

# Всероссийская научная конференция с международным участием

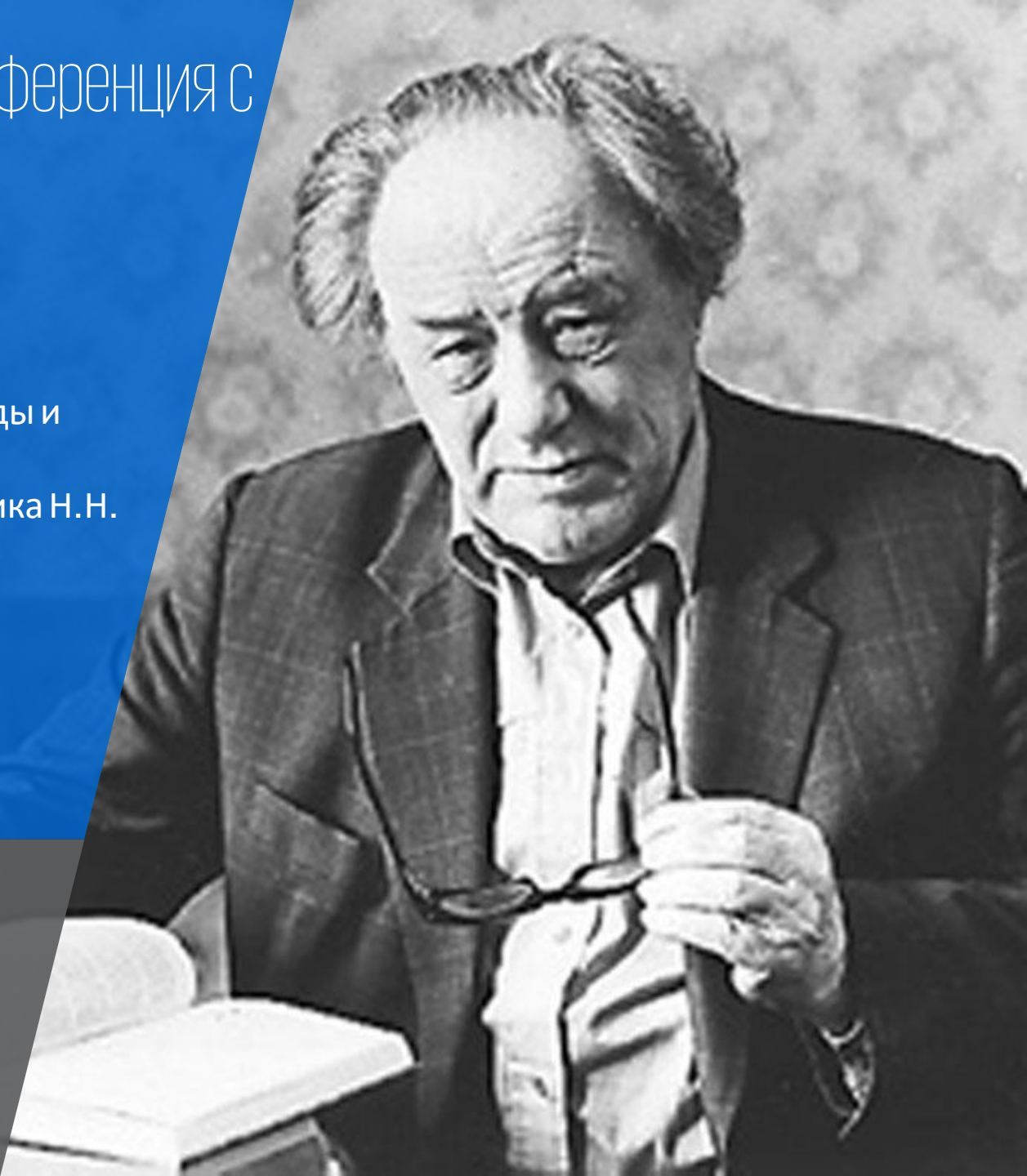
Моделирование коэволюции природы и  
общества: проблемы и опыт  
К столетию со дня рождения академика Н.Н.  
Моисеева

ФИЦ ИУРАН  
7-10 ноября 2017 года

## Команда:

Кулешов А.С.  
Буканов А.И.  
Гаджиев М.М.

