

**Том 29, Номер 3**

**Июнь 1993**

ISSN 0002-3515

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

# ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА

**Главный редактор**  
**Г.С. Голицын**

действительный член Российской академии наук

Журнал оригинальных и обзорных статей по всем аспектам теоретических, модельных и экспериментальных работ по физике атмосферы и океана



**МАИК НАУКА**

УДК 551.467

## ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В БАССЕЙНЕ С БИТЫМ ЛЬДОМ

© 1993 г. А. Е. Букатов, О. М. Букатова

Морской гидрофизический институт АН Украины

Поступила в редакцию 25.03.92 г., после доработки 16.10.92 г.

Рассмотрено влияние плавающего битого льда на периодические бегущие поверхностные волны конечной амплитуды в бассейне постоянной глубины. Методом многих масштабов получены равномерные асимптотические разложения до величин третьего порядка для потенциала скорости жидкости и возвышения поверхности бассейна. Проведен анализ зависимости волновых возмущений от ледовых условий и характеристик начальной основной гармоники.

Анализ влияния льда на волновые возмущения малой амплитуды в жидкости конечной глубины выполнен в [1, 2]. Распространение длинных нелинейных волн в бассейне с ледяным покровом исследовалось в [3].

1. Пусть поверхность однородной идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей неограниченный бассейн конечной глубины  $H$ , покрыта плавающим льдом. Размеры льдин будем считать малыми по сравнению с длиной волны, а их вертикальное перемещение отслеживающим профилем волны. По классификации [1, 4 - 6] такой лед принято называть битым. Рассмотрим его влияние на периодические бегущие волны малой, но конечной амплитуды. Так как при сделанных допущениях не происходит изгиба льдин, то из восстанавливающих сил при исследовании колебаний учтем только силу тяжести [1]. Тогда в предположении потенциальности движения жидкости в безразмерных переменных  $x = kx_1$ ,  $z = kz_1$ ,  $t = \sqrt{kg} t_1$ , где  $k$  – волновое число, задача заключается в решении уравнения Лапласа

$$\Delta \varphi = 0, -\infty < x < \infty, -H < z < \zeta \quad (1)$$

с граничными

$$\zeta - \varphi_t + \kappa k (\varphi_{zx} \varphi_x - \varphi_{tz}) + \frac{1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_z^2) = 0, \quad (2)$$

$$z = \zeta,$$

$$\varphi_z = 0, z = -H \quad (3)$$

и начальными

$$\zeta = f(x), \zeta_t = 0, t = 0 \quad (4)$$

условиями. Потенциал скорости  $\varphi$  и возвышение поверхности бассейна  $\zeta$  связаны кинематическим соотношением

$$\zeta_t - \zeta_x \varphi_x + \varphi_z = 0. \quad (5)$$

В (2) выражение с множителем  $\kappa = h\rho_1/\rho$  представляет собою инерцию вертикальных смещений

льда толщиной  $h$  и плотностью  $\rho_1$ . Причем первое слагаемое в скобках этого выражения характеризует нелинейность вертикального ускорения льда, не учтенную в [1 - 3]. Динамическое условие на свободной от льда поверхности [7 - 10] следует из (2) при  $\kappa = 0$ .

Решение задачи (1) - (5) найдем методом многих масштабов [11], позволяющим получить для  $\zeta$  и  $\varphi$  равномерно пригодные разложения и применявшимся к широкому кругу задач, в том числе и в теории волн в атмосфере [12] и на воде [13]. Введем две новые медленно меняющиеся по сравнению с  $t = T_0$  переменные  $T_1 = \varepsilon t$  и  $T_2 = \varepsilon^2 t$ , где  $\varepsilon$  – малое, но конечное. Предполагая справедливость разложений

$$\zeta = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n \zeta_n(x, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4),$$

$$\varphi = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n \varphi_n(x, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4),$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n f_n(x) + O(\varepsilon^4),$$

