

ФГБОУ ВО «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 512.715

Оганесян Дмитрий Алексеевич

СЕМЕЙСТВА ПАР АБЕЛЯ НАД АЛГЕБРАИЧЕСКИ ЗАМКНУТЫМИ ПОЛЯМИ

Специальность 01.01.06 – «математическая логика, алгебра и теория чисел»

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Шабат Георгий Борисович

Москва, 2017

Оглавление

Введение	5
Общая характеристика работы	5
Основные результаты диссертации	6
Актуальность темы диссертации	6
Научная новизна	7
Основные методы исследования	7
Апробация работы	7
Благодарности	8
Краткое содержание работы.	8
 1 Предварительные сведения	 11
1.1 Карты и рисунки	11
1.2 Пространство Гурвица	13
1.3 Пары Белого	14
1.4 Пары Фрида	15
1.5 Паде-аппроксимации	17
 2 Пары Абеля	 20
2.1 Определение пар Абеля	20
2.2 Связь с квазиэллиптическими интегралами	21
2.3 Категория пар Абеля	23
2.4 Свойства пар Абеля. Пространство модулей пар Абеля.	24
2.5 Примитивные пары Абеля	26

2.6	Задание пары Абеля уравнением	29
2.7	Пары Абеля над $\mathbb{C}$ и их комбинаторное описание	35
2.8	Пары Абеля-Белого	38
2.9	Самодвойственные пары Абеля и преобразование Жуковского . . .	41
2.10	Галуа-инварианты пар Белого-Абеля	44
3	Семейства пар Абеля рода 1 над $\mathbb{C}$	46
3.1	Связь с модулярными кривыми	46
3.2	Компактификация $Y_1(n)$. Особые слои в семействе	47
3.3	Пара Белого на базе семейства	49
3.4	Валентности критических точек функции Белого, $\varkappa_n$	51
3.5	Семейства импримитивных пар Абеля рода 1	54
3.6	Преобразование Жуковского семейств пар Абеля рода 1	56
3.7	Вычисление семейств пар Абеля с помощью Паде-аппроксимации .	59
4	Пары Абеля-Белого рода 1 над $\mathbb{C}$	62
4.1	Комбинаторное описание	62
4.2	Импримитивные пары Абеля-Белого рода 1	66
4.3	Автоморфизмы пар Абеля-Белого рода 1	67
4.4	Преобразование Жуковского пар Абеля-Белого рода 1	68
4.5	Галуа-инварианты пар Абеля	70
4.6	Количество пар Абеля-Белого рода 1	71
4.7	Рисунок на $X_1(n)$ соответствующий $\varkappa_n$	74
5	Семейства пар Фрида рода 0	77
5.1	Пространство рациональных функций с фиксированным дивизором	77
5.2	Ненулевые критические значения рациональных функций	78
5.3	Пары Белого в рассматриваемом пространстве рациональных функций	79
5.4	Рассматриваемые многочлены Золотарёва и их семейства	82

6	Редукция в положительную характеристику	85
6.1	Пары Белого в положительной характеристике	85
6.2	Редукция семейств пар Абеля рода 1	86
6.3	Количество пар Абеля-Белого рода 1 в положительной характеристике	88
6.4	Простые плохой редукции деревьев	91
7	Вычисленные примеры	93
7.1	Семейства примитивных пар Абеля рода 1	93
7.1.1	$n = 4$	94
7.1.2	$n = 5$	94
7.1.3	$n = 6$ и пример редукции семейства	95
7.1.4	$n = 7$	97
7.1.5	$n = 8$	98
7.1.6	$n = 9$	99
7.1.7	$n = 10$	100
7.1.8	$n = 12$	101
7.1.9	$\mathfrak{X}_{12,3}$	102
7.2	Пример рода 0	102
	Заключение	104
	Литература	104
	Публикации автора по теме диссертации	107

Введение

Общая характеристика работы

В 1979 году Г.В. Белый доказал знаменитую теорему (см. [3]), утверждающую, что гладкая проективная комплексная кривая $\mathcal{X}$ имеет модель на поле $\overline{\mathbb{Q}}$, тогда и только тогда, когда существует накрытие $\beta : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, разветвленное лишь над тремя точками проективной прямой.

В последствии накрытия проективной кривой, разветвленные не более чем над тремя точками стали называть функциями Белого, а пару из кривой и функции Белого на ней, $(\mathcal{X}, \beta)$, парами Белого.

Теорема Белого произвела впечатление на Александра Гротендика и в 1984 году он ввел понятие *детского рисунка* (*dessin d'enfant*), графа на поверхности, дополнением до которого являются диски. Такой комбинаторный объект оказывается взаимосвязанным с парами Белого. Действительно, рассмотрев прообраз при действии функции Белого отрезка действительных чисел от 0 до 1, мы получим детский рисунок на кривой Белого. Гротендик сформулировал программу исследований, опубликованную в 1997 году [11].

Выяснилось (см. [7]), что взаимосвязь между детскими рисунками и кривыми над числовыми полями может быть поднята до эквивалентности категорий, дающей многочисленные нетривиальные связи между различными направлениями математики и теоретической физики, такими как: теория категорий, алгебра, алгебраическая геометрия, комплексный анализ, топология, матричные модели, теория струн, квантовые вычисления.

Начиная со второй половины восьмидесятых годов, раздел алгебры, посвя-

щенный изучению детских рисунков Гротендика, кривых над числовыми полями, рациональных функций с необщим числом критических значений, активно развивается математиками из разных стран. Современный уровень развития теории нашел отражение в большом количестве печатных работ в центральных математических журналах, в ряде обзоров, в специальных сборниках [10, 12], в работе различных международных конференций.

Основные результаты диссертации

Основными результатами работы являются:

- Вычисление количества пар Абеля-Белого над алгебраически замкнутым полем любой характеристики (Теорема 6.3.4) и асимптотика их количества (Следствие 6.3.6).
- Вычисление количества примитивных пар Абеля-Белого над $\mathbb{C}$ (Теорема 4.6.5).
- Комбинаторное описание рисунка на базе семейства пар Абеля рода 1 и степени n , то есть на модулярной кривой $X_1(n)$ (Теорема 4.7.2).
- Нахождение необходимых и достаточных условий хорошей редукции дерева диаметра IV по модулю простого числа p . (Теорема 6.4.5).

Актуальность темы диссертации

Редукция пар Белого в поля положительной характеристики актуальный вопрос теории пар Белого и его исследованию посвящены множество публикаций и различных глубоких результатов. Отметим такие результаты как теорему Бекмана, [6], утверждающую, что функция Белого имеет хорошую редукцию по модулю простых чисел, не делящих порядок группы ее монодромии; теорему Рейно [15].

Теория пар Белого над полями положительной характеристики важна для понимания арифметики пар Белого над $\overline{\mathbb{Q}}$. Действительно, простые плохой редук-

ции связаны с простыми ветвления поля определения пары Белого [17]. Кроме того, над полями положительной характеристики значительно упрощается действие абсолютной группы Галуа на пары Белого: если над $\overline{\mathbb{Q}}$ на пары Белого действует группа Галуа $\text{Gal}_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$, то над $\overline{\mathbb{F}_p}$ на пары Белого действует группа Галуа $\text{Gal}_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}_p}$, устроенная значительно проще

$$\text{Gal}_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}_p} \simeq \hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Научная новизна

Представленные результаты являются новыми. Введен класс пар Белого, названных парами Абеля-Белого. Вычисления их количества с заданными параметрами над полями произвольной характеристики, как и асимптотики, являются новыми. Впервые вычислены многочисленные примеры пар Абеля-Белого. Установлена их связь с теорией модулярных кривых. Рисунки связанные с рассматриваемыми в диссертации, встречались и ранее, например в [14], [21], но в этих работах не используется включение соответствующих пар Белого в одно семейство пар Фрида. Результаты о простых плохой редукции деревьев диаметра 4 сильнее известных ранее ([19]).

Основные методы исследования

В работе используются методы теории детских рисунков Гротендика, алгебраической геометрии, комбинаторики, комбинаторной топологии, теории чисел, теории групп, Паде-аппроксимации и теории функций комплексного переменного.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на международных конференциях «Embedded graphs» в Санкт-Петербурге в 2014 году и «Взрослая математика вокруг детских

рисунков» в Москве в 2017 году; на семинарах мехмата МГУ, «Графы на поверхностях и кривые над числовыми полями» и «Научно-исследовательский семинар по алгебре», и семинаре матфака ВШЭ «Характеристические классы и теория пересечений».

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 3 работах, список которых приводится в конце библиографии.

Благодарности

Автор выражает признательность за помощь в создании этой работы моему научному руководителю, Георгию Борисовичу Шабату, участникам семинара МГУ, «Графы на поверхностях и кривые над числовыми полями»; Анастасии Аристовой за исправление ошибок по существу и моей маме, Ирине Кимовне Оганесян, за огромный вклад в мое математическое образование.

Краткое содержание работы.

Глава 1 является вводной. В ней определяются основные объекты рассматриваемой теории, строятся основные понятия, используемые в работе, и приводится краткий обзор существующих методов и результатов.

В главе 2 вводится понятие пары Абеля и выводятся их свойства, используемые в дальнейшем. В разделе 2.6 рассматриваются алгебраические уравнения пар Абеля. В разделе 2.7 общей паре Абеля сопоставляется комбинаторная структура. В разделе 2.8 рассматриваются пары одновременно являющиеся парами Абеля и парами Белого, и найдено их количество при заданной степени, теорема 2.8.11.

В главе 3 рассматриваются семейства пар Абеля рода 1 над полем комплексных чисел. Эти семейства оказываются семействами Фрида, базами которых яв-

ляются модулярные кривые $X_1(n)$. Основными результатами являются теоремы 3.4.1 и 3.4.2, описывающие набор валентностей функций Белого на базах этих семейств. В разделе 3.7 описывается связь пар Абеля с Паде-аппроксимацией, с помощью которой мы вычисляем примеры из главы 8.

В главе 4 мы рассматриваем детские рисунки на торе, соответствующие парам Абеля-Белого и их комбинаторные свойства. Получив полную классификацию таких рисунков, мы найдем количество пар Абеля-Белого рода 1 на $\mathbb{C}$, так и количество примитивных пар среди них. Также мы найдем детский рисунок соответствующий комбинаторное описание рисунка на базе семейства пар Абеля рода 1 и степени n .

В главе 5 мы отвлечемся от пар Абеля и будем рассматривать рациональные функции на кривой рода 0 и функции Белого среди них. Мы будем следовать тому же принципу, что и для пар Абеля, а именно от страта пространства Гурвица перейдем к семействам Фрида и парам Белого в этом страте. Мы сосредоточимся на многочленах Шабата, соответствующих деревьям диаметра 4, включим их в семейства Фрида и рассмотрим в этих семействах функции Белого на их базах. Также мы найдем набор валентностей и критические точки функций Белого на базах этих семейств.

В главе 6 мы рассмотрим пары Белого над полями положительной характеристики, имеющих те же наборы валентностей что и пары Белого над $\mathbb{C}$ из предыдущих глав. Мы изучим их свойства и найдем простые простой редукции с помощью редукции в положительную характеристику семейств Фрида, включающих эти пары. В результате этих рассмотрений мы вычислим количество пар Абеля рода 1 и фиксированной степени для алгебраически-замкнутого поля любой характеристики, а также найдем простые плохой редукции деревьев диаметра 4.

Глава 7 содержит примеры. Вычислены семейства примитивных пар Абеля рода 1 степеней $4 \leq n \leq 10$ и $n = 12$, функции Белого на базе этих семейств и

орбиты Галуа пар Абеля-Белого, лежащих в этих семействах. Для семейства пар Абеля степени 6 приводится пример редукции в поле характеристики 5. Приводится пример семейства импримитивных пар Абеля для степени 12. Также приведен пример семейства многочленов Золотарёва, содержащего многочлены Шабата с набором валентностей $(a, b, c|3, 1, \dots, 1|n)$.

Глава 1

Предварительные сведения

1.1 Карты и рисунки

Определение 1.1.1. [23] *Картой* называется пара (X, Γ) , где X – компактная связная ориентированная поверхность, а Γ – граф на ней, такой, что

- рёбра Γ являются несамопересекающимися кривыми на X , не имеющими общих точек, отличных от вершин;
- каждая из связных компонент дополнения $X \setminus \Gamma$ (называемая клеткой) гомеоморфна открытому диску.

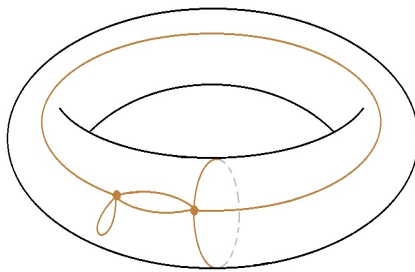


Рис. 1.1: Пример карты на торе

Замечание 1.1.2. Из второго условия следует, что граф должен быть связным. Граф может иметь петли и кратные рёбра.

Определение 1.1.3. Две карты $M_1 = (X_1, \Gamma_1)$ и $M_2 = (X_2, \Gamma_2)$ называются *изоморфными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $u : X_1 \rightarrow X_2$, ограничение которого на Γ_1 является изоморфизмом графов Γ_1 и Γ_2 .

Теорема 1.1.4 (Формула Эйлера). Пусть (X, Γ) – карта. Тогда

$$|V(\Gamma)| - |E(\Gamma)| + |F(\Gamma)| = 2 - 2g(X)$$

где $V(\Gamma)$, $E(\Gamma)$, $F(\Gamma)$ – вершины, рёбра и грани карты соответственно и $g(X)$ – род поверхности X .

Определение 1.1.5. Детским рисунком называется карта с введенной на ее графе двудольной структурой, т.е. вершины рисунка раскрашены в чёрный и белый цвета так, что каждое ребро соединяет вершины разного цвета.

Обозначение 1.1.6. Пусть в детском рисунке a_i – валентности чёрных вершин, b_i – валентности белых вершин, c_i – числа белых вершин на границах клеток. Будем записывать эти валентности следующим образом: $(a_1, \dots, a_k | b_1, \dots, b_m | c_1, \dots, c_l)$ и называть такой набор валентностей *паспортом* детского рисунка.

Определение 1.1.7. Детский рисунок называется *чистым*, если валентности всех его белых вершин равны двум.

Определение 1.1.8. Пусть D – детский рисунок на поверхности X . Поставим внутри каждой грани новую вершину; заменим на эти новые вершины чёрные вершины исходного рисунка. Соединим ребрами белые вершины исходного рисунка с новыми вершинами, на границах граней которых они лежат. Полученный детский рисунок D^* будем называть *двойственным* к исходному.

Определение 1.1.9. Детский рисунок называется *самодвойственным*, если он изоморфен своему двойственному.

Определение 1.1.10. Торический рисунок D называется *центрально симметричным*, если он может быть получен факторизацией евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ по некоторой решетке L : $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/L \simeq X$ так, что прообраз графа $u^{-1}(\Gamma)$ центрально симметричен в обычном смысле слова.

Определение 1.1.11. [23] k -*созвездием* называется набор из k элементов группы перестановок S_n , $(g_1, g_2, \dots, g_k) \in G^k$, такой, что $g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_k = e$ и действие группы $G = \langle g_1, g_2, \dots, g_k \rangle$ на множестве из n элементов является транзитивным.

Определение 1.1.12. *Картографической группой* созвездия $(g_1, g_2, \dots, g_k)$ называется группа, порожденная его элементами $G = \langle g_1, g_2, \dots, g_k \rangle$.

Определение 1.1.13. *Паспортом созвездия* $(g_1, g_2, \dots, g_k)$ называется последовательность $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ разбиений числа n , в которой λ_i задает цикловую структуру перестановки $g_i \in S_n$

1.2 Пространство Гурвица

Мы будем рассматривать кривые и функции на них над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$, обычно $\mathbb{C}$ или $\overline{\mathbb{Q}}$; в конце работы будет рассматриваться и $\overline{\mathbb{F}_p}$. В случае положительной характеристики будем рассматривать только сепарабельные морфизмы.

Определение 1.2.1. Под пространством Гурвица $\mathcal{HUR}_{g,n}$ понимается пространство классов изоморфизмов пар (X, ψ) , где X – алгебраическая кривая и ψ – рациональная функция на ней; такие пары (X_1, ψ_1) и (X_2, ψ_2) считаются изоморфными, если существует такой изоморфизм $f : X_1 \rightarrow X_2$, что $\psi_2 \circ f = \psi_1$.

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ & \searrow \psi_1 & \swarrow \psi_2 \\ & \mathbb{P}^1(\mathbb{k}) & \end{array}$$

Замечание 1.2.2. В этом определении мы не поясняем, как пространство $\mathcal{HUR}_{g,n}$ снабжается структурой алгебраического многообразия, поскольку далее мы ограничим наше рассмотрение его подпространствами. Но мы следуем разделу 5.3.5 из [23], где эти структуры вводятся на $\mathcal{HUR}_{g,n}$.

1.3 Пары Белого

Определение 1.3.1. *Парой Белого* $(\mathcal{X}, \beta)$ называется алгебраическая кривая $\mathcal{X}$ над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ и непостоянная рациональная функция β (функция Белого), заданная на $\mathcal{X}$, имеющая не более трёх критических значений. Функция Белого называется *чистой*, если все её ветвления над одним из критических значений имеют порядок 2.

Если $\mathcal{X}$ является проективной прямой, а β является многочленом от некоторой координаты на $\mathcal{X}$, то β называется *многочленом Шабата*.

Теорема 1.3.2. *Подходящим образом определённая категория детских рисунков эквивалентна категории пар Белого над $\mathbb{C}$. [13]*

Определение 1.3.3. Для пары Белого (X, β) над $\mathbb{C}$ дробно-линейным преобразованием переведём критические точки в $\{0, 1, \infty\}$. Рассмотрим прообраз $\beta^{-1}([0, 1])$ отрезка $[0, 1]$. Он является картой на X . Раскрасим вершины $\beta^{-1}(0)$ в чёрный цвет, а $\beta^{-1}(1)$ белый. Тогда получившийся детский рисунок будем называть *соответствующим* (X, β) .

Теорема 1.3.4. *Торический рисунок центрально симметричен тогда и только тогда, когда некоторая его модель соответствует эллиптической кривой, заданной уравнением $y^2 = P(x)$, где $P \in \overline{\mathbb{Q}}[x]$ и функции Белого, зависящей только от x . [13]*

Пример 1.3.5. Рассмотрим пару Белого, заданную уравнениями:

$$\begin{aligned}\mathcal{X} : y^2 &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \\ \beta &= \frac{1 - (1 - x)y}{2}\end{aligned}$$

Эта пара соответствуют торическому центрально симметричному рисунку с набором валентностей $(3, 1|3, 1|4)$, см рис. 2.2 (см. [22])

Теорема 1.3.6 (Белый). *Любая пара Белого (X, β) над $\mathbb{C}$ допускает модель над полем алгебраических чисел $\overline{\mathbb{Q}}$*

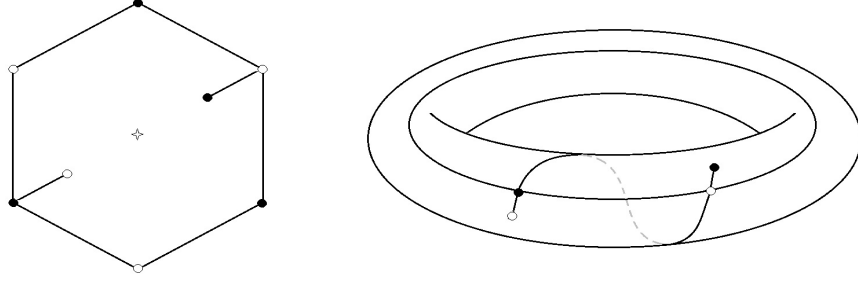


Рис. 1.2: Центральносимметричный рисунок с набором валентностей $(3, 1|3, 1|4)$. Противоположные стороны шестиугольника склеены.

Предыдущая теорема позволяет задать на парах Белого и соответственно на детских рисунках действие абсолютной группы Галуа $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Орбиты при этом действии называются орбитами Галуа детских рисунков.

Сразу заметим, что набор валентностей рисунка является Галуа-инвариантом, так как кратности нулей β не меняются при действии $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Также Галуа-инвариантами являются свойства центральной симметричности и самодвойственности [23].

Определение 1.3.7. морфизмом из пары Белого в $(\mathcal{X}_1, \beta_1)$ в пару Белого $(\mathcal{X}_2, \beta_2)$ называется морфизм кривых $\vartheta : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$, такой, что $\beta_1 = \beta_2 \circ \vartheta$, то есть диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_1 & \xrightarrow{\vartheta} & \mathcal{X}_2 \\ & \searrow \beta_1 & \swarrow \beta_2 \\ & \mathbb{P}^1(\mathbb{k}) & \end{array}$$

Определение 1.3.8. Пара Белого называется *импримитивной*, если из неё существует нетривиальный морфизм.

1.4 Пары Фрида

Определение 1.4.1. *Парой Фрида* (X, φ) называется алгебраическая кривая X над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ и непостоянная рациональная функция φ

(функция Фрида), заданная на X , имеющая не более четырёх критических значений.

Определение 1.4.2. Многочленом Золотарева мы будем называть многочлен $P(x)$ с тремя конечными критическими значениями. То есть такой многочлен, что $(\mathbb{P}^1(\mathbb{k}), P(x))$ является парой Фрида.

Замечание 1.4.3. Такое использование термина многочлены Золотарева не общепринято.

Пример 1.4.4. Пусть пусть $\mathcal{X}$ рациональна и t координата на ней, тогда функция $\varphi = t^2(t-1)(t-a)$, где $a \in \mathbb{k}$, является функцией Фрида за исключением конечного числа значений параметра a , в которых φ вырождается в функцию Белого.

Действительно, рассмотрим критические значения φ . Число k является критическим значением функции φ тогда и только тогда, когда дискриминант многочлена $\varphi - k$ по переменной t равен нулю. Функция φ является функцией Фрида, если она имеет три конечных критических значения, то есть все корни многочлена $\text{diskrim}_t(\varphi - s) \in \mathbb{k}[s]$ различны. Последнее же равносильно условию $\text{discrim}_s(\text{diskrim}_t(\varphi - k)) \neq 0$, которое нарушается лишь в конечном числе значений параметра a .

Определение 1.4.5. Семейством Фрида называется четверка $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \pi, \Phi)$, где $\mathcal{X}$ – поверхность, $\mathcal{B}$ – кривая, $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ и $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{k})$ морфизмы, такие, что общий слой π – гладкая полная кривая и ограничение Φ на слой $\pi^{-1}(b)$ – функция Фрида.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{X} & \\ \pi \swarrow & & \searrow \Phi \\ \mathcal{B} & & \mathbb{P}^1(\mathbb{k}) \end{array}$$

Пример 1.4.6. Рассмотрим пару Фрида из примера 1.4.4. Пусть $\mathcal{X}$ – аффинная плоскость и t и a координаты на ней. $\mathcal{B}$ и $\mathbb{P}^1(\mathbb{k})$ прямые с координатами a и t , а π и Φ естественные проекции. Тогда $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \pi, \Phi)$ – семейство Фрида.

Определение 1.4.7. Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \pi, \Phi)$ – семейство Фрида. Для $b \in \mathcal{B}$ рассмотрим функцию Фрида в слое над b , $\Phi|_{\pi^{-1}(b)}$, и её 4 критических значения в $\mathbb{P}^1$.

Обозначим двойное отношение этих как $\beta_{bas}(b)$, назовем получившеюся функцию β_{bas} *функцией Белого на базе семейства Фрида*.

Замечание 1.4.8. Поскольку на критических значениях функции Фрида в слое семейства нет естественного порядка, так определенная функция β_{bas} является шестизначной. Для того чтобы эта функция стала корректно определённой, в общем случае потребуется расширение базы семейства Фрида такое, что критические значения каждой пары Фрида будут занумерованы и соответственно однозначно определено будет их двойное отношение. Тогда β_{bas} будет являться функцией Белого на базе, поскольку она будет неразветвлена вне значений $\{0, 1, \infty\}$ по 5.5.1 из [23].

В данной работе два критических значения максимальной кратности выделены и полагаются в 0 и ∞ , и потому β_{bas} определена с точностью до перестановки двух оставшихся критических значений k_1, k_2 , то есть с точностью до обращения двойного отношения, которое равно k_1/k_2 или k_2/k_1 .

Определение 1.4.9. Рисунок на базе семейства Фрида (или мегакартой в [23]) $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \pi, \Phi)$ называется *детский рисунок на $\mathcal{B}$* , соответствующий функции Белого β_{bas} .

1.5 Паде-аппроксимации

Определение 1.5.1. *Паде-аппроксимацией* порядка $[n, m]$ аналитической функции $f(x)$ называется отношение двух многочленов $R_{[n,m]}(x) = \frac{p_{[n,m]}(x)}{q_{[n,m]}(x)}$, $\deg p_{[n,m]}(x) \leq m$, $\deg q_{[n,m]}(x) \leq n$, для которого $f^{(i)}(0) = R_{[n,m]}^{(i)}(0)$ при $0 \leq i \leq m + n$.

Замечание 1.5.2. Паде-аппроксимация функции $f(x)$ определяется коэффициентами ряда Тейлора $f(x)$, то есть фактически определена по формальному степенному ряду. Также это показывает, что определение корректно для любого поля констант.

Рассмотрим формальный степенной ряд $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$. Положим $c_i = 0$ при $i < 0$.

Тогда пусть

$$Q_{[n,m]}(x) = \begin{vmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \dots & c_n & c_{n+1} \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \dots & c_{n+1} & c_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{n+m-2} & c_{n+m-1} \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+m-1} & c_{n+m} \\ x^m & x^{m-1} & \dots & x & 1 \end{vmatrix}$$

и

$$P_{[n,m]}(x) = \begin{vmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \dots & c_n & c_{n+1} \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \dots & c_{n+1} & c_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{n+m-2} & c_{n+m-1} \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+m-1} & c_{n+m} \\ \sum_{i=0}^{n-m} c_i x^i & \sum_{i=0}^{n-m+1} c_i x^i & \dots & \sum_{i=0}^n c_i x^i \end{vmatrix}$$

Теорема 1.5.3 (Якоби). *Если*

$$Q_{[n,m]}(0) = \begin{vmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \dots & c_n \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{n+m-2} \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+m-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

то $\frac{P_{[m,n]}(x)}{Q_{[m,n]}(x)}$ является Паде-аппроксимацией ряда $\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$.

Доказательство. См. [5]. $\square$

Рассмотрим два примера, когда аппроксимации связаны с парами Белого:

Пример 1.5.4. Рассмотрим набор валентностей $(a, 1, \dots, 1 | b, 1, \dots, 1 | n)$, где $n = a + b - 1$. Положим координату точки с валентностью a в $x = 1$ и координату точки валентности b в $x = 0$. Таким образом, нужно найти многочлен Шабата $P(x)$ степени $n - 1$ с корнем $x = 1$ кратности a , таким что $P(x) - 1$ имеет корень $x = 0$ кратности b .

Положим $P(x) = Q(x) \cdot (1 - x)^a$, где $Q \in \mathbb{C}[x]$ и $\deg Q = b - 1$. Найдем $Q(x)$. Заметим, что $P(x) \equiv 1 \pmod{x^b}$, таким образом $Q(x) \equiv \frac{1}{(1-x)^a} \pmod{x^b}$.

Таким образом $Q(x)$ многочлен аппроксимирующий $\frac{1}{(1-x)^a}$ в $x = 0$ с точностью $O(x^b)$. Откуда, из коэффициентов ряда Тейлора $\frac{1}{(1-x)^a}$ в $x = 0$ получаем искомый многочлен Шабата:

$$P(x) = (1 + ax + \binom{a+1}{2}x^2 + \binom{a+2}{3}x^3 + \dots + \binom{n-1}{b-1}x^{b-1}) \cdot (1 - x)^a$$

Пример 1.5.5. Рассмотрим пару Белого рода 1 из примера 1.3.5 с набором валентностей $(4, 1|4, 1|5)$. Пусть соответствующая кривая Белого $\mathcal{X}$ задается уравнением $y^2 = f(x)$ и функция Белого $\beta = P(x) + Q(x)y$, $P, Q \in \mathbb{C}[x]$, причем выберем координаты так, что точка с координатами $x = 0$, $y = -1$ является нулем функции β кратности 4.

Тогда $P(x)/Q(x)$ является Паде-аппроксимацией порядка $[2, 1]$ функции $\sqrt{f(x)}$ в точке $x = 0$. Действительно, поскольку точка с координатами $x = 0$, $y = -1$ является нулем функции β кратности 4, имеем равенство $P(x) - Q(x)\sqrt{f(x)} = O(x^4)$. Откуда $P(x)/Q(x) - \sqrt{f} = O(x^4)$, причем $\deg P \leq 2$ и $\deg Q \leq 1$, то есть $P(x)/Q(x)$ – аппроксимация порядка $[2, 1]$ функции $\sqrt{f(x)}$.

И действительно, рассматривая конкретные значения их 1.3.5, легко убедиться, что $\frac{1}{1-x}$ является Паде-аппроксимацией порядка $[2, 1]$ функции $\sqrt{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3}$.

Подобную идею мы используем позднее в 3.6.

Глава 2

Пары Абеля

2.1 Определение пар Абеля

Определение 2.1.1. *Парой Абеля* называется пара $(\mathcal{X}, \alpha)$, где $\mathcal{X}$ – это полная гладкая алгебраическая кривая над полем $\mathbb{k}$ и α – ненулевая рациональная функция на ней, дивизор которой имеет вид $\operatorname{div}(\alpha) = nA - nB$. Такая функция α называется *функцией Абеля*.

Пример 2.1.2. Рассмотрим семейство эллиптических кривых $\mathcal{X}_t$

$$y^2 = (1 + tx)^2 - 4x^3$$

над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$, $\operatorname{char} \mathbb{k} \neq 2, 3$, и параметр $t \in \mathbb{k} \setminus \{-3\sqrt[3]{1}\}$. j -инвариант кривых этого семейства $j = -\frac{t^3(t^3+24)^3}{27+t^3}$.

Рассмотрим на кривых семейства функции

$$\alpha_t = \frac{1 + tx - y}{2}$$

Покажем, что на слоях семейства они являются функциями Абеля. Действительно, $\deg \alpha_t = 3$ и уравнение $\alpha_t = 0$ имеет лишь одно решение на каждой кривой семейства – точку с координатами $x = 0, y = 1$. Полусом же α_t является лишь бесконечная точка кривых.

Пример 2.1.3. Аналогично примеру 2.1.2 построим семейства пар Абеля имеющих род, больший 1. А именно рассмотрим g -параметрическое семейство кривых, заданных уравнением

$$y^2 = P(x)^2 - 4x^{2g+1}$$

где $\deg P \geq g$ и $P(0) = 1$. Пусть $\alpha = y - P(x)$. Тогда для общего слоя семейства (то есть лежащего над открытым по Зарискому подмножеством базы) α является функцией Абеля рода g .

Действительно, для общего многочлена $P(x)$, многочлен $P(x)^2 - 4x^{2g+1}$ не имеет кратных корней, откуда кривая в общем слое семейства имеет род g . Нулями α является только точка с координатами $x = 0, y = 0$, и для общего P эта точка неособа. Аналогично для полюса, лежащего в бесконечно удаленной точке. То есть $\operatorname{div}(\alpha) = nA - nB$, и α — функция Абеля.