Московский государственный университет  
им. М.В. Ломоносова  
Механико-математический факультет





Геометрические связи в  
задаче о движении  
двухколесной роликовой  
доски «Рипстик»

Ноябрь 2017



# Содержание исследования

**1** Введение

**2** Объект исследования

**3** Известные результаты

**4** Вывод основной формулы

**5** Заключительные замечания  
Литература





# Содержание

Введение

Объект исследования

Известные результаты

Вывод основной формулы

Заключительные замечания и литература



# Введение



В работе изучается кинематика движения двухколесной роликовой доски, известной как эсборд, или рипстик. При помощи теории конечных поворотов предлагается элементарный вывод формулы, связывающей угол наклона платформы рипстика с углом поворота колеса. Приведенное доказательство данной формулы является существенно более простым по сравнению с тем, что было предложено ранее другими авторами.



# Введение

В настоящее время остаётся не изученной не только динамическая модель рипстика, но даже и точная кинематическая модель этой системы. Лишь в работе авторов Tianmiao Wang, Baiquan Su, Shaolong Kuang, Junchen Wang [6] содержится описание кинематических особенностей рипстика и, в частности, получена формула, связывающая угол наклона платформы рипстика с углом поворота соответствующего колеса. При этом доказательство данной формулы опирается на сложные геометрические построения и оказывается весьма трудным для понимания. В настоящей работе предлагается другой способ получения данной формулы, использующий теорию конечных поворотов.





# Содержание

Введение

Объект исследования

Известные результаты

Вывод основной формулы

Заключительные замечания и литература



# Двухколёсная доска - рипстик (эссборд)

Типичный рипстик состоит из:

- Торсионного вала
- Двух платформ, соединённых при помощи торсионного вала
- Двух клинообразных креплений колес, находящихся под каждой из платформ

Торсионный вал обеспечивает вращения платформ друг относительно друга





# Двухколёсная доска - рипстик (эссборд)

Типичный рипстик состоит из:

- Торсионного вала
- Двух платформ, соединённых при помощи торсионного вала
- Двух клинообразных креплений колес, находящихся под каждой из платформ

Торсионный вал обеспечивает вращения платформ друг относительно друга



# Двухколёсная доска - рипстик (эссборд)

Типичный рипстик состоит из:

- Торсионного вала
- Двух платформ, соединённых при помощи торсионного вала
- Двух клинообразных креплений колес, находящихся под каждой из платформ

Торсионный вал обеспечивает вращения платформ друг относительно друга



# Двухколёсная доска - рипстик (эссборд)

Каждая платформа имеет:

- верхнюю сторону, на которую райдер ставит свою ногу
- нижнюю сторону, на которой расположен клинообразный выступ

На наклонной грани клинообразного выступа закреплено рояльное колесо.

Ось вращения соответствующего рояльного колеса перпендикулярна наклонной плоскости клинообразного выступа, на котором она укреплена



# Двухколёсная доска - рипстик (эссборд)

1



2



3

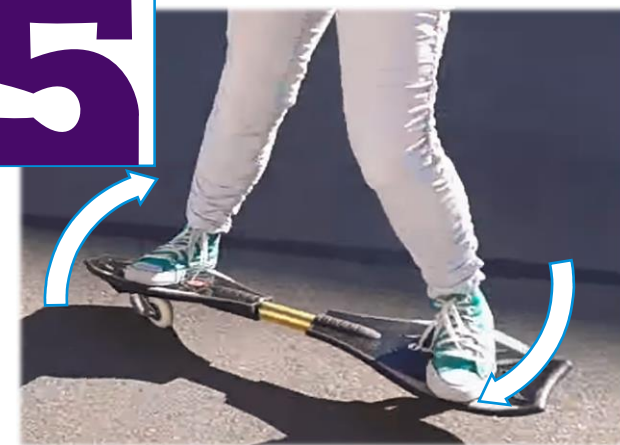


При катании на рипстике райдер координирует движения своих рук и тела и, наклоняя платформы, осуществляет продвижение рипстика вперёд без касания ногами земли, одновременно сохраняя равновесие и предотвращая падение

