangle M_2O_2N_2$, и $\triangle CO_2O_1, \triangle M_1O_1N_1$ подобны (по двум углам) с коэффициентом 3, откуда следует, что $M_2N_2 : M_1N_1 = a : b$ и точки N_1, N_2 делят O_1O_2 на три равные части. Тогда $\triangle M_1MN_1, \triangle M_2MN_2$ тоже подобны по двум углам с коэффициен-

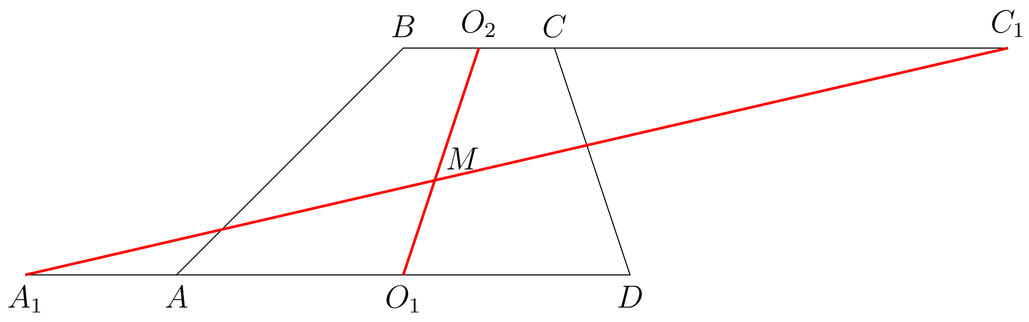

Рис. 10: Второй способ построения центра тяжести трапеции

том a/b, значит $N_2M : N_1M = a : b$. Так как $|N_2N_1| = l/3$, то имеем $|N_2M| = la/(3(a+b))$, $|N_1M| = lb/(3(a+b))$. Отсюда $MO_2 : MO_1 = (2a+b) : (2b+a)$ так как $|MO_2| = l/3 + la/(3(a+b)) = l(2a+b)/(3(a+b))$, $|MO_1| = l(2b+a)/(3(a+b))$.

Из равенств $A_1A = BC$, $C_1C = AD$ следует пропорция $MO_2 : MO_1 = (2a+b) : (2b+a) = O_2C_2 : A_1O_1$, а так как $\angle A_1O_1M = \angle C_1O_2M$ как накрест лежащие при параллельных прямых, то $\triangle A_1O_1M, \triangle C_1O_2M$ подобны, следовательно $\angle A_1MO_1 = \angle C_1MO_2$, значит прямая A_1C_1 проходит через точку M, что и требовалось доказать.

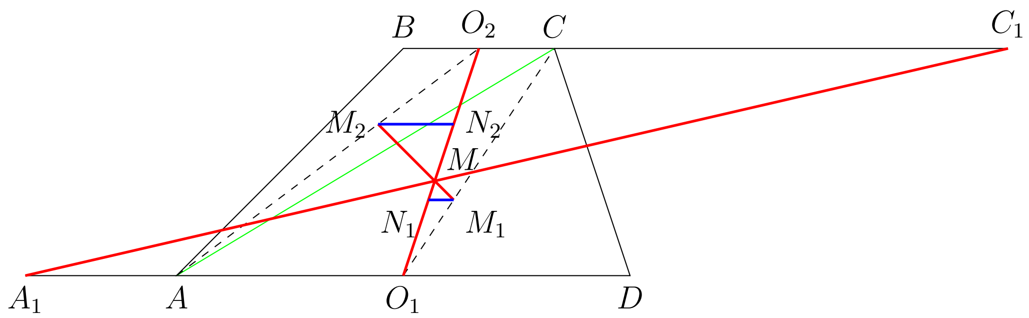

Рис. 11: Доказательство правильности второго способа

Оценим сложность этого построения. Вначале в нем строятся точки A_1, C_1, для чего проводятся по 2 линии для каждой точки (если основания заданы, все равно их нужно удлинять, проводя через них прямые). Потом строятся середины оснований. Остается провести две прямые. Как построить середины оснований? Если основания заданы, то каждую из середин можно построить с помощью двух окружностей и прямой, проходящей через их общую хорду (см. рис. 12).