2.2 Связь с квазиэллиптическими интегралами

В своей статье 1826 года Абель рассматривал возможность выразимости в элементарных функциях интеграла $\int \frac{\rho dz}{\sqrt{R}}$, где $\rho, R \in \mathbb{C}[z]$, и доказал следующую теорему:

Теорема 2.2.1. [Абель [1]] *Для заданного $R \in \mathbb{C}[z]$ существует многочлен $\rho \in \mathbb{C}[z]$, такой, что интеграл $\int \frac{\rho dz}{\sqrt{R}}$ выражается в элементарных функциях, тогда и только тогда, когда полиномиальное уравнение Пелля*

$$P^2 - R \cdot Q^2 = 1$$

имеет нетривиальное решение, то есть такое, что $\deg P > 0$.

Переформулируем ее на языке введенных нами пар Абеля:

Теорема 2.2.2. *Для заданного многочлен $R \in \mathbb{C}[z]$, тогда и только тогда существует многочлен $\rho \in \mathbb{C}[z]$, такой, что интеграл $\int \frac{\rho dz}{\sqrt{R}}$ выражается в элементарных функциях, когда на кривой $\mathcal{X}$, заданной уравнением $y^2 = R(x)$, существует функция Абеля α с нулем и полюсом только в бесконечно удаленных точках кривой $\mathcal{X}$.*

Доказательство. (P, Q) является нетривиальным решением уравнения $P^2 - R \cdot Q^2 = \text{const}$ тогда и только тогда, когда функция $\alpha = P + Qy$ не имеет нулей и полюсов в конечных точках кривой. Поскольку бесконечно удаленных точек только две, α является функцией Абеля на $\mathcal{X}$, нуль и полюс которой бесконечно удалены.

Таким образом, теорема 2.2.2 эквивалентна теореме 2.2.1 $\square$.

Замечание 2.2.3. Теорема 2.2.2 обосновывает и выбор нами названия "пара Абеля".

Пример 2.2.4. Рассмотрим пример 2.1.2. В нем нуль α_t расположен в точке с координатами $x = 0, y = 1$ и полюс в бесконечно удаленной точке. Поделим α_t на эллиптически сопряженную ей функцию:

$$\tilde{\alpha}_t = \frac{\alpha_t}{\alpha_t^*} = \frac{1 + tx - y}{1 + tx + y}$$

Функция $\tilde{\alpha}_t$ так же является функцией Абеля степени 3, но её нуль и полюс имеют координаты $x = 0$ и $y = \pm 1$, то есть эллиптически сопряжены. Сделаем замену переменных $u = 1/x, v = y/x^2$. Тогда уравнение пары Абеля $(\mathcal{X}_t, \tilde{\alpha}_t)$ примет вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_t : v^2 &= u^2 \cdot (u + t)^2 - 4u \\ \tilde{\alpha}_t &= \frac{1}{2} (u \cdot (u + t)^2 - 2 - (u + t)v)\end{aligned}$$

Заметим, что в координатах (u, v) пара Абеля $(\mathcal{X}_t, \tilde{\alpha}_t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2.2, её нули и полюса находятся в бесконечно удалённых точках. Выпишем соответствующее семейство интегралов, берущихся в элементарных функциях:

$$\int \frac{(3u + t)du}{\sqrt{u^2 \cdot (u + t)^2 - 4u}} = \ln \left(u \cdot (u + t)^2 - 2 - (u + t)\sqrt{u^2 \cdot (u + t)^2 - 4u} \right) + C$$

2.3 Категория пар Абеля

В зависимости от ситуации нам будет удобно использовать две категории пар Абеля, отличающиеся наборами морфизмов между объектами.

Определение 2.3.1. Назовем f *морфизмом* в категории $\mathcal{ABEL}_{\mathbb{k}}$ из пары Абеля $(\mathcal{X}_1, \alpha_1)$ в пару Абеля $(\mathcal{X}_2, \alpha_2)$, если $f : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$ является морфизмом кривых и выполнено равенство $\alpha_1 = \alpha_2 \circ f$ то есть, если коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_1 & \xrightarrow{f} & \mathcal{X}_2 \\ & \searrow \alpha_1 & \swarrow \alpha_2 \\ & \mathbb{P}^1(\mathbb{k}) & \end{array}$$

Определение 2.3.2. Пусть $f : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$ является морфизмом кривых и $\lambda \in PSL_2(\mathbb{k})$. Мы называем пару $\mathcal{F} = (f, \lambda)$ *морфизмом* в категории $\mathcal{Abel}_{\mathbb{k}}$ из пары Абеля $(\mathcal{X}_1, \alpha_1)$ в пару Абеля $(\mathcal{X}_2, \alpha_2)$, если $\lambda \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ f$ то есть, если коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \alpha_2 \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{k}) & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{P}^1(\mathbb{k}) \end{array}$$

Выведем утверждение 2.3.3 о морфизмах пар Абеля, полезное для дальнейшего. Пункт 2.3.3 (i) иллюстрирует различие между категориями $\mathcal{ABEL}_{\mathbb{k}}$ и $\mathcal{Abel}_{\mathbb{k}}$.

Утверждение 2.3.3. (i) Пары $(\mathcal{X}, \alpha)$ и пары $(\mathcal{X}, C\alpha)$, $(\mathcal{X}, C/\alpha)$ изоморфны для любого $C \in \mathbb{k}^\times$ в категории $\mathcal{Abel}_{\mathbb{k}}$.

(ii) Пусть $(\mathcal{X}, \alpha)$ пара Абеля и $k \in \mathbb{N}$, тогда $(\mathcal{X}, \alpha^k)$ так же является парой Абеля.

(iii) Функция Абеля $(\mathcal{X}, \alpha)$ является k -ой степенью некоторой функции Абеля на кривой $\mathcal{X}$, $k \in \mathbb{N}$, тогда и только тогда, когда в категории $\mathcal{ABEL}_{\mathbb{k}}$ существует морфизм из пары $(\mathcal{X}, \alpha)$ в пару $(\mathbb{P}^1(\mathbb{k}), x^k)$, где x некоторая координата на $\mathbb{P}^1(\mathbb{k})$.

Доказательство. В обозначениях из определений морфизмов пар Абеля (i), $f = id$, $\lambda(x) = C \cdot x$ или C/x .

(ii), $\operatorname{div}(\alpha^k) = k \cdot \alpha = nkA - nkB$.

(iii) В категории $\mathcal{ABEL}_{\mathbb{k}}$ морфизм из $(\mathcal{X}, \alpha)$ в пару $(\mathbb{P}^1(\mathbb{k}), x^k)$ существует тогда и только тогда, когда существует $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{k})$, такой, что $\alpha = x^k \circ f$, т.е. $f^k = \alpha$, откуда f так же функция Абеля. $\square$

Пример 2.3.4. Рассмотрим семейство из примера 2.1.2. Тогда пары в нем в различных слоях t_1, t_2 изоморфны в категории $\mathcal{ABEL}_{\mathbb{k}}$ тогда и только тогда, когда $t_2/t_1 \in \sqrt[3]{1}$. Действительно, изоморфизм в категории $\mathcal{ABEL}_{\mathbb{k}}$ между парами Абеля в слоях над t_1 и t_2 должен сохранять пару точек, в которых соответствующие функции Абеля имеют ноль и полюс. В обозначениях 2.1.2, рассмотрим координаты этих нулей и полюсов и получим, что изоморфизм задаётся заменой координат $x_1 = c \cdot x_2, y_1 = y_2, c \in \mathbb{k}^\times$. Из уравнения кривых семейства, получим, что такая замена возможна тогда и только тогда, когда $c^3 = 1$. $\square$

2.4 Свойства пар Абеля. Пространство модулей пар Абеля.

Утверждение 2.4.1. Если род кривой $\mathcal{X}$ равен 0, то любая функция Абеля на $\mathcal{X}$ имеет вид $\alpha = x^n$, где x – некоторая координата на $\mathcal{X}$

Доказательство. Пусть $\operatorname{div} \alpha = nA - nB$. Рассмотрим на $\mathcal{X}$ координату t , такую, что $t(A) = 0$ и $t(B) = \infty$. Тогда, $\alpha = C \cdot t^n$. Тогда $x := \sqrt[n]{C} \cdot t$ также координата на $\mathcal{X}$, и $\alpha = x^n$. $\square$

Утверждение 2.4.2. Для любой кривой $\mathcal{X}$ рода 1 и любого натурального $n > 2$, $\operatorname{char} \mathbb{k} \nmid n$, в $\mathbb{k}(\mathcal{X})$ существует ровно $\frac{n^2-1}{\#\operatorname{Aut}_0(\mathcal{X})}$ неизоморфных в категории $\mathcal{ABEL}_{\mathbb{k}}$ функций Абеля степени n , где $\operatorname{Aut}_0(\mathcal{X})$ группа автоморфизмов кривой $\mathcal{X}$, имеющих неподвижную точку.

Доказательство. Действительно, рассмотрим дивизоры из $\operatorname{Pic}^0(\mathcal{X}) \simeq \mathcal{X}$ имеющие вид $nA - nB$ и линейно эквивалентные 0. Они соответствуют точкам

кручения порядка n из якобиана кривой $\mathcal{X}$, $\text{tors}_n(J(\mathcal{X})) \setminus 0$. $J(\mathcal{X})$ изоморфен $\mathcal{X}$ и таких точек $n^2 - 1$, т.е. $n^2 - 1$ функций Абеля.

Осталось рассмотреть изоморфизмы между получившимися функциями Абеля. Поместим их полюса в бесконечно удаленную точку. Пусть между двумя функциями Абеля из этих $n^2 - 1$ есть изоморфизм. В обозначениях определения определения 2.3.2, этот изоморфизм задает автоморфизм $\lambda \in \text{Aut}_0(\mathcal{X})$. И наоборот, элементы $\text{Aut}_0(\mathcal{X})$ задают действие на $\text{tors}_n(J(\mathcal{X})) \setminus 0$. Поскольку стабилизаторы этого действия и являются автоморфизмами пар Абеля, количество функций Абеля с учетом автоморфизмов равно $\frac{n^2-1}{\#\text{Aut}_0(\mathcal{X})}$. $\square$

Определение 2.4.3. Определим пространство модулей пар Абеля как подмножество пространства Гурвица ([23]).

Рассматриваемые функции α имеют две критические точки максимальной кратности, поэтому все рассматриваемые пары лежат в замыкании страта пространства Гурвица $\mathcal{HUR}_{g,n}$ с паспортом

$$\begin{pmatrix} n & n & 2 & 2 & \dots & 2 \\ & & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема 2.4.4. *Размерность пространства модулей пар Абеля степени n и рода g равна $2g - 1$.*

Доказательство. Общая пара Абеля рода g имеет $2g + 2$ критических значений. Это задает отображение из общих пар Абеля степени n и рода g , т.е. открытого по Зарисскому подмножества пространства модулей пар Абеля степени n рода g , в $\mathcal{M}_{0,2g+2}$. Это отображение является конечнолистным накрытием и размерность $\mathcal{M}_{0,2g+2}$ равна $2g - 1$. $\square$

Следствие 2.4.5. *Существует кривая $\mathcal{X}$ рода 3, на которой не существует пары Абеля.*

Доказательство. Размерность пространства модулей $\mathcal{M}_3$ алгебраических кривых рода 3 равна 6. Из предыдущего утверждения размерность пространства

модулей пар Абеля рода 3 и любой степени равна 5. То есть подмножество $\mathcal{M}_3$, состоящее из кривых, содержащих функцию Абеля степени n , имеет положительную коразмерность. $\square$

2.5 Прimitives пары Абеля

Определение 2.5.1. Пара Абеля $(\mathcal{X}, \alpha)$ называется *импримитивной*, если она раскладывается в композицию регулярных морфизмов $\alpha_2 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ и $\alpha_1 : \mathcal{Y} \rightarrow P^1(\mathbb{k})$,

$$\alpha = \alpha_1 \circ \alpha_2$$

причем $\deg \alpha > \deg \alpha_1$ (чтобы исключить из этого определения пары с автоморфизмами). Т.е. коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\alpha_2} & \mathcal{Y} \\ & \searrow \alpha & \swarrow \alpha_1 \\ & P^1(\mathbb{k}) & \end{array}$$

Если такого разложения не существует, то пара Абеля называется *примитивной*.

Утверждение 2.5.2. Для импримитивной пары Абеля $(\mathcal{X}, \alpha)$ пара $(\mathcal{Y}, \alpha_1)$ из определения 2.5.1 также является парой Абеля.

Доказательство. Прообразы $\alpha^{-1}(0)$ и $\alpha^{-1}(\infty)$ содержат по одной точке, A и B , то есть $\alpha_2^{-1}(\alpha_1^{-1}(0)) = A$ и $\alpha_2^{-1}(\alpha_1^{-1}(\infty)) = B$. Откуда прообразы $\alpha_1^{-1}(0)$ и $\alpha_1^{-1}(\infty)$ так же содержат по одной точке, пусть $\alpha_1^{-1}(0) = C$ и $\alpha_1^{-1}(\infty) = D$ и $\deg \alpha_1 = k$, тогда $\operatorname{div}(\alpha) = kC - kD$, то есть $(\mathcal{Y}, \alpha_1)$ – пара Абеля. $\square$

Утверждение 2.5.3. Пара Абеля $(\mathcal{X}, \alpha)$ рода 1 является импримитивной тогда и только тогда, когда $\exists (X, \alpha_0)$ и $\exists k \in \mathbb{N}$, $k > 2$, такие что $\alpha = \alpha_0^k$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{div}(\alpha) = nA - nB$. Пусть $\alpha = \alpha_1 \circ \alpha_2$, где $\alpha_2 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ и $\alpha_1 : \mathcal{Y} \rightarrow P^1(\mathbb{k})$. По 2.5.2 $(\mathcal{Y}, \alpha_1)$ является парой Абеля. В силу 2.4.1

достаточно доказать, что род $\mathcal{Y}$ равен 0. Применив к отображению α_2 формулу Римана-Гурвица, получим

$$2g(\mathcal{X}) - 2 = \deg \alpha_2 \cdot (2g(\mathcal{Y}) - 2) + \sum_{P \in \mathcal{Y}} (e_P - 1)$$

где e_P кратность точки P при отображении α_2 . Левая часть равна 0, в правой части сумма $\sum_{P \in \mathcal{Y}} (e_P - 1)$ больше нуля, откуда имеем $2g(\mathcal{Y}) - 2 < 0$, т.е. $g(\mathcal{Y}) = 0$.

□

Замечание 2.5.4. Для пар Абеля, род которых больше 1, предыдущее утверждение становится неверным.

Действительно, рассмотрим семейство эллиптических кривых $\mathcal{X}_t$ из примера 2.1.2, заданных уравнениями $y^2 = (1 + tx)^2 - 4x^3$, и семейство функций на них $\alpha_t = \frac{y-1-tx}{y+1+tx}$. Эти функции будут функциями Абеля, так как $\operatorname{div}(\alpha_t) = 3A - 3B$, где A_t имеет координаты $x = 0, y = 1$ и $B_t - x = 0, y = -1$.

Рассмотрим теперь семейство кривых $\mathcal{Y}_t$, заданных уравнением $v^2 = (1 + tu^3)^2 - 4u^9$. Кривые $\mathcal{Y}_t$ имеют род 4 (при общем t и ограничениях на характеристику поля из примера 2.1.2) и накрывают семейство $\mathcal{X}_t$. Накрытие $\pi : \mathcal{Y}_t \rightarrow \mathcal{X}_t$ переводит точку (u, v, t) в $\pi(u, v, t) = (u^3, v, t)$.

Рассмотрим теперь $\alpha'_t = \alpha_t \circ \pi = \frac{v-1-tu^3}{v+1+tu^3} = \frac{2(1+tu^3)^2 - 4u^9 - 2(1+tu^3)v}{-4u^9}$. Тогда $(\mathcal{Y}_t, \alpha'_t)$ являются парами Абеля, действительно $\operatorname{div} \alpha'_t = 9\pi^{-1}(A_t) - 9\pi^{-1}(B_t)$.

Поскольку функция α'_t раскладывается в композицию $\alpha_t \circ \pi$, пары этого семейства являются импримитивными. Покажем, что никакая из них не является степенью другой функции:

Действительно, степень α'_t равна 9 и единственный возможный извлекаемый из α'_t корень должен иметь степень 3. Но функция α'_t может быть кубом тогда и только тогда, когда кубом будет функция $-4u^9\alpha'_t = 2(1 + tu^3)^2 - 4u^9 - 2(1 + tu^3)v$. Но корень третьей степени из последней функции должен иметь вид $P(u) + Q(u)v$, $P, Q \in \mathbb{K}[u]$, степень 6 и $Q \neq 0$, что невозможно.

Определение 2.5.5. Рассмотрим подкатегорию категории пар Абеля состоящую, из пар вида $(\mathbb{P}^1(\mathbb{K}), x^k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим отображение $\mathcal{POWER}$, переводящее пару Абеля $(\mathcal{X}, \alpha)$ в пару $(\mathbb{P}^1(\mathbb{k}), x^k)$, $k \in \mathbb{N}$, где k наибольшее число, такое что существует морфизм из $(\mathcal{X}, \alpha)$ в пару $(\mathbb{P}^1(\mathbb{k}), x^k)$.

$(\mathcal{X}, \alpha)$ – пара Абеля. Будем обозначать как $\text{Power}(\alpha)$ степень пары $\mathcal{POWER}(\alpha)$ т.е. наибольшее натуральное число такое, что $\exists \alpha_0 \in \mathbb{k}(\mathcal{X}) : \alpha_0^k = \alpha$.

Утверждение 2.5.6. *Рассмотрим натуральные числа $\mathbb{N}$ как частично упорядоченное множество с порядком $a \prec b \Leftrightarrow a \mid b$, и пусть $\mathcal{N}$ соответствующая этому частично упорядоченному множеству малая категория. Тогда:*

(i) $\mathcal{POWER} : \mathcal{ABEL} \rightarrow \mathcal{N}$ является функтором.

(ii) Пусть $(\mathcal{X}, \alpha)$ – пара Абеля. Пусть также для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и $\alpha_1 \in \mathbb{k}(\mathcal{X})$, $\alpha_1^m = \alpha$. Тогда $m \mid \text{Power}(\alpha) \mid \deg \alpha$.

Доказательство. (i) Пусть дан морфизм γ между парами Абеля $(\mathcal{X}, \alpha_1)$ и $(\mathcal{Y}, \alpha_2)$ в категории $\mathcal{ABEL}$. Пусть $\text{Power}(\alpha_1) = n$ и $\text{Power}(\alpha_2) = m$. Пусть $\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1^n$ и $\alpha_2 = \tilde{\alpha}_2^m$.

Нужно доказать, что в категории $\mathcal{N}$ есть морфизм из n в m , т.е. $m \mid n$. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{Y} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_2} & \mathbb{P}^1(\mathbb{k}) \\ & \searrow \alpha_1 & \downarrow \alpha_2 & \swarrow x^m & \\ & & \mathbb{P}^1(\mathbb{k}) & & \end{array} \quad (*)$$

Обозначим $\alpha_3 = \tilde{\alpha}_2 \circ \gamma$, α функция Абеля на $\mathcal{X}$, . Из коммутативной диаграммы $(*)$, $\alpha_1 = \alpha_3^m$. Существуют $a, b \in \mathbb{Z}$ такие, что $am + bn = \text{НОД}(m, n)$. Пусть $\alpha_4 := \tilde{\alpha}_1^a \cdot \alpha_3^b$. Тогда α_4 так же функция Абеля, т.к. её дивизор имеет тот же носитель, что и у α_1 , α_3 и $\tilde{\alpha}_1$, состоящий из нуля и полюса α_1 . При этом $\alpha_4^{mn} = \alpha_1^{am+bn} = \alpha_1^{\text{НОД}(m,n)}$. Т.е. $\alpha_4^{\text{НОК}(m,n)} = \alpha_1$.

Из максимальности n , получаем, что $\text{НОК}(m, n) \leq n$. И значит $m \mid n$.

(ii) Это условие равносильно существованию морфизма из $(\mathcal{X}, \alpha)$ в $(\mathbb{P}^1(\mathbb{k}), x^m)$. Потому из (i) следует, что $m \mid \text{Power}(\alpha)$. С другой стороны $\text{Power}(\alpha) \cdot \deg \alpha_0 = \deg \alpha$, и $\text{Power}(\alpha) \mid \deg \alpha$. $\square$

Пример 2.5.7. Рассмотрим пары Абеля из примера 2.1.2. Для них $\text{Power}(\alpha_t) = 1$, поскольку их степень 3 является простой и на эллиптических кривых нет функций степени 1.

Определение 2.5.8. Пси-функцией Дедекнда называется функция:

$$\psi(n) = n \cdot \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

Теорема 2.5.9. Для любой кривой $\mathcal{X}$ рода 1 и любого натурального $n > 1$, $\text{char } \mathbb{k} \nmid n$, в $\mathbb{k}(\mathcal{X})$ существует ровно $\frac{\varphi(n)\psi(n)}{\#\text{Aut}_0(\mathcal{X})}$ неизоморфных примитивных функций Абеля степени n .

Доказательство. По 2.4.2, в $\mathbb{k}(\mathcal{X})$ есть ровно $\frac{n^2-1}{\#\text{Aut}_0(\mathcal{X})}$ неизоморфных пар Абеля степени n . Исключим из их числа импримитивные. Пусть $f(n)$ количество неизоморфных примитивных функций Абеля степени n в $\mathbb{k}(\mathcal{X})$. По 2.5.3, все импримитивные пары Абеля степени n являются степенями примитивных пар Абеля, степени которых делят n . Таким образом

$$\frac{n^2 - 1}{\#\text{Aut}_0(\mathcal{X})} = \sum_{d|n} f(d)$$

Воспользуемся теперь формулой обращения Мебиуса [?]:

$$f(n) = \sum_{d|n} \frac{d^2 - 1}{\#\text{Aut}_0(\mathcal{X})} \cdot \mu(n/d) = \frac{1}{\#\text{Aut}_0(\mathcal{X})} \sum_{d|n} d^2 \cdot \mu(n/d) = \frac{\varphi(n)\psi(n)}{\#\text{Aut}_0(\mathcal{X})}$$

□

2.6 Задание пары Абеля уравнением

Пусть $\mathcal{X}$ – неприводимая неособая кривая над $\mathbb{k}$ и $\alpha \in \mathbb{k}[\mathcal{X}]$ – рациональная функция на ней степени $\deg \alpha = n$, $\text{char } \mathbb{k} \nmid n$.

Теорема 2.6.1. Пусть $(\mathcal{X}, \alpha)$ – пара Абеля степени n . Тогда уравнение кривой $\mathcal{X}$ можно записать в виде

$$\alpha^k + \alpha^{k-1}P_{k-1}(x) + \cdots + \alpha P_1(x) + x^n = 0$$

где $P_i(x) \in \mathbb{k}[x]$ и $\deg P_i \leq n$.

Доказательство. По определению функции Абеля, $\mathbb{k}(\mathcal{X})/\mathbb{k}(\alpha)$ – конечное сепарабельное расширение полей. По теореме о примитивном элементе ([2]) для этого расширения есть примитивный элемент $x \in \mathbb{k}(\mathcal{X})$, такой что $\mathbb{k}(\mathcal{X}) = \mathbb{k}(x, \alpha)$.

Пусть $\operatorname{div}(\alpha) = nA - nB$. Рассмотрим значения x в A и B . Если эти значения различны, то, применяя дробно-линейное преобразование x , будем считать, что $x(A) = 0$ и $x(B) = \infty$. Если $x(A) = x(B)$, то заменим x на $x - x(A) + \alpha$, так же являющийся примитивным элементом. Таким образом в любом случае можно полагать, что $x(A) = 0$ и $x(B) = \infty$.

Поскольку $\operatorname{trdeg} \mathbb{k}(x, \alpha)/\mathbb{k} = 1$, x и α связаны полиномиальным уравнением $F(\alpha, x) = 0$.

Разложим F по степеням α : $F = \alpha^k P_k(x) + \alpha^{k-1} P_{k-1}(x) + \dots + \alpha P_1(x) + P_0(x)$. Поскольку $\deg \alpha = n$, имеем $\deg P_i \leq n$. Далее из условия $\operatorname{div}(\alpha) = nA - nC$ получаем $P_0(x) = x^n$ и $P_k(x) = 1$. $\square$

Замечание 2.6.2. Уравнение кривой из теоремы 2.6.1 могут задавать особую кривую, нормализацией которой будет кривая $\mathcal{X}$.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь гиперэллиптические пары Абеля, потому рассмотрим этот случай подробнее.

Теорема 2.6.3. Пусть характеристика основного поля $\operatorname{char} \mathbb{k} \neq 2$, а $(\mathcal{X}, \alpha)$ – гиперэллиптическая пара Абеля степени n . Пусть $\tau : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ гиперэллиптическая инволюция и $\operatorname{div}(\alpha) = nA - nB$. Тогда существует $P(x) \in \mathbb{k}[x]$, такое что $\deg P \leq n$ и

(i) Если $A^\tau \neq B$, то уравнение кривой $\mathcal{X}$ можно записать в виде

$$\alpha^2 + \alpha P(x) + x^n = 0$$

(ii) Если $A^\tau = B$, то уравнение кривой $\mathcal{X}$ можно записать в виде

$$\alpha^2 + \alpha P(x) + 1 = 0$$

Доказательство. Введём на кривой $\mathcal{X}$ гиперэллиптические координаты, (x, y) , так что её уравнение примет вид $y^2 = f(x)$, инволюция $\tau(x, y) = (x, -y)$, а B будет бесконечно удалённой точкой, $x(B) = \infty$. Тогда α примет вид $P_1(x) + Q(x)y$. Заметим, что $\alpha \circ \tau$ также функция Абеля равная $P_1(x) - Q(x)y$ и $\operatorname{div}(\alpha \circ \tau) = nA^\tau - nB^\tau$. Рассмотрим $R = \alpha \cdot \alpha \circ \tau = P_1^2(x) - f(x) \cdot Q^2(x)$. В случае (i) имеем $\operatorname{div}(R) = nA + nA^\tau - nB - nb^\tau$, в случае (ii) – $\operatorname{div}(R) = 0$. Таким образом $R = Cx^n$ в случае (i) и $R = C$ в случае (ii), где $C \in \mathbb{k}^\times$.

Перейдем теперь от координат (x, y) к координатам (x, α) . Поскольку $Q(x)y = \alpha - P(x)$, эта замена является бирациональной эквивалентностью и уравнение кривой можно переписать в виде $(\alpha - P(x))^2 - f(x) \cdot Q_1^2(x) = 0$, то есть $\alpha^2 - 2P_1(x)\alpha + R(x) = 0$.

Подставим сюда найденное выражение для $R(x)$ и приведём уравнение к искомому виду линейной заменой координаты x . $\square$

Пример 2.6.4. Рассмотрим семейство из примера 2.1.2. Перейдем в уравнении кривой $\mathcal{X}$ от переменных (x, y) к переменным (x, α) , подставив в исходное уравнение. $y = 1 + tx - 2\alpha$. Получим

$$\alpha^2 - (1 + tx)\alpha + x^3 = 0$$

Теорема 2.6.5. Пусть кривая $\mathcal{X}$ задана уравнением $\alpha^2 + \alpha P(x) + x^n = 0$, где $\deg P \leq n$ и $\operatorname{char} \mathbb{k} \neq 2$. Тогда $(\mathcal{X}, \alpha)$ – пара Абеля в одном из пяти случаев:

- (1) $P(0) \neq 0$ и $\deg P = n$.
- (2) n нечётно, $P(0) \neq 0$ и $\deg P < n/2$.
- (3) n чётно, $P(0) \neq 0$, $\deg P = n/2$ и $P(x) = \pm 2x^{n/2} + L(x)$, где $\deg P - \deg L$ нечётно.
- (4) n нечётно, $\deg P = n$, $P = x^k \cdot L(x)$, где $k > n/2$ и $L(x) \in \mathbb{k}[x]$
- (5) n чётно, $\deg P = n$, $P = x^k \cdot L(x)$, где $k = n/2$ и $L(x) \in \mathbb{k}[x]$, $L(0) = \pm 2 + x^s \cdot S(x)$, где $S(0) \neq 0$ и s нечётно.

Случаи (2),(4) и (3),(5) переходят друг в друга при замене $\alpha = 1/\gamma$ и $x = 1/u$.

Доказательство. Из вида уравнения кривой, если координата $\alpha = 0$, то и $x = 0$. Найдём, когда нормализация кривой, заданной уравнением $\alpha^2 + \alpha P(x) + x^n = 0$ имеет ровно одну точку, в которой $\alpha = 0$. Преобразуем кривую к виду

$$(2\alpha - P(x))^2 = P^2(x) - 4x^n$$

Пусть $R(x) = P^2(x) - 4x^n$ и k – наибольшее целое число, такое что $x^k \mid R(x)$. Тогда точка в которой $\alpha = 0$ единственна тогда и только тогда, когда-либо $k = 0$, либо k нечётно. Действительно, в первом случае, при $k = 0$ есть две неособые точки с координатой $x = 0$, в одной из которых $\alpha = 0$. Во втором случае, $k > 0$, мы имеем особенность, которая в нормализации соответствует одной или двум точкам в зависимости от чётности k .

Аналогично, заметим, что замена $\alpha = 1/\gamma$ и $x = 1/u$ переводит уравнение кривой в

$$\gamma^2 + u^n P(1/u)\gamma + u^n = 0$$

При этом координаты нуля и полюса и полюса α меняются местами. Пусть m – наибольшее целое число такое, что $u^m \mid u^n P(1/u)$. Тогда, аналогично предыдущему, точка, в которой $\alpha = \infty$, единственна тогда и только тогда, когда либо $m = 0$, либо m нечётно.

Далее, перебирая возможные значения m и k , получим список из условия теоремы. $\square$

Теорема 2.6.6. Пусть $(\mathcal{X}, \alpha)$ – пара Абеля рода 1 и степени n , $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$. Тогда уравнение $\mathcal{X}$ можно представить в виде $\alpha^2 + \alpha P(x) + x^n = 0$, где $P(0) \neq 0$, $\deg P \leq n/2$, причем для случая чётного n так же требуется $P(x) = \pm 2x^{n/2} + L(x)$, где $\deg P - \deg L$ нечетно.

Доказательство. Выберем уравнение кривой $\mathcal{X}$ в нормальной форме Вейерштрасса, $y^2 = f(x)$, так что полюс функции α будет расположен в бесконечно удаленной точке. Аналогично 2.6.3, α примет вид $P(x) + Q(x)y$, причем $\deg P \leq n/2$. Аналогично 2.6.3 преобразуем уравнение к виду $\alpha^2 + \alpha P(x) + x^n = 0$.

Пользуясь 2.6.5 получим требуемые условия на $P(x)$. $\square$.

Теорема 2.6.7. *Представление эллиптической пары Абеля в виде $\alpha^2 + \alpha P(x) + x^n = 0$ единственно с точностью до замен $P(x) \rightarrow \pm P(x)$ и $x \rightarrow \zeta x$, где ζ корень из 1 n -ой степени.*

Доказательство. Пусть для пары Абеля (X, α) с уравнением $\alpha^2 + \alpha P(x) + x^n = 0$ есть другое представление $\alpha_1^2 + \alpha_1 P_1(x_1) + x_1^n = 0$. Тогда $\alpha_1 = \alpha + U(x)$ и $x_1 = \zeta x$. Откуда получим, что $C^n = 1$ и $U(x)(U(x) + P(x)) = 0$. $\square$

Утверждение 2.6.8. *Пусть пара $(\mathcal{X}, \alpha)$ задана уравнением $\alpha^2 + \alpha P(x) + x^n = 0$ и (x_0, α_0) точка на кривой $\mathcal{X}$, причем $\alpha_0 \neq 0$. Это точка является критической точкой α , если x_0 удовлетворяет уравнению*

$$n^2 x_0^{n-1} - nP(x_0)P'(x_0) + x_0(P'(x_0))^2 = 0$$

Доказательство. Пусть $F(x, \alpha) = \alpha^2 + \alpha P(x) + x^n$. Вычисляя дифференциал F , получим:

$$(2\alpha + P(x)) d\alpha + (\alpha P'(x) + nx^{n-1}) dx = 0$$

В критической точке x_0 имеем $d\alpha$, потому получим

$$\alpha_0 = -\frac{nx_0^{n-1}}{P'(x_0)}$$

подставляя это условие в $F(x_0, \alpha_0) = 0$, и сокращая равенство на степень x_0 , получим требуемое равенство. $\square$

Замечание 2.6.9. Удовлетворять условию из утверждения 2.6.8 будут также особые точки кривой $\alpha^2 + \alpha P(x) + x^n = 0$, потому для поиска критических точек функции α на нормализации кривой, часть корней условия из утверждения 2.6.8 следует исключить.