4



5





# Содержание

Введение

Объект исследования

Известные результаты

Вывод основной формулы

Заключительные замечания и литература



# Известные результаты

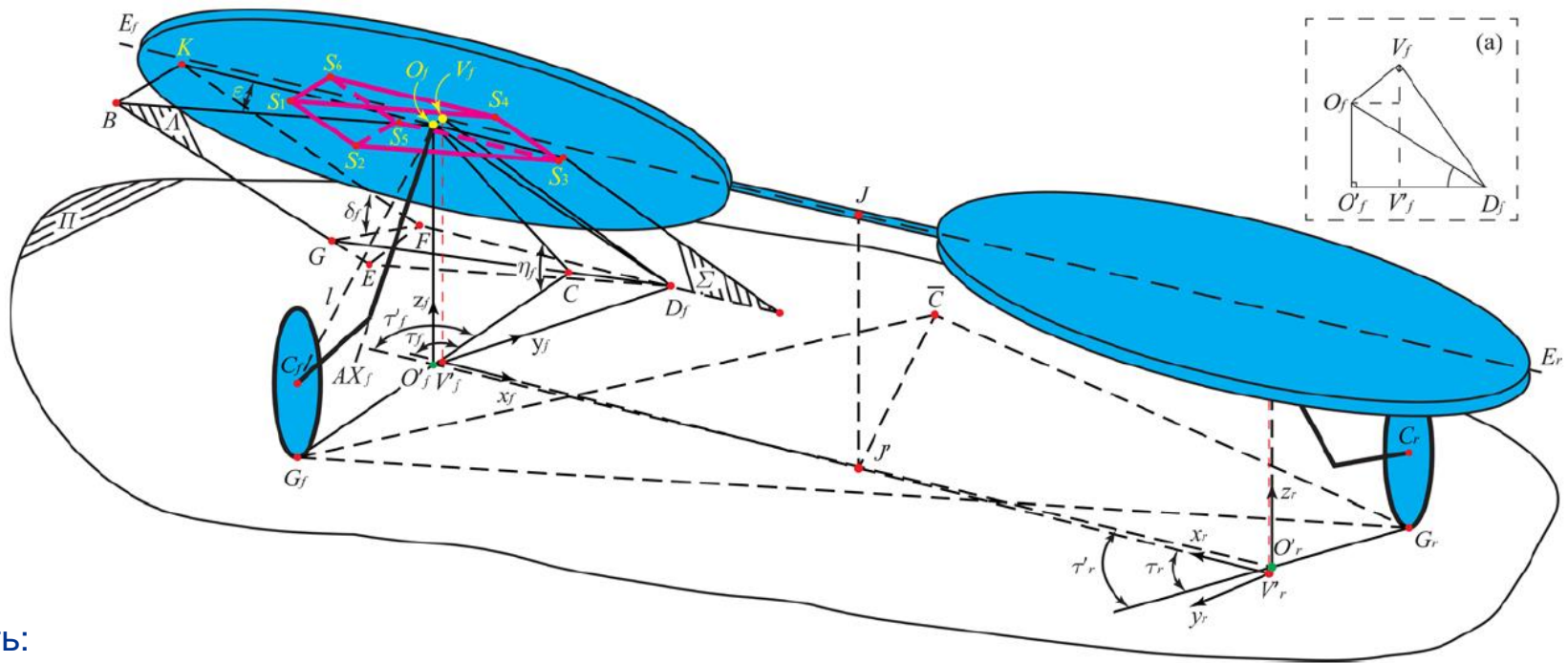


Первыми работами, в которых была предложена математическая модель рипстика, являются работы:

- Tianmiao Wang, Baiquan Su, Shaolong Kuang, Junchen Wang. On Kinematic Mechanism of a Two-Wheel Skateboard: The Essboard // ASME Journal of Mechanisms and Robotics. 2013. Vol. 5. P. 034503-1-034503-7.
- Baiquan Su, Tianmiao Wang, Junchen Wang, Shaolong Kuang. Kinematic Mechanism and path planning of the Essboard // Science China. Technological Sciences. 2013. Vol. 56. No. 6. P. 1499-1516.



# Известные результаты



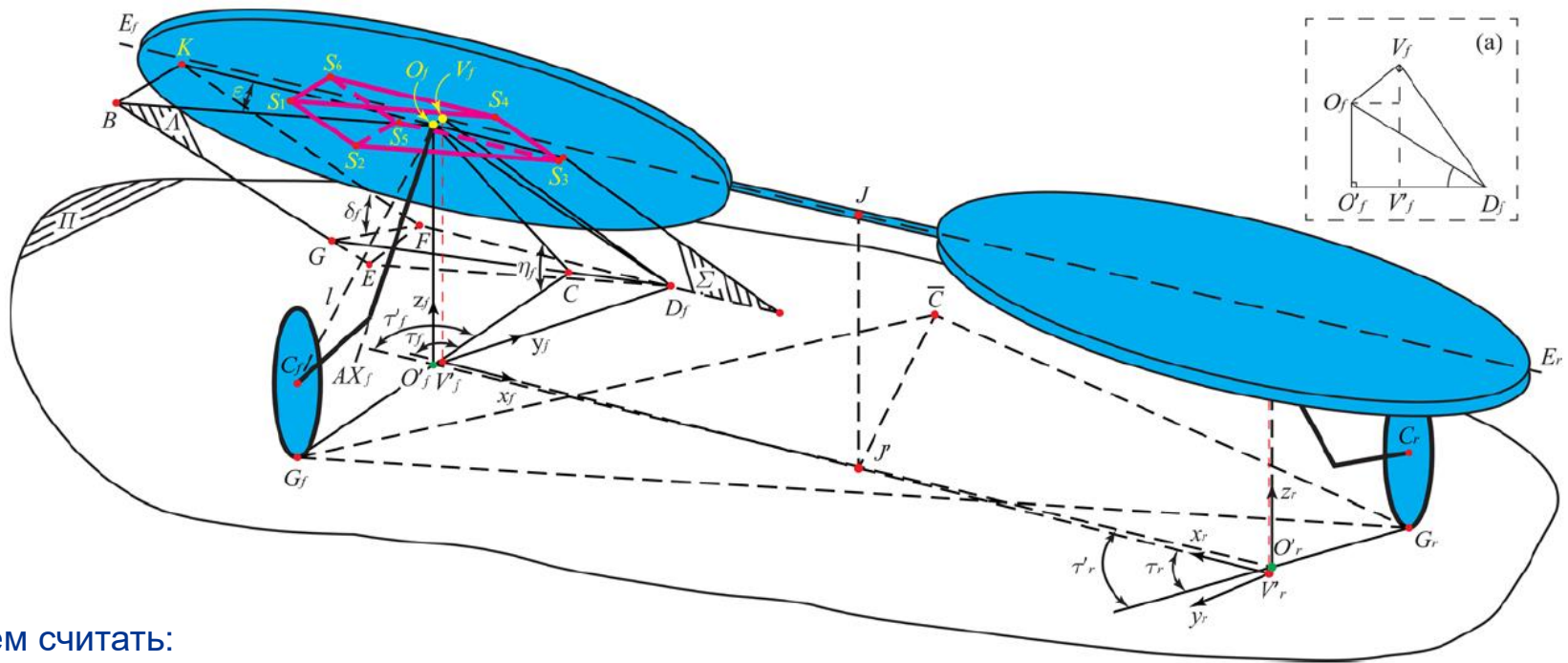
Пусть:

$\delta_f, \delta_r$  - углы наклона передней и задней платформы рипстика

$\tau_f, \tau_r$  - углы поворота колёс рипстика



# Известные результаты



Будем считать:

во всё время движения выполняется соотношение

$$\delta_f = -\delta_r = \delta \quad \text{и} \quad \tau_f = -\tau_r = \tau$$

В этом случае продольная ось рипстика остаётся параллельной плоскости движения





# Известные результаты



Первыми работами, в которых была предложена математическая модель рипстика, являются работы:

- Tianmiao Wang, Baiquan Su, Shaolong Kuang, Junchen Wang. On Kinematic Mechanism of a Two-Wheel Skateboard: The Essboard // ASME Journal of Mechanisms and Robotics. 2013. Vol. 5. P. 034503-1-034503-7.
- Baiquan Su, Tianmiao Wang, Junchen Wang, Shaolong Kuang. Kinematic Mechanism and path planning of the Essboard // Science China. Technological Sciences. 2013. Vol. 56. No. 6. P. 1499-1516.



В условиях введенных обозначений и наложенных ограничений, в частности, в этих работах был доказан следующий результат

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{\sin \delta}{\operatorname{tg} \varepsilon}$$





# Содержание

Введение

Объект исследования

Известные результаты

Вывод основной формулы

Заключительные замечания и литература



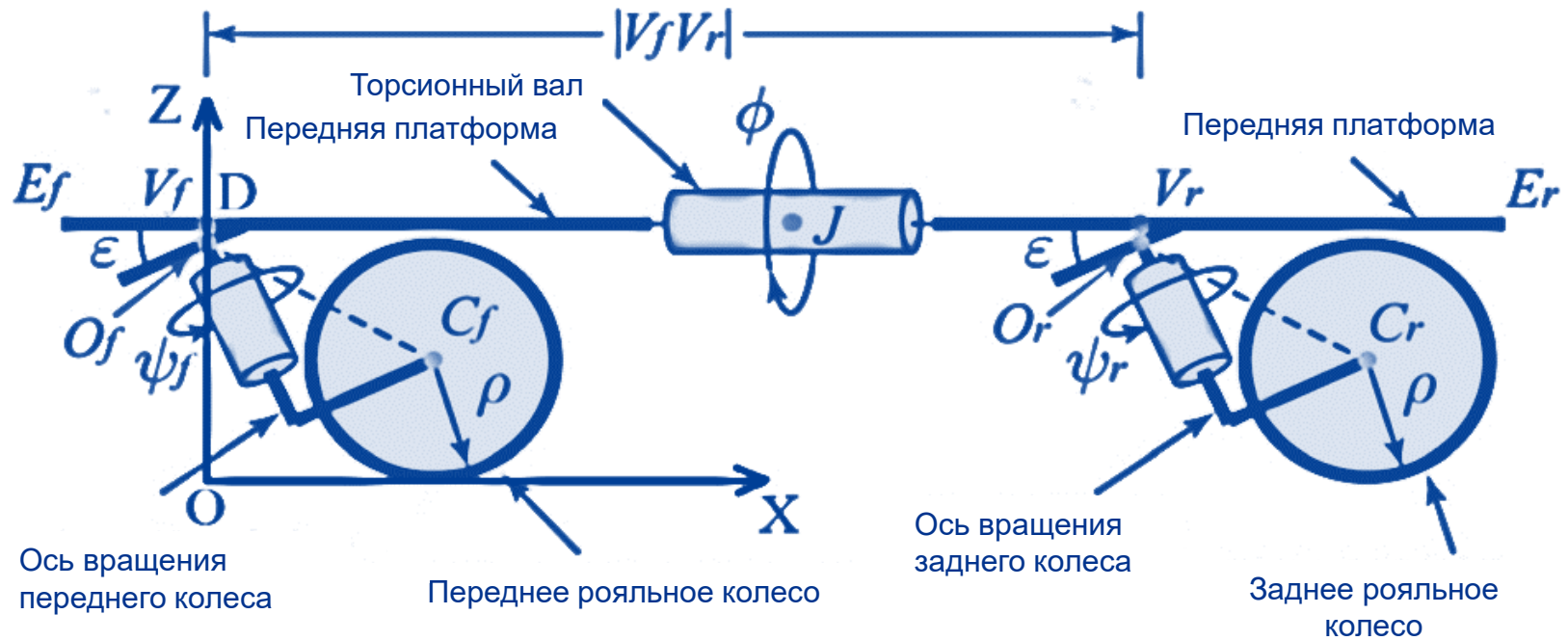
# Вывод основной формулы



опорная плоскость (плоскость, по которой движется рипстик)

наклонная плоскость клинообразного выступа

плоскость, параллельная плоскости платформы и проходящая через точку  $O_f$



# Вывод основной формулы



Если платформа рипстика не наклонена, то относительно введенной системы координат OXYZ:

- Основные выкладки/заключения
- Вспомогательные выкладки/заключения

Плоскость  $\Pi$  определяется уравнением:

$$Z = 0$$

Плоскость  $\Sigma$  определяется уравнением:

$$Z = h - a \sin \varepsilon$$

Вектор нормали к плоскости  $\Lambda$  имеет вид:

$$\mathbf{n} = -\sin \varepsilon \mathbf{e}_x + \cos \varepsilon \mathbf{e}_z$$

Плоскость  $\Lambda$  проходит через точку, радиус – вектор которой:

$$\mathbf{r}_{O_f} = (h - a \sin \varepsilon) \mathbf{e}_z$$

Плоскость  $\Lambda$  определяется уравнением:

$$-X \sin \varepsilon + Z \cos \varepsilon =$$

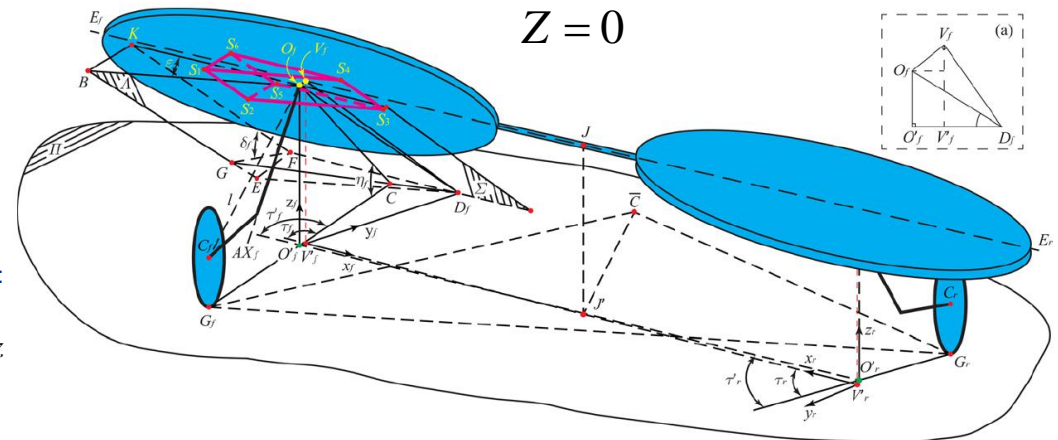
$$= (h - a \sin \varepsilon) \cos \varepsilon$$