из (1) - (5) для приближений порядка  $\varepsilon^n$ ,  $n = 1, 2, 3$  получим соответственно

$$\Delta \varphi_n = 0, \quad (6)$$

$$\zeta_n - \frac{\partial \varphi_n}{\partial T_0} - \kappa k \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z \partial T_0} = F_n, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial T_0} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = L_n, \quad z = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = 0, \quad z = -H, \quad (8)$$

$$\zeta_n = f_n(x), \quad \frac{\partial \zeta_n}{\partial T_0} = G_n, \quad t = 0, \quad (9)$$

где

$$F_1 = L_1 = G_1 = 0,$$

$$F_2 = \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_1} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right] + \kappa k N,$$

$$L_2 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} - \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2}, \quad G_2 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1}.$$

$$F_3 = \zeta_1 N_1 + \frac{1}{2} \zeta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} + \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial T_1} +$$

$$+ \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \kappa k N_2,$$

$$N = \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \zeta_1 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^2 \partial T_0} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial T_1} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x},$$

$$N_1 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_1 \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial T_0 \partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2},$$

$$N_2 = \zeta_1 N_3 + \frac{1}{2} \zeta_1^2 \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial z^3 \partial T_0} + \zeta_2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^2 \partial T_0} +$$

$$+ \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_0} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + N_4,$$

$$N_3 = \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial z^2 \partial T_0} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^2 \partial T_1} -$$

$$- \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x} \right)^2 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^2 \partial x},$$

$$N_4 = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial T_1} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial T_2} -$$

$$- \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x},$$

$$L_3 = \zeta_1 \left( \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{2} \zeta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3} -$$

$$- \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + N_5,$$

$$N_5 = \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1},$$

$$G_3 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1}.$$

2. Предположим, что в начальный момент времени возмущение поверхности бассейна в первом приближении не содержит высших гармоник, а имеет вид  $\zeta_1 = \cos x$ . Жестких требований к начальным условиям для высших приближений возмущения поверхности и возмущения скорости как первого, так и последующих приближений предъявлять не будем, имея в виду при этом взаимосвязь волновых характеристик через граничные условия. Тогда, решая (6) - (9) при  $n = 1$ , для периодических бегущих волн найдем

$$\zeta_1 = \cos \theta, \quad \varphi_1 = \tau \operatorname{ch}(z+H) \operatorname{sh}^{-1} H \sin \theta;$$

$$\theta = x + \tau T_0 + \beta(T_1, T_2), \quad (10)$$

$$\tau^2 = (1 + \kappa k \operatorname{th} H)^{-1} \operatorname{th} H, \quad \beta(0) = 0,$$

а  $\beta(T_1, T_2)$  будет определена из последующих приближений.

Подставив  $\zeta_1, \varphi_1$  в правые части уравнений (6) - (8) при  $n = 2$  и решив полученные уравнения с учетом требования отсутствия основной гармоники, найдем

$$\zeta_2 = a_2 \cos 2\theta;$$

$$a_2 = \tau^2 [\operatorname{th} 2H - 2\tau^2 (1 + 2\kappa k \operatorname{th} 2H)]^{-1} \mu_2,$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2} \operatorname{th} 2H - \frac{1}{4} \frac{\operatorname{th} 2H}{\operatorname{sh}^2 H} - \operatorname{cth} H -$$

$$- \frac{3}{2} \kappa k \operatorname{cth} H \operatorname{th} 2H, \quad (11)$$

$$\varphi_2 = \tau \operatorname{ch} 2(z+H) \operatorname{sh}^{-1} 2H (a_2 - \frac{1}{2} \operatorname{cth} H) \times$$

$$\times \sin 2\theta + \varphi_2^*,$$

$$\varphi_2^* = \frac{\tau^2}{4} (1 + \operatorname{cth}^2 H + 2\kappa k \operatorname{cth} H) T_0.$$

При этом оказывается, что функция  $\theta$  не зависит от  $T_1$ , так как  $\beta = \beta_2(T_2)$ .