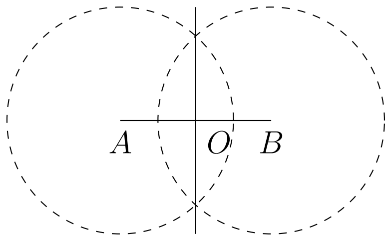

Рис. 12: Деление отрезка пополам

Общая сложность, как и в первом построении, равна 12 (но уже без предположения, что основания даны). Но можно построить середины оснований и другим способом. Проведем диагонали и найдем точку их пересечения P, продолжим боковые стороны до их пересечения в точке Q и проведем через P, Q прямую. Она делит основания пополам. [13]

Задача 13. *Докажите это.*

Указание. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей, делится этой точкой и боковыми сторонами на два равных отрезка. Примените признаки подобия треугольников.

Сложность указанного построения равна 11.

8 Быстрое построение центра масс конечной системы точек

Согласно указанному выше векторному способу вычисления центра масс по формуле

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n,\ \alpha_i = \frac{m_i}{m},\ m = m_1 + \ldots + m_n.$$

построение центра масс циркулем и линейкой (если величины масс заданы в виде длин данных n отрезков) можно выполнить следующим образом. Выберем в качестве точки приложения радиус-векторов точку, совпадающую с положением одной из заданных масс. Тогда можно считать,

[13]Использованный способ деления пополам двух параллельных отрезков одной линейкой принадлежит знаменитому швейцарскому геометру Якобу Штайнеру.

что вектор $v_n = 0$ и не учитывать его в вычислениях. С формальной точки зрения это означает замену n на $n-1$. Вначале построим все радиус-вектора $m_i v_i$. Каждое из этих построений (см. рис. 13) требует проведения 4 линий[14] , одна из которых является продолжением вектора v_i, если заранее проведена подходящая прямая через начало координат O и на ней отложены от O отрезки с длинами $1, m_i, i = 1, \ldots, n-1$. Очевидно для проведения этих построений требуется провести $4(n-1)+n+1 = 5n-3$ линий.

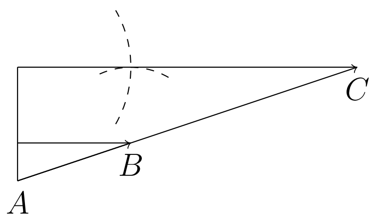

Рис. 13: Умножение вектора на число

Потом нужно выполнить сложение $n-1$ полученных векторов, последовательно прибавляя по вектору, используя построение 8. Для этого требуется еще $2(n-2)$ линий. И в конце надо поделить полученный вектор на число $m_1+\ldots+m_{n-1}$. Для этого нужно еще $n-2$ засечек циркулем для построения на данной прямой с единичным отрезком отрезка длины $m_1 + \ldots + m_{n-1}$ и 4 линии для выполнения деления (см. рис. 14). Общее число проведенных линий равно $9n-6$.

Но есть более эффективный способ. Нужно на каждом шаге строить центр масс системы точек $\{m_1, \ldots, m_i\}$ и отрезок длины $m_1 + \ldots + m_i$ в предположении, что центр масс системы точек $\{m_1, \ldots, m_{i-1}\}$ и отрезок длины $m_1+\ldots+m_{i-1}$ уже построен. Для этого достаточно через точку m_i провести подходящую прямую, отложить на ней от этой точки отрезки с длинами $m_1+\ldots+m_{i-1}$ и m_i друг за другом (для этого требуется 3 линии, причем будет построен отрезок длины $m_1+\ldots+m_i$), и разделить отрезок, соединяющий точку m_i с центром масс системы точек $\{m_1, ldotsm_{i-1}\}$ в отношении $m_1 + \ldots + m_{i-1} : m_i$ используя построение рис. 14. Для этого требуется еще 4 линии. В итоге на каждом шаге используется 7 линий, а общее их число равно $7(n-2)$. Этот способ предпочтительнее еще и тем, что все построенные вспомогательные точки (центры масс) лежат в выпуклой оболочке данной системы точек (значит, не требуется проводить слишком длинных линий).