Обозначение 2.6.10. Введем последовательность многочленов

$$R_n(x) := -\left(\frac{-1 + \sqrt{1-4x}}{2}\right)^n - \left(\frac{-1 - \sqrt{1-4x}}{2}\right)^n = -2^{1-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}} T_n\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

где T_n – многочлен Чебышева. Например, $R_0(x) = 2$, $R_1(x) = 1$, $R_2(x) = 2x - 1$, $R_3(x) = -3x + 1$, $R_4(x) = -2x^2 + 4x - 1$, $R_5(x) = 1 - 5x + 5x^2, \dots$

Утверждение 2.6.11. (i) Пусть алгебраическая кривая $\mathcal{X}$ над $\mathbb{K}$ задана уравнением $\alpha^2 + \alpha P(x) + x^n = 0$, где $\deg P \leq n/2$ и $\text{char } \mathbb{K} \nmid n$. Тогда $\mathcal{X}$ является рациональной кривой тогда и только тогда, когда $P(x) = C^{2k-n} x^k R_{n-2k}(C^2 x)$, где $k \leq n/2$ and $C \in \mathbb{K}$.

(ii) Пусть пара $(\mathcal{X}, \alpha)$ задана уравнением $\alpha^2 + \alpha x^k R_{n-2k}(x) + x^n = 0$. Пусть $\mathcal{X}$ является рациональной кривой, тогда существует $t \in \mathbb{K}(\mathcal{X})$ такое, что $\alpha = t^{n-k}(-t-1)^k$.

(iii) Особые точки рациональной кривой $\alpha^2 + \alpha R_n(x) + x^n = 0$ являются простыми. Разрешим эти особенности и введем координату $z := \frac{t}{-1-t}$. Тогда особые точки соответствуют парам точек таких, что их z -координаты являются взаимно обратными корнями из 1 степени n .

Доказательство. (i) Во-первых, пусть $P(0) \neq 0$, и A – гладкая точка кривой $\mathcal{X}$. В обозначениях предыдущего доказательства, имеем $\frac{P^2(x)}{4} - x^n = f(x)Q^2(x)$. Кривая $\mathcal{X}$ является рациональной тогда и только тогда, когда $\deg f \leq 2$.

Далее сделаем замену переменных в тождестве $\frac{P^2}{4} - x^n = f(x)Q^2(x)$; пусть $x := \frac{1}{t^2}$. Тогда $(t^n \cdot P(\frac{1}{t^2})/2)^2 = f(\frac{1}{t^2})Q^2(\frac{1}{t^2}) \cdot t^{2n} + 1$. Из этого тождества мы получаем, что многочлен $t^n \cdot P(\frac{1}{t^2})/2$ имеет $n - \deg Q$ простых критических точек со значениями ± 1 (эти точки – корни $Q(\frac{1}{t^2}) \cdot t^n$). Поскольку $\deg Q = [(n-1)/2]$, то корни $Q(\frac{1}{t^2}) \cdot t^n$ все критические значения $t^n \cdot P(\frac{1}{t^2})/2$ и он является многочленом Шабата с набором валентностей многочлена Чебышева. То есть $t^n \cdot P(\frac{1}{t^2}) = 2T_n(\text{Const} \cdot t)$.

Теперь рассмотрим случай $P(0) = 0$. То есть $P(x) = x^k P_1(x)$, $P_1(0) \neq 0$. Мы сведем этот случай к предыдущему заменой переменных $\alpha_1 = \alpha/x^k$.

(ii) $t = \frac{-1+\sqrt{1-4x}}{2} = -\frac{2\alpha+2Q+P}{4Q} \in \mathbb{K}(\mathcal{X})$. Тогда $t(-t-1) = x$ и $t^m + (-1-t)^m = R_m(x)$. То есть $\alpha = x^k t^{n-2k} = t^{n-k}(-t-1)^k$.

(iii) Действительно, особые точки являются корнями $Q(x)$, где $Q(x) = \sqrt{R_n^2(x)/4 - x^n}$. При замене $z := \frac{t}{-1-t} = \frac{-1+\sqrt{1-4x}}{-1-\sqrt{1-4x}}$, $Q(x)$ переходит в $\pm \frac{z^n-1}{(z+1)^n}$, откуда и получаем требуемое утверждение. $\square$

2.7 Пары Абеля над $\mathbb{C}$ и их комбинаторное описание

В этом разделе мы будем рассматривать пары Абеля над $\mathbb{C}$ и свяжем с ними комбинаторно-топологические образы, являющиеся аналогами детских рисунков. В этом разделе используется категория $\mathcal{ABEL}_{\mathbb{C}}$, поскольку построенное комбинаторное описание может меняться при умножении функции Абеля на число.

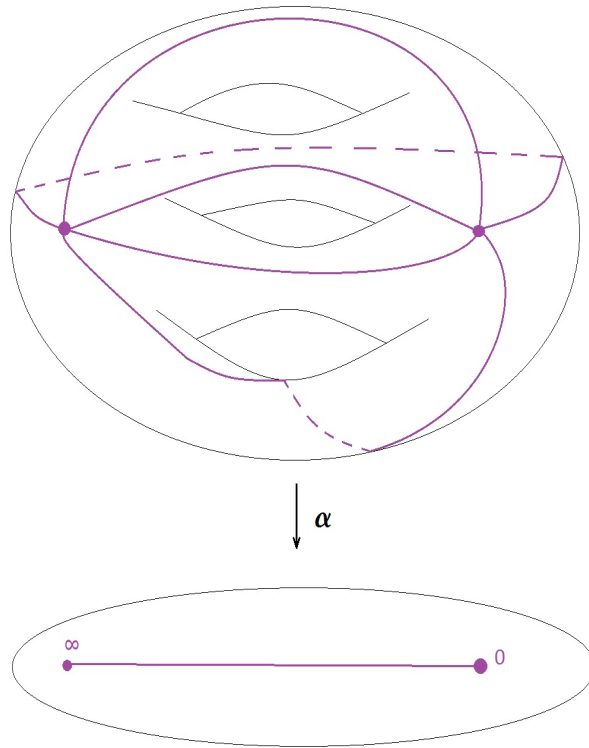


Рис. 2.1: Функция Абеля α и граф $\Gamma_{X,\alpha}$

Определение 2.7.1. Пусть дана пара Абеля (X, α) . Рассмотрим прообраз замыкания луча отрицательных вещественных значений

$$\Gamma_{X,\alpha} := \alpha^{-1}(\mathbb{R}_{\leq 0} \cup \{\infty\}) \subset X,$$

являющийся графом на поверхности X .

Утверждение 2.7.2. Если α не имеет отрицательных действительных критических значений, то $\Gamma_{X,\alpha}$ является вложенным графом с двумя вершинами

и $n = \deg \alpha$ ребрами, соединяющими их.

Доказательство. n прообразов $\alpha^{-1}(\mathbb{R}_{<0})$ не пересекаются, т.к. иначе точка пересечения была бы критической с отрицательным действительным критическим значением. $\square$

Пример 2.7.3. $\Gamma_{X,\alpha}$ является вложенным графом в X , но не обязательно детским рисунком, поскольку некоторые из его граней могут не быть односвязными. Например, для пары (X, α) , где X задана уравнением $y^2 = x^3 - x$ и $\alpha = x$, $\Gamma_{X,\alpha}$ не будет детским рисунком, поскольку $X \setminus \Gamma_{X,\alpha}$ будет гомеоморфно цилиндру.

Обозначение 2.7.4. Введем обозначения, которые будем использовать далее в главах 3,4,5: Пусть перестановка $\omega = (1, 2, \dots, n)$. Пусть

$$\rho_n : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times S_n \rightarrow S_n$$

действие группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ на S_n такое что

$$\rho_n((i, j), g) = \omega^i g \omega^j$$

И пусть $\mathfrak{S}_n$ – множество орбит действия ρ_n на S_n , а $\text{Orb}(g)$ орбита перестановки g при действии ρ_n и $\text{St}(g)$ – ее стабилизатор.

Определение 2.7.5. Предположим, что ни одно из критических значений функции Абеля α не лежит на $\mathbb{R}_{<0}$. Сопоставим паре (X, α) элемент из $\mathfrak{S}_n$.

Пусть $\text{div}(\alpha) = nA - nB$. Занумеруем полурёбра, выходящие из A и B против часовой стрелки от 1 до n , начиная с произвольных полурёбер. Рассмотрим перестановку g , сопоставляющую номеру полурёбра, выходящего из A , номер полурёбра, выходящего из B , с которым оно соединено.

Изменение начала нумерации полурёбер вокруг A или B приведет к умножению g слева или справа на степень перестановки ω . Таким образом функции Абеля α сопоставляется вся орбита элемента g при действии ρ_n .

Итак, мы получили отображение из общей пары Абеля (не имеющей отрицательных действительных критических значений) в $\mathfrak{S}_n$. Будем обозначать его *Entangle*. Таким образом, $\text{Entangle}(\mathcal{X}, \alpha) = \text{Orb}(g) \in \mathfrak{S}_n$.

Пример 2.7.6. $\text{Entangle}(\mathbb{P}\mathbb{C}^1, x^n) = \text{Orb} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Утверждение 2.7.7. $\text{Entangle}(X, \frac{1}{\alpha}) = \text{Entangle}(X, \alpha)^{-1}$

Доказательство. Действительно, графы $\Gamma_{\mathcal{X}, \alpha}$ и $\Gamma_{\mathcal{X}, 1/\alpha}$ совпадают с точностью до замены нуля и полюса. Таким образом, перестановка g , отображающая полурёбра, исходящие из нуля в полурёбра, исходящие из полюса, из конструкции определения 2.7.5 при переходе к обратной функции Абеля заменяется на обратную. Таким образом, $\forall g \in \text{Entangle}(X, \frac{1}{\alpha})$ выполняется $g^{-1} \in \text{Entangle}(X, \alpha)$. $\square$

Теорема 2.7.8. Пусть $(\mathcal{X}, \alpha)$ пара Абеля, степени $\deg \alpha = n$. Пусть перестановка $g \in \text{Entangle}(\mathcal{X}, \alpha)$ и $m \mid n$. Тогда из функции Абеля можно извлечь корень m степени тогда и только тогда, когда перестановка $(1, 2, 3, \dots, n)g^{-1}(1, 2, 3, \dots, n)g$ сохраняет остаток при делении на m .

Доказательство.

Сначала докажем необходимость. Пусть $\alpha = \alpha_1^m$. Заметим, что

$$\Gamma_{\mathcal{X}, \alpha} = \bigcup_{\zeta \in \sqrt[m]{1}} \Gamma_{\mathcal{X}, \zeta \cdot \alpha_1}.$$

Действительно, $\Gamma_{\mathcal{X}, \alpha} = \alpha^{-1}(\mathbb{R}_{\leq 0} \cup \{\infty\}) = \alpha_1^{-1} \left(\bigcup_{\zeta \in \sqrt[m]{1}} \zeta \cdot \mathbb{R}_{\leq 0} \cup \{\infty\} \right) = \bigcup_{\zeta \in \sqrt[m]{1}} \Gamma_{\mathcal{X}, \zeta \cdot \alpha_1}$.

Таким образом, каждому полуребру вложенного графа $\Gamma_{\mathcal{X}, \alpha}$, исходящему из вершины $A = \alpha^{-1}(0)$, сопоставлен корень m -ой степени из 1, в зависимости от того, в каком из множеств в объединении $\bigcup_{\zeta \in \sqrt[m]{1}} \Gamma_{\mathcal{X}, \zeta \cdot \alpha_1}$ он лежит. Причём отметим, что при переходе к следующему против часовой стрелки полуребру, соответствующий корень умножается на $e^{2i\pi/m}$, т.е. через каждые m ребер мы попадаем в один и тот же граф $\Gamma_{\mathcal{X}, \zeta \cdot \alpha_1}$. Аналогичная картина имеет место для полурёбер, исходящих из $B = \alpha^{-1}(\infty)$, за исключением того, что при переходе к следующему против часовой стрелки полуребру, соответствующий корень умножается на $e^{-2i\pi/m}$.

Рассмотрим перестановку $(1, 2, 3, \dots, n)g^{-1}(1, 2, 3, \dots, n)g$ как преобразование полурёбер, исходящих из A , занумерованных по циклу. Перестановка g переводит полурёбро, исходящее из A , в соответствующее полурёбро, исходящее из B , а цикл $(1, 2, 3, \dots, n)$ переводит полурёбро в следующее полурёбро против часовой стрелки. Таким образом, перестановка $(1, 2, 3, \dots, n)g^{-1}(1, 2, 3, \dots, n)g$ переводит полурёбро, исходящее из A , в другое полурёбро исходящее из A , сохраняя соответствие корням m -ой степени из 1, то есть сохраняя остаток при делении на m .

Теперь покажем достаточность. Пусть $g \in \text{Entangle}(\mathcal{X}, \alpha)$ и перестановка $(1, 2, 3, \dots, n)g^{-1}(1, 2, 3, \dots, n)g$ сохраняет остаток при делении на m . Построим на $\mathcal{X}$ функцию α_1 , являющуюся корнем m -ой степени из функции α .

Для этого на каждом из ребер, соединяющих A и B , нужно выбрать один из m вариантов извлечения корня из α . Определим α_1 как корень m -ой степени из α в окрестности A , и продолжим её вдоль полурёбер графа $\Gamma_{\mathcal{X}, \alpha}$, исходящих из A . Значение между полурёбром и следующим за ним по часовой стрелке будут отличаться в $e^{2i\pi/m}$ раз. Поскольку перестановка $(1, 2, 3, \dots, n)g^{-1}(1, 2, 3, \dots, n)g$ сохраняет остаток при делении на m , в окрестности B значения между полурёбром и следующим за ним по часовой стрелке будут отличаться в $e^{-2i\pi/m}$ раз. Таким образом, продолжим корень m -ой степени из α на окрестность B . В остальных же точках кривой $\mathcal{X}$ продолжим α_1 по непрерывности. $\square$

2.8 Пары Абеля-Белого

Определение 2.8.1. Будем называть *парами Абеля-Белого* пары Белого, являющиеся одновременно и парами Абеля.

Пример 2.8.2. Рассмотрим пару Абеля $(\mathcal{X}, \alpha)$ рода g , заданную уравнением:

$$\begin{aligned} y^2 &= 1 - 4x^{2g+1} \\ \alpha &= \frac{1-y}{2} \end{aligned}$$

Эта пара Абеля встречалась в примере 2.1.3 в слое над точкой с $P(x) \equiv 0$.

Покажем, что $(\mathcal{X}, \alpha)$ одновременно является и парой Белого с набором валентностей $(2g + 1|2g + 1|2g + 1)$. Действительно, α обращаются в ноль только в точке с координатами $x = 0$ и $y = 1$, и имеет полюс в бесконечно удаленной точке, а $\alpha = 1$ только в точке с координатами $x = 0$ и $y = -1$. Мегакарта, соответствующая этой паре Белого, может быть получена склейкой противоположных сторон $4g + 2$ -угольника.

Пример 2.8.3. Рассмотрим пару Абеля рода g $(\mathcal{X}, \alpha)$, заданную уравнением:

$$\begin{aligned} y^2 &= 1 - 4x^{2g+2} \\ \alpha &= \frac{1 - y}{1 + y} \end{aligned}$$

$(\mathcal{X}, \alpha)$ одновременно является и парой Белого с набором валентностей $(2g + 2|g + 1, g + 1|2g + 2)$. Действительно, α обращается в ноль в точке с координатами $x = 0$ и $y = 1$, и имеют полюс только в точке с координатами $x = 0$ и $y = -1$, и $\alpha = 1$ только в двух бесконечно удаленных точках. Гиперкарта, соответствующая этой паре Белого, может быть получена склейкой противоположных сторон $4g + 4$ -угольника.

Пример 2.8.4. Рассмотрим пару Абеля рода 1 $(\mathcal{X}, \alpha)$, заданную уравнением:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} : y^2 &= 1 - 14x + 17x^2 - 32x^3 \\ \alpha &= (1 - 15x + 40x^2) + (1 - 8x)y \end{aligned}$$

Единственным полюсом α является бесконечно удалённая точка кривой.

Найдем нули α . Рассмотрим инволюцию: $i : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} : (x, y) \rightarrow (x, -y)$, тогда рассмотрим $\alpha^i = \alpha \circ i = (1 - 15x + 40x^2) + (1 - 8x)y$ и $\alpha \cdot \alpha^i = (1 - 15x + 40x^2)^2 - (1 - 8x)^2 \cdot (1 - 14x + 17x^2 - 32x^3) = 2048x^5$. То есть нули α и α^i должны иметь x -координату 0. Откуда единственный ноль α , точка $(0, 1)$. То есть α – пара Абеля степени 5.

Покажем, что α является функцией Белого. Воспользуемся 2.6.8 и получим, что у α ненулевым критическим значением является лишь -16 , у нее три критических значения и набор валентностей $(5|2, 2, 1|5)$.

Утверждение 2.8.5. Род пары Белого с набором валентностей $(n|n|a_1, \dots, a_k)$ равен $g = \frac{n-k}{2}$.

Доказательство. Пусть на поверхности X есть рисунок с набором валентностей $(n|n|a_1, \dots, a_k)$, тогда по формуле Эйлера $\chi(X) = V - E + F = (1+k) - n + 1 = 2 + (k - n)$, то есть $g(X) = \frac{n-k}{2}$. $\square$

Определение 2.8.6. Будем называть *остовом* детского рисунка $\mathcal{D}$ его максимальный подграф $\tilde{\mathcal{D}}$, не содержащий висячих вершин.

См. в [25] подобную конструкцию удаления висячих вершин из графов и рассмотрения графов, не содержащих висячих вершин, для подсчета числа пар Белого и чисел Гурвица.

Утверждение 2.8.7. Остов рисунка, соответствующего паре Белого-Абе́ля, также является рисунком, соответствующим паре Белого-Абе́ля.

Доказательство. Из определения пары Белого-Абе́ля, рисунок соответствует паре Белого-Абе́ля тогда и только тогда, когда имеет одну грань и одну черную вершину. Поскольку количество черных вершин и граней при переходе к остову не возрастает, то у остова также будет одна грань и одна чёрная вершина. $\square$

Утверждение 2.8.8. Для фиксированного рода существует лишь конечное число остовов, соответствующих парам Белого-Абе́ля. Остальные рисунки, соответствующие парам Белого-Абе́ля, получаются добавлением множеств висячих ребер к чёрной вершине в одном из этих остовов.

Доказательство. Пусть род равен g . По 2.8.7, остов рисунка, соответствующего паре Белого-Абе́ля, также является рисунком, соответствующим паре Белого-Абе́ля. В наборе валентностей остова $(n|n|a_1, \dots, a_k)$ все $a_i \geq 2$. То есть $k \leq n/2$ и по утверждению 4.1 $g \geq n/4$. То есть $n \leq 4g$, а количество рисунков данного рода и степени конечно. $\square$

Теорема 2.8.9. Если $g \in \text{Entangle}(\mathcal{D})$, то 3-созвездие (см. [23]) $\mathcal{D}$ задается перестановками:

$$[g^{-1}(1, 2, 3, \dots, n)g, g^{-1}(1, 2, 3, \dots, n)^{-1}g(1, 2, 3, \dots, n)^{-1}, (1, 2, 3, \dots, n)]$$

Доказательство. На языке 3-созвездий, для $[\rho_0, \rho_1, \rho_\infty]$ с $\rho_\infty = (1, 2, 3, \dots, n)$ и $\rho_0^n = e$. $g \in \text{Entangle}(\mathcal{D})$ такова, что $\rho_0 = g^{-1}\rho_\infty g$. Замена g на $(1, 2, 3, \dots, n)^k g$ не изменит это равенство, замена на $g(1, 2, 3, \dots, n)^m$ приведет к сопряжению созвездия перестановкой $(1, 2, 3, \dots, n)^m$. Получим тот же класс из множества $\mathfrak{S}_n$, определяющий рассматриваемые 3-созвездия с точностью до сопряжения. $\square$

Следствие 2.8.10. *Ограничение Entangle на пары Белого-Абеля степени n является биекцией.*

Доказательство. Из результата предыдущей теоремы, Entangle^{-1} однозначно сопоставляет элементам $\mathfrak{S}_n$, 3-созвездия, в которых перестановки ρ_0 и ρ_∞ , являются длинными циклами. $\square$

Теорема 2.8.11. *Количество неизоморфных в категории $\mathcal{A}bel_{\mathbb{C}}$ пар Абеля-Белого степени n , учитываемых с весом $\frac{1}{\#Aut}$, равно*

$$A(n) = \sum_{\deg \alpha = n} \frac{1}{\#Aut(\mathcal{X}, \alpha)} = \frac{(n-1)!}{n}$$

.

Доказательство. Действительно, по следствию 2.8.10, пары Белого-Абеля степени n однозначно соответствуют орбитам действия ρ_n .

Стабилизаторы действия ρ_n однозначно соответствуют автоморфизмам соответствующих пар Абеля-Белого. Потому:

$$\sum_{\deg \alpha = n} \frac{1}{\#Aut(\mathcal{X}, \alpha)} = \sum_{g \in S_n} \frac{1}{\#Stab(g)} = \frac{\#S_n}{\#\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} = \frac{(n-1)!}{n}. \square$$

2.9 Самодвойственные пары Абеля и преобразование Жуковского

Определение 2.9.1. Пара Абеля $(\mathcal{X}, \alpha)$ называется *самодвойственной*, если в категории $\mathcal{ABEL}_{\mathbb{K}}$ она изоморфна паре $(\mathcal{X}, 1/\alpha)$, т.е. существует инволюция $i : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, такая что $\alpha \circ i = 1/\alpha$

Утверждение 2.9.2. *Пара Абеля-Белого $(\mathcal{X}, \alpha)$ самодвойственна тогда и только тогда, когда в $\text{Entangle}(\mathcal{X}, \alpha)$ существует перестановка порядка 2.*

Доказательство. По 2.7.7, имеем $\text{Entangle}(X, \frac{1}{\alpha}) = \text{Entangle}(X, \alpha)^{-1}$. По 2.8.10 отображение Entangle , ограниченное на пары Абеля-Белого, является биекцией. Таким образом для самодвойственности пары $(\mathcal{X}, \alpha)$ необходимо и достаточно $\text{Entangle}(X, \alpha) = \text{Entangle}(X, \alpha)^{-1}$. $\square$

Функция Жуковского $\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ имеет критические значения $\{\pm 1, \infty\}$. Наша же нормировка пар Белого использует набор критических значений $\{0, 1, \infty\}$. Исправим это линейным преобразованием, используя функцию

$$\text{Sim}(z) := \frac{2 - z - \frac{1}{z}}{4} = -\frac{(z - 1)^2}{4z}$$

Утверждение 2.9.3. *Если пара Абеля-Белого $(\mathcal{X}, \alpha)$, соответствует самодвойственному рисунку, то пара Белого $(\mathcal{X}, \text{Sim}(\alpha))$ имеет симметрию порядка 2, меняющую местами ноль A и полюс C функции Абеля α и рисунок соответствующий $(\mathcal{X}, \text{Sim}(\alpha))$ имеет две грани.*

Доказательство. Рассмотрим эндифунктор $\mathcal{G}$, переводящий пару Белого $(\mathcal{X}, \beta)$ в пару $(\mathcal{X}, \frac{4\beta}{(\beta + 1)^2})$, и соответствующий эндифунктор в категории детских рисунков. При этом преобразовании к детскому рисунку добавится его двойственный.

Функтор $\mathcal{G}$ переводит самодвойственную пару Белого $(\mathcal{X}, \beta)$ в пару с симметрией порядка 2. Действительно, самодвойственность означает существование автоморфизма $s : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, такого, что коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{s} & \mathcal{X} \\ & \searrow \beta \quad \swarrow 1/\beta & \\ & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \\ & \downarrow \text{Sim}(x) & \\ & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \end{array}$$

Используя то, что $\text{Sim}(x) = \text{Sim}(1/x)$, получим, что $\text{Sim} \circ \beta = \text{Sim} \circ (1/\beta)$, то есть автоморфизм s сохраняет пару $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \beta)$.

Рассмотрим теперь образ пары $(\mathcal{X}, \alpha)$ при функторе $\mathcal{G}$. В образе получим пару $\left(\mathcal{X}, \frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2}\right)$, нулями которой будут только точки A и B с кратностью n .

Переходя от пары $\left(X, \frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2}\right)$ к двойственной паре, получим пару $(\mathcal{X}, \text{Sim}(\alpha))$, соответствующую рисунку с симметрией и двумя гранями. $\square$

В разделе 4.4 мы рассмотрим подобные преобразования для пар Белого-Абеля рода 1. Рассмотрим примеры аналогичных преобразований для пар Абеля других родов.

Пример 2.9.4. Рассмотрим $\alpha_1 = x^n$. Соответствующая пара Белого-Абеля самодвойственна, поскольку она является единственной с точностью до изоморфизма парой Абеля рода 0.

$\text{Sim}(\alpha) = \frac{2-x^n-x^{-n}}{4}$. Найдем фактор этой пары Белого по симметрии $x \leftrightarrow 1/x$. Переменная $u = \frac{x+1/x}{2}$ инвариантна при этой замене, потому перейдем к ней в функции $\text{Sim}(\alpha)$. По свойству многочленов Чебышева, $T_n\left(\frac{x+1/x}{2}\right) = \frac{x^n+x^{-n}}{2}$, имеем $\text{Sim}(\alpha)(u) = \frac{1-T_n(u)}{2}$. Таким образом, в результате преобразований из исходной пары Белого-Абеля получится многочлен Шабата $\frac{1-T_n(u)}{2}$, соответствующий рисунку цепочке из n ребер.

Пример 2.9.5. В этом примере рассмотрим обратное преобразование, то есть построим самодвойственную пару Абеля-Белого.

Рассмотрим пару Абеля-Белого $(\mathcal{X}, \alpha_1)$ с набором валентностей $(5|5|2, 1, 1)$ из примера 2.8.4, отнормированную так, что ее критические значения равны $0, 1, \infty$. Пусть $\text{div}(\alpha_1) = 5A - 5B$ и $\text{div}(\alpha_1 - 1) = 2C_1 + 2C_2 + C_3 - 5B$.

Преобразуем эту пару в изоморфную ей, так чтобы точки A и C_3 переходили друг в друга при инволюции $(x, y) \rightarrow (x, -y)$. Получим уравнения пары:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} : y^2 &= 1 - 14x + 17x^2 - 32x^3 \\ \alpha &= \frac{(1 - 20x + 110x^2 - 180x^3 + 185x^4 - 16x^5) + (1 - 13x + 35x^2 - 15x^3)x}{2(1+x)^5} \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь кривую рода 2 с уравнением:

$$\mathcal{Y} : v^2 = 1 + 14u^2 + 17u^4 + 32u^6$$

Кривая $\mathcal{Y}$ двулистно накрывает $\mathcal{X}$, $\pi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, $\pi(u, v) = (-u^2, v)$, и это накрытие разветвленную лишь над A и C_3

Рассмотрим композицию $\beta = \alpha_1 \circ \pi$. Тогда:

- (i) $(\mathcal{Y}, \beta)$ является парой Белого с набором валентностей $(10|2, 2, 2, 2, 2|5, 5)$.
- (ii) На $\mathcal{Y}$ существует самодвойственная функция Белого-Абеля α_2 с набором валентностей $(5|5|5)$, такая что $\beta = \frac{2-\alpha_2-1/\alpha_2}{4}$. Действительно, решая последнее равенство, как уравнение по α_2 , получаем:

$$\alpha_2 = \frac{(5u + 10u^3 + 17u^5) + (1 + 3u^2)v}{(u - 1)^5}$$

Таким образом мы нашли пару Абеля-Белого с набором валентностей $(5|5|5)$, вычисленную в [8].

2.10 Галуа-инварианты пар Белого-Абеля

Теорема 2.10.1. Пусть рисунок, соответствующий паре Абеля-Белого, $\mathcal{D}$ самодвойственный, и по 2.9.2 в Entangle лежит перестановка g_0 порядка 2. Тогда количество неподвижных точек перестановки g_0 – Галуа-инвариант рисунка $\mathcal{D}$.

Доказательство. Применим к функции Белого, соответствующей $\mathcal{D}$, преобразование $\beta \rightarrow \text{Sim}(\beta)$. Получившийся рисунок будет обладать нетривиальной симметрией по 2.9.3. В фактор-рисунке по этой симметрии набор валентностей белых вершин будет совпадать с длинами независимых циклов перестановки g_0 . Набор валентностей фактор-рисунка является Галуа-инвариантом как фактор рисунка, так и исходного рисунка $\mathcal{D}$. Независимые же циклы g_0 имеют длину 1 или 2, так как ее порядок равен 2. Количество неподвижных точек перестановки g_0 определяет ее цикловую структуру, то есть является Галуа-инвариантом $\mathcal{D}$. $\square$

Теорема 2.10.2. *Если n нечётно, то знак всех перестановок в классе Entangle одинаков и является Галуа-инвариантом соответствующего рисунка.*

Доказательство. При нечётном n , длинный цикл $(1, 2, \dots, n)$ является чётным, потому знак перестановок, лежащих в классе Entangle постоянен. По 2.8.9, рисунок степени n , соответствующий паре Абеля-Белого, будет задаваться созвездием

$$(g^{-1}(1, 2, \dots, n)g, g^{-1}(1, 2, \dots, n)^{-1}g(1, 2, \dots, n)^{-1}, (1, 2, \dots, n))$$

все перестановки которого лежат в A_n .

Рассмотрим класс сопряженности в S_n , содержащий длинный цикл $(1, 2, \dots, n)$. В A_n он распадается на два класса сопряженных. В каком из двух этих классов, содержащим или не содержащим $(1, 2, \dots, n)$, будет лежать $g^{-1}(1, 2, \dots, n)g$, зависит от чётности g . А класс сопряженности по картографической группе созвездия, в котором лежат элементы созвездия, является Галуа-инвариантом соответствующего рисунка, см. [23]. $\square$

Утверждение 2.10.3. *$\text{Power}(\mathcal{D})$ является Галуа-инвариантом рисунка.*

Доказательство. Действительно, свойство соответствующей рисунку функции Белого быть n -ой степенью другой функции сохраняется при действии группы Галуа. $\square$

Глава 3

Семейства пар Абеля рода 1 над $\mathbb{C}$

В этой главе мы рассмотрим пространство модулей пар Абеля рода 1 из категории $Abel_{\mathbb{C}}$. Мы покажем, что оно является одномерным и его компоненты являются базами семейств пар Фрида-Абеля. Далее мы будем исследовать функции Белого на базе этих семейств, и кратности их критических точек, а также соответствующие им детские рисунки на базах семейств.