Плоскости  $\Pi$  и  $\Lambda$  пересекаются по прямой, определяемой уравнениями:

$$X = -\frac{\cos \varepsilon}{\sin \varepsilon} (h - a \sin \varepsilon)$$

$$Z = 0$$

Данная прямая будет перпендикулярна плоскости колеса



# Вывод основной формулы



В силу конструктивных особенностей рипстика, при наклоне платформы колеса, оставаясь перпендикулярной плоскости  $\Pi$ , поворачивается таким образом, что она будет перпендикулярна линии пересечения плоскостей  $\Pi$  и  $\Lambda$

● Основные выкладки/заключения

● Вспомогательные выкладки/заключения

Вспользуемся основной формулой теории конечных поворотов:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}' = & (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\rho}) \mathbf{e} + \\ & + (\boldsymbol{\rho} - (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\rho}) \mathbf{e}) \cos \chi + \\ & + [\mathbf{e} \times \boldsymbol{\rho}] \sin \chi \end{aligned}$$

Предположим, что передняя платформа повернулась на угол  $\delta$  вокруг оси с направляющим вектором

$$\mathbf{e} = -\mathbf{e}_x$$

Вектор нормали к плоскости  $\Lambda$  примет вид

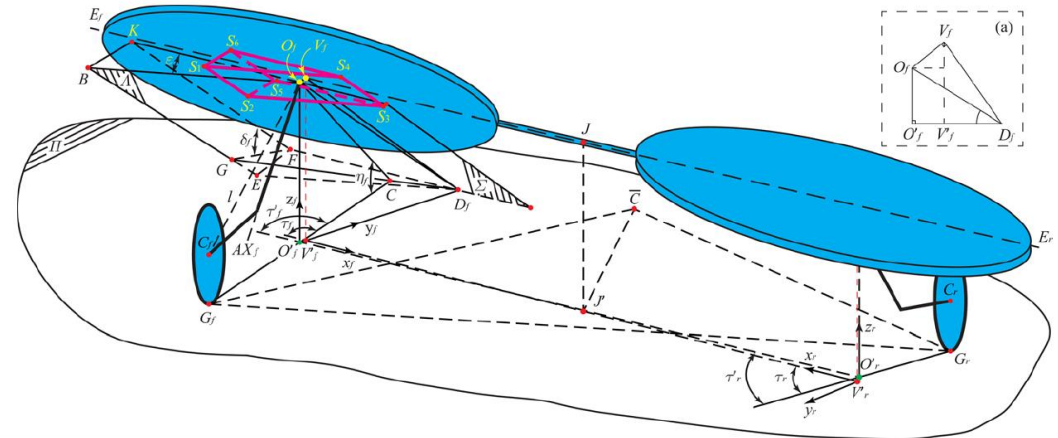
$$\begin{aligned} \mathbf{n}' = & -\mathbf{e}_x \sin \varepsilon + \\ & + \mathbf{e}_y \cos \varepsilon \sin \delta + \\ & + \mathbf{e}_z \cos \varepsilon \cos \delta \end{aligned}$$

Плоскость  $\Lambda$  будет проходить через точку, радиус – вектор которой

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_{O_f} = & (h - a \sin \varepsilon) \sin \delta \mathbf{e}_y + \\ & + (h - a \sin \varepsilon) \cos \delta \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Уравнение плоскости  $\Lambda$  после наклона платформы:

$$\begin{aligned} -X \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} + Y \sin \delta + \\ + Z \cos \delta = h - a \sin \varepsilon \end{aligned}$$



# Вывод основной формулы



В силу конструктивных особенностей рипстика, при наклоне платформы плоскость колеса, оставаясь перпендикулярной плоскости  $\Pi$ , поворачивается таким образом, что она будет перпендикулярна линии пересечения плоскостей  $\Pi$  и  $\Lambda$

● Основные выкладки/заключения

● Вспомогательные выкладки/заключения

Плоскости  $\Pi$  и  $\Lambda$  после наклона платформы пересекаются по прямой, определяемой уравнением:

$$-X \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} + Y \sin \delta = h - a \sin \varepsilon$$