[14]Здесь и далее под линиями понимаются прямые и окружности.

Найти центр системы n равных масс (т.е. центроид) можно быстрее. Для этого сначала находим сумму всех векторов, используя построение рис. 8. А потом делим полученный вектор на n.

Деление можно выполнить так, как на рис. 14, если выбрать произвольный отрезок за единицу измерения и предварительно построить отрезок длины n. Это можно сделать со сложностью $O(\log n)$, и даже меньшей (см. [5]).

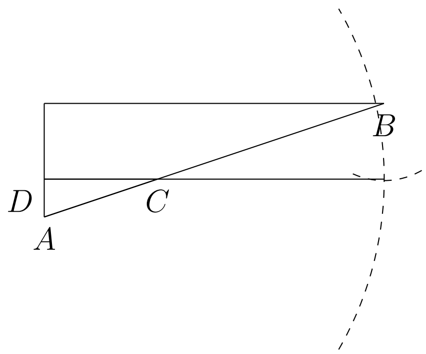

Рис. 14: Деление отрезка в данном отношении

В случаях $n = 3, 4, 6, 8$ есть еще более простое построение. Для $n = 3$ выше уже указывалось построение сложности 5.

Для $n = 4$ применяем указанный выше общий способ, но умножение полученного вектора на $1/4$ выполняем следующим образом. Проведем отрезок через его концы, поделим его пополам, и подходящую его половину — еще пополам. Каждое деление пополам способом рис.12 требует проведения двух окружностей и прямой. Общая сложность этих двух делений равна 7. Но если выбрать в первом делении окружности так, чтобы они обе проходили через концы отрезка, то при делении пополам полученной его половины можно проводить окружности того же радиуса, при этом окружность с центром в конце отрезка совпадет с уже проведенной, и сложность уменьшится до 6. Полная сложность указанного построения равна 10.

Если $n = 6$, то у каждой тройки строим центр с помощью 5 линий, и остается поделить пополам отрезок, соединяющий построенные две точки со сложностью 4. Полная сложность указанного построения равна 14.

Для $n = 8$ применяем общий способ, но умножение полученного вектора на $1/8$ выполняем следующим образом. Проведем отрезок через его концы, поделим его пополам, подходящую его половину опять пополам, и потом — еще пополам. Умножение на $1/4$ выполнялось, как указано выше, со сложностью 6. Последнее деление пополам требует еще двух линий (в нем используется построенная ранее окружность). Полная сложность указанного построения равна $12 + 8 = 20$.

9 Быстрое построение центра масс многоугольника

Оценим сложность построения центра масс $n-$угольника при $n > 4$. Выше был указан один способ его построения. Для этого его достаточно разрезать на $n-2$ треугольника, у каждого из них построить центр масс (это делается со сложностью $5(n-2)$), построить отрезки, длины которых равны площадям этих треугольников (отрезок единичной длины можно выбирать произвольно), и далее построить центр масс полученной системы $n-2$ материальных точек (в предыдущей секции было показано, что это делается со сложностью $7((n-2)-2) = 7(n-4)$). Так как общее число сторон у $n-2$ треугольников равно $3(n-2)$, причем n сторон $n-$угольника можно считать заданными, тогда число сторон $n-2$ треугольников, лежащих внутри $n-$угольника вычисляется по формуле $(3(n-2)-n)/2 = n-3$. Эти стороны можно построить, проведя $n-3$ отрезка. Остается оценить сложность построения отрезка, равного площади данного треугольника. Это можно сделать, решив следующие задачи.