3.1 Связь с модулярными кривыми

Модулярная кривая $Y_1(n)$ (см. [18]) параметризует пары $(\mathcal{E}, A - B)$, где $\mathcal{E}$ – это эллиптическая кривая и $A - B$ дивизор, порядок которого как элемента якобиана $J(\mathcal{E})$ равен n . Модулярная кривая $X_1(n)$ является компактификацией $Y_1(n)$, т.е. над проколами $Y_1(n)$ добавлены стабильные кривые.

Теорема 3.1.1. *(i) Пространство модулей пар Абеля рода 1 и степени n имеет $\sigma_0(n) - 1$ компонент, где $\sigma_0(n)$ – количество делителей n . Каждому делителю $d \mid n$, $d < n$, соответствует компонента, состоящая из пар $(\mathcal{X}, \alpha)$ с $\text{Power}(\alpha) = d$.*

(ii) Кривая $Y_1(n)$ изоморфна пространству параметров примитивных пар Абеля

рода 1 и степени n .

Доказательство. См. [24], утверждение 3.2. $\square$

3.2 Компактификация $Y_1(n)$. Особые слои в семействе

Рассмотрим пространство модулей эллиптических пар Абеля степени n из категории $\mathcal{A}bel_{\mathbb{C}}$. По теореме 2.6.6, они задаются уравнением вида $\alpha^2 + P(x)\alpha + x^n = 0$. По утверждению 2.6.7, многочлен $P(x)$, заданный с точностью до умножения на ± 1 и замен вида $x_1 = \sqrt[n]{1}x$, определяет класс изоморфности эллиптической пары Абеля. Потому это пространство покрывается алгебраическим подмножеством аффинного пространства $\mathbb{A}_{[(n-1)/2]}(\mathbb{K})$.

Рассмотрим семейство примитивных пар Абеля рода 1 и степени n из 3.1.1(iii), базой которого является $Y_1(n)$. Продолжим накрытие из предыдущего абзаца на компактификацию $Y_1(n)$. Таким образом, точки $X_1(n)$, добавляемые при компактификации $Y_1(n)$, так же будут задаваться уравнением вида $\alpha^2 + P(x)\alpha + x^n = 0$. Поскольку эти точки соответствуют рациональным кривым, добавленные пары описываются утверждением 2.6.11.

Обозначение 3.2.1. Будем обозначать как $\mathfrak{X}_n$ тотальное пространство семейства, получающееся компактификацией семейства примитивных пар Абеля рода 1 и степени n .

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{X}_n & \\ \pi \swarrow & & \searrow \alpha \\ X_1(n) & & \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \end{array}$$

Утверждение 3.2.2. В семействе $\mathfrak{X}_n$ над точками $X_1(n) \setminus Y_1(n)$ лежат пары двух типов:

- (1) $X_1(n)$ содержит $\frac{\varphi(n)}{2}$ точек таких, что в слое над ними лежит пара Абеля-Белого, задаваемая уравнением $\alpha^2 + \alpha R_n(x) + x^n = 0$.

(2) Пусть k удовлетворяет условиям: $0 < k < \frac{n}{2}$, $\text{char } \mathbb{k} \nmid k$, $\text{char } \mathbb{k} \nmid (n-k)$. Тогда $X_1(n)$ содержит $\varphi(\text{НОД}(n, k))$ точек, таких, что в слое над ними лежит пара Абеля-Белого задаваемая уравнением $\alpha^2 + \alpha x^k R_{n-2k}(x) + x^n = 0$.

(2') Если n чётно, то $X_1(n)$ содержит $\frac{\varphi(n/2)}{2}$ точек, таких, что над ними лежит пара Абеля-Белого задаваемая уравнением $\alpha^2 + 2\alpha x^{n/2} + x^n = 0$.

Доказательство. При компактификации $Y_1(n)$ над её проколами будут добавлены рациональные кривые. Используя 2.6.11(i), мы сразу получим список их уравнений. Остается только найти, сколько раз будет встречаться эти рациональные кривые в проколах $Y_1(n)$.

Рассмотрим случай (1), то есть пару, заданную уравнением $\alpha^2 + \alpha R_n(x) + x^n = 0$. По 2.6.11(ii), после разрешения особенностей кривой $\alpha^2 + \alpha R_n(x) + x^n = 0$, пара примет вид $(\mathbb{P}^1(\mathbb{k}), t^n)$. Заметим, что особенности исходной пары простые и после разрешения соответствуют парам точек с координатами по $z = e^{\pm 2i\pi m/n}$, $0 < m < n/2$, и их количество $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$.

На базе через эту пару проходит семейство эллиптических кривых, заданных в виде $\alpha^2 + P(x)\alpha + x^n = 0$. Из соображений рода и утверждений раздела 2.6, у них на одну особенность меньше, то есть $\lfloor (n-3)/2 \rfloor$. В окрестности особого слоя типа (1) распадается одна из её особенностей (в пару точек второго порядка эллиптической кривой). Значит, каждой точке на $X_1(n)$ с типом (1) можно сопоставить пару взаимно обратных корней из 1 степени n , $e^{\pm 2i\pi m/n}$, по координатам этой распадающейся особенности.

Осталось заметить, что пары типа (1) деформируются в примитивные пары Абеля тогда и только тогда, когда соответствующие им корни из единицы являются первообразными. Действительно, достаточно заметить, что при возведении в степень пары, заданной уравнением $\alpha^2 + \alpha R_n(x) + x^n = 0$ с выделенной простой особенностью, координата особенности сохранится. Тогда, пусть координата особенности $\xi^{\pm 1}$ не первообразный корень из n , то есть $\xi^{n/d} = 1$. Рассмотрим особенность типа (1) соответствующую $\xi^{\pm 1}$ в семействе $\mathfrak{X}_{n/d}$, d -ая степень функций из ее окрестности как раз и даст нам деформацию исходной пары в импримитивные пары Абеля рода 1. И наоборот, из этой конструкции, если пара типа (1) деформи-

руется в импримитивные пары Абеля рода 1, то соответствующий ей корень $\xi^{\pm 1}$ непервообразный.

Количество первообразных корней из 1 степени n равно $\varphi(n)$, а количество пар взаимно обратных первообразных корней равно $\varphi(n)/2$.

Рассмотрим случай (2) и (2'), то есть пару, заданную уравнением $\alpha^2 + \alpha x^k R_{n-2k}(x) + x^n = 0$. В этом случае кривая имеет особенность в $x = 0$ степени $2k$ и простые особенности с ненулевой x координатой.

Рассмотрим её окрестность в $X_1(n)$, соседние пары имеют род один, кривую с только простыми особенностями, причем особенность в $x = 0$ распадается в $k - 1$ простые особенности и пару точек второго порядка эллиптической кривой. Аналогично случаю (1), это задаст нам первообразный корень степени k из 1.

Но, по теореме 2.6.7, при замене x на $x_1 = e^{2i\pi m/n} \cdot x$ пара Абеля перейдет в изоморфную ей, но картинка особенностей в окрестности нуля повернется на $2\pi m/n$. Таким образом, корень из 1 степени k , соответствующий особенности из случая (2) определен с точностью до умножения на корень из 1 степени n . Таким образом, особенность типа (2) определяется корнем из 1 степени НОД(k, n).

Обозначение 3.2.3. Будем обозначать как $\times_{m,n-m}$ особенность типа (1), соответствующую паре корней $e^{\pm 2i\pi m/n}$, где $0 < m < n/2$.

Будем обозначать особенность типа (2) как $\star_{m,n-m}$, где $0 < m \leq n/2$.

3.3 Пара Белого на базе семейства

Теорема 3.3.1. (i) *Общая (лежащая над точкой в некотором открытом по Зарисскому подмножестве базы $X_1(n)$) функция Абеля α на кривой рода 1 имеет два конечных ненулевых критических значения, $\{k_1, k_2\}$, определённых с точностью до умножения на ненулевую константу и перестановки.*

$$(ii) \quad \kappa_n = \frac{2 - \frac{k_1}{k_2} - \frac{k_2}{k_1}}{4} = -\frac{(k_1 - k_2)^2}{4k_1k_2} \text{ является корректно определенной функцией Белого на } X_1(n).$$

Доказательство. (i) По формуле Римана-Гурвица, если e_P – кратности критических точек функции Абеля α на кривой $\mathcal{X}$ рода 1, то

$$\sum_{P \in \mathcal{X}} (e_P - 1) = 2 \deg \alpha$$

Пусть $\operatorname{div}(\alpha) = nA - nB$, тогда $e_A = e_B = \deg \alpha$ и

$$\sum_{P \in \mathcal{X} \setminus \{A, B\}} e_P - 1 = 2$$

Таким образом, либо у функции α есть ещё две простые критические точки, либо одна с кратностью 3. Во втором случае α является функцией Белого. Также в первом случае, если критические значения в двух простых критических точках совпадают, то есть $k_1 = k_2$, это соответствует случаю функции Белого. Поскольку количество пар Абеля-Белого фиксированной степени конечно (т.к. конечно число соответствующих им рисунков), то для общей функции Абеля значения k_1 и k_2 различны и определены с точностью до перестановки.

Поскольку мы рассматриваем пространство параметров пар Абеля в категории $Abel_{\mathbb{C}}$, функция Абеля определена с точностью до умножения на ненулевую константу и обращения, но при этом $\{k_1, k_2\}$ так же умножаются на константу и переставляются.

(ii) Функция $\varkappa_n = \frac{2-k_1/k_2-k_2/k_1}{4}$ не меняется при перестановке и умножении на константу чисел $\{k_1, k_2\}$, то есть является корректно определенной функцией на $X_1(n)$.

Рассмотрим теперь критические точки и критические значения функции $\varkappa_n$. Покажем, что точки кривой $Y_1(n)$, в которых $k_1 \neq \pm k_2$, не являются точками ветвления $\varkappa_n$. Действительно, по утверждению 5.5.1 из [23], двузначная функция k_1/k_2 неразветвлена над точками в которых $k_1/k_2 \in \mathbb{C}P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Осталось заметить, что функция $2 + z + 1/z$ имеет критические точки ± 1 . По этому $\varkappa_n$ неразветвлена над точками, в которых $k_1/k_2 \in \mathbb{C}P^1 \setminus \{0, 1, -1, \infty\}$. В точках же $X_1(n)$, в которых $k_1/k_2 \in \{0, 1, -1, \infty\}$, значение $\varkappa_n$ лежит в множестве $\{0, 1, \infty\}$. Таким образом, $\varkappa_n$ является функцией Белого. $\square$

3.4 Валентности критических точек функции Белого, $\varkappa_n$

В этом разделе рассмотрим критические точки $\varkappa_n$ и лежащие над ними слои.

Теорема 3.4.1. *Критические точки $\varkappa_n$ на $Y_1(n)$ имеют три типа:*

- (i) *Каждая примитивная пара Абеля-Белого с набором валентностей $(n|3, 1, 1 \dots, 1|n)$ соответствует нулю $\varkappa_n$ кратности 3;*
- (ii) *Каждая примитивная пара Абеля-Белого с набором валентностей $(n|2, 2, 1 \dots, 1|n)$ соответствует нулю $\varkappa_n$ кратности 2;*
- (iii) *В других критических точках функции $\varkappa_n$, критическое значение функции равно 1 и кратность равна 2.*

Доказательство. Поскольку в этом утверждении классифицируются критические точки $\varkappa_n$ на $Y_1(n)$, в них род кривой Абеля не падает, потому определены ненулевые конечные простые критические значения k_1 и k_2 функции Абеля. Поскольку $\varkappa_n = \frac{2-k_1/k_2-k_2/k_1}{4}$ – функция Белого, по 3.3.1, искомые критические точки соответствуют случаям $\varkappa_n = 0, 1$ т.е. $k_1 = \pm k_2$.

В случае $k_1 = -k_2$, по утверждению 5.5.1 из [23], двузначная функция k_1/k_2 неразветвлена, но, поскольку $f(z) = \frac{2+z+1/z}{4}$ имеет в -1 критическую точку кратности 2, такую критическую точку будет иметь и композиция $\varkappa_n = f(k_2/k_1)$. Этот случай соответствует пункту (iii).

Рассмотрим теперь случай $k_1 = k_2$, пусть это значения пары Абеля в простых критических точках C_1 и C_2 . Теперь возможны два случая, в точке, в которой k_1 совпадает с k_2 , склеиваются также и критические точки C_1 и C_2 , как в (i), или они не склеиваются, как в (ii).

Осталось найти кратности нулей $\varkappa_n$ из (i) и (ii).

Для случая (ii), поскольку критические точки пар Абеля в слоях в случае (ii) не сталкиваются, локально определённая функция k_2/k_1 неразветвлена. Но композиция $\varkappa_n = f(k_2/k_1)$ будет иметь критическую точку кратности 2.

Осталось рассмотреть случай (i), соответствующий столкновению двух простых критических точек пар Абеля в слоях в критическую точку кратности 3.

В окрестности критической точки C кратности 3, тотальное пространство семейства $\mathfrak{X}_n$ является гладким, поскольку род слоя не падает.

Пусть t – локальный параметр на базе в окрестности A , а x – локальный параметр эллиптических кривых в слоях. Его можно выбрать общим в каждом слое из локальной тривиальности расслоения.

Тогда в окрестности точки C тотальное пространство семейства $\mathfrak{X}_n$ локально изоморфно конусу над рисунком с валентностями $(21|21|3)$, а именно семейству пар Фрида рода 0 с функциями Фрида $\varphi_t = x^3 + tx + 1$, где t параметр на базе семейства, а x – на кривых. При таком локальном изоморфизме, точка C перейдет в точку с координатами $t = 0$, $x = 0$, $\varphi = 1$.

Вчислим критические значения для семейства $\varphi_t = x^3 + tx + 1$. Критические точки $x_{1,2} = \sqrt{-t/3}$, т.е. критические значения $k_{1,2} = \frac{2}{3}t\sqrt{-t/3} + 1$. Откуда $\frac{2-k_1/k_2-k_2/k_1}{4} = \frac{4t^3}{4t^3+27}$, с кратностью 3 в точке $t = 0$. Таким образом, функция Белого на базе $\mathfrak{X}$ исходного семейства $\mathfrak{X}_n$ также имеет кратность 3 в точке C . $\square$

Теорема 3.4.2. Пусть $\text{char } \mathbb{k} \neq 2, 3$, $\text{char } \mathbb{k} \nmid n$. Критические точки $\mathfrak{X}_n$ на $X_1(n) \setminus Y_1(n)$ имеют два типа:

- (i) Пусть $\text{НОД}(a, n) = 1$ и $a < n/2$. Тогда особенность $\times_{a, n-a} \in X_1(n)$ является простым нулем функции $\mathfrak{X}_n$.
- (ii) Пусть $\text{НОД}(l, a, n) = 1$ и $l < \text{НОД}(a, n)$, $a < n/2$. Тогда особенность $\star_{a, n-a} \in X_1(n)$ является полюсом функции $\mathfrak{X}_n$ кратности $\text{НОК}(a, n-a)$.
- (ii') Пусть $n = 2m$ и $\text{НОД}(l, m) = 1$ и $l < m$. Тогда особенность $\star_{m, m} \in X_1(n)$ является полюсом функции $\mathfrak{X}_n$ кратности $n/2$.

Доказательство. В случае (i) пара, лежащая в слое над такими точками в обозначениях 3.3.1, соответствует случаю $k_1 = k_2 = 1$ и $C_1 = C_2$, но точка $C_1 = C_2$ является особой (двойная точка).

Осталось найти кратность $\mathfrak{X}_n$ в этом случае. Это можно сделать аналогично 3.4.1(i), но для краткости сошлемся на преобразование семейства пар Абеля рода 1

из раздела 4.6, в результате которых слой над $\times_{a,n-a}$ переходит в некритический слой семейства многочленов Золотарева.

(ii) Поскольку пары Абеля в слое определены с точностью до умножения на константу, выберем её в окрестности особой точки типа $\star$, так что $k_2 = 1$, а $k_1 \rightarrow 0$.

k_1 является критическим значением функции Абеля в простой критической точке сливающейся с нулем кратности n . Как показано в утверждении 2.6.11, при столкновении точка становится простой особенностью, причем при разрешении этой особенности, превращаясь в два нуля кратностей a и $n - a$, где числа a и $n - a$ соответствуют типу особенности $\star_{a,n-a}$.

Пусть x – это координата на кривых слоя в окрестности точки $\star_{a,n-a}$, такая что, уравнения каждого слоя имеют вид $\alpha^2 + P(x)\alpha + x^n = 0$, а t – локальная координата на базе в окрестности точки $\star_{a,n-a}$.

Найдем сначала кратность $x(C_1)$ как функции на базе от t . Покажем, что она равна кратности x -координат двойных особых точек кривой в слое. Ноль функции Абеля A задан в слое над каждой точкой базы расслоения, потому A задает сечение расслоения, аналогично сечение задает и C_1 . При раздутии в рассматриваемой особой точке, таком что, сечение C_1 перестает пересекать сечение A и имеет в слое $t = 0$ конечную координату, конечными станут и координаты двойных особых точек. Действительно, иначе в этом слое будет рациональная функция с одним нулем и полюсом, но и с простой критической точкой C_1 . Таким образом, порядок нуля сечения C_1 в $t = 0$ совпадает с порядком нуля сечений соответствующих двойным особым точкам.

По доказательству утверждения 3.2.2(ii), заметим, что в окрестности рассматриваемой точки $\star_{a,n-a}$, простые двойные критические точки имеют $a/\text{НОД}(a, n)$ прообразов, то есть кратность x координаты двойных критических точек равна $a/\text{НОД}(a, n)$, таким образом и кратность $x(C_1)$ равна $a/\text{НОД}(a, n)$.

Найдем теперь кратность $\alpha(C_1)$, действительно в окрестности A , $\alpha = C(t)x^n$. Достаточно найти кратность C по t . Заметим, что эта кратность обратна к кратности коэффициента при $x^0 \cdot \alpha$ в уравнении тотального пространства. Кратность этого коэффициента равна $a \cdot a/\text{НОД}(a, n)$, потому кратность C равна $-a \cdot a/\text{НОД}(a, n)$,

то есть кратность $k_1 = \alpha(C_1) = n \cdot a / \text{НОД}(a, n) - a \cdot a / \text{НОД}(a, n) = \text{НОК}(a, n)$. $\square$

Утверждение 3.4.3. $\deg \varkappa_n = \frac{n\varphi(n)\psi(n)}{12}$.

Доказательство. Вычислим $\deg \varkappa_n$, суммируя кратности её полюсов, найденные в 3.4.2:

$$\deg \varkappa_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(\text{НОД}(n, k)) \cdot \text{НОК}(k, n - k)$$

Преобразуем последнее выражение, пользуясь тем, что $\varphi(n) = n \sum_{d|n} \mu(d)/d$, $\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) = \frac{n^3-n}{6}$. Переставляя порядок суммирования, получим:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{d|\text{НОД}(n,k)} (k(n-k) \cdot \mu(d)/d) = \frac{1}{2} \sum_{d|n} \mu(d)/d \cdot \sum_{l=1}^{n/d-1} ld(n-l) = \frac{1}{12} \sum_{d|n} d\mu(d) \cdot ((n/d)^3 - (n/d)) = \frac{n}{12} \left(\sum_{d|n} \frac{n^2 u(d)}{d^2} - \sum_{d|n} \mu(d) \right) = \frac{n\varphi(n)\psi(n)}{12}. \square$$

3.5 Семейства импримитивных пар Абеля рода 1

Обозначение 3.5.1. Рассмотрим теперь семейства импримитивных пар Абеля рода 1 и степени n . Согласно 3.1.1, каждое семейство пар Абеля рода 1 и степени n состоит из пар, являющихся d -ой степенью пары Абеля рода 1, где $d | n$ и $d < n$.

Будем обозначать такое семейство $\mathfrak{X}_{d|n}$. По 3.1.1, база такого семейства есть $X_1(l)$, где $l = n/d$ и тотальное пространство изоморфно $\mathfrak{X}_l$.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_l & \xrightarrow{\alpha_l} & \mathbb{P}^1(\mathbb{k}) \\ \pi \downarrow & \searrow \alpha_{d|n} & \downarrow x^n \\ X_1(l) & & \mathbb{P}^1(\mathbb{k}) \end{array}$$

Утверждение 3.5.2. Пусть семейство $\mathfrak{X}_k$ задается уравнением $\alpha^2 + P_k(x)\alpha + x^k = 0$, где $P \in \mathbb{k}(X_1(n))[x]$ – многочлен степени, не превосходящей $k/2$. Пусть также $s_d \in \mathbb{k}(t_1, t_2)$ многочлен, такой что $t_1^d + t_2^d \equiv s_d(t_1 + t_2, t_1 t_2)$. Тогда семейство $\mathfrak{X}_{d|kd}$ задается уравнением $\alpha^2 + s_d(P, x^k)\alpha + x^{kd} = 0$.

Доказательство. По теореме Виета, если α удовлетворяет уравнению $\alpha^2 + P_k(x)\alpha + x^k = 0$, то $\alpha_0 = \alpha^d$ удовлетворяет уравнению $\alpha_0^2 + s_d(P, x^k)\alpha_0 + x^{kd} = 0$. То есть, семейство $\mathfrak{X}_{d|kd}$ задается уравнением $\alpha^2 + s_d(P, x^k)\alpha + x^{kd} = 0$. $\square$

Обозначение 3.5.3. Аналогично $\varkappa_n$, введем для семейства $\mathfrak{X}_{d|n}$ функцию Белого на базе:

$$\varkappa_{d|n} = \frac{2 - \frac{k_1}{k_2} - \frac{k_2}{k_1}}{4} \in \mathbb{K}(X_1(n/d))$$

где k_1 и k_2 – критические значения пары Абеля в слое семейства $\mathfrak{X}_{d|n}$.

Утверждение 3.5.4. (i) $\varkappa_{d|n}$ – корректно определенная функция Белого на $X_1(l)$.

(ii) $\varkappa_{d|n} = \frac{1 - T_d(1 - 2\varkappa_l)}{2}$, где T_d – многочлен Чебышёва.

Доказательство. (i) Аналогично 3.3.1.

(ii) Рассмотрим точку на базе $A \in Y_1(l)$. Пусть κ_1 и κ_2 критические значения пары $(\mathfrak{X}_{l,A}, \alpha_{l,A})$, тогда критические значения $(\mathfrak{X}_{l,a}, \alpha_{l,a}^d)$, $k_1 = \kappa_1^d$ и $k_2 = \kappa_2^d$. Имеем

$$\varkappa_{d|n}(a) = \frac{2 - \frac{k_1}{k_2} - \frac{k_2}{k_1}}{4} = \frac{2 - \frac{\kappa_1^d}{\kappa_2^d} - \frac{\kappa_2^d}{\kappa_1^d}}{4}$$

По свойству многочленов Чебышёва (см. [16], стр. 118), $\varkappa_{d|n}(a) = T_d\left(\frac{x+1/x}{2}\right) = \frac{x^d+1/x^d}{2}$, откуда:

$$\varkappa_{d|n}(A) = \frac{1 - T_d\left(\frac{\kappa_1/\kappa_2 + \kappa_2/\kappa_1}{2}\right)}{2} = \frac{1 - T_d(1 - 2\varkappa_l)}{2}$$

$\square$

Следствие 3.5.5. Рисунок на $X_1(n/d)$, соответствующий $\varkappa_{d|n}$, получается из рисунка, соответствующего $\varkappa_{n/d}$, заменой каждого ребра на цепочку из d ребер.

Доказательство. Это следует из формулы 3.5.4(ii). Действительно, детский рисунок, соответствующий многочлену Шабата $S_d(x) := \frac{1 - T_d(1 - 2x)}{2}$ – цепочка из d ребер, причем начало и конец цепочки расположены в точках $x = 0$ и $x = 1$, и вся цепочка расположена на действительной оси. $\varkappa_{d|n} = S_d \circ \varkappa_{n/d}$, по этому

каждому ребру в прообразе $\varkappa_{n/d}^{\circ-1}([0, 1])$ будет соответствовать цепочка из d ребер в прообразе $\varkappa_{d|n}^{\circ-1}([0, 1])$. $\square$

См. описание рисунков, соответствующих $\varkappa_n$ и $\varkappa_{d,n}$ в разделе 4.7 и пример из раздела 7.1.11 для $n = 12$ и $d = 3$.

3.6 Преобразование Жуковского семейств пар Абеля рода 1

В этом разделе рассматривается преобразование из раздела 2.9, примененное к парам Абеля рода 1 и их семействам. Это приведет нас к преобразованию семейств пар Абеля рода 1 в семейства многочленов Золотарева и объяснит смысл многочлена $P(x)$ из уравнения эллиптической пары Абеля (теорема 2.6.6). Следующее утверждение описывает эти преобразования и получившееся семейство многочленов Золотарева.

Для того чтобы преобразования из раздела 2.9 можно было провести алгебраически, нам потребуется построить инволюцию, меняющую местами нули и полюса пар Абеля.

Пусть $(\mathcal{E}, \alpha)$ – примитивная пара Абеля степени n и рода 1 над полем $\mathbb{k}$, $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$, $\text{div } \alpha = nA - nB$, и пусть $A - B$ не является элементом второго порядка якобиана $J(\mathcal{E})$.

Выберем координаты x, y на $\mathcal{E}$, так чтобы её уравнение в координатах x, y приняло нормальную форму Вейерштрасса, а B была бесконечно удалённой точкой.

Сделаем аффинную замену координаты x так, чтобы $x(A) = 0$ и уравнение кривой $\mathcal{X}$ в координатах x, α имело вид

$$\alpha^2 + 2P(x)\alpha + x^n = 0$$

а функция Абеля имела вид $\alpha = P(x) + Q(x)y$, где $P, Q \in \mathbb{k}[x]$.

Обозначим инволюцию кривой $\mathcal{E}$, переводящую точку с координатами (x, y) в $(x, -y)$ за i . Тогда i сохраняет точку B .

Утверждение 3.6.1. *Во введённых выше обозначениях верны следующие утверждения:*

- (i) $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{i^*(\alpha)} = \frac{P(x) + Q(x)y}{P(x) - Q(x)y}$ — пара Абеля степени n на $\mathcal{E}$ с дивизором $\operatorname{div} \tilde{\alpha} = nA - n \cdot i(A)$. Для нечётного n пара $\tilde{\alpha}$ примитивна, а для чётного n , $\operatorname{Power}(\tilde{\alpha}) = 2$.
- (ii) Пара $\left(\mathcal{E}, \frac{2 + \tilde{\alpha} + 1/\tilde{\alpha}}{4} \right)$ инвариантна относительно инволюции i , фактор по i переводит ее в пару рода 0, $(\mathbb{P}^1(\mathbb{k}), \tilde{P}(v))$, где $\tilde{P}(x) = x^n \cdot P^2(1/x)$.
- (iii) В переменных $v = 1/x$, $\tilde{\alpha}$, уравнение кривой $\mathcal{E}$ примет вид:

$$\tilde{\alpha}^2 - (4\tilde{P}(v) - 2)\tilde{\alpha} + 1 = 0$$

- (iv) $\tilde{P}(t)$ является многочленом Золотарёва с критическими значениями $\{0, 1, \vartheta, \infty\}$, где ϑ — некоторое 4-ое критическое значение. Для общей исходной пары Абеля $(\mathcal{E}, \alpha)$, набор валентностей $\tilde{P}(t)$ будет иметь вид:

$$\begin{array}{ll} (2, 2, \dots, 2, 1|2, 2, \dots, 2, 1, 1, 1|2, 1, 1, \dots, 1|n) & \text{для нечётного } n \\ (2, 2, \dots, 2|2, 2, \dots, 2, 1, 1, 1, 1|2, 1, 1, \dots, 1|n) & \text{для чётного } n \end{array}$$

Доказательство.

- (i) Примитивные функции Абеля на кривой $\mathcal{E}$ соответствуют элементам порядка n подгруппы якобиана $\operatorname{tors}_n(J(\mathcal{E}))$.

$$\operatorname{tors}_n(J(\mathcal{E})) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Переход от α к $\tilde{\alpha}$ соответствует умножению на 2 в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. То есть, если n нечётно, то умножение на 2 переводит элементы порядка n в себя и $\tilde{\alpha}$ примитивна. Если n чётно, то $\tilde{\alpha}$ будет соответствовать элементу порядка $n/2$, то есть квадрату примитивной функции Абеля.

- (ii) $i^*(\tilde{\alpha}) = \frac{P(x) - Q(x)y}{P(x) + Q(x)y} = \frac{1}{\tilde{\alpha}}$, откуда $i^*\left(\frac{2 + \tilde{\alpha} + 1/\tilde{\alpha}}{4}\right) = \frac{2 + \tilde{\alpha} + 1/\tilde{\alpha}}{4}$. Таким образом, функция $\frac{2 + \tilde{\alpha} + 1/\tilde{\alpha}}{4}$ зависит только от x .

Поскольку $P^2(x) - Q^2(x)y^2 = x^n$, имеем $\frac{2+\tilde{\alpha}+1/\tilde{\alpha}}{4} = P^2(x)/x^n = \tilde{P}(1/x)$. После факторизации пары $\left(\mathcal{E}, \frac{2+\tilde{\alpha}+1/\tilde{\alpha}}{4}\right)$ по i получим проективную прямую $\mathbb{P}^1(\mathbb{k})$ с функцией $\tilde{P}(1/x)$. Заменяя переменную на проективной прямой, $v = 1/x$, получим пару $(\mathbb{P}^1(\mathbb{k}), \tilde{P}(v))$.

(iii) Действительно, из вычислений предыдущего пункта $\tilde{\alpha}+1/\tilde{\alpha} = 4\tilde{P}(v)-2$. Откуда $\tilde{\alpha}$ является корнем квадратного уравнения $t^2 + (4\tilde{P}(v) - 2)t + 1 = 0$, то есть $\tilde{\alpha}^2 - (4\tilde{P}(v) - 2)\tilde{\alpha} + 1 = 0$ – уравнение кривой $\mathcal{E}$ в координатах $v, \tilde{\alpha}$.

(iv) Рассмотрим критические точки функции $\tilde{\alpha}$. Поскольку $i^*(\tilde{\alpha}) = 1/\tilde{\alpha}$, множество критических точек $\tilde{\alpha}$ остается неподвижным при инволюции i .

Если $\tilde{\alpha}$ – не функция Белого, то за исключением A и $i(A)$, у $\tilde{\alpha}$ есть еще две простые критические точки, C_1 и C_2 , причем $i(C_1) = C_2$ и критические значения в них взаимно обратны. При факторизации по i точки C_1 и C_2 склеятся в одну точку, являющуюся критической для многочлена $\tilde{P}(v)$. Обозначим значение $\tilde{P}(v)$ в ней за ϑ .

Найдем теперь критические значения функции $\tilde{P}(v) = \frac{2+\tilde{\alpha}+1/\tilde{\alpha}}{4}$. Вне значений 0 и 1 функция $\frac{2+t+1/t}{4}$ не разветвлена, откуда критические точки $\tilde{P}(v)$, это $\{A, i(A), C_1, C_2, \tilde{P}^{-1}(0), \tilde{P}^{-1}(1)\}$, причем кратности критических точек за исключением A и $i(A)$ равны 2. Отметим, что поскольку $i^*(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}$, значения $\tilde{\alpha}$ в точках второго порядка кривой $\mathcal{E}$ равны ± 1 , то есть значения $\tilde{P}$ в них 0 или 1.

После факторизации, пары симметричных критических точек склеятся, за исключением точек второго порядка, которые перестанут быть критическими. Причём, за исключением точек $v(C_1)$ и $v(A) = \infty$, остальные $n - 2$ простые критические точки будут иметь критические значения 0, 1. То есть $\tilde{P}(v)$ – многочлен Золотарева.