Аналогичным образом решения (10), (11) позволяют найти из (6) - (9) для  $\zeta_3, \varphi_3$  выражения

$$\zeta_3 = a_3 \cos 3\theta,$$

$$\varphi_3 = \tau (a_3 + \frac{1}{3} l_2) \operatorname{ch} 3(z+H) \operatorname{sh}^{-1} 3H \sin 3\theta + \varphi_3^*, \quad (12)$$

где

$$\varphi_3^* = \tau (l_1 - \sigma_0) \operatorname{ch} (z + H) \operatorname{sh}^{-1} H \sin \theta,$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} (l_1 + \tau^2 l_3 + \kappa k \tau^2 l_6),$$

$$a_3 = \tau^2 [\operatorname{th} 3H - 3\tau^2 (1 + 3\kappa k \operatorname{th} 3H)]^{-1} \mu_3,$$

$$\mu_3 = l_2 + l_4 \operatorname{th} 3H - \kappa k l_0 \operatorname{th} 3H,$$

$$l_1 = \frac{1}{2} l_5 - \frac{3}{8}, \quad l_2 = \frac{3}{2} l_5 - \frac{3}{8},$$

$$l_0 = a_2 (4 \operatorname{cth} 2H + 5 \operatorname{cth} H) - \frac{1}{2} \operatorname{cth} H (4 \operatorname{cth} 2H + \frac{3}{2} \operatorname{cth} H) + 1,$$

$$l_3 = \frac{1}{2} \operatorname{cth} H (\operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H - \frac{9}{4}) - a_2 (\operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H - \frac{3}{2}),$$

$$l_4 = \frac{1}{2} \operatorname{cth} H (\operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H - \frac{11}{4}) - a_2 (\operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H - \frac{7}{2}),$$

$$l_5 = \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H - a_2 (\operatorname{cth} H + 2 \operatorname{cth} 2H),$$

$$l_6 = a_2 (\operatorname{cth} 2H - \frac{5}{2} \operatorname{cth} H) - \frac{1}{2} \operatorname{cth} H (\operatorname{cth} 2H - \frac{1}{2} \operatorname{cth} H) - \frac{5}{8}$$

и показать, что  $\beta_2 = -\tau \sigma_0 T_2$ .

Следовательно, возмущение поверхности бассейна до величин третьего порядка определяется формулой

$$\zeta = \varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 a_2 \cos 2\theta + \varepsilon^3 a_3 \cos 3\theta, \quad (13)$$

справедливой при любых значениях  $k$ , так как

$$n(1 + n\kappa k \operatorname{th} nH) \operatorname{th} H \neq (1 + \kappa k \operatorname{th} H) \operatorname{th} nH, \\ n = 2, 3, \dots$$

Здесь

$$\theta = kx + \sigma t, \quad \sigma = \tau \sqrt{kg} (1 - \varepsilon^2 \sigma_0). \quad (14)$$

Аналогичное выражение на основании формул (10) - (12) можно записать и для функции  $\varphi$ . Фазовую скорость волновых возмущений определим из формулы

$$v = v_1 (1 - \varepsilon^2 \sigma_0), \quad v_1 = \tau \sqrt{g/k}. \quad (15)$$

Из (14), (15) следует, что частота  $\sigma$  и фазовая скорость  $v$  возмущений (13) зависят от толщины льда, а в приближении  $\varepsilon^2$  и от амплитуды начальной основной гармоники.

Частота  $\sigma_n$  ( $\text{с}^{-1}$ ) и фазовая скорость  $v_n$  ( $\text{м/с}$ ) линейной гармоники номера  $n$  связаны с волновым числом  $k$  ( $\text{м}^{-1}$ ) соотношениями

$$\sigma_n^2 = \frac{kg \operatorname{th} nkH}{n(1 + \kappa n k \operatorname{th} nkH)}, \\ v_n^2 = \frac{g \operatorname{th} nkH}{nk(1 + \kappa n k \operatorname{th} nkH)}, \quad (16)$$