Направляющим вектором данной прямой является вектор:

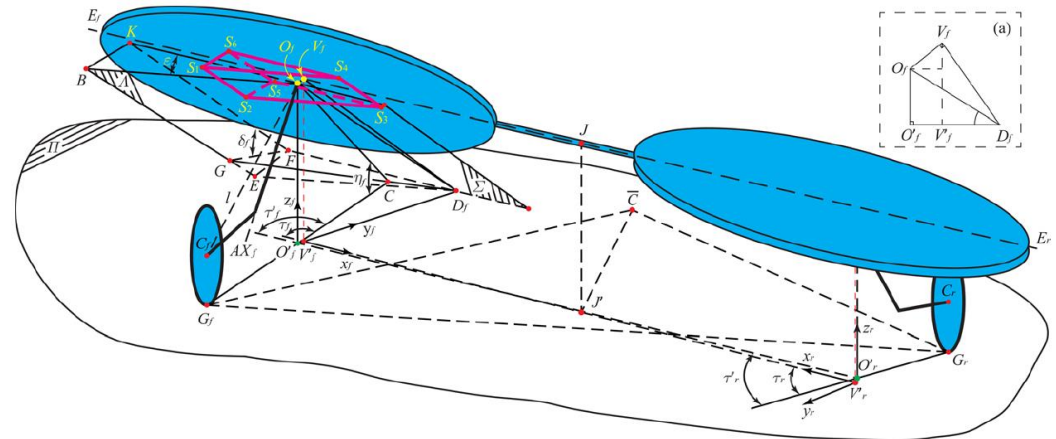
$$\mathbf{s} = -\frac{\cos \varepsilon}{\sin \varepsilon} \mathbf{e}_x - \frac{1}{\sin \delta} \mathbf{e}_y$$

Уравнение плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{s}$  и проходящей через точку с радиусом-вектором

$$\mathbf{r}'_{O_f} = (h - a \sin \varepsilon) \sin \delta \mathbf{e}_y + (h - a \sin \varepsilon) \cos \delta \mathbf{e}_z$$

имеет вид:

$$\frac{\cos \varepsilon}{\sin \varepsilon} X + \frac{1}{\sin \delta} Y = h - a \sin \varepsilon$$







# Содержание

Введение

Объект исследования

Известные результаты

Вывод основной формулы

Заключительные замечания и литература



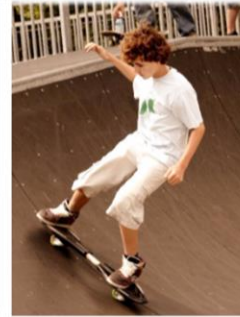


# Заключительные замечания

Если углы наклона платформ не связаны соотношением

$$\delta_f = \pm \delta_r$$

то исследование существенно усложняется



# Литература

1. Hubbard M. Lateral Dynamics and Stability of the Skateboard // J. Appl. Mech. 1979. V. 46. P. 931–936.
2. Кремнев А.В., Кулешов А.С. Нелинейная динамика и устойчивость движения простейшей модели скейтборда. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механикоматематическом факультете МГУ, 2007.
3. Голубев Ю.Ф. Метод управления движением робота-скейтбордиста // ПММ 2006. Т. 70, вып. 3. С. 355–370.
4. Кулешов А.С. Математическая модель скейтборда // Мат. моделир. 2006. Т. 18, вып. 5. С. 37–48.
5. Lewis A.D., Ostrowski J.P., Murray R.M., Burdick J.W. Nonholonomic mechanics and locomotion: the Snakeboard example // Proc. IEEE ICRA 1994. P. 2391–2400.
6. Tianmiao Wang, Baiquan Su, Shaolong Kuang, Junchen Wang On Kinematic Mechanism of a Two–Wheel Skateboard: The Essboard // J. Mech. Robot. 2013. V. 5 P. 034503-1–034503-7.
7. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961.



Спасибо за  
внимание!