Осталось заметить, что для чётного n , многочлен $\tilde{P}(v)$ – полный квадрат, а для нечётного имеет простой корень в $v = 0$, и таким образом, мы находим набор валентностей $\tilde{P}(v)$. $\square$

Обозначение 3.6.2. Рассмотрим преобразования из предыдущего утверждения в каждом слое семейства Фрида $\mathfrak{X}_n$, получим, что четвертое критическое значение

многочлена Золотарева $\tilde{P}_n$, равное ϑ_n , является функцией на базе семейства, $\vartheta_n \in \mathbb{k}(X_1(n))$.

Утверждение 3.6.3. *Пусть n нечетно, тогда*

$$\varkappa_n = 4\vartheta_n(1 - \vartheta_n)$$

Доказательство. Пусть k_1 и k_2 – критические значения функции Абеля в слое семейства $\mathfrak{X}_n$, нормированные так, что $k_1 \cdot k_2 = 1$. Тогда в этом слое $\vartheta_n = (k_1 + k_2 + 2)/4$, а $\varkappa_n = (2 - k_1^2 - k_2^2)/4$. Таким образом, $\vartheta_n(1 - \vartheta_n) = (4 - (k_1 + k_2)^2)/16 = (2 - k_1^2 - k_2^2)/16 = \varkappa_n/4$. $\square$

3.7 Вычисление семейств пар Абеля с помощью Паде-аппроксимации

Пусть эллиптическая кривая $\mathcal{E}$ над $\mathbb{k}$, где $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$, задана уравнением $y^2 = 1 + ax + bx^2 + cx^3$ и $n \geq 3$ натуральное число. Пусть $\frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ является Паде-аппроксимацией в нуле функции $\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}$, где $\deg p_n(x) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\deg q_n(x) = \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$.

Утверждение 3.7.1. *Коэффициенты многочленов $p_n(x)$ и $q_n(x)$ зависят от первых n коэффициентов разложения в ряд Тейлора в нуле $\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}$*

Доказательство. следствие теоремы Якоби 1.20. $\square$

Утверждение 3.7.2. *Обозначим функцию $\varphi_n = p_n(x) - q_n(x)y \in \mathbb{k}(\mathcal{E})$ и за $A \in \mathcal{E}$ точку с координатами $x = 0$, $y = 1$ и за C – бесконечно удаленную точку $\mathcal{E}$. Тогда дивизор $\text{div}(\varphi_n) - (n - 1)A + nC$ является эффективным.*

Доказательство. Функция φ_n является регулярной на открытом множестве $\mathcal{X} \setminus C$. Поэтому достаточно проверить, что дивизору $\text{div}(\varphi_n) - (n - 1)A + nC$ соответствует обратимый пучок, являющийся регулярным в локальных кольцах $\mathcal{O}_{A,\mathcal{E}}$ и $\mathcal{O}_{C,\mathcal{E}}$.

Для $\mathcal{O}_{A,\mathcal{X}}$, заметим, что по определению Паде-аппроксимации φ_n имеет в A ноль порядка не меньше $n - 1$ и

$$\varphi_n = p_n(x) - q_n(x)y \in \mathfrak{m}_{A,\mathcal{X}}^{n-1}$$

Для $\mathcal{O}_{C,\mathcal{X}}$, вычислим степень φ_n . Поскольку в $\mathbb{k}(\mathcal{X})$, $\deg x = 2$, $\deg y = 3$, а $\deg p_n(x) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\deg q_n(x) = \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$, получим

$$\deg \varphi_n \leq \max(\deg(p_n(x)), \deg(q_n(x)y)) = n$$

□

Утверждение 3.7.3. *Паде-аппроксимация в нуле функции $\frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ функции $\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}$ существует тогда и только тогда, когда дивизор $(n-2)(A-C)$ линейно не эквивалентен 0.*

Доказательство. Обозначим за B точку на $\mathcal{E}$, такую, что дивизор $nC - (n-1)A$ линейно эквивалентен дивизору B . То есть существует функция φ такая, что $\operatorname{div}(\varphi) = (n-1)A + B - nC$. Поскольку полюса φ расположены только в бесконечно удаленной точке C , её можно представить в виде $\varphi = p(x) - q(x)y$. Имеем включение $\varphi_n = p_n(x) - q_n(x)y \in \mathfrak{m}_{A,\mathcal{E}}^{n-1}$, откуда по определению Паде-аппроксимации, если $q(0) \neq 0$, то $\frac{p(x)}{q(x)}$ является Паде-аппроксимацией функции $\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}$.

Из $q(0) = 0$ следует, что $p(0) = 0$, так как $p(0) + q(0) = \varphi(A) = 0$. Таким образом, то что $\frac{p(x)}{q(x)}$ не является Паде-аппроксимацией равносильно тому, что существует φ_1 такая, $\varphi = x\varphi_1$.

Если $\varphi = x\varphi_1$, то $\operatorname{div}(\varphi_1) = (n-2)(A-C)$. Существование такой φ_1 равносильно линейно эквивалентности нулю дивизора $(n-2)(A-C)$. □

Замечание 3.7.4. Предыдущее утверждение позволяет найти уравнение $X_1(n)$. Также оно позволяет доопределить φ_n для любой эллиптической $\mathcal{E}$ и пары точек A и C на ней, а именно как функцию с дивизором $(n-1)A + B - nC$.

Среди функций φ_n лежат и искомые пары Абеля рода 1 степеней n и $n-1$. Действительно условие $A = B$ задаст пары Абеля степени n и условие $B = C$ задаст пары Абеля степени $n-1$.

На практике оказалась удобной параметризация $\mathcal{M}_{1,2}$, $y^2 = (1+(a+1)x)^2 + 4b(x^2+x^3)$. Из предыдущих утверждений, коэффициенты $p_n(x)$ и $q_n(x)$ являются многочленами от a и b .

Условие $A = B$ равносильно тому, коэффициенты при x^{n-1} в ряде Тейлора $\frac{p(x)}{q(x)}$ и $\sqrt{(1 + (a + 1)x)^2 + 4b(x^2 + x^3)}$ совпадают, что равносильно полиномиальному уравнению на a, b . Таким образом, получим параметризацию $X_1(n)$ двумя параметрами a, b , связанными полиномиальным соотношением.

Теперь укажем метод вычисления $\varkappa_n$

Утверждение 3.7.5. *Логарифмический дифференциал*

$$\frac{d\varphi_n}{\varphi_n} = K \cdot \frac{(1 + K_n x + y)}{x} \cdot \frac{dx}{y}$$

где K – ненулевая константа, $K_{2n} = \frac{q_n - 2f'_3}{2np_n}$ и $K_{2n+1} = \frac{p_n}{(2n+1)q_{n-1}}$ и p_s, q_s, f_s коэффициенты p, q, f при x^s соответственно.

Доказательство. Пусть $\frac{d\varphi_n}{\varphi_n} = \xi \cdot dx/y$. Тогда $\text{div}(\xi) = K_1 + K_2 - A - C$, где K_1 и K_2 критические точки функции φ_n отличные от A и C . Из вида полюсов получим, что $\xi = K \frac{1+ax+y}{x}$, где a и K константы.

Найдем теперь значение a . Дифференцируя φ_n , получим $d\varphi_n = p'_n dx - q'_n y dx - q_n dy = \left(-\frac{2q'_n f + q_n f'}{2} + p'_n y\right) \cdot \frac{dx}{y}$. Таким образом, a можно найти из тождества $K \cdot (1 + ax + y)\varphi_n = K \cdot (1 + ax + y)(p_n - q_n y) = x((-q'_n f - q_n f'/2) + p'_n y)$.

□

Согласно предыдущему утверждению, критические точки φ_n , соответствующие критическим значениям k_1 и k_2 , лежат на прямой $1 + K_n x + y = 0$. С помощью этого уравнения они вычисляются в системе компьютерной алгебры. Это позволяет вычислить k_1, k_2 и $\varkappa_n$. Уравнение $\varkappa_n = 0$ позволяет найти среди всех пар Абеля на эллиптической кривой уравнения пар Белого-Абеля. Таким образом вычислены примеры семейств пар Абеля рода 1 и пар Белого среди них, приведенные в Главе 7.

Глава 4

Пары Абеля-Белого рода 1 над $\mathbb{C}$

В этой главе мы рассмотрим пары Абеля-Белого рода 1 над $\mathbb{C}$ и детские рисунки, им соответствующие, то есть рисунки на торе, имеющие одну грань и одну черную вершину.

4.1 Комбинаторное описание

Утверждение 4.1.1. *Остовами рисунков, соответствующих парам Абеля-Белого рода 1, являются только рисунки с наборами валентностей $(3|3|3)$ или $(4|4|2, 2)$.*

Доказательство. Заметим сначала, что по 2.8.7, остовы также являются рисунками, соответствующими парам Абеля-Белого рода 1. Рассмотрим их набор валентностей, $(n|n|a_1, \dots, a_k)$.

По 2.8.5, в рисунке на торе, соответствующем паре Белого-Абеля, с набором валентностей $(n|n|a_1, \dots, a_k)$ имеет место соотношение $k = n - 2$. Поскольку $a_1 + \dots + a_k = n$ и для остова $a_i > 1$, получаем искомое утверждение. $\square$

Утверждение 4.1.2. *Набор валентностей торических рисунков, соответствующих парам Абеля-Белого степени n , имеет вид либо $(n|n|3, 1, 1, \dots, 1)$, либо $(n|n|2, 2, 1, \dots, 1)$.*

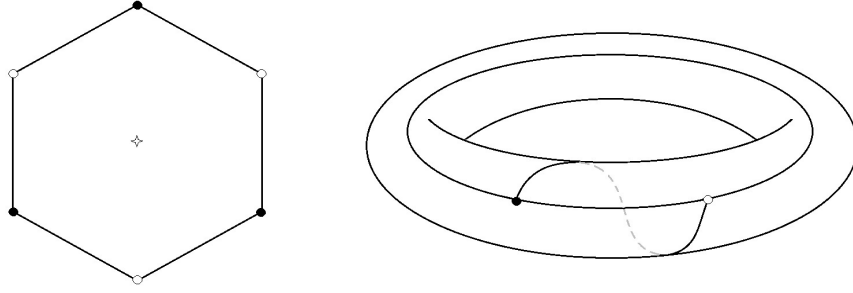


Рис. 4.1: Единственный рисунок с валентностями $(3|3|3)$. Противоположные стороны шестиугольника склеены.

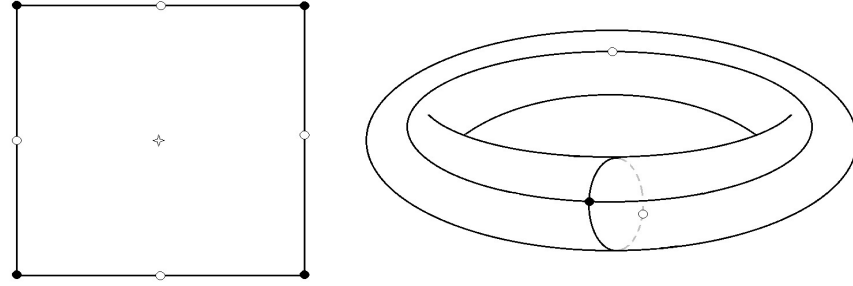


Рис. 4.2: Единственный рисунок с валентностями $(4|4|2, 2)$. Противоположные стороны квадрата склеены.

Доказательство. Рассмотрим рисунок соответствующий паре Абеля-Белого рода 1. Будем убирать из него висячие вершины до тех пор, пока рисунок не станет остовом. По предыдущему утверждению остов имеет набор валентностей $(3|3|3)$ или $(4|4|2, 2)$.

Возвращая удалённые рёбра обратно к остову $(3|3|3)$ или $(4|4|2, 2)$, получим, что набор валентностей исходного рисунка либо $(n|n|3, 1, 1, \dots, 1)$, либо $(n|n|2, 2, 1, \dots, 1)$. $\square$

Обозначение 4.1.3. Висячие вершины можно добавить в 3 угла между рёбрами, исходящими из чёрной вершины остова $(3|3|3)$. Пусть количество этих рёбер против часовой стрелки $a - 1$, $b - 1$, $c - 1$. Будем обозначать получившийся рисунок $\diamond_{a,b,c}$. Аналогично для остова $(4|4|2, 2)$, добавляя $a - 1$, $b - 1$, $c - 1$, $d - 1$ рёбер в четыре угла остова, получим рисунок, соответствующий паре Белого-Абеля; будем обозначать получившийся рисунок $\square_{a,b,c,d}$.

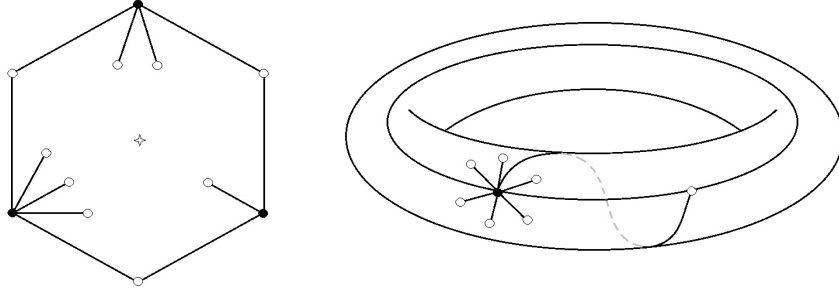


Рис. 4.3: $\Diamond_{4,2,3}$

Утверждение 4.1.4. (i) Рисунки с набором валентностей $(n|n|3, 1, \dots, 1)$ однозначно задаются набором трёх чисел a, b, c , заданным с точностью до циклической перестановки (поскольку $\Diamond_{a,b,c} = \Diamond_{b,a,c} = \Diamond_{c,a,b}$), такими что $a + b + c = n$.

(ii) Рисунки с набором валентностей $(n|n|2, 2, \dots, 1)$ задаются набором чисел a, b, c, d , заданным с точностью до циклической перестановки ($\square_{a,b,c,d} = \square_{b,c,d,a} = \square_{c,d,a,b} = \square_{d,a,b,c}$), такими что $a + b + c + d = n$.

Утверждение 4.1.5. (i) Пусть $t < k < n$, тогда перестановка

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & t & t+1 & t+2 & \dots & k & k+1 & k+2 & \dots & n \\ t & t-1 & \dots & 1 & k & k-1 & \dots & t+1 & n & n-1 & \dots & k+1 \end{pmatrix}$$

лежит в $\text{Entangle}(\Diamond_{t,k-t,n-k})$.

(ii) Пусть $t < k < l < n$, тогда перестановка

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & t & t+1 & t+2 & \dots & k & k+1 & \dots & l & l+1 & \dots & n \\ t & t-1 & \dots & 1 & k & k-1 & \dots & t+1 & l & \dots & k+1 & n & \dots & l+1 \end{pmatrix}$$

лежит в $\text{Entangle}(\square_{t,k-t,l-k,n-l})$.

Доказательство. Для пар Абелого-Белого, граф $\Gamma_{\mathcal{X},\alpha}$ есть двойственный рисунок к соответствующему α рисунку на $\mathcal{X}$. Занумеруем его полурёбра, выходящие из чёрной вершины и из центра грани против часовой стрелки, так что полурёбра из угла, содержащего $t-1$ висячих ребер, будут занумерованы числами $1, 2, \dots, t$, как показано на рисунке 4.1.

Построенная по такой нумерации полуребер, перестановка из класса Entangle имеет требуемый в утверждении вид. $\square$

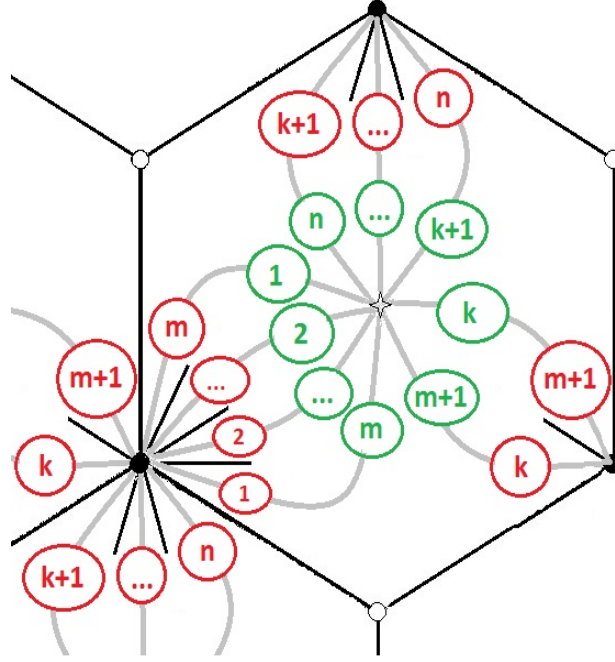


Рис. 4.4: Одна из перестановок лежащих в $\text{Entangle}(\Diamond_{m,k-m,n-k})$.

Утверждение 4.1.6. Все торические рисунки, соответствующие парам Белого-Абея, являются самодвойственными.

Доказательство. По утверждению 2.9.2, достаточно доказать, что в $\text{Entangle}(\Diamond_{a,b,c})$ лежит перестановка порядка 2. Но эта перестановка приведена в предыдущем утверждении. Аналогично для $\square_{a,b,c,d}$. $\square$

Утверждение 4.1.7. (i) Для натуральных a, b, c , $a + b + c = n$, 3-созвездию $((1, 2, \dots, n), (a, a + b, a + b + c), (a + b + c, a + b, a)(n, \dots, 2, 1))$ соответствует детский рисунок $\Diamond_{a,b,c}$.

(ii) Для натуральных a, b, c, d , $a + b + c + d = n$, 3-созвездию $((1, 2, \dots, n), (a, a + b + c) \cdot (a + b, a + b + c + d), (a, a + b + c) \cdot (a + b, a + b + c + d)(n, \dots, 2, 1),)$ соответствует детский рисунок $\square_{a,b,c,d}$.

Доказательство. Прямым вычислением с помощью утверждений 2.8.9 и 4.1.5. $\square$

4.2 Импримитивные пары Абеля-Белого рода 1

Теорема 4.2.1. *Для любых натуральных a, b, c, d, k верны следующие утверждения:*

- (i) $(\mathcal{X}_{\Diamond_{a,b,c}}, \alpha_{\Diamond_{a,b,c}}^k) \cong (\mathcal{X}_{\Diamond_{ka,kb,kc}}, \alpha_{\Diamond_{ka,kb,kc}})$;
- (ii) $(\mathcal{X}_{\square_{a,b,c,d}}, \alpha_{\square_{a,b,c,d}}^k) \cong (\mathcal{X}_{\square_{ka,kb,kc,kd}}, \alpha_{\square_{ka,kb,kc,kd}})$;
- (iii) *Торический рисунок $\Diamond_{a,b,c}$ соответствует функции Белого, являющейся m -ой степенью тогда и только тогда, когда m делит $\text{НОД}(a, b, c)$, то есть*

$$\text{Power}(\alpha_{\Diamond_{a,b,c}}) = \text{НОД}(a, b, c)$$

- (iv) *Торический рисунок $\square_{a,b,c,d}$ соответствует функции Белого, являющейся m -ой степенью тогда и только тогда, когда $a \equiv -b \equiv c \equiv -d \pmod{m}$, то есть*

$$\text{Power}(\alpha_{\square_{a,b,c,d}}) = \text{НОД}(a + b, b + c, c + d)$$

Доказательство. Для (i), (ii) рассмотрим, как меняется детский рисунок при возведении соответствующей ему функции Белого в степень k . Действительно, между любыми двумя полуребрами, выходящими из чёрной вершины, добавляется $k - 1$ висячее ребро. Таким образом, для рисунков вида $\Diamond_{a,b,c}$ и $\square_{a,b,c,d}$ вместо $a - 1$ висячих ребер в угле многоугольника, после возведения функции Абеля в k -ую степень, мы получим $a - 1 + a(k - 1) = ak - 1$ висячих ребер в этом же угле. То есть при возведении в k степень функции $\alpha_{\Diamond_{a,b,c}}$ получится функция $\alpha_{\Diamond_{ka,kb,kc}}$. Аналогично для $\square_{a,b,c,d}$.

Для (iii) и (iv) воспользуемся 2.7.8 и 4.1.7. Для $\Diamond_{a,b,c}$, перестановка из 3-созвездия, соответствующая белым вершинам, $\rho_1 = (a, a + b, a + b + c)$. Согласно 2.7.8, функция $\alpha_{\Diamond_{a,b,c}}$ является m -ой степенью $\Leftrightarrow \rho_1$ сохраняет остаток при делении на m . Последнее равносильно утверждению $b \equiv c \equiv 0 \pmod{m}$. Пользуясь условием $m \mid a + b + c$, мы получаем, что и $a \equiv 0 \pmod{m}$, а значит (iii) доказано.

Для случая $\square_{a,b,c,d}$, имеем $\rho_1 = (a, a + b + c) \cdot (a + b, a + b + c + d)$. Для того чтобы ρ_1 сохранял остаток по модулю m необходимо и достаточно $b \equiv -c \equiv d \pmod{m}$. Пользуясь условием $m \mid a + b + c + d$, мы получаем требуемое сравнение $a \equiv -b \equiv c \equiv -d \pmod{m}$. $\square$

См. также [14], где приведены аналогичные утверждения для плоских деревьев.

4.3 Автоморфизмы пар Абеля-Белого рода 1

Утверждение 4.3.1. (i) Среди пар Абеля-Белого вида $\diamond_{a,b,c}$ нетривиальным автоморфизмом обладают лишь пары $\diamond_{k,k,k}$. Группа автоморфизмов таких рисунков имеет порядок 3.

(ii) Среди пар Абеля-Белого вида $\square_{a,b,c,d}$ нетривиальным автоморфизмом обладают лишь пары $\square_{k,l,k,l}$. При $k \neq l$ группа автоморфизмов таких рисунков имеет порядок 2 и при $k = l$ – порядок 4

Доказательство.

(i) Рассмотрим автоморфизм детского рисунка вида $\diamond_{a,b,c}$. При действии этого автоморфизма полурёбра, выходящие из чёрной вершины, переставляются, сохраняя циклический порядок. Среди полурёбер, выходящих из черной вершины, выделено три полуребра, составляющих стороны шестиугольника, то есть полурёбра, ведущие в белую вершину валентности 3. Подмножество этих полурёбер должно сохраниться при перестановке всех полурёбер, исходящих из чёрной вершины. Либо эти три полуребра неподвижны, а значит, неподвижен и весь рисунок, либо они переставляются по циклу длины 3, но тогда, поскольку рисунок переходит в себя, в углах между выделенными полуребрами должно быть одинаковое количество полурёбер. То есть, нетривиальный автоморфизм возможен лишь для $\diamond_{a,a,a}$.

Аналогично для (ii). $\square$

4.4 Преобразование Жуковского пар Абеля-Белого рода 1

В разделе 2.9 рассматривалось преобразование Жуковского самодвойственных пар Абеля. В этом разделе рассмотрим более подробно это преобразование для пар Абеля-Белого рода 1.

Утверждение 4.4.1. Пусть $(\mathcal{E}, \alpha)$ – пара Абеля-Белого рода 1 с $\operatorname{div}(\alpha) = nA - nB$ и i – эллиптическая инволюция, меняющая местами A и B . Рассмотрим пару $(\mathcal{E}, \frac{\alpha+1/\alpha+2}{4})$, её фактор по инволюции i : $(\mathbb{P}^1(\mathbb{K}), \frac{\alpha+1/\alpha+2}{4})$ и соответствующий рисунок.

- (i) Если паре $(\mathcal{E}, \alpha)$ соответствовал рисунок $\Diamond_{a,b,c}$, то результатом преобразования станет плоский граф ”пропеллер” (см. рис 4.5) с длинами ветвей a, b, c .
- (ii) Если паре $(\mathcal{E}, \alpha)$ соответствовал рисунок $\square_{a,b,c,d}$, то результатом преобразования станет плоский граф ”крест” (см. рис 4.5) с длинами ветвей a, b, c, d .

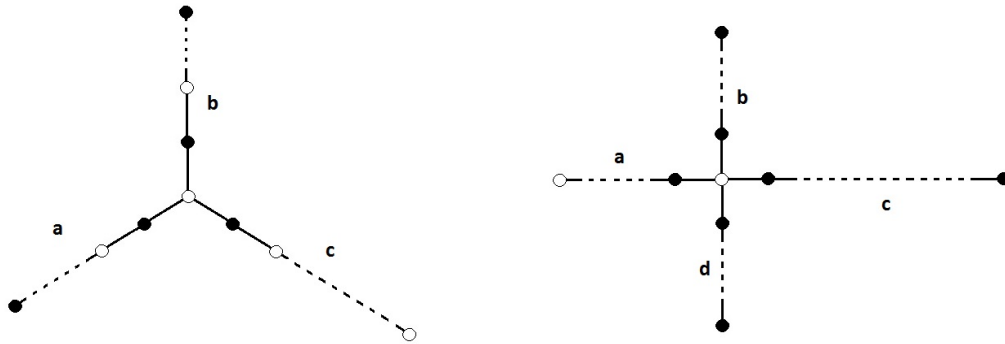


Рис. 4.5: ”пропеллер” и ”крест”

Доказательство. Проиллюстрируем наглядно доказательство для случая

- (i) (На картинках 4.6 и 4.7 показано преобразование для рисунка $\Diamond_{4,2,3}$).

Рассмотрим пару Абеля-Белого $(\mathcal{E}, \alpha)$, соответствующую рисунку $\Diamond_{a,b,c}$. Перейдем от нее к паре Белого $\left(\mathcal{E}, \frac{4\alpha}{\alpha + 1/\alpha + 2}\right)$. При этом преобразовании к соответствующему рисунку добавится двойственный. Валентности получившегося рисунка $(n, n|6, 2, \dots, 2|2, \dots, 2)$.

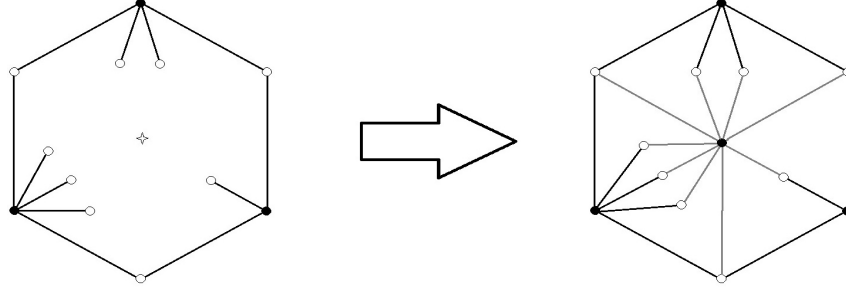


Рис. 4.6: Добавление двойственного рисунка

Заменяем получившийся рисунок на его двойственный.

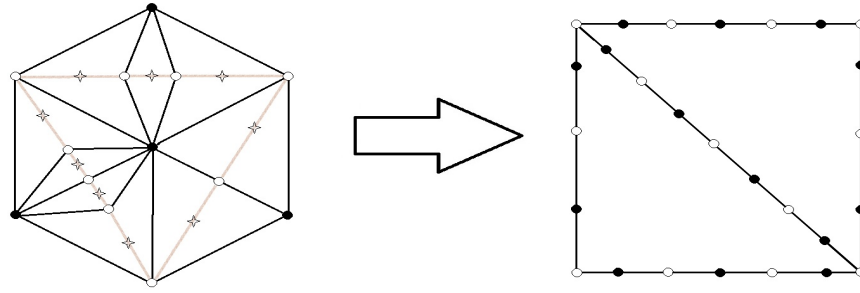


Рис. 4.7: Переход к двойственному рисунку

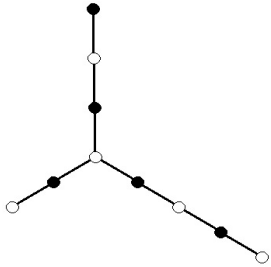


Рис. 4.8: Результат преобразования для $\Diamond_{4,2,3}$

На трёх петлях, выходящих из белой вершины валентности 6 получившегося рисунка расположены $a_i + 1$ чёрные вершины и a_i белые. Также получившийся рисунок центрально симметричен, поскольку переходит в себя при инволюции i . Неподвижными точками при этой инволюции будет белая вершина валентности 6 и ещё три вершины валентности 2, цвет которых зависит от чётностей чисел a, b, c .

Факторизуя рисунок по симметрии, получим сферический детский рисунок, являющийся "пропеллером" с длинами ветвей a, b, c .

Для случая (ii) аналогичная серия преобразований приведёт к сферическому рисунку типа "крест" с длинами ветвей a, b, c и d . $\square$

4.5 Галуа-инварианты пар Абеля

Теорема 4.5.1. *Количество чётных чисел среди a, b, c (a, b, c, d) является Галуа-инвариантом торического рисунка $\Diamond_{a,b,c}$ ($\square_{a,b,c,d}$).*

Доказательство. Эта теорема является частным случаем теоремы 2.10.1. Количество чётных чисел среди a, b, c (a, b, c, d) определяет набор валентностей рисунка, получающегося из $\Diamond_{a,b,c}$ ($\square_{a,b,c,d}$) в результате преобразований предыдущего параграфа. Поскольку набор валентностей есть Галуа-инвариант, а преобразования предыдущего параграфа обратимы и алгебраические, то есть сохраняют Галуа-инварианты, количество чётных чисел среди a, b, c (a, b, c, d) является Галуа-инвариантом исходного рисунка. $\square$

Учитывая то, что мы знаем о импримитивности пар Абеля-Белого рода 1, получим чуть более сильное утверждение:

Следствие 4.5.2. *(i) Галуа-инвариантами рисунка вида $\Diamond_{a,b,c}$ являются $k = \text{НОД}(a, b, c)$ и количество чётных среди чисел $a/k, b/k, c/k$*
(ii) Галуа-инвариантами рисунка вида $\square_{a,b,c,d}$ являются $k_1 = \text{НОД}(a, b, c, d)$, $k_2 = \text{НОД}(a + b, b + c, c + d)$ и количество чётных среди чисел $a/k_1, b/k_1, c/k_1, d/k_1$.

Доказательство. Для соответствующей рисунку функции Абеля-Белого α , число $\text{Power}(\alpha)$ является Галуа инвариантом. По теореме 4.2.1, для случая (i), $\text{Power}(\alpha) = \text{НОД}(a, b, c)$, для случая (ii), $\text{Power}(\alpha) = \text{НОД}(a + b, b + c, c + d)$. Для случая (ii) Галуа-инвариантом является также максимальная степень, для которой корень этой степени из α будет оставаться функцией Абеля-Белого (а не только функцией Абеля!), т.е. Галуа-инвариантом является так же число $k_1 = \text{НОД}(a, b, c, d)$.

Галуа-орбита k -ой степени пары Белого $(\mathcal{X}, \beta^k)$ состоит из k -ых степеней пар из орбиты исходной пары $(\mathcal{X}, \beta)$. Потому Галуа-инварианты рисунка соответствующего β являются Галуа инвариантами β_k , т.е. количество чётных чисел среди $a/k, b/k, c/k$ ($a/k_1, b/k_1, c/k_1, d/k_1$) Галуа-инвариант. $\square$

Пример 4.5.3. Перечисленные в 4.5.2 Галуа-инварианты пар Абеля-Белого рода 1 не являются точными. Однако автору известен только один пример, когда инварианты 4.5.2 не различают рисунки из разных орбит:

При $n = 7$ инвариант из 4.5.2 не различает рисунки $\square_{3,2,1,1}$, $\square_{3,1,1,2}$, $\square_{3,1,2,1}$ и $\square_{4,1,1,1}$. Однако они не являются одной Галуа-орбитой, а распадаются на две квадратичные орбиты: $\{\square_{3,2,1,1}, \square_{3,1,1,2}\}$ и $\{\square_{3,1,2,1}, \square_{4,1,1,1}\}$ (См. вычисления этих пар Абеля-Белого в разделе 8.1.6).