отсюда видно, что  $\sigma_n$ ,  $v_n$  убывают с ростом толщины льда. Кроме того,  $\sigma_n$  для  $h \neq 0$  не превосходит величину  $\sigma_n^0 = \frac{1}{n} (g/\kappa)^{1/2}$  при  $k \rightarrow \infty$ , в то время как при отсутствии льда она неограниченно возрастает с увеличением  $k$ . Количественную зависимость распределений  $\sigma$  по  $k$  от толщины льда  $h$  иллюстрируют графики на рис. 1 для  $\rho_1/\rho = 0.87$ ,  $H = 10^2$  м. Сплошные, штриховые и штрихпунктирные линии отвечают толщинам льда 0, 1, 3 м. Номера 1, 2, 3 характеризуют номер гармоники.

В случае коротких волн ( $kH \gg 1$ ) решение упрощается, так как

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{8} \frac{3 + 11\kappa k}{1 + 4\kappa k}, \\ \sigma_0 = -\frac{1}{8} \frac{4 + 9\kappa k}{1 + \kappa k}, \quad \tau^2 = (1 + \kappa k)^{-1}, \\ \sigma_n^2 = kg [n(1 + n\kappa k)], \\ v_n^2 = g [nk(1 + n\kappa k)]^{-1}. \quad (17)$$

Видно, что фазовая скорость  $v$  подвержена влиянию битого льда в большей мере, чем амплитуда коротких волн. Линейная короткая волна в бассейне с битым льдом имеет меньшую фазовую

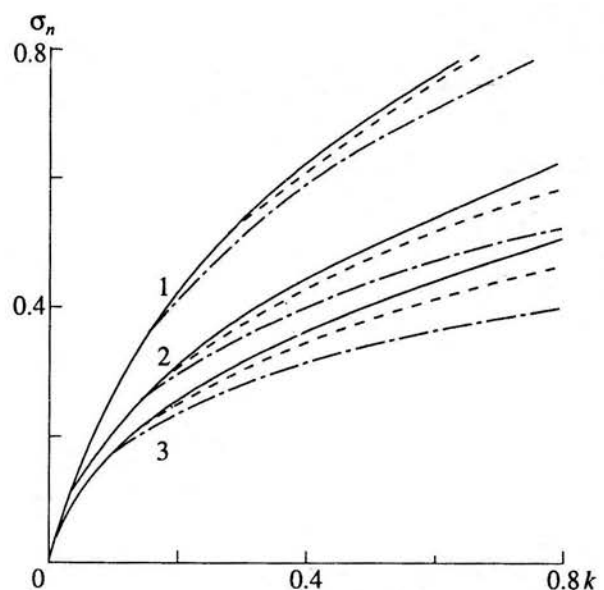


Рис. 1. Влияние толщины льда на дисперсионные зависимости.

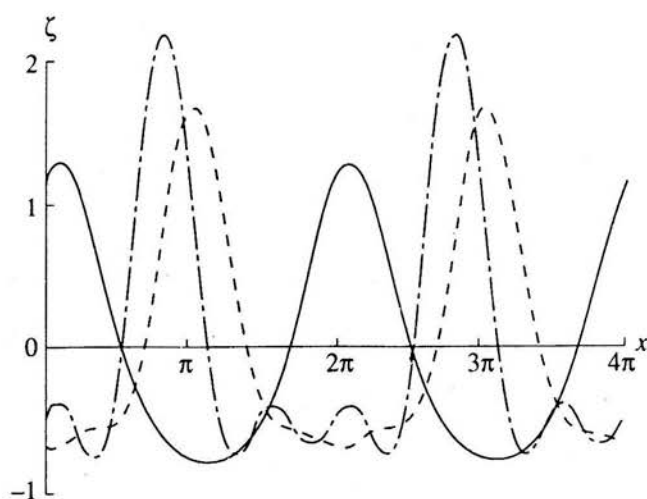


Рис. 2. Зависимость профиля волны от амплитуды основной гармоники.