Задача 14. *Высоту треугольника можно построить со сложностью* 4.

Указание. Разделить одну из его сторон пополам со сложностью 3, построить на этой стороне как на диаметре окружность, тогда точка ее пересечения с другой стороной является основанием высоты, опущенной на эту сторону согласно тому, что диаметр виден из любой точки окружности под прямым углом.

Задача 15. *Удвоенную площадь треугольника (при подходящем выборе единицы измерения длин) можно построить со сложностью* 10.

Указание. Она равна произведению основания на высоту. Для выполнения умножения отрезков применить прием рис. 13. Единичный отрезок можно отложить на основании (выбрав его так, чтобы он был короче основания), на боковой стороне отложить высоту, тогда отрезок на боковой стороне, равный произведению основания на высоту, строится со сложностью 6.

Теперь окончательно сложность построения центра масс можно оценить как

$$(n-3)+5(n-2)+10(n-2)+7(n-4)=23n-61.$$

Рассмотрим другой способ построения. Разобьем $n-$угольник (для простоты предполагаем, что он выпуклый) на четырехугольники (и в случае нечетного n еще один треугольник). Для этого в разбиении на $n-2$ треугольника объединим пары треугольников с общей стороной в четырехугольники. В случае четного n число полученных четырехугольников равно $n/2-1$, а в случае нечетного — $(n-3)/2$. Построим у каждого из этих четырехугольников цент масс способом, указанным в разделе 6. Сложность этого построения равна $(n-3)+16(n/2-1)=9n-19$ (далее рассматриваем случай четного n). Построим отрезки, длины которых равны площадям этих четырехугольников. И, наконец, построим центр масс полученной системы $n/2-1$ материальных точек со сложностью $7(n/2-3)$. Остается оценить сложность построения системы отрезков, пропорциональных площадям построенных четырехугольников.

Задача 16. *Удвоенную площадь четырехугольника (при подходящем выборе единицы измерения длин) можно построить со сложностью* 16.

Указание. Опустим на диагональ четырехугольника перпендикуляры из концов другой диагонали. Удвоенная площадь четырехугольника равна произведению этой диагонали на сумму длин указанных перпендикуляров. Построить оба перпендикуляра можно с помощью задачи 29 со сложностью 8. На одной из сторон четырехугольника откладываем отрезок, длина которого равна сумме этих перпендикуляров. Это можно сделать со сложностью 3. На диагонали откладываем отрезок единичной длины со сложностью 1. Тогда произведение диагонали на сумму перпендикуляров строится со сложностью 4 в виде отрезка на стороне четырехугольника.

Теперь окончательно сложность построения центра масс можно оценить при четном n как

$$9n-19+16(n/2-1)+7(n/2-3)=20,5n-56.$$

При n нечетном оценка имеет вид

$$(n-3)+8(n-3)+5+7(n-1)/2+8(n-3)+10=20,5n-39,5.$$

Как видно, второй способ несколько более эффективен.

Задача 17. *Оцените двумя указанными способами сложность построения отрезка, длина которого равна площади данного $n-$угольника.*

Список литературы

[1] Н. Е. Жуковский. Теоретическая механика. М.: URSS, 2011.

[2] М. Б. Балк, В. Г. Болтянский. Геометрия масс (серия «Библиотечка Кванта», вып. 61). М.: Наука, 1981.

[3] Г. С. М. Кокстер. Введение в геометрию. М.:Мир, 1966.

[4] С. В. Дворянинов, З. Краутер. Чем центр тяжести треугольника отличается от центра тяжести четырехугольника. Математическое образование 1(61) 2012, 10-19.

[5] С. Б. Гашков, В. Н. Чубариков. Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. М.: Дрофа, 2005.