Это распадение можно объяснить разными группами вращений рёбер, $\text{PLS}_3(2)$ для рисунков $\square_{3,2,1,1}, \square_{3,1,1,2}$ и A_7 для $\square_{3,1,2,1}, \square_{4,1,1,1}$. (См. пример 2.2.15 из [23], сводящийся к данному примеру преобразованиями из раздела 5.4)

4.6 Количество пар Абеля-Белого рода 1

Определение 4.6.1. Как и в теореме 2.8.11, мы учитываем количество пар Абеля-Белого с весом $\frac{1}{\#Aut}$. Обозначим как $A_{\square}(n)$ количество пар Абеля-Белого рода 1 над $\mathbb{C}$ с набором валентностей $(n|3, 1, \dots, 1|n)$;

$\hat{A}_{\square}(n)$ – количество примитивных пар среди них.

$A_{\square}(d | n)$ – количество функций Белого-Абеля рода 1 над $\mathbb{C}$ с набором валентностей $(n|3, 1, \dots, 1|n)$, таких что $\text{Power}(\alpha) = d$. (В частности $A_{\square}(1 | n) = \hat{A}_{\square}(n)$).

Аналогично, пусть $A_{\square}(n)$ – количество пар Белого-Абеля рода 1 над $\mathbb{C}$ с набором валентностей $(n|2, 2, 1, \dots, 1|n)$;

$\hat{A}_{\square}(n)$ – количество примитивных пар среди них.

$A_{\square}(d | n)$ – количество функций Белого-Абеля рода 1 над $\mathbb{C}$ с набором валентностей $(n|2, 2, 1, \dots, 1|n)$, таких что $\text{Power}(\alpha) = d$. (В частности $A_{\square}(1 | n) = \hat{A}_{\square}(n)$)

Пример 4.6.2. $A_{\square}(3) = 1/3$, поскольку есть только один рисунок степени 3 и типа $\square$, $\square_{1,1,1}$, причем этот рисунок имеет симметрию третьего порядка.

Утверждение 4.6.3. (i) $A_{\square}(d \mid n) = \hat{A}_{\square}(n/d)$.

$$(ii) A_{\square}(n) = \sum_{d \mid n} \hat{A}_{\square}(d).$$

$$(iii) A_{\square}(d \mid n) = \hat{A}_{\square}(n/d) + (d-1) \cdot \deg \kappa_{n/d}/2$$

$$(iv) A_{\square}(n) = \sum_{d \mid n} A_{\square}(d \mid n)$$

Доказательство. Для (i) и (iii) рассмотрим семейство пар Абеля $\mathfrak{X}_{d,n}$. Заметим, что аналогично 3.4.1, $A_{\square}(d \mid n)$ равно числу нулей функции $\kappa_{d,n}$ кратности 3, а $A_{\square}(d \mid n)$ число её нулей кратности 2.

Воспользуемся теперь 3.5.4, и получим $\kappa_{d,n} = \frac{1-T_d(1-2\kappa_{n/d})}{2}$.

Заметим, что критические точки многочлена $\frac{1-T_d(1-2t)}{2}$ имеют кратность 2, а точки $t = 0, 1$ являются некритическими. Откуда критическими точками $\kappa_{d \mid n}$ являются либо критические точки $\kappa_{n/d}$, причём с теми же кратностями, что и у $\kappa_{n/d}$, либо прообразы критических точек многочлена $\frac{1-T_d(1-2t)}{2}$ с кратностью 2. Из рассмотрения степени функции $\kappa_{d \mid n}$, число нулей второго вида (т.е. являющихся критическими для функции $\kappa_{d \mid n}$, но не для $\kappa_{n/d}$) равно $(d-1) \cdot \deg \kappa_{n/d}/2$. Таким образом, число нулей кратности 3 у функций $\kappa_{d \mid n}$ и $\kappa_{n/d}$ совпадает, то есть $A_{\square}(d \mid n) = \hat{A}_{\square}(n/d)$, таким образом, получим (i). А нулей кратности 2 у $\kappa_{d \mid n}$ на $(d-1) \cdot \deg \kappa_{n/d}/2$ больше чем у $\kappa_{n/d}$, откуда получаем (iii).

(ii), (iv) следуют из определения 4.6.1. $\square$

Теорема 4.6.4. (i) $A_{\square}(n) = \frac{(n-1)(n-2)}{6}$.

$$(ii) A_{\square}(n) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Доказательство. (i) Рисунок $\square_{a,b,c}$ с набором валентностей $(n \mid 3, 1, \dots, 1 \mid n)$ задаётся тройкой натуральных чисел a, b, c , удовлетворяющих равенству $a+b+c = n$ и заданных с точностью до циклической перестановки a, b, c . Причем по 4.3.1, случай $\square_{a,a,a}$, когда циклическая перестановка оставляет тройку на месте в $A_{\square}(n)$,

учитывается с весом $1/3$. Количество разбиений числа n на три натуральных слагаемых равно $\binom{n-1}{2}$. То есть $A_{\square}(n) = \binom{n-1}{2}/3 = \frac{(n-1)(n-2)}{6}$.

(ii) Рисунок $\square_{a,b,c,d}$ с набором валентностей $(n|2, 2, 1, \dots, 1|n)$ задаётся четверкой a, b, c, d натуральных чисел, удовлетворяющих равенству $a + b + c + d = n$, заданных с точностью до циклической перестановки a, b, c, d . Причем по 4.3.1, случай $\square_{a,a,a,a}$ учитывается с весом $1/4$, а случай $\square_{a,b,a,b}$, где $a \neq b$, с весом $1/2$. Количество разбиений числа n на четыре натуральных слагаемых равно $\binom{n-1}{3}$. То есть $A_{\square}(n) = \binom{n-1}{3}/4 = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$. $\square$

Теорема 4.6.5. При $n > 1$

(i)

$$\hat{A}_{\square}(n) = \frac{\varphi(n)\psi(n)}{6} - \frac{\varphi(n)}{2}$$

где $\varphi(n)$ – функция Эйлера и $\psi(n)$ – пси-функция Дедекинда.

(ii)

$$\hat{A}_{\square}(n) = \frac{(n-6)\varphi(n)\psi(n)}{24} + \frac{\varphi(n)}{2}$$

Доказательство. (i) Применим к 4.6.3(i) формулу обращения Мебиуса:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{\square}(n) &= \sum_{d|n} \mu(n/d) A_{\square}(d) = \sum_{d|n} \mu(n/d) \frac{(d-1)(d-2)}{6} = \\ &= \frac{1}{6} \sum_{d|n} \mu(n/d) (d^2 - 3d + 2) = \frac{1}{6} \left(\sum_{d|n} d^2 \mu(n/d) - 3 \sum_{d|n} d \mu(n/d) + 2 \sum_{d|n} \mu(n/d) \right) \end{aligned}$$

Осталось вспомнить, что $\sum_{d|n} d \mu(n/d) = \varphi(n)$, $\sum_{d|n} d^2 \mu(n/d) = \varphi(n)\psi(n)$ и при $n \neq 1$, $\sum_{d|n} \mu(n/d) = 0$.

(ii) Подставим в утверждении 4.6.3 (iii) в (iv), получим

$$A_{\square}(n) = \sum_{d|n} \hat{A}_{\square}(d) + \sum_{d|n} \left(\frac{n}{d} - 1 \right) \deg \kappa_d$$

значение степени $\varkappa_d$, $d\varphi(d)\psi(d)/12$, при $d > 1$, из утверждения 3.4.3 и значит $A_{\square}(n) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ получим:

$$\sum_{d|n} \widehat{A}_{\square}(d) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24} - \sum_{d|n, d>1} \left(\frac{n}{d} - 1\right) \frac{d\varphi(n)\psi(d)}{24}$$

Пользуясь тем, что $\sum_{d|n, d>1} \varphi(n)\psi(d) = n^2 - 1$, получим:

$$\sum_{d|n} \widehat{A}_{\square}(d) = \sum_{d|n, d>1} \frac{d\varphi(n)\psi(d)}{24} - \frac{n^2 - 2n + 1}{4}$$

Откуда, пользуясь формулой обращения Мёбиуса, имеем:

$$\widehat{A}_{\square}(n) = \frac{n\varphi(n)\psi(n)}{24} - \frac{1}{4} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \cdot (d^2 - 2d + 1) = \frac{(n-6)\varphi(n)\psi(n)}{24} + \frac{\varphi(n)}{2}. \square$$

4.7 Рисунок на $X_1(n)$ соответствующий $\varkappa_n$

Используя полученную в этой главе нумерацию пар Белого-Абеля, опишем теперь рисунок на базе $X_1(n)$ семейства $\mathfrak{X}_n$ примитивных пар Абеля рода 1.

Из теоремы 3.4.1, кратности критических точек $\varkappa_n$ с критическим значением 1 равны 2, т.е. рисунок, соответствующий $\varkappa_n$, является чистым. Будем рассматривать только его черные вершины и смотреть на него как на граф на поверхности $X_1(n)$.

Лемма 4.7.1. *Рассмотрим граф на поверхности $X_1(n)$, соответствующий чистой функции Белого, $\varkappa_n$. Если две пары Абеля-Белого, $(\mathcal{E}_1, \alpha_1)$ и $(\mathcal{E}_2, \alpha_2)$, в этом графе соединены то существуют перестановки $g_1 \in \text{Entangle}(\mathcal{E}_1, \alpha_1)$ и $g_2 \in \text{Entangle}(\mathcal{E}_2, \alpha_2)$, такие что $g_1 = (i, j)g_2$, где (i, j) транспозиция из S_n .*

Доказательство. Рассмотрим пару Абеля-Белого $(\mathcal{E}, \alpha)$ рода 1, входящую в семейство $\mathfrak{X}_n$, и соответствующую ей орбиту $\text{Entangle}(\mathcal{E}, \alpha)$. Она является вершиной A в графе, соответствующем $\varkappa_n$ на базе семейства $X_1(n)$. Рассмотрим пары, соединенные с ней ребром в этом графе. Пусть B – соединенная с A вершина и AB

– соединяющее их ребро. Значения $\varkappa_n$ на этом ребре пробегают действительные значения от 1 до 0 и затем от 0 до 1, таким образом отношение простых критических значений рассматриваемых пар k_2/k_1 совершает оборот по единичной окружности.

Семейство пар $\mathfrak{X}_n$ состоит из классов изоморфизмов пар категории $\mathcal{A}bel_{\mathbb{C}}$, поэтому, чтобы определить Entangle на всём ребре, выберем над каждой точкой пару из категории $\mathcal{ABEL}_{\mathbb{C}}$, так чтобы она была изоморфна исходной в категории $\mathcal{A}bel_{\mathbb{C}}$ и одно из ее критических значений было равно $k_1 = 1$. Таким образом, при движении по ребру AB , k_2 будет совершать оборот по единичной окружности, $|k_2| = 1$.

Поскольку Entangle определяется по паре Абеля, по прообразу луча отрицательных действительных чисел, значение Entangle не меняется, пока k_2 не пройдет по этому лучу. То есть, значение Entangle меняется в точке с $k_2 = -1$ и $\varkappa_n = 0$. Рассмотрим, что происходит в такой точке. Поскольку критическая точка функции Абеля со значением $2 = -1$ является простой, при $k_2 = -1$, два из n слоев прообразов луча отрицательных действительных чисел пересекутся, и поменяются при прохождении этой точки. Таким образом, в перестановках Entangle изменятся только два значения, т.е. перестановки орбиты умножатся на транспозицию. $\square$

Теорема 4.7.2. *В графе, соответствующем $\varkappa_n$,*

- (i) *При $a, b, c > 1$, $\Diamond_{a,b,c}$ соединён ребром с $\square_{1,a-1,b+1,c-1}$, $\square_{a-1,1,b-1,c+1}$ и $\square_{a+1,b-1,1,c-1}$.*
- (ii) *При $b, c > 1$, $\Diamond_{1,b,c}$ соединён ребром с $\Diamond_{1,b+1,c-1}$, $\Diamond_{1,b-1,c+1}$ и $\square_{2,b-1,1,c-1}$.*
- (iii) *При $c > 1$, $\Diamond_{1,1,c}$ соединён ребром с $\Diamond_{1,2,c-1}$, $\Diamond_{2,1,c-1}$ и особенностью вида $\times$.*
- (iv) *При $a, b, c, d > 1$, $\square_{a,b,c,d}$ соединён ребрами с $\square_{a-1,b+1,c-1,d+1}$ и $\square_{a+1,b-1,c+1,d-1}$.*
- (v) *При $b, c, d > 1$, $\square_{1,b,c,d}$ соединён ребрами с $\Diamond_{b+1,c-1,d+1}$ и $\square_{2,b-1,c+1,d-1}$.*
- (vi) *При $c, d > 1$, $\square_{1,1,c,d}$ соединён ребрами с $\Diamond_{2,c-1,d+1}$ и $\Diamond_{2,c+1,d-1}$.*
- (vii) *При $b, d > 1$, $\square_{1,b,1,d}$ соединён ребрами с $\square_{2,b-1,2,c-1}$ и особенностью вида $\times$.*

(viii) При $d > 1$, $\square_{1,1,1,d}$ соединён ребрами с $\diamond_{2,2,c-1}$ и особенностью вида $\times$.

Доказательство. Явным вычислением, используя леммы 4.7.1 и 4.1.5.

Приведем пример рассуждений для случая (iii). По 4.1.5, перестановка

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 1 & 2 & n & n-1 & n-2 & \dots & 3 \end{pmatrix} \in \text{Entangle}(\diamond_{1,1,n-2}).$$

Теперь рассмотрим все возможные перестановки вида $g \cdot (i, j)$, где (i, j) транспозиция из S_n , и найдем какие из них соответствуют парам Абеля-Белого рода ≤ 1 .

Напомним, что мы обозначаем длинный цикл $(1, 2, \dots, n) = \omega$. Тогда имеем,

$$g \cdot (1, n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 1 & 3 & 2 & n & n-1 & \dots & 4 \end{pmatrix} \cdot \omega \in \text{Entangle}(\diamond_{1,2,n-3})$$

$$g \cdot (2, 3) = \omega^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 1 & 3 & n & \dots & 5 & 4 \end{pmatrix} \in \text{Entangle}(\diamond_{2,1,n-3})$$

Кроме того, $g \cdot (1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \omega^{-2}$, что соответствует паре Абеля рода 0, то есть особенности вида $\times$. В остальных же случаях, перестановка соответствует паре Абеля-Белого большего рода. По теореме 3.4.1, точки вида $\diamond$ соединены ровно с тремя точками, то есть $\diamond_{1,1,n-2}$ соединен с $\diamond_{1,2,n-2}$, $\diamond_{2,1,n-3}$ и особенностью вида $\times$. $\square$

Замечание 4.7.3. Заметим, что для нечётного n вершины графа, соответствующего $\varkappa_n$, можно раскрасить в два цвета, а именно в белый раскрасим все $\diamond_{a,b,c}$, такие, что все a, b, c нечётны, и все $\square_{a,b,c,d}$, такие что среди чисел a, b, c, d три нечётны.

Это объясняется алгебраически с помощью утверждения 3.6.3, а именно такой раскраской мы получим детский рисунок, соответствующий функции Белого ϑ_n .

Замечание 4.7.4. Теорема 4.7.2 также описывает графы, соответствующие $\varkappa_{l,n}$, функциям на базе семейств импримитивных пар Абеля рода 1. Действительно в лемма 4.7.1 не использует примитивность пар Абеля.

Глава 5

Семейства пар Фрида рода 0

В этой главе мы применим метод, рассмотренный нами для пар Абеля-Белого, к парам Белого рода 0, а именно, включим их в однопараметрические семейства пар Фрида.

Мы рассмотрим семейства пар Фрида, проходящие через любой многочлен Шабата, и найдём выражение для функций Белого на базах этих семейств.

5.1 Пространство рациональных функций с фиксированным дивизором

Пусть $s \in \mathbb{N}$ и $a_1, a_2, \dots, a_s$ – целые числа, не равные 0, причем $n = a_1 + a_2 + \dots + a_s > 0$. Рассмотрим пространство всех рациональных функций на $\mathbb{P}^1(\mathbb{k})$, чей дивизор имеет вид $a_1P_1 + a_2P_2 + \dots + a_sP_s - n\infty$.

Для заданного набора натурального s и целых $a_1, a_2, \dots, a_s$, рассмотрим рациональные функции с кратностями нулей и полюсов $a_1, a_2, \dots, a_s$. Такие рациональные функции имеют вид $C(1 - A_1x)^{a_1} \cdot \dots \cdot (1 - A_sx)^{a_s}$, где $C, A_i \in \mathbb{k}^\times$.

Будем считать две такие рациональные функции R_1 и R_2 эквивалентными, если $R_1(x) \equiv C_1R_2(C_2x)$, где $C_1, C_2 \in \mathbb{k}^\times$. Поскольку при замене координат $x \rightarrow kx$ коэффициенты $(A_1, A_2, \dots, A_s)$ переходят в $(kA_1, kA_2, \dots, kA_s)$, пространство рассматриваемых функций с точностью до эквивалентности является открытым подмножеством $\mathbb{P}_{s-1}(\mathbb{k})$, дополнение к которому составляют гиперплоскости,

задаваемые уравнениями $A_i = 0$ и $A_i = A_j$. Будем обозначать это квазипроективное многообразие как $\mathcal{S}_{a_1, a_2, \dots, a_s}$.

5.2 Ненулевые критические значения рациональных функций

Чтобы выделить из рассматриваемых рациональных функций пары Белого и пары Фрида, рассмотрим их критические значения, отличные от 0 и ∞ .

Лемма 5.2.1. *Критическая точка t функции $R \in \mathcal{S}_{a_1, a_2, \dots, a_s}$, соответствующая её конечному ненулевому критическому значению, является нулем её логарифмической производной:*

$$\frac{R'(t)}{R(t)} = -\frac{a_1 A_1}{1 - A_1 t} - \frac{a_2 A_2}{1 - A_2 t} - \dots - \frac{a_s A_s}{1 - A_s t} = 0$$

Доказательство.

$$\frac{R'(t)}{R(t)} = (\ln(R(t)))' = \sum_i (\ln((1 - A_i t)^{a_i}))' = -\sum \frac{a_i A_i}{1 - A_i t}. \quad \square$$

Лемма 5.2.2. *Пусть $R = (1 - A_1 x)^{a_1} \dots (1 - A_s x)^{a_s}$, $A_i \neq A_j$, $n = a_1 + \dots + a_s$. Пусть $b_1, \dots, b_t$ его критические точки с ненулевыми критическими значениями и $k_1, \dots, k_t$ их кратности. Тогда*

$$\prod_{1 \leq l \leq t} (1 - b_l A_i)^{k_i - 1} = \frac{a_i}{n} \cdot \prod_{1 \leq j \leq s, j \neq i} \frac{A_j - A_i}{A_j}$$

Доказательство. Пусть $R_i = (1 - A_i x)^{a_i}$. Рассмотрим логарифмический дифференциал dP/P и его вычет в точке $1/A_i$. С одной стороны, $dP/P = \sum_{1 \leq l \leq s} dP_l/P_l$. Из всех слагаемых в точке $1/A_i$ ненулевой вычет будет только у dP_i/P_i , причём равный a_i . То есть вычет dP/P в точке $1/A_i$ равен a_i .

С другой стороны:

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = -\frac{a_1 A_1 dt}{1 - A_1 t} - \frac{a_2 A_2 dt}{1 - A_2 t} - \dots - \frac{a_s A_s dt}{1 - A_s t}$$

Приведём правую часть к общему знаменателю. Коэффициент при старшей степени t в числителе будет равен $(-1)^s n A_1 \cdot \dots \cdot A_s$. Так как все нули dP/P это $b_1, \dots, b_t$ с кратностями равными $k_1 - 1, \dots, k_t - 1$, соответственно, получим:

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = dt \cdot \frac{(-1)^s n A_1 \cdot \dots \cdot A_s \cdot \prod_{1 \leq l \leq t} (t - b_l)^{k_l - 1}}{(1 - A_1 t) \cdot (1 - A_2 t) \cdot \dots \cdot (1 - A_s t)}$$

Поскольку вычет $\frac{dP(t)}{P(t)}$ в $1/A_i$ равен $-\frac{P'(t)}{P(t)} \cdot \frac{1 - A_i t}{A_i} \Big|_{t=1/A_i}$, а $\sum_{1 \leq l \leq t} k_l - 1 = s - 1$, имеем:

$$\text{Res}_{1/A_i} \frac{dP(t)}{P(t)} = \frac{n A_1 \cdot \dots \cdot A_s \prod_{1 \leq l \leq t} (1 - A_i b_l)^{k_l - 1}}{A_i \prod_{l \neq i} (A_l - A_i)} = a_i$$

Из этого равенства, выразим произведение $\prod_{1 \leq l \leq t} (1 - A_i b_l)^{k_l - 1}$ и получим утверждение леммы. $\square$

Теорема 5.2.3. Пусть $P = (1 - A_1 x)^{a_1} \cdot \dots \cdot (1 - A_s x)^{a_s} \in \mathcal{S}_{a_1, a_2, \dots, a_s}$, где $A_i \neq A_j$ при $i \neq j$. Пусть $n = a_1 + \dots + a_s$ и $b_1, \dots, b_t$ – критические точки с ненулевыми критическими значениями и $k_1, \dots, k_t$ их кратности. Тогда

$$\prod_{1 \leq i \leq t} P(b_i)^{k_i - 1} = \frac{a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2} \cdot \dots \cdot a_s^{a_s}}{(-n)^n} \cdot \frac{\prod_{1 \leq i, j \leq s} (A_j - A_i)^{a_i}}{A_1^{n - a_1} \cdot A_2^{n - a_2} \cdot \dots \cdot A_s^{n - a_s}}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i \leq t} P(b_i)^{k_i - 1} &= \prod_{1 \leq i \leq t} \prod_{1 \leq j \leq s} (1 - b_i A_j)^{a_j (k_i - 1)} = \prod_{1 \leq j \leq s} \prod_{1 \leq i \leq t} (1 - b_i A_j)^{a_j (k_i - 1)} = \\ &= \prod_{1 \leq j \leq s} \left(\frac{a_j}{n} \cdot \prod_{1 \leq i \leq s, i \neq j} \frac{A_i - A_j}{A_i} \right)^{a_j} = \frac{a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2} \cdot \dots \cdot a_s^{a_s}}{(-n)^n} \cdot \frac{\prod_{1 \leq i, j \leq s} (A_j - A_i)^{a_i}}{A_1^{n - a_1} \cdot A_2^{n - a_2} \cdot \dots \cdot A_s^{n - a_s}} \cdot \square \end{aligned}$$

5.3 Пары Белого в рассматриваемом пространстве рациональных функций

В пространстве $\mathcal{S}_{a_1, a_2, \dots, a_s}$ мы будем искать пары Белого, такие что $x = 0$ является критической точкой, а точке, сначала рассмотрим многочлены Шабата, такие, что $x = 0$ единственная критическая точка с ненулевым значением. И затем обобщим это вложение на произвольный многолен Шабата в $\mathcal{S}_{a_1, a_2, \dots, a_s}$

Рассмотрим сначала случай, когда все $a_i > 0$. Тогда $\mathcal{S}_{a_1, a_2, \dots, a_s}$ – пространство многочленов, среди которых лежат деревья диаметра 4:

Определение 5.3.1. *Диаметром дерева* называется максимальная длина (в рёбрах) кратчайшего пути в дереве между любыми двумя вершинами.

Обозначение 5.3.2. Рассмотрим дерево диаметра 4. Пусть $a_1, \dots, a_s$ валентности вершин соседних с центральной. Паспорт такого дерева, $(a_1, \dots, a_s | s, 1, \dots, 1 | n)$ будем обозначать $IV_{a_1, \dots, a_s}$.

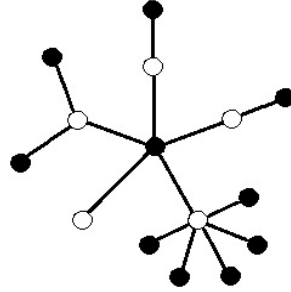


Рис. 5.1: пример дерева из $IV_{3,2,2,6,1}$

Лемма 5.3.3. При $a_1, \dots, a_s > 0$ многочлены из $\mathcal{S}_{a_1, a_2, \dots, a_s}$, удовлетворяющие условию $x^s \mid (P(x) - P(0))$ являются многочленами Шабата с паспортом $IV_{a_1, \dots, a_s}$.

Доказательство. Согласно формуле Гурвица, многочлен из $\mathcal{S}_{a_1, a_2, \dots, a_s}$, удовлетворяющий условию $x^s \mid (P(x) - P(0))$ не имеет других критических точек, кроме $x = 0$ и нулей. То есть, его набор валентностей – $IV_{a_1, \dots, a_s}$. $\square$

Обозначение 5.3.4. Обобщим теперь обозначение $IV_{a_1, \dots, a_s}$ на случай, когда некоторые из a_i отрицательны. А именно, рассмотрим все пары Белого $\mathcal{S}_{a_1, a_2, \dots, a_s}$ удовлетворяющие условию леммы 5.3.3, набор их критических значений будем обозначать также $IV_{a_1, \dots, a_s}$. В этом наборе валентностей отрицательные валентности $a_i < 0$ соответствуют полюсам и перейдут в соответствующий столбец. Точнее, пусть при $1 \leq i \leq l$, $a_i > 0$, а при $l < i \leq s$, $a_i < 0$. Тогда набор валентностей $IV_{a_1, \dots, a_s}$ – это $(s, 1, \dots, 1 | a_1, \dots, a_l | n, -a_{l+1}, \dots, -a_s)$.

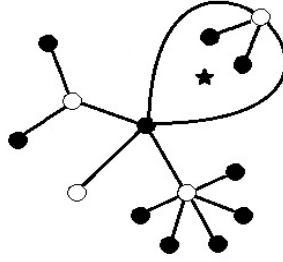


Рис. 5.2: пример рисунка из $IV_{3,4,-3,6,1}$

Теорема 5.3.5 ([9]). P из $\mathcal{S}_{a_1, a_2, \dots, a_s}$ имеет набор валентностей $IV_{a_1, \dots, a_s}$ и критическую точку кратности s в $x = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется следующая система из $s - 1$ уравнений.

$$\begin{cases} a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_s A_s = 0 \\ a_1 A_1^2 + a_2 A_2^2 + \dots + a_s A_s^2 = 0 \\ \dots \\ a_1 A_1^{s-1} + a_2 A_2^{s-1} + \dots + a_s A_s^{s-1} = 0 \end{cases}$$

Доказательство. Многочлен Шабата из $\mathcal{S}_{a_1, a_2, \dots, a_s}$ с паспортом $IV_{a_1, \dots, a_s}$ имеет единственную критическую точку с ненулевым критическим значением, кратности s . По условию эта точка имеет координату $x = 0$. Таким образом логарифмическая производная $\frac{P'(t)}{P(t)}$ будет иметь в этой точке ноль кратности $s - 1$. Рассмотрим выражение логарифмической производной из Леммы 2 и разложим его в ряд в точке $x = 0$, т.е.

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = - \sum_{k=0}^{\infty} (a_1 A_1^{k+1} + a_2 A_2^{k+1} + \dots + a_s A_s^{k+1}) t^k$$

Равенство нулю первых $s - 1$ коэффициентов дает нам искомую систему. $\square$

Утверждение 5.3.6. Пусть P – произвольный многочлен Шабата с набором валентностей $(b_1, \dots, b_l | w_1, \dots, w_p | n)$. Тогда функция Белого $\frac{P}{P-1}$ лежит в $\mathcal{S}_{b_1, \dots, b_l, -w_2, \dots, -w_p}$.

Доказательство. Набор валентностей функции $\frac{P}{1-P}$ есть $(b_1, \dots, b_l | n | w_1, \dots, w_p)$. Полагая критическую точку с кратностью w_1 как бесконечно удаленную, получаем искомое утверждение. $\square$

Чтобы изучить такие пары Белого, включим их в однопараметрическое семейство пар Фрида.

5.4 Рассматриваемые многочлены Золотарёва и их семейства

Рассмотрим в $\mathcal{S}_{a_1, a_2, \dots, a_s}$ многочлены Золотарёва с критической точкой в 0. Хотя теорема 5.2.3 для любого семейства многочленов Золотарёва позволяет вычислить функцию Белого на базе как функцию от $A_1, \dots, A_s$ мы ограничим наше рассмотрение случаем, когда ненулевые конечные критические значения соответствуют только одной простой критической точке, т.е. им будет соответствовать часть паспорта $|2, 1, \dots, 1|$.

В пространстве $\mathcal{S}_{a_1, a_2, \dots, a_s}$ рассмотрим кривую, состоящую из рациональных функций, имеющих в нуле критическую точку кратности $s - 1$ и еще одну критическую точку кратности 2.

Обозначим замыкание этой кривой в $\mathbf{P}_{s-1}(\mathbb{k})$ как $\mathcal{F}_{a_1, \dots, a_s}$. Обозначим за b критическую точку кратности 2, то есть b такую, что $(x - b)^2 \mid (P(x) - P(b))$ и $b \neq 0, P(b) \neq 0$.

Теорема 5.4.1. (i) Кривая $\mathcal{F}_{a_1, \dots, a_s}$ задаётся системой уравнений:

$$\begin{cases} a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_s A_s = 0 \\ a_1 A_1^2 + a_2 A_2^2 + \dots + a_s A_s^2 = 0 \\ \dots \\ a_1 A_1^{s-2} + a_2 A_2^{s-2} + \dots + a_s A_s^{s-2} = 0 \end{cases}$$

(ii) Если $\text{char } \mathbb{k} \nmid n$, то $b = \frac{1}{n} \left(\frac{n-a_1}{A_1} + \frac{n-a_2}{A_2} + \dots + \frac{n-a_s}{A_s} \right)$.

Доказательство. (i) Аналогично теореме 5.3.5.

(ii) Рассмотрим выражение логарифмической производной $[P] \in \mathcal{F}_{a_1, \dots, a_s}$.

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = -\frac{a_1 A_1}{1 - A_1 t} - \frac{a_2 A_2}{1 - A_2 t} - \dots - \frac{a_s A_s}{1 - A_s t}$$

Точка $t = b$ является её единственным ненулевым корнем, отличным от $t = 0$. Приводя дроби к общему знаменателю, убедимся что числитель будет иметь вид $C \cdot t^{s-1} \cdot (t - b)$, где $C \in \mathbb{k}^\times$. С другой стороны, приведем выражение логарифмической производной к общему знаменателю, и выпишем два старших по t члена в числителе

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = (-1)^s \cdot \frac{n A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_s \cdot t^s - \sum_{1 \leq i \leq s} (n - a_i) A_1 \cdot \dots \cdot \widehat{A_i} \cdot \dots \cdot A_s t^{s-1} + \dots}{(1 - A_1 t)(1 - A_2 t) - \dots \cdot (1 - A_s t)}$$

То есть

$$b = \frac{\sum_{1 \leq i \leq s} (n - a_i) A_1 \cdot \dots \cdot \widehat{A_i} \cdot \dots \cdot A_s}{n A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_s} = \frac{1}{n} \left(\frac{n - a_1}{A_1} + \frac{n - a_2}{A_2} + \dots + \frac{n - a_s}{A_s} \right)$$

□

Рассмотрим класс $[P]$ из $\mathcal{F}_{a_1, \dots, a_s}$, пусть P один из представителей этого класса. Пусть P имеет набор критических значений: $\{0, \infty, k_0, k\}$, где $k_0 = P(0)$ и $k = P(b)$.