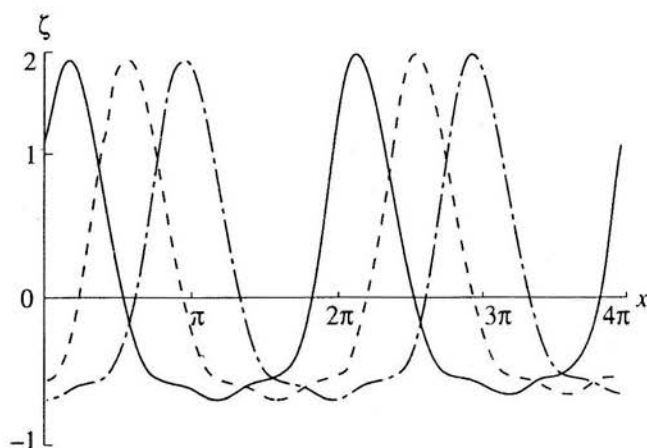


Рис. 3. Влияние толщины льда на возмущение поверхности бассейна при длине основной гармоники  $2\pi \times 10^4$  м.

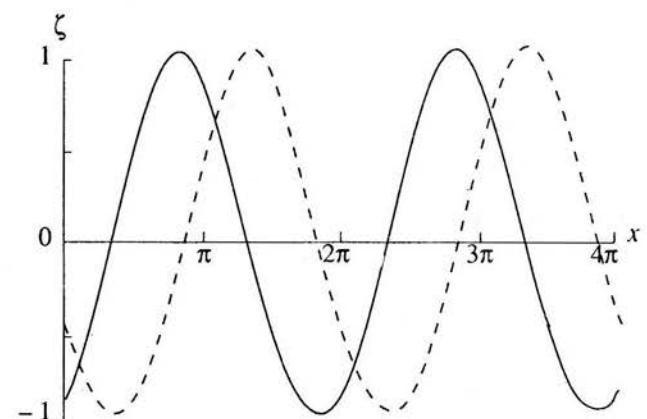


Рис. 4. Влияние толщины льда на возмущение поверхности бассейна при длине основной гармоники  $2\pi \times 10$  м.

скорость, чем нелинейная. Влияние плавающего льда на амплитуду бегущей поверхностной волны проявляется в данном случае лишь в третьем приближении, и то незначительно. Амплитудный множитель третьего приближения, равный  $3/8\epsilon^3$  для коротких волн на чистой воде, в ледовых условиях стремится к значению  $11/32\epsilon^3$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Если в граничном условии (2) на поверхности бассейна пренебречь нелинейностью ускорения льда, то  $\zeta$ ,  $\theta$ ,  $v$  будут определяться формулами (13) - (15) с той разницей, что  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  в выражениях для  $a_2$ ,  $a_3$  и  $\sigma_0$  в  $\beta_2$  примут вид

$$\mu_2 = \frac{1}{2} \text{th} 2H - \frac{1}{4} \frac{\text{th} 2H}{\text{sh}^2 H} - \text{cth} H,$$

$$\mu_3 = l_2 + l_4 \text{th} 3H, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} (l_1 + \tau^2 l_3),$$

$$\varphi_2^* = \frac{\tau^2}{4} (1 + \text{cth}^2 H) T_0.$$

Тогда для коротких волн

$$a_2 = \frac{1}{2(1+3\kappa k)}, \quad a_3 = \frac{3(1-\kappa k)}{8(1+3\kappa k)(1+4\kappa k)},$$

$$\sigma_0 = -\frac{1}{16} \frac{8+17\kappa k+3\kappa^2 k^2}{(1+\kappa k)(1+3\kappa k)},$$

а величины  $v_n$ ,  $\sigma_n$ ,  $\tau$  те же, что и в (17). Отсюда следует, что в таком предположении характеристики льда входят в амплитуду и второй, и третьей гармоник. Чем короче волна начальной основной гармоники, тем меньше отличаются значения ее фазовой скорости в линейном и нелинейном случаях.

При  $\kappa = 0$  формулы (13) - (17) характеризуют волновое возмущение в бассейне с открытой поверхностью [14].