Теорема 5.4.2. (i) $\varkappa_{a_1, \dots, a_s} := \frac{k}{k_0} \in \mathbb{k}(\mathcal{F}_{a_1, \dots, a_s})$ является функцией Белого на базе семейства.

(ii)

$$\varkappa = \frac{a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2} \cdot \dots \cdot a_s^{a_s}}{(-n)^n} \cdot \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq s} (A_j - A_i)^{a_i + a_j}}{A_1^{n-a_1} \cdot A_2^{n-a_2} \cdot \dots \cdot A_s^{n-a_s}}$$

Доказательство. (i) см. в [1]. (ii): $\varkappa = P(b) = (1 - A_1 \cdot b)^{a_1} \cdot \dots \cdot (1 - A_s \cdot b)^{a_s}$.

Используя лемму 3, получим искомую формулу. □

Теорема 5.4.3. Пусть $\text{char } \mathbb{k} = 0$, тогда

(i) Нули $\varkappa_{a_1, \dots, a_s}$ имеют кратности $a_i + a_j$, по всем $1 \leq i, j \leq s$.

- (ii) Нулям валентности $a_i + a_j$ соответствуют многочлены Шабата с паспортом $IV_{a_i+a_j, a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_s}$, лежащие в слое над этими нулями.
- (iii) Полюса $\varkappa_{a_1, \dots, a_s}$ имеют кратности $n - a_i$, по всем $1 \leq i \leq n$
- (iii) Полюсам валентности $n - a_i$ соответствуют многочлены Шабата с паспортом $IV_{a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_s}$, лежащие в слое над этими полюсами.

Доказательство. Используя теорему 3(ii) видим, что ноль кратности $a_i + a_j$ соответствует пересечению базы с гиперплоскостью $A_i = A_j$. Добавляя это уравнение к уравнениям базы семейства из теоремы 2, получим систему уравнений на многочлены Шабата с паспортом $IV_{a_i+a_j, a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_s}$ из теоремы 5.3.5. Аналогично для полюсов.

Кратности же этих критических значений следуют из формулы 5.4.2. $\square$

Теорема 5.4.4. Пусть $\text{char } \mathbb{k} = 0$, тогда

- (i) Нули $\varkappa_{a_1, \dots, a_s} - 1$ имеют кратность s или 1.
- (ii) Нулям валентности s соответствуют многочлены Шабата с паспортом $IV_{a_1, \dots, a_s}$, лежащие в слое над этими нулями.
- (iii) Нулям валентности 1 соответствуют многочлены Шабата с паспортом $(a_1, a_2, \dots, a_s | s - 1, 2, 1, \dots, 1 | n)$, лежащие в слое над этими нулями.

Доказательство. Функция $\varkappa_{a_1, \dots, a_s}$ равна отношению ненулевых критических значений $\frac{k}{k_0}$. Пусть простое критическое значение расположено в точке с координатой $x = b$. Функция $\varkappa_{a_1, \dots, a_s}$ равна 1, тогда и только тогда, когда $P(b) = P(0)$. Заметим сначала, что случай $b = 0$ соответствует (ii), а случай $b \neq 0$, но $P(b) = P(0)$ соответствует случаю (iii).

Осталось найти кратность нулей функции $\varkappa_{a_1, \dots, a_s} - 1$. Будем действовать по аналогии с 3.4.1. А именно, в случае (iii) критические точки не сталкиваются, потому $\varkappa_{a_1, \dots, a_s}$ не разветвлена.

Для точек из (ii), аналогично доказательству для случая $\diamond$ в 3.4.1, локально тотальное пространство семейства изоморфно семейству с функцией Фрида $x^{s-1}(x - t)$ с кратностью критической точки равной s . $\square$

Глава 6

Редукция в положительную характеристику

6.1 Пары Белого в положительной характеристике

Определение 6.1.1. Парой Белого над полем $\mathbb{k}$ называется пара (X, β) , где X алгебраическая кривая над $\mathbb{k}$, $\text{char } \mathbb{k} = p$, и β рациональная функция, являющиеся решением дивизориальной системы:

$$\begin{cases} (\beta) &= \sum_{i=1}^{m_1} a_i A_i - \sum_{i=3}^{m_3} c_i C_i \\ (\beta - 1) &= \sum_{i=1}^{m_2} b_i B_i - \sum_{i=3}^{m_3} c_i C_i \end{cases}$$

где $A_i, B_i, C_i \in X$ различные точки и $(a_1, \dots, a_{m_1} | b_1, \dots, b_{m_2} | c_1, \dots, c_{m_3})$ набор валентностей детского рисунка рода $g(X)$, и p не делит $n = \sum_{i=1}^{m_1} a_i$. [20]

Определение 6.1.2. Простое число называется *простым плохой редукции* для данного набора валентностей, если число пар Белого с таким набором валентностей разное для $\mathbb{C}$ и $\mathbb{F}_p$. [20]

Пример 6.1.3. Рассмотрим набор валентностей $(a, b | 2, 1, \dots, 1 | n)$, где $a + b = n$.

Этот набор валентностей соответствует единственной паре Белого рода 0, то есть многочлену Шабата.

Рассматривая кратности его нулей, получаем $P(x) = C \cdot x^a(1 - x)^b$, где $C \in \mathbb{k}^\times$. Чтобы $P(x)$ имел набор валентностей $(a, b|2, 1, \dots, 1|n)$ над $\mathbb{k}$, многочлен $P - 1$ должен иметь кратный корень, отличный от $x = 0; 1$.

Вычислим его производную: $P'(x) = C \cdot x^{a-1}(1 - x)^{b-1}(nx - b)$. То есть, многочлен $P(x)$ имеет набор валентностей $(a, b|2, 1, \dots, 1|n) \Leftrightarrow$ уравнение $nx = b$ на x в поле $\mathbb{k}$ имеет корень отличный от $x = 0; 1$. Это выполняется тогда и только тогда, когда $\text{char } \mathbb{k}$ не делит числа a, b, n .

Таким образом, простые плохой редукции для набора валентностей $(a, b|2, 1, \dots, 1|n)$ являются простыми делителями чисел a, b, n .

Пример 6.1.4. Рассмотрим пример 1.5.4 с набором валентностей $(a, 1, \dots, 1|b, 1, \dots, 1|n)$, где $n = a + b - 1$ и $a > b$. Рассуждения, проведенные в примере 1.5.4, остаются верными над любым полем, а именно, многочлен $P(x)$ степени не выше n , удовлетворяющий условиям $(1 - x)^a \mid P$ и $x^b \mid P - 1$, имеет вид:

$$P(x) = (1 + ax + \binom{a+1}{2}x^2 + \binom{a+2}{3}x^3 + \dots + \binom{n-1}{b-1}x^{b-1}) \cdot (1 - x)^a$$

Для того чтобы редукция была хорошей в поле $\mathbb{k}$, необходимо и достаточно, чтобы степень $P(x)$ была равна n , то есть $\binom{n-1}{b-1} \neq 0$ в $\mathbb{k}$. Пусть $\text{char } \mathbb{k} = p$, тогда условие преобразуется в $b < p$ и остаток a при делении на p , r удовлетворяет условию $1 \leq r \leq p - b$.

6.2 Редукция семейств пар Абеля рода 1

Лемма 6.2.1. $\text{genus}(X_1(n, \overline{\mathbb{F}_p})) = \text{genus}(X_1(n)) = \frac{\varphi(n)\psi(n)}{24} - \frac{\varphi(n)\sigma_0(n)}{4} + 1$;

Доказательство. Для второго равенства мы воспользуемся утверждениями 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3 и формулой Римана-Гурвица, примененной к функции $\varkappa_n$ на $X_1(n)$.

Для первого равенства мы воспользуемся теоремой Игузы, по которой для $p \nmid n$ кривая $X_1(n)$ имеет хорошую редукцию по модулю p . См. 8.6.1. в [18]. $\square$

Утверждение 6.2.2. Семейства Фрида $(\mathfrak{X}_n, X_1(n), \pi, \alpha_n)$ и функции Белого на его базе $\mathfrak{X}_n$ имеют модели над $\mathbb{Q}$. Каждое из них может быть задано одним множеством алгебраических уравнений над $\mathbb{Z}$ и над полями любой характеристики, не делящей n и не равной 2.

Доказательство. Рассмотрим метод вычисления семейства пар Абеля рода 1 из раздела 3.6. Утверждения 3.7.2, 3.7.3 задают уравнения на $(\mathfrak{X}_n, X_1(n), \pi, \alpha_n)$ над $\mathbb{Z}$, верные над полем любой характеристики, не делящей n и не равной 2.

С помощью утверждения 3.7.5 получим что модель над $\mathbb{Q}$ имеют и симметрические функции от критических значений пары Абеля, определенной над $\mathbb{Q}$. Откуда и у $\mathfrak{X}_n$ есть модель над $\mathbb{Q}$. $\square$

Утверждение 6.2.3. (i) Утверждения 3.2.2, 3.3.1 остаются верными над полями любой характеристики, не делящей n и большей 2.

(ii) Пусть $\text{char } \mathbb{k} = p > 3$, $p \nmid n$. Утверждения 3.4.1 остаются верными над $\mathbb{k}$. Утверждение 3.4.2 отличаются критические значения и их кратности лишь для точек вида $\star_{a,b}$, для которых либо $p \mid a$ либо $p \mid b$:

Пусть $0 < k < n$ и $p \mid k$, в точках вида $\star_{k,n-k}$ функция $\mathfrak{X}_n$ равна либо 1 либо 0 в зависимости от четности или нечетности k ; и кратность этой критической точки равна $\frac{\text{НОК}(k, (n-k))}{p^{\text{ord}_p k}}$.

Доказательство.

(i) Доказательство утверждений 3.2.2, 3.3.1 использовало возможность делить на 2 и сепарабельность многочлена $x^n - a$.

(ii) Доказательство утверждения 3.4.1 для нулевой характеристики остается верным для характеристики $\text{char } \mathbb{k} = p > 3$. Действительно, для случая пар Белого типа $\diamond$, в доказательстве 3.4.1 задача была сведена к семейству многочленов с набором валентностей $(3|2, 1|2, 1|3)$, и редукция этого семейства в характеристику $\text{char } \mathbb{k} = p > 3$ хорошая. Остальные же случаи сводились к неразветвленному накрытию и для $\text{char } \mathbb{k} = p > 2$ доказательство также останется верным.

Для аналога утверждения 3.4.2, заметим, что для особенности $\star_{k,n-k}$, доказательство 3.4.2 останется верным за исключением случаев $p \mid k$ и $p \mid n - k$,

поскольку для них число решений уравнений $x^k = a$ или $x^{n-k} = a$ и соответственно число прообразов падает в $p^{\text{ord}_p k}$ или $p^{\text{ord}_p n-k}$ раз. В этих случаях обе простые критические точки сталкиваются с точкой максимальной кратности. Предположим $p \mid k$. При раздутии получим, что простые критические точки центрально симметричны относительно нуля степени k . Соответственно их координаты отличаются знаком, а их критические значения $k_1 = (-1)^k \cdot k$. Откуда $k_1/k_2 + k_2/k_1 = (-1)^k \cdot 2$. То есть для четных k , в этой особенности $\varkappa_n = 1$ и для нечетного $k - \varkappa_n = 0$. $\square$

6.3 Количество пар Абеля-Белого рода 1 в положительной характеристике

Обозначение 6.3.1. Дополним обозначения 4.6.1: теперь аргументами функции A будет являться также поле определения, над которым вычисляется количество рисунков.

В этом разделе мы вычислим $A_{\square}(n, \overline{\mathbb{F}}_p)$ и $A_{\square}(n, \overline{\mathbb{F}}_p)$.

Утверждение 6.3.2. *Утверждение 4.6.3 выполняется над полями любой характеристики, не делящей n .*

Доказательство. В доказательстве 4.6.3 использовалось лишь количество компонент пространства модулей пар Абеля рода 1 и степени n . Поскольку при $p \nmid n$ по теореме Игузы (8.6.1. в [18]) кривая $X_1(n)$ имеет хорошую редукцию по модулю p , доказательство 4.6.3 не изменится для поля любой характеристики, не делящей n . $\square$

Утверждение 6.3.3. (i) $2A_{\square}(n, \mathbb{C}) + 3A_{\square}(n, \mathbb{C}) = \frac{(n-1)(n-2)(n+3)}{12}$

(ii) $\deg \varkappa_n(\mathbb{C}) - \deg \varkappa_n(\overline{\mathbb{F}}_p) = \sum_{k=1}^{\lfloor n/p \rfloor} \varphi(\text{НОД}(k, n)) \text{НОК}(kp, (n - kp)).$

(iii) $2A_{\square}(n, \mathbb{C}) + 3A_{\square}(n, \mathbb{C}) - 2A_{\square}(n, \overline{\mathbb{F}}_p) - 3A_{\square}(n, \overline{\mathbb{F}}_p) =$

$$= \sum_{k=1}^{\lfloor n/p \rfloor} kp(n - kp) + \sum_{k=1}^{\lfloor n/2p \rfloor} \frac{k}{p^{\text{ord}_p(k)}} \cdot (n - 2kp)$$

Доказательство. (i) следует из 4.6.4.

(ii) Сравним степени $\varkappa_n(\mathbb{C})$ и $\varkappa_n(\overline{\mathbb{F}_p})$, считая кратности их полюсов, с помощью 6.2.3. Точки из 6.2.3(iv) являются полюсами над $\mathbb{C}$, но над $\overline{\mathbb{F}_p}$ в них конечное значение. Остальные полюса $\varkappa_n(\mathbb{C})$ имеют ту же кратность, что и у функции $\varkappa_n(\overline{\mathbb{F}_p})$ по 6.2.3(iii). Суммируя кратности пропавших полюсов, получим требуемое равенство.

(iii) По 3.4.1, над $\mathbb{C}$ нулями $\varkappa_n$ являются только пары Абеля-Белого вида $\diamond$ и $\square$ и особые слои вида $\times_{a,b}$. Потому, учитывая кратности, получаем:

$$2\hat{A}_{\square}(n, \mathbb{C}) + 3\hat{A}_{\diamond}(n, \mathbb{C}) = \deg \varkappa_n(\mathbb{C}) - \varphi(n)/2 \quad (1)$$

По 6.2.3, над $\overline{\mathbb{F}_p}$ к нулям $\varkappa_n$ добавятся особенности вида $\star_{2kp, n-2kp}$, и аналогично учитывая кратности, получаем:

$$2\hat{A}_{\square}(n, \overline{\mathbb{F}_p}) + 3\hat{A}_{\diamond}(n, \overline{\mathbb{F}_p}) = \deg \varkappa_n(\overline{\mathbb{F}_p}) - \varphi(n)/2 - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2p \rfloor} \frac{\varphi(k)}{p^{\text{ord}_p(k)}}(n - 2kp) \quad (2)$$

Вычитая из формулы (1) формулу (2) и применяя (ii), получаем:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{\square}(n, \mathbb{C}) + 3\hat{A}_{\diamond}(n, \mathbb{C}) - 2\hat{A}_{\square}(n, \overline{\mathbb{F}_p}) - 3\hat{A}_{\diamond}(n, \overline{\mathbb{F}_p}) = \\ = \sum_{k=1}^{\lfloor n/p \rfloor} \varphi(\text{НОД}(k, n)) \text{НОК}(kp, (n - kp)) + \sum_{k=1}^{\lfloor n/2p \rfloor} \frac{\varphi(k)}{p^{\text{ord}_p(k)}}(n - 2kp) \end{aligned}$$

Аналогично, проведем подобные рассуждения для всех компонент пространства пар Абеля рода 1, то есть для семейства $\mathfrak{X}_{d|n}$ и функции на его базе $\varkappa_{d|n}$, пользуясь утверждением 3.5.4:

$$\begin{aligned} 2A_{\square}(d | n, \mathbb{C}) + 3A_{\diamond}(d | n, \mathbb{C}) - 2A_{\square}(d | n, \overline{\mathbb{F}_p}) - 3A_{\diamond}(d | n, \overline{\mathbb{F}_p}) = \\ = \sum_{k=d, d|k}^{\lfloor n/p \rfloor} \varphi(\text{НОД}(k, n)/d) \text{НОК}(kp, (n - kp)) + \sum_{k=d, d|k}^{\lfloor n/2p \rfloor} \frac{\varphi(k/d)}{p^{\text{ord}_p(k)}}(n - 2kp) \end{aligned}$$

Просуммируем эти равенства по всем делителям n , и воспользуемся тем, что $\sum_{d|k} \varphi(d) = k$ и по 7.3.1, $\sum_{d|k} A_{\square}(d | n) = A_{\square}(n)$, $\sum_{d|k} A_{\diamond}(d | n) = A_{\diamond}(n)$. Тем самым получим требуемое равенство. $\square$

Теорема 6.3.4. (i) $A_{\square}(n, \mathbb{C}) - A_{\square}(n, \overline{\mathbb{F}_p}) = \sum_{0 < k < n/p} (n - kp)$

$$(ii) A_{\square}(n, \mathbb{C}) - A_{\square}(n, \overline{\mathbb{F}_p}) = \sum_{k=1}^{\lfloor n/p \rfloor} \frac{kp-3}{2}(n - kp) + \sum_{k=1}^{\lfloor n/2p \rfloor} \frac{k}{2p^{\text{ord}_p(k)}}(n - 2kp)$$

Доказательство. Рассмотрим теперь формулу Римана-Гурвица для $\varkappa_n(\mathbb{C})$ и $\varkappa_n(\overline{\mathbb{F}_p})$, аккуратно учитывая критические точки.

$$\chi(X_1(n)) = -2 \deg \varkappa_n(\mathbb{C}) + \sum_{P \in X_1(n)(\mathbb{C})} e_P(\varkappa_n(\mathbb{C})) - 1$$

$$\chi(X_1(n)) = -2 \deg \varkappa_n(\overline{\mathbb{F}_p}) + \sum_{P \in X_1(n)(\overline{\mathbb{F}_p})} e_P(\varkappa_n(\overline{\mathbb{F}_p})) - 1$$

Рассмотрим разность этих равенств и перенесем в левую часть слагаемые, относящиеся к критическим точками $X_1(n)$ над которыми лежат пары Абеля-Белого, а правую преобразуем, используя утверждения 6.2.3, 6.3.3

$$\widehat{A}_{\square}(n, \mathbb{C}) + 2\widehat{A}_{\square}(n, \mathbb{C}) - \widehat{A}_{\square}(n, \overline{\mathbb{F}_p}) - 2\widehat{A}_{\square}(n, \overline{\mathbb{F}_p}) =$$

Аналогично доказательству 6.3.3(iii), получим аналогичное утверждение для всех компонент пространства пар Абеля рода 1 и просуммируем. Получим:

$$\begin{aligned} A_{\square}(n, \mathbb{C}) + 2A_{\square}(n, \mathbb{C}) - A_{\square}(n, \overline{\mathbb{F}_p}) - 2A_{\square}(n, \overline{\mathbb{F}_p}) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor n/p \rfloor} \frac{kp-1}{2}(n - kp) + \sum_{k=1}^{\lfloor n/2p \rfloor} \frac{k}{2p^{\text{ord}_p(k)}}(n - 2kp) \end{aligned}$$

Откуда, используя 6.3.3(iii), получим систему из двух линейных уравнений на неизвестные $A_{\square}(n, \mathbb{C}) - A_{\square}(n, \overline{\mathbb{F}_p})$ и $A_{\square}(n, \mathbb{C}) - A_{\square}(n, \overline{\mathbb{F}_p})$. Из неё и получаются искомые формулы (i),(ii). $\square$

Следствие 6.3.5. При $p > n$ редукция по модулю p пар Абеля-Белого рода 1 и степени n хорошая.

Доказательство. Применяя теорему 6.3.4, для $p > n$, получаем равенства $A_{\square}(n, \mathbb{C}) = A_{\square}(n, \overline{\mathbb{F}_p})$ и $A_{\square}(n, \mathbb{C}) = A_{\square}(n, \overline{\mathbb{F}_p})$, что и означает, что редукция наборов валентностей $(n|3, 1, \dots, 1)$ и $(n|2, 2, 1, \dots, 1|n)$ по модулю p хорошая. $\square$

Следствие 6.3.6. *[Асимптотика $A(n, \overline{\mathbb{F}_p})$]* Пусть $p > 3$ – фиксированное простое число. Тогда для n , не делящихся на p , имеем

$$(i) \ A_{\square}(n, \overline{\mathbb{F}_p}) = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2p}\right)n^2 + O(n).$$

$$(ii) \ A_{\square}(n, \overline{\mathbb{F}_p}) = \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{12p} + \frac{1}{48p(p+1)}\right)n^3 + O(n^2).$$

6.4 Простые плохой редукции деревьев

В этом разделе изучим простые плохой редукции и количество многочленов Шабата с набором валентностей $IV_{a_1, \dots, a_s}$ над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики. Напомним, что эти многочлены Шабата удовлетворяют системе уравнений из теоремы 5.3.5.

Обозначение 6.4.1. Количество классов подобия многочленов с набором валентностей $IV_{a_1, \dots, a_s}$ над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ будем обозначать $N_{\mathbb{k}}(a_1, \dots, a_s)$.

Лемма 6.4.2. *Если $\text{char } \mathbb{k} > s$ и $\text{char } \mathbb{k} \nmid a_i$, для всех $1 \leq i \leq s$, то система из теоремы 5.3.5 вне гиперплоскостей $A_i = A_j$ не имеет кратных корней.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим дополнение до гиперплоскости $A_1 = 0$ с координатами $y_i = A_i/A_1$. и рассмотрим ковекторы градиентов гиперповерхностей, заданных уравнениями из теоремы 1. При $y_i \neq y_j$ они алгебраически независимы, так как определитель матрицы, составленной из них, является определителем Вандермонда:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \dots & a_s \\ 2a_2y_2 & 2a_3y_3 & \dots & 2a_sy_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (s-1)a_2y_2^{s-2} & (s-1)a_3y_3^{s-2} & \dots & (s-1)a_sy_s^{s-2} \end{vmatrix} = (s-1)! \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_s \cdot \prod_{1 < i < j \leq s} (y_j - y_i)$$

□

Лемма 6.4.3. *Корни системы из теоремы 5.3.5, лежащие на одной из гиперплоскостей вида $A_i = A_j$, если существуют, то лежат в проективной оболочке точек вида $K_{I_m} = (k_1 : k_2 : \dots : k_s)$, $k_i = \begin{cases} 1 & i \in I_m \\ 0 & i \notin I_m \end{cases}$, где I_m непустое подмножество множества индексов $\{1, \dots, s\}$, такие что, для всех m , $\text{char } \mathbb{k} \mid \sum_{i \in I_m} a_i$.*

Доказательство. Очевидно, K_{I_m} и их линейные комбинации являются решениями системы из теоремы 5.3.5.

В другую сторону, подставим в систему $A_i = A_j$, и предположим, что существует решение. Пусть соответствующий многочлен $P(t) = (1 - A_1 t)^{a_1} \cdot \dots \cdot (1 - A_s t)^{a_s}$. Представим его в виде $P(t) = Q(t) \cdot U^p(t)$, где $Q(t) = (1 - B_1 t)^{b_1} \cdot \dots \cdot (1 - B_l t)^{b_l}$, причем все B_i попарно различны, $0 < b_i < p$, для всех i , и $l < s$.

Лемма будет выполнена, если $Q \equiv 1$. Пусть это не так, многочлен P имеет в $t = 0$ критическую точку кратности не меньше s , так как он удовлетворяет системе 5.3.5, такую же кратность имеет в $t = 0$ и Q . Но если $Q \not\equiv 1$, для него не выполняется формула Гурвица, $s - 1 + \sum b_i - 1 > \deg Q - 1$, противоречие. $\square$

Лемма 6.4.4. *Пусть $\text{char } \mathbb{k} > s$, $\text{char } \mathbb{k} \nmid n$. $N_{\overline{\mathbb{Q}}}(a_1, \dots, a_s) \geq N_{\mathbb{F}_p}(a_1, \dots, a_s)$.*

Доказательство. Количество пар Белого с набором валентностей $IV_{a_1, \dots, a_s}$ над $\mathbb{k}$ всегда не больше, чем над $\overline{\mathbb{Q}}$, т.к. над $\overline{\mathbb{Q}}$ это количество $(n - 1)!$ по числу деревьев с таким набором валентностей. Решений же системы над любым полем не может быть больше по теореме Безу. $\square$

Теорема 6.4.5. *Пусть $p > s$, $p \nmid n$. $N_{\overline{\mathbb{Q}}}(a_1, \dots, a_s) = N_{\mathbb{F}_p}(a_1, \dots, a_s)$, тогда и только тогда, когда для любого набора индексов $I \subset \{1, \dots, s\}$ выполняется условие $p \nmid \sum_{i \in I} a_i$.*

Доказательство. В обозначениях 6.4.3, $N_{\overline{\mathbb{Q}}}(a_1, \dots, a_s) = N_{\mathbb{F}_p}(a_1, \dots, a_s)$, равносильно тому, что у системы $I_{a_1, \dots, a_s}$ нет корней вида K_I . Т.е. нет наборов, таких что $p \mid \sum_{i \in I} a_i$. $\square$

Глава 7

Вычисленные примеры

7.1 Семейства примитивных пар Абеля рода 1

В этом разделе приводятся вычисленные семейства примитивных пар Абеля рода 1, для которых база семейства, $X_1(n)$, является рациональной.

Утверждение 7.1.1. *Если $X_1(n)$ является рациональной кривой, то тотальное пространство $\mathfrak{X}_n$ семейства примитивных пар Абеля рода 1 и степени n является поверхностью и задается уравнением вида*

$$\alpha^2 + P(x, t)\alpha + x^n = 0$$

где $P(x, t) \in \mathbb{k}[t, x]$, $t \in \mathbb{k}[\mathfrak{X}]$ проекция расслоения, а $\alpha \in \mathbb{k}[\mathfrak{X}]$ функция Абеля на слое.

Доказательство. В соответствии с 2.6.3, гиперэллиптическая кривая с функцией Абеля задается уравнением $\alpha^2 + P(x)\alpha + x^n = 0$. Соответственно семейство пар Абеля рода 1 и степени n можно задать алгебраическим отображением $X_1(n) \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}_n[x]$, где $\mathbb{k}_n[x]$ пространство многочленов степени n .

Пусть t – параметр на рациональной кривой $X_1(n)$. Тогда в семействе $\mathfrak{X}$ коэффициенты $P(x)$ являются рациональными функциями, зависящие от t . То есть можно представить: $P(x, t) = \frac{Q(x, t)}{R(t)}$, где $Q(x, t) \in \mathbb{k}[x, t]$, $R[t] \in \mathbb{k}[t]$.

После замены координат $(\alpha, x, t) \rightarrow (\alpha/R^n(t), x/R^2(t), t)$, уравнение тотального пространства примет вид $\alpha^2 + P(x, t)\alpha + x^n = 0$. $\square$

7.1.1 $n = 4$

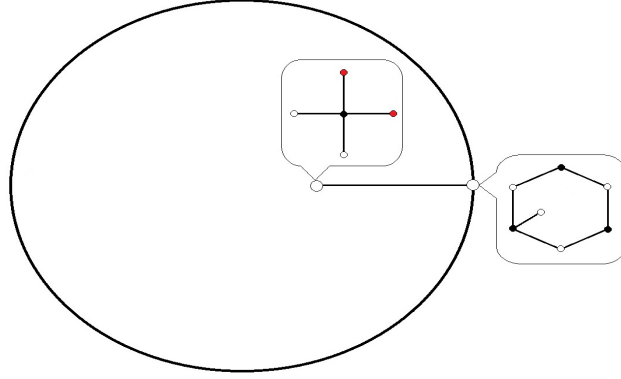


Рис. 7.1: Рисунок на $X_1(4)$

Уравнение кривой:

$$\alpha^2 + (t/16 + x + 2x^2)\alpha + x^4 = 0$$

Функция Белого на базе:

$$\varkappa_4 = -\frac{1}{64} \frac{(t-1)(t-9)^3}{t^3}$$

j -инвариант

$$j_4 = 16 \frac{(16 - 16t + t^2)^3}{t^4(t-1)}$$

Список пар Белого рода 1 в семействе:

7.1.2 $n = 5$

Уравнение кривой:

$$\alpha^2 + (t - (2t+1)x + (t+3)x^2)\alpha + x^5 = 0$$

Функция Белого на базе:

$$\varkappa_5 = \frac{4}{5^{10}} \frac{(-1 + 11t + t^2)(t+8)^2(3t+4)^3(3t-1)^3}{t^4}$$

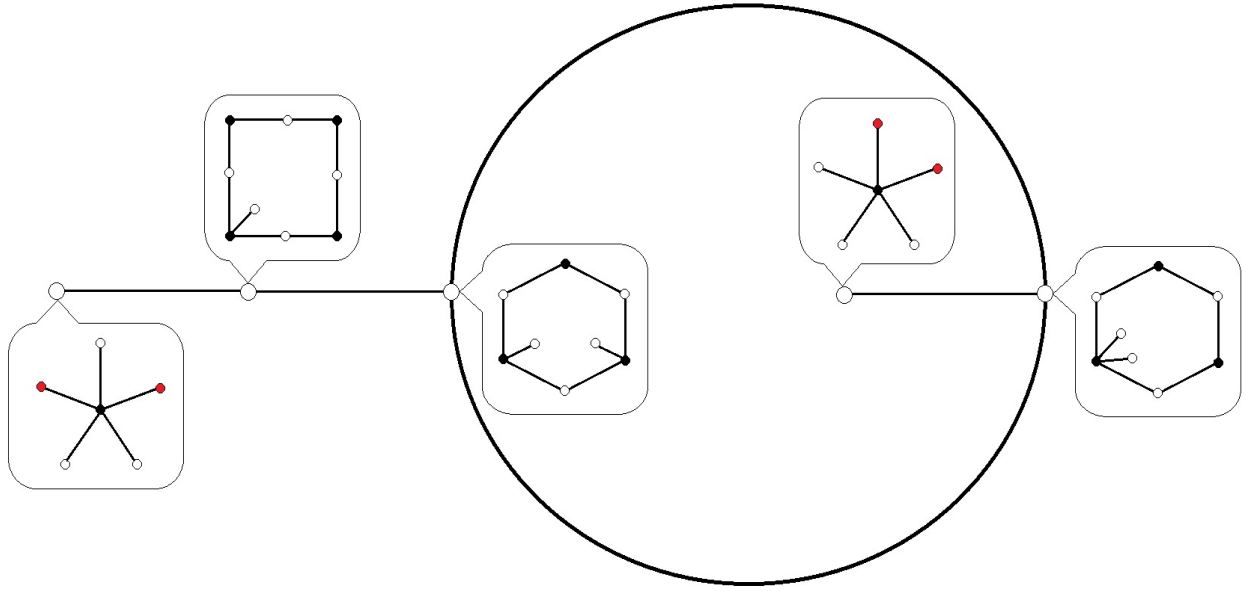


Рис. 7.2: Рисунок на $X_1(5)$

j -инвариант

$$j_5 = -\frac{(t^4 + 12t^3 + 14t^2 - 12t + 1)^3}{t^5(-1 + 11t + t^2)}$$

Список пар Белого рода 1 в семействе:

n	Рисунок	t	Поле определения	j	простые плохой редукции
5	$\square_{1,1,3}$	1/3	$\mathbb{Q}$	$\frac{2^{12} \cdot 5}{3^5}$	3
5	$\square_{1,2,2}$	-4/3	$\mathbb{Q}$	$-\frac{269^3}{2^{10} 3^5}$	2,3
5	$\square_{1,1,1,2}$	-8	$\mathbb{Q}$	$\frac{5 \cdot 211^3}{2^{15}}$	2

7.1.3 $n = 6$ и пример редукции семейства

Уравнение кривой:

$$\alpha^2 + \left(-t(t-1)^2 - (3t+1)(t-1)x - 4x^2 + 2x^3\right)\alpha + x^6 = 0$$

Функция Белого на базе:

$$\varkappa_6 = \frac{1}{2^{14} \cdot 3^{12}} \frac{(9t-1)(9t-25)^2(81t^3 - 27t^2 + 99t - 25)^3}{t^5(t-1)^4}$$

j -инвариант

$$j_6 = \frac{(3t-1)^3 (3t^3 - 3t^2 + 9t - 1)^3}{t^6 (t-1)^3 (9t-1)}$$

n	Рисунок	t	Поле определения	j	p
6	$\square_{2,2,1,1}$	$t=25/9$	$\mathbb{Q}$	$\frac{11^3 \cdot 1979^3}{2^3 \cdot 3 \cdot 5^{12}}$	2,3,5
6	$\diamond_{4,1,1}$	$81t^3 - 27t^2 + 99t - 25 = 0$	$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$	$\frac{2^8 \cdot 3^6 \cdot 11^3 \cdot 157^3}{5^{12}}$	5
6	$\diamond_{3,2,1}$		$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3}]$		5
6	$\diamond_{3,1,2}$		$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3}]$		5

$n = 6$ удобное число для примера редукции, есть простое 5 при редукции по которому степень $\varkappa_6$ упадет, оно подходит под условия теорем о редукции, но рисунков с таким числом ребер еще не так много, как для больших степеней. Рассмотрим теперь нули и полюса $\varkappa_6$ и их редукцию по модулю 5.