3. Для количественной оценки зависимости волнового возмущения от ледовых условий в общем случае проводились численные расчеты при  $\kappa = 0.87h$  [1, 5]. Анализ их результатов показал усиливающееся влияние нелинейности с ростом амплитуды начальной основной гармоники. Это иллюстрируют графики на рис. 2, где изображены распределения  $\zeta$  по  $x$  для  $H = 10^3$  м,  $h = 3$  м,  $k = 10^{-4}$ ,  $t = 1/\epsilon$ . Сплошным, штриховым и штрихпунктирным линиям соответствуют значения  $\epsilon$ ,

равные  $\frac{1}{\pi} 10^{-3}$ ,  $\frac{2}{\pi} 10^{-3}$ ,  $10^{-3}$ . Примерно такие же распределения  $\zeta(x)$  будут и при отсутствии льда, так как его влияние, сказывающееся главным образом на фазовом сдвиге профиля волны, проявляется для такого  $k$  при больших значениях  $t$ . Плавающий лед тормозит бегущую волну сильнее, чем нелинейность ускоряет ее. Чем короче волна начальной основной гармоники, тем при меньших значениях  $t$  сказывается воздействие толщины льда. Зависимость распределений  $\zeta$  по  $x$

от толщины льда показана на рис. 3, 4, где сплошными, штриховыми и штрихпунктирными линиями изображено  $\zeta(x)$  для  $H = 10^3$  м и толщин льда 0, 5, 10 м соответственно при  $\varepsilon = \frac{2}{\pi} 10^{-3}$ ,  $k = 10^{-4}$ ,

$t = \frac{1}{\varepsilon^2}$  (рис. 3) и  $\varepsilon = 10^{-1}$ ,  $k = 10^{-1}$ ,  $t = \frac{1}{\varepsilon}$  (рис. 4). Напом-

ним, что рассматриваются волны, перемещающиеся в отрицательном направлении оси  $x$  (см. (14)).

Пренебрежение нелинейностью ускорения льда в граничном условии на поверхности бассейна приводит к отставанию фазы и слабому уменьшению амплитуды волн. Это влияние, усиливающееся с ростом  $t$ , заметно проявляется лишь при больших временах. Причем с увеличением длины волны начальной гармоникой оно убывает.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
2. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Влияние ледяного покрова на волновые движения // Морск. гидрофиз. исслед. 1971. № 2. С. 113 - 144.
3. Ильичев А.Т., Марченко А.В. О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 88 - 95.
4. Паундер Э. Физика льда. М.: Мир, 1967. 190 с.
5. Богородский В.В., Гаврило В.И. Лед. Физические свойства. Современные методы в гляциологии. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 384 с.
6. Тимохов Л.А., Хейсин Д.Е. Динамика морских льдов (математические модели). Л.: Гидрометеиздат, 1987. 272 с.
7. Стокер Дж.Дж. Волны на воде. М.: ИЛ, 1959. 617 с.
8. Нестеров С.В. Возбуждение волн конечной амплитуды бегущей системой давлений // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1968. Т. 4. № 10. С. 1123 - 1125.
9. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
10. Алешков Ю.З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 196 с.
11. Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
12. Stone P.H. The meridional structure of baroclinic waves // J. Atmos. Sci. V. 26. P. 376 - 389.
13. Carrier G.F. Gravity waves on water of variable depth // J. Fluid Mech. 1966. V. 24. P. 641 - 659.
14. Stokes G.G. On the theory of oscillatory waves // Mathematical and Physical papers. Camb. Univ. Press. 1847. V. 1. P. 197 - 229.

## Finite-Amplitude Water Waves in a Basin With Broken Ice

A. E. Bukatov, O. M. Bukatova

Considered is the effect of floating small ice pieces on travelling, periodic, finite-amplitude water waves in a basin of constant depth. Due to the method of multiple scales, uniform asymptotic expansions up to the third order are obtained for the velocity potential and fluid surface elevation. Dependence of waves on glacial conditions and characteristics of the initial wave harmonic is analyzed.