Полюса функции $\varkappa_6$ расположены в точках $t = 0$, $t = 1$ и $t = \infty$. Над точкой $t = 0$ уравнение слоя семейства $\mathfrak{X}_6$ примет вид $\alpha^2 - xR_4(x)\alpha + x^6 = 0$, над $t = 1$ вид $\alpha^2 + 4x^2R_2(x/4)\alpha + x^6 = 0$, и над $t = \infty$ вид $\alpha^2 + 2x^3\alpha + x^6 = 0$.

Нули функции $\varkappa_6$ расположены в точках $t = 1/9$, $t = 25/9$ и корнях уравнения $81t^3 - 27t^2 + 99t - 25 = 0$. В слое над точкой $t = 1/9$ лежит кривая, заданная уравнением $\alpha^2 + \frac{2^6}{3^6}R_6(\frac{9}{4}x)\alpha + x^6 = 0$, т.е. особенность типа $\times$.

В слое над $t = 25/9$ лежит пара Абеля-Белого $\square_{1,1,2,2}$, и над корнями $81t^3 - 27t^2 + 99t - 25 = 0$ лежат пары Абеля-Белого $\diamond_{4,1,1}$, $\diamond_{3,2,1}$, $\diamond_{3,1,2}$. Причем, $\diamond_{4,1,1}$ лежит над действительным корнем, а $\diamond_{3,2,1}$, $\diamond_{3,1,2}$ над двумя комплексно сопряженными корнями.

Отметим, что нули, полюса, их количество и кратности, соответствуют описанию из 3.4.1 и 3.4.2.

Рассмотрим теперь редукцию семейства $\mathfrak{X}_6$ в поле характеристики 5, и то что при этом произойдет с полюсами и нулями $\varkappa_6$. Ноль $\varkappa_6$ в точке $t = 25/9$ теперь редуцируется в точку $t = 0$, так же как и один из корней уравнения $81t^3 - 27t^2 + 99t - 25 = 0$. Таким образом, числитель $\varkappa_6$ примет вид $t^5 \cdot (t^2 + 3t + 4)^3 \cdot (t + 1)$. То есть полюс в точке $t = 0$ сокращается и мы имеем:

$$\varkappa_6(\overline{\mathbb{F}_5}) = -\frac{(t^2 + 3t + 4)^3 \cdot (t + 1)}{(t - 1)^4}$$

Причем значение $\varkappa_6(\overline{\mathbb{F}_5})$, в точке $t = 0$ равно 1. Это соответствует утверждению 6.2.3.

Из этих вычислений мы видим, что над полем $\overline{\mathbb{F}_5}$ существует только 2 примитивные пары Абеля-Белого с набором валентностей $(6|3, 1, 1, 1|6)$ (в слоях над корнями уравнения $t^2 + 3t + 4 = 0$), в отличие от поля $\mathbb{C}$, где таких пар 3. Кроме того, над полем $\overline{\mathbb{F}_5}$ нет примитивных пар Абеля-Белого, с набором валентностей $(6|2, 2, 1, 1|6)$, в отличие от поля $\mathbb{C}$, где существует одна такая пара.

То есть $m_{\square}(6, \mathbb{C}) - m_{\square}(6, \overline{\mathbb{F}_5}) = 1$ и $m_{\square}(6, \mathbb{C}) - m_{\square}(6, \overline{\mathbb{F}_5}) = 1$, в соответствии с теоремой 6.3.4.

7.1.4 $n = 7$

Уравнение кривой:

$$\alpha^2 + (t^4(t-1) - t^2(3t^2 - 2t - 2)x + (3t^3 - 4t^2 - 3t - 1)x^2 + (-t^2 + 3t + 3)x^3)\alpha + x^7 = 0$$

Функция Белого на базе:

$$\varkappa_7 = \frac{2^2}{7^{14}} \frac{(l^3 - 8l^2 + 5l + 1)(l - 5)^2(4l^2 - 26l - 5)^2(2l^2 + l + 1)^2(3l^2 - 9l + 5)^3(12l^3 - 12l^2 + 4l + 5)^3}{l^{10}(l - 1)^6}$$

j -инвариант

$$j_7 = \frac{(l^2 - l + 1)^3(l^6 - 11l^5 + 30l^4 - 15l^3 - 10l^2 + 5l + 1)^3}{l^7(l - 1)^7(l^3 - 8l^2 + 5l + 1)}$$

n	Рисунок	t	Поле определения	$N(j)$	p
7	$\square_{2,2,2,1}$	t=5	$\mathbb{Q}$	$\frac{3^3 \cdot 7 \cdot 2099^3}{2^{14} \cdot 5^7}$	2,5
7	$\square_{3,1,2,1}$	$4t^2 - 26t - 5 = 0$	$\mathbb{Q}[\sqrt{21}]$	$\frac{41^3 \cdot 43^3 \cdot 109^3 \cdot 881^3}{2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^7}$	2,3,5
7	$\square_{4,1,1,1}$		$\mathbb{Q}[\sqrt{21}]$		2,3,5
7	$\square_{3,3,1}$	$3t^2 - 9t + 5 = 0$	$\mathbb{Q}[\sqrt{21}]$	$-\frac{2^{24} \cdot 83^3}{3^7 \cdot 5^7}$	3,5
7	$\square_{5,1,1}$		$\mathbb{Q}[\sqrt{21}]$		3,5
7	$\square_{3,2,1,1}$	$2t^2 + t - 1 = 0$	$\mathbb{Q}[\sqrt{-7}]$	$\frac{18439^3}{2^{21}}$	2
7	$\square_{3,1,1,2}$		$\mathbb{Q}[\sqrt{-7}]$		2
7	$\square_{3,2,2}$	$12t^3 - 12t^2 + 4t + 5 = 0$	$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{98}]$	$\frac{1511^3 \cdot 130873^3}{2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^7}$	2,3,5
7	$\square_{4,2,1}$		$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{98}, \sqrt{-3}]$		2,3,5
7	$\square_{4,1,2}$		$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{98}, \sqrt{-3}]$		2,3,5

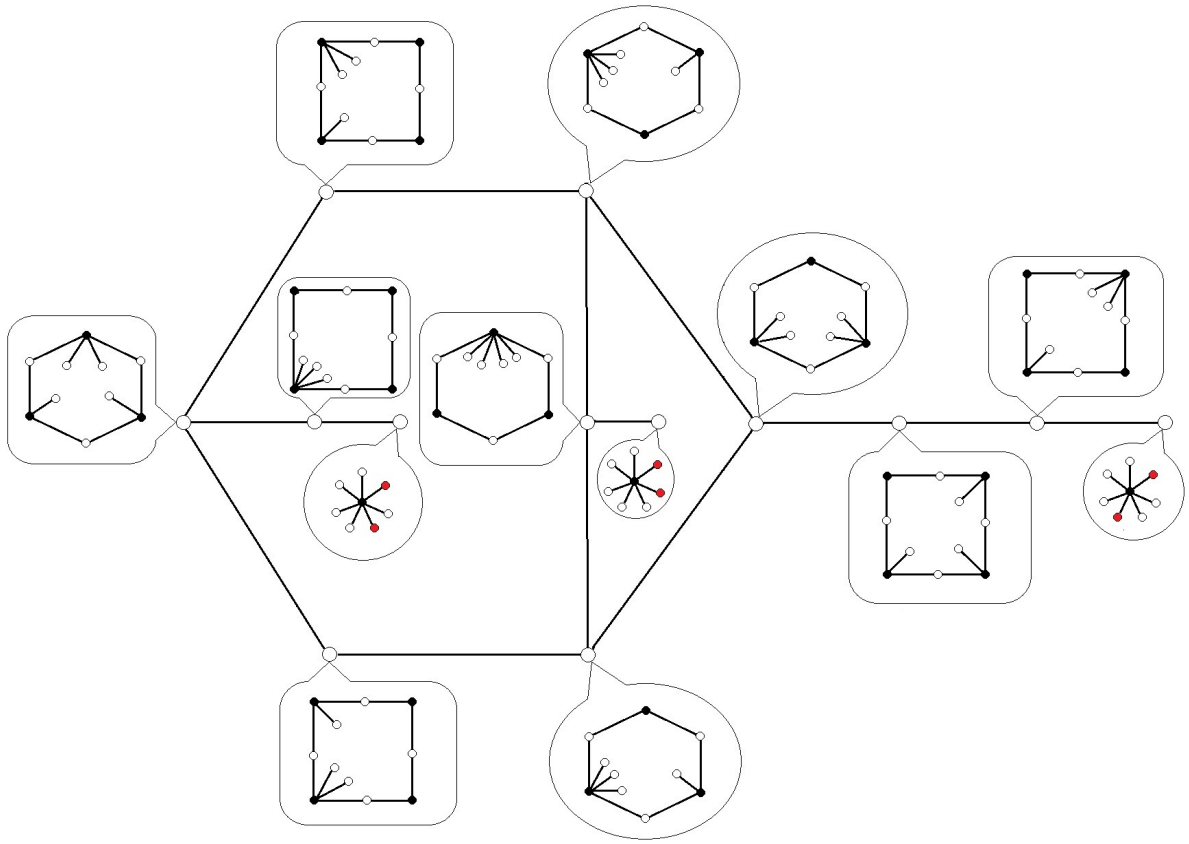


Рис. 7.3: Рисунок на базе $X_1(7)$

7.1.5 $n = 8$

Уравнение кривой:

$$\alpha^2 + (t(t-1)^2(1+t)^4 - (t-1)(1+t)^3(3t^2 - 6t - 1)x + (1+t)^2(t-3)(3t^2 - 3t - 2)x^2 - (1+t)^2(t-3)^2x^3 + 2x^4))\alpha + x^8 = 0$$

Функция Белого на базе:

$$\varkappa_8 = \frac{1}{2^{50}} \frac{(t^2 - 6t + 1)P_{8,\square}^2(t)P_{8,\square}^3(t)}{(t-1)^6(t+1)^4t^7}$$

где

$$P_{8,\square}(t) = 2401 + 294t - 1881t^2 + 564t^3 + 575t^4 - 250t^5 + 25t^6$$

$$P_{8,\square}(t) = 225t^6 - 450t^5 - 225t^4 + 36t^3 - 81t^2 - 130t + 49$$

j -инвариант:

$$j_8 = \frac{(1 + 12l^2 + 8l^3 - 10l^4 + 8l^5 + 12l^6 - 8l^7 + l^8 - 8l)^3}{l^8(-1+l)^4(l^2-6l+1)(1+l)^2}$$

n	Рисунок	t	j
8	все 6 рисунков типа $\square$	$P_{8,\square}(t)$	$\frac{2^5 \cdot 193^3 \cdot 734614312466980513^3}{3^{12} \cdot 5^{16} \cdot 7^{32}}$
8	все 6 рисунков типа $\diamond$	$P_{8,\diamond}(t)$	$-\frac{2^3 \cdot 24293971310474687^3}{3^{24} \cdot 5^{16} \cdot 7^{16}}$

7.1.6 $n = 9$

Уравнение кривой:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + (t(t-1)^4(t^2-t+1)^3 - (1+6t-9t^2+4t^3)(t-1)^2(t^2-t+1)^2x + \\ + (t^2-t+1)(6t^5-23t^4+37t^3-24t^2-2t+7)x^2 + (-14+17t-4t^5-11t^3+11t^4-4t^2)x^3 + \\ + (-3t+t^3+7)x^4) \alpha + x^9 = 0 \end{aligned}$$

Функция Белого на базе:

$$\varkappa_9 = \frac{1}{2^2 \cdot 3^{36}} \frac{(1-6t+3t^2+t^3) \cdot (P_{9,\square}^+(t) \cdot P_{9,\square}^-(t))^2 (P_{9,\diamond}^+(t) \cdot P_{9,\diamond}^-(t))^3}{t^8(t^2-t+1)^6(t-1)^{14}}$$

где

$$P_{9,\square}^+(t) = 5t^3 + 15t^2 - 3t + 32$$

$$P_{9,\square}^-(t) = 40t^9 - 576t^7 + 1272t^6 + 432t^5 - 6525t^4 + 13521t^3 - 14229t^2 + 8064t - 2048$$

$$P_{9,\diamond}^+(t) = 5t^3 + 3t - 1$$

$$P_{9,\diamond}^-(t) = 20t^6 - 60t^5 + 48t^4 + 40t^3 - 96t^2 + 57t - 16$$

j -инвариант:

$$j_9 = -\frac{(t^3-3t+1)^3(t^9-9t^7+27t^6-45t^5+54t^4-48t^3+27t^2-9t+1)^3}{t^9(t^2-t+1)^3(t-1)^9(t^3+3t^2-6t+1)}$$

n	Рисунок	t	$N(j)$
9	$\diamond_{7,1,1}$		
9	$\diamond_{5,1,3}$	$P_{9,\diamond}^+(t)$	$-\frac{2^{36} \cdot 3^2 \cdot 2267^3}{5^9 \cdot 7^9}$
9	$\diamond_{5,3,1}$		
9	$\square_{3,2,2,2}$		
9	$\square_{4,2,2,1}$	$P_{9,\square}^+(t)$	$-\frac{273^3 \cdot 5653^3 \cdot 10400327909^3}{2^{57} \cdot 3^2 \cdot 5^9 \cdot 7^{18}}$
9	$\square_{4,1,2,2}$		
9	Остальные $6 \diamond$	$P_{9,\diamond}^+(t)$	$\frac{3^3 \cdot 109^3 \cdot 179^3 \cdot 4339^3 \cdot 993763^3}{2^{54} \cdot 5^9 \cdot 7^9}$
9	Остальные $9 \square$	$P_{9,\square}^-(t)$	$\frac{3^6 \cdot 488069^3 \cdot 174617^3 \cdot 1043792065894558499^3}{2^{138} \cdot 5^9 \cdot 7^{18}}$

7.1.7 $n = 10$

Уравнение кривой:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + (t^7(1+t)(t^2+4t-1)^5(t-1)^9 - 2t^5(1-6t-3t^2+2t^3)(t^2+4t-1)^4(t-1)^6x + \\ + t^3(1-19t+63t^2-7t^3-20t^4+6t^5)(t-1)^3(t^2+4t-1)^3x^2 - \\ - 2t^2(t-3)(2t^5-3t^4-10t^3+24t^2-10t+1)(t^2+4t-1)^2x^3 + \\ + t(t-3)^2(t^2+4t-1)^2x^4 + 2x^5)\alpha + x^{10} = 0 \end{aligned}$$

Функция Белого на базе:

$$\varkappa_{10} = \frac{2^4}{5^{20}} \frac{(u^2 - u - 1)P_{10,\square}^2(t) \cdot P_{10,\diamond}^3(t)}{u^8(u^2 + 4u - 1)^5(u + 1)^9(u - 1)^{21}}$$

где: $P_{10,\square}(t) = 54u^{14} + 162u^{13} - 1854u^{12} + 333u^{11} + 31324u^{10} - 88744u^9 - 67532u^8 + 944894u^7 - 2380538u^6 + 2801086u^5 - 1678854u^4 + 595213u^3 - 133896u^2 + 17792u - 1024$,

$P_{10,\diamond}(t) = 9u^{10} + 45u^9 + 40u^8 - 150u^7 - 430u^6 - 884u^5 - 360u^4 - 70u^3 + 25u^2 + 15u - 4$
 j -инвариант:

$$j_{10} = -\frac{(1 - 4u + 15u^8 - 20u^9 - 216u^7 - 6u^{10} + 4u^{11} + u^{12} + 216u^5 + 236u^6 + 15u^4 + 20u^3 - 6u^2)^3}{u^5(u + 1)^{10}(u - 1)^{10}(u^2 - u - 1)(u^2 + 4u - 1)^2}$$

n	Рисунок	t	j
10	все 10 рисунков типа $\diamond$	$P_{10,\diamond}(t)$	$\frac{2^{14} \cdot 5^6 \cdot 5762838841^3 \cdot 1246030232281^3}{3^{70} \cdot 7^{20}}$
10	все 14 рисунков типа $\square$	$P_{10,\square}(t)$	$\frac{5^4 \cdot 59^3 \cdot 659^3 \cdot 596676705660007457028025556126267255118361^3}{2^7 \cdot 3^{135} \cdot 7^{40}}$

7.1.8 $n = 12$

Уравнение кривой:

$$\begin{aligned} & \alpha^2 + (t(t-1)^2(t^2-t+1)^3(t^2+1)^4(t+1)^6 - \\ & - (t-1)(5t^4 - 10t^3 + 12t^2 - 10t - 1)(t^2-t+1)^2(t^2+1)^3(t+1)^5 x + \\ & + (t^2-t+1)(10t^7 - 40t^6 + 83t^5 - 126t^4 + 120t^3 - 76t^2 + 23t + 10)(t^2+1)^2(t+1)^4 x^2 - \\ & - (t^2+1)(10t^9 - 50t^8 + 127t^7 - 241t^6 + 315t^5 - 309t^4 + 213t^3 - 67t^2 - t + 35)(t+1)^3 x^3 + \\ & + (t^3 - 3t^2 + 3t - 5)(5t^6 - 10t^5 + 13t^4 - 15t^3 - 3t - 10)(t+1)^2 x^4 - \\ & - (t+1)^2(t^3 - 3t^2 + 3t - 5)^2 x^5 + 2x^6) \alpha + x^{12} = 0 \end{aligned}$$

Функция Белого на базе:

$$\mathcal{W}_{12} = \frac{1}{2^{50} \cdot 3^{24}} \frac{P_{12}}{v^{11}(v+1)^6(v^2+1)^8(v^2-v+1)^9(v-1)^{10}}$$

$$\begin{aligned} P_{12} = & (v^2 - 4v + 1)(214358881 - 496037080v + 60025v^{26} - 960400v^{25} - \\ & 202855541v^{18} + 131268550v^{20} - 41239576v^{19} + 553750568v^{17} + 64706950v^{22} - 114532600v^{21} + \\ & 6542725v^{24} - 25450600v^{23} + 1746882820v^{12} - 75890780v^{14} - 903401008v^{13} - 1872752176v^{11} + \\ & 1106930815v^{10} + 404345024v^9 - 808291433v^{16} + 697152752v^{15} - 1613955101v^8 + \\ & 2276564984v^7 - 1614356618v^6 + 612680360v^5 + 604125910v^4 - 1011984952v^3 + \\ & 1002337501v^2)^2(1225v^{14} - 4900v^{13} + 8575v^{12} - 9800v^{11} + 6125v^{10} - 1100v^9 - 2325v^8 + \\ & 336v^7 - 1317v^6 + 4v^5 + 605v^4 - 1160v^3 + 943v^2 - 532v + 121)^3 \end{aligned}$$

j -инвариант:

$$j_{12} = \frac{(v^4 - 2v^3 - 2v + 1)^3(v^{12} - 6v^{11} + 12v^{10} - 14v^9 + 3v^8 + 12v^7 - 24v^6 + 12v^5 + 3v^4 - 14v^3 + 12v^2 - 6v + 1)^3}{v^{12}(v-1)^6(v^2+1)^3(v^2-v+1)^4(v^2-4v+1)(v+1)^2}$$

n	Рисунок	j
12	все 14 - $\diamond$	$\frac{2^{16} \cdot 3^8 \cdot 1144346754478491537119752321^3 \cdot 226943^3}{5^{36} \cdot 7^{24} \cdot 11^{24}}$
12	все 26 - $\square$	$\frac{2^{16} \cdot 601^3 \cdot 417545594758657777^3 \cdot 29997503791641953865863199417180442367722213471801^3 \cdot 11733925607^3 \cdot 79823^3}{3^{14} \cdot 5^{66} \cdot 7^{48} \cdot 11^{90}}$

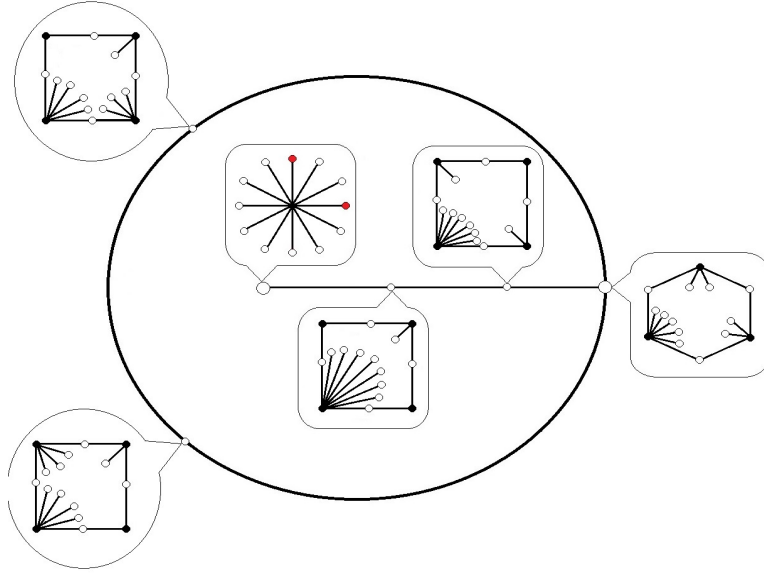


Рис. 7.4: Рисунок на базе $\mathfrak{X}_{12,3}$

7.1.9 $\mathfrak{X}_{12,3}$

Рассмотрим также пример семейства импримитивных пар Абеля рода 1, а именно рассмотрим пары Абеля рода 1 и степени 12 являющиеся кубами другой пары Абеля.

Воспользуемся 3.5.2 и вычислениями из раздела 4.5 и получим уравнение этого семейства:

$$\alpha^2 + \left(\frac{1}{4096} t^3 + \frac{3}{256} t^2 x + \left(\frac{3}{16} t + \frac{3}{128} t^2 \right) x^2 + \left(\frac{3}{4} t + 1 \right) x^3 + \left(\frac{9}{16} t + 6 \right) x^4 + 9x^5 + 2x^6 \right) \alpha + x^{12} = 0$$

Функция Белого на базе:

$$\mathfrak{x}_{12,3} = -\frac{1}{2^{14}} \frac{(t-1)(t-9)^3(t^4 + 20t^3 + 270t^2 - 927t + 729)^2}{t^9}$$

7.2 Пример рода 0

Рассмотрим случай $s = 3$: Пространство таких многочленов Золотарева $P(x) = C(1 - A_1x)^{a_1}(1 - A_2x)^{a_2}(1 - A_3x)^{a_3}$ вкладываются в $\mathbb{P}_3(\mathbb{k})$ и образуют там гиперповерхность $a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 = 0$. По теореме 3:

$$\varkappa = \frac{a_1^{a_1} a_2^{a_2} a_3^{a_3}}{(-n)^n} \cdot \frac{(A_2 - A_3)^{a_2+a_3} (A_3 - A_1)^{a_1+a_3} (A_1 - A_2)^{a_1+a_2}}{A_1^{a_2+a_3} A_2^{a_1+a_3} A_3^{a_1+a_2}}$$

Над $\mathbb{C}$ многочлены Шабата, соответствующие двум деревьям с набором валентностей IV_{a_1, a_2, a_3} , являются решениями системы.

$$\begin{cases} a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0 \\ a_1 A_1^2 + a_2 A_2^2 + a_3 A_3^2 = 0 \\ A_i \neq 0 \end{cases}$$

То есть $N_{\overline{\mathbb{Q}}}(a_1, a_2, a_3) = 2$.

Рассмотрим теперь случай положительной характеристики, такой что $\text{char } \mathbb{k} \mid (a_1 + a_2)$. Тогда $a_1 \equiv -a_2 \pmod{\text{char } \mathbb{k}}$ и $a_3 \equiv n \pmod{\text{char } \mathbb{k}}$. Пространство многочленов Золотарева будет задаваться уравнением $a_2(A_1 - A_2) = a_3 A_3$, формула для $\varkappa(\mathbb{k})$ упрощается и ее степень падает.

$$\varkappa(\mathbb{k}) = \frac{a_1^{a_1} a_2^{a_2} a_3^{a_3}}{(-n)^n} \cdot \frac{(A_2 - A_3)^{a_2+a_3} (A_3 - A_1)^{a_1+a_3} (A_1 - A_2)^{a_1+a_2}}{A_1^{a_2+a_3} A_2^{a_1+a_3} A_3^{a_1+a_2}} = \frac{(A_3 - A_2)^{a_2+a_3} (A_3 - A_1)^{a_1+a_3}}{A_1^{a_2+a_3} A_2^{a_1+a_3}}$$

Система на многочлены Шабата над $\mathbb{k}$ с набором валентностей IV_{a_1, a_2, a_3} примет вид:

$$\begin{cases} a_2(A_1 - A_2) = a_3 A_3 \\ A_1 + A_2 = A_3 \\ A_i \neq 0 \end{cases}$$

Решений этой системы в $P^3(\mathbb{k})$ не больше 1, и если $\text{char } \mathbb{k} \nmid (a_1 + a_3), (a_2 + a_3), a_2, a_3$, то решение существует, то есть $N_{\mathbb{k}}(a_1, a_2, a_3) = 1$.

Заключение

В этом разделе мы опишем возможные обобщения основных результатов диссертации и пути дальнейшего исследования.

Основные результаты диссертации получены с помощью включения пар Белого в семейства пар с большим числом критических значений. Мы рассматривали только некоторые классы пар Белого, пары Абеля-Белого и деревья диаметра 4. Первый возможный путь продолжения исследований – обобщение результатов на более широкие классы пар Белого.

Другой возможный путь продолжения исследований, применение полученных результатов к изучению арифметики пар Белого, например, нахождение норм j -инвариантов кривых Абеля-Белого рода 1 или дискриминантов их полей определения.

Некоторые подобные результаты автор планирует к публикации в будущем.

Литература

- [1] N. H. Abel, Über die Integration der Differential-Formel $\rho dx/\sqrt{R}$, wenn R und ρ ganze Funktionen sind, *J. für Math.*, 1826, **1**, стр. 185–221.
- [2] Б. Л. Ван дер Варден, Алгебра, Москва, Наука, 1975.
- [3] Г. В. Белый, О расширениях Галуа максимального кругового поля, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1979, **43**(2), стр. 267–276.
- [4] С. Ленг. Введение в теорию модулярных форм, Москва, Мир, 1979.
- [5] Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. Аппроксимации Паде. Москва, Мир, 1986.
- [6] S. Beckmann, Ramified primes in the field of moduli of branched coverings of curves, *Journal of Algebra*, 1989, **125**(1), стр. 236–255.
- [7] G.B. Shabat, V.A. Voevodsky, Drawing curves over number fields. The Grothendieck Festschrift, *Birkhauser*, 1990, **3**, стр. 199–227.
- [8] Bryan Birch, Noncongruence subgroups, covers and drawings, in The Grothendieck theory of dessins d'enfants, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge University Press, 1994, **200**, стр. 25–46.
- [9] J.-M. Couveignes, Calcul et rationalité de fonctions de Belyi en genre 0, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1994. **44**(1), стр. 1–38.
- [10] The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants (ed. L.Schneps) // London Math. Soc. Lecture Note Series, 1994, T. 200.

- [11] Grothendieck A. Esquisse d'un programme *London Math.Soc. Lecture Notes Series-Cambridge: Cambridge Univ.Press.*, 1997, **243**, стр. 3-43.
- [12] Geometric Galois Action (eds. L.Schneps, P.Lochak), London Math. Soc. Lecture Note Series, 1997, Т. 242–243.
- [13] Г. Б. Шабат. Комбинаторно-топологические методы в теории алгебраических кривых. Докторская диссертация. Москва. 1998.
- [14] F. B. Pakovitch. Combinatoire des arbres planaires et arithmetique des courbes hyperelliptiques, *Ann. Inst. Fourier*, 1998, **48**(2), стр. 323–351.
- [15] M. Raynaud, Spécialisation des revêtements en caractéristique $p > 0$, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 1999, **32**(1), стр. 87–126.
- [16] В. В. Прасолов. Многочлены. М. : МЦНМО, 2003.
- [17] S. Wewers, Three point covers with bad reduction, *Journal of the American Mathematical Society*, 2003, **16**(4), стр 991–1032.
- [18] F. Diamond, J. Shurman, A First Course in Modular Forms, Springer Science & Business Media. 2005
- [19] Вашеvник А. М. Пары Белого над конечными полями и их редукция: Кандидатская диссертация, Москва, 2006.
- [20] В. А. Дремов, А. М. Вашеvник, О парах Белого над произвольными полями, *Фундаментальная и прикладная математика*, 2006, **12**(3), стр. 3–8.
- [21] L. Zapponi, Some arithmetic properties of Lame operators with dihedral monodromy, *Riv. Mat. Univ. Parma*, 2004, **7**(3) (2004), стр. 347–362.
- [22] Adrianov, N. M.; Amburg, N. Ya.; Dremov, V. A.; Levitskaya, Yu. A.; Kreines, E. M.; Kochetkov, Yu. Yu.; Nasretdinova, V. F.; Shabat, G. B. Catalog of dessins d'enfants with ≤ 4 edges, *Journal of Mathematical Sciences*, 2009, **13**(6), стр. 35–112.

- [23] А. К. Звонкин, С.К. Ландо. Графы на поверхностях и их приложения. Москва, МЦНМО, 2010.
- [24] D. Chen, I. Coskun, Extremal effective divisors on the $\mathcal{M}_{1,n}$, *Mathematische Annalen*, 2014, **359**(3), стр. 891–908.
- [25] Norman Do, Paul Norbury, Pruned Hurwitz numbers, 2016, preprint.

Публикации автора по теме диссертации

- [26] Д. Оганесян, О рациональных функциях с двумя критическими точками максимальной кратности, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2013, **18**(6), стр. 185–208; *Journal of Mathematical Sciences.*, 2015, **209**(2), стр. 292–308.
- [27] D. Oganessian, Abel Pairs and Modular Curves, *Zapiski Nauch. Semin. LOMI.*, 2016, **446**, стр. 165–181.
- [28] D. Oganessian, Zolotarev polynomials and reduction of Shabat polynomials into a positive characteristic, *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2016, **71**(248), стр. 47–51.