Метрические соотношения в барицентрическом исчислении

Осадченко Н. В.
НИУ “МЭИ”

В статье обсуждается применение формализма *барицентрического исчисления* для записи различных соотношений, относящихся к геометрии евклидовых точечных пространств.

Барицентрическое исчисление представляет собой раздел геометрии, в котором изучаются алгебраические операции над точками аффинного или евклидова точечного пространств. Основы данного исчисления были заложены А.Ф.Мёбиусом в 1827 г. в его книге «Барицентрическое исчисление» [1].

В этой книге Мёбиус, в частности, ввёл *барицентрические координаты*, которые позднее нашли весьма разнообразные применения. К традиционным областям их использования следует отнести, например, метод конечных элементов (где их нередко именуют также треугольными координатами в плоском случае и тетраэдральными – в пространственном) [2,3], или колориметрию – в вычислениях на плоскости цветности [4]. Возникают и относительно новые области применения: геометрия движения пространственных механизмов [5], решение задач локализации в беспроводных сенсорных сетях [6] или компьютерная анимация [7].

Идея барицентрического исчисления основана на том, что вектор $\overline{MN}$ с началом в точке M и концом в точке N представляется как разность этих точек: $\overline{MN} = N - M$. При этом обретает смысл понятие *линейной комбинации* произвольного числа точек $P_0, \ldots, P_k$ аффинного пространства с коэффициентами λ_i, однако лишь в следующих двух случаях:

1) при $\sum\limits_i \lambda_i = 1$ (*барицентрическая* линейная комбинация);
2) при $\sum\limits_i \lambda_i = 0$ (*сбалансированная* линейная комбинация) [5, 8–11].

В первом из этих случаев значением линейной комбинации точек оказывается снова точка, а во втором – вектор. Например, пусть D и E – соответственно середина стороны BC и точка пересечения медиан в некотором треугольнике ABC; тогда

$$D = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C \quad \text{и} \quad E = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C\,;$$

в самом деле, при произвольном выборе начала O для радиус-вектора точки D имеем:

$$\bar{\mathbf{r}}_D \equiv D - O = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}O - \frac{1}{2}O = \frac{1}{2}(B-O) + \frac{1}{2}(C-O) \equiv \frac{1}{2}\bar{\mathbf{r}}_B + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{r}}_C$$

(аналогичные выкладки нетрудно провести и для точки E).

Переход на координатный уровень описания в барицентрическом исчислении обеспечивает аппарат барицентрических координат. Для этого в рассматриваемом аффинном пространстве выбирают *точечный базис* (некоторые предпочитают термин “аффинный базис” [12]), т.е. семейство из $n+1$ аффинно независимой точки $P_0, \ldots, P_n$, где n – размерность пространства (точки из некоторого конечного семейства аффинно независимы, если ни одна из них не является барицентрической комбинацией остальных); из аффинной независимости вытекает, что базисные точки служат вершинами невырожденного n-мерного симплекса. Тогда любую точку M аффинного пространства можно однозначно представить в виде барицентрической комбинации

$$M = \sum_j \lambda_j P_j \tag{1}$$

базисных точек; коэффициенты данной комбинации и являются барицентрическими координатами точки M в данном точечном базисе [5, 9].

Определяемая формулой (1) точка M интерпретируется как точка, радиус-вектор которой относительно некоторого полюса O определяется равенством

$$\bar{\mathbf{r}}_M = \sum_j \lambda_j \bar{\mathbf{r}}_j , \qquad \bar{\mathbf{r}}_j \equiv \overline{OP_j} ;$$

известно, что при выполнении условия барицентричности значение указанной суммы не зависит от конкретного выбора полюса O [9, 10].

Аналогично, любой вектор из пространства свободных векторов данного аффинного пространства можно однозначно представить в виде сбалансированной комбинации

$$\bar{\mathbf{u}} = \sum_j \lambda_j P_j ; \tag{2}$$

конкретные значения коэффициентов в данной комбинации (т.е. барицентрических компонент вектора $\bar{\mathbf{u}}$), разумеется, отличаются от значений коэффициентов из формулы (1), поскольку сумма всех коэффициентов должна теперь равняться нулю, а не единице.

Переход от формализма барицентрических координат к более привычному описанию средствами векторной алгебры и аналитической геометрии и обратно несложен и допускает эффективную программную реализацию. Рассмотрим, например, случай $n = 3$ и выберем в трёхмерном пространстве систему декартовых координат $Oxyz$. Спроектируем соответствующее формуле (1) векторное равенство $\bar{\mathbf{r}}_M = \lambda_0 \bar{\mathbf{r}}_0 + \lambda_1 \bar{\mathbf{r}}_1 + \lambda_2 \bar{\mathbf{r}}_2 + \lambda_3 \bar{\mathbf{r}}_3$ на координатные оси x, y, z и добавим равенство $1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, выражающее собой условие барицентричности, к трём получаемым при проектировании скалярным соотношениям. Результатом будет система из четырёх соотношений, которую представим в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \\ 1 \end{pmatrix} = M_C \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} , \quad \text{где} \quad M_C = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

– матрица, столбцами которой служат тройки декартовых координат базисных точек, дополненные единицами.

Обсудим программную реализацию данных соотношений в системе аналитических вычислений **Maple**. В программу, созданную в среде **Maple**, можно поместить такие описания указанных двух столбцов и матрицы:

```
> r[M] := Vector (<x[M], y[M], z[M], 1>);
> Lambda := Vector (<lambda[0], lambda[1], lambda[2], lambda[3]>);
> M[C] := Matrix (< <x[0], y[0], z[0], 1> | <x[1], y[1], z[1], 1> |
                    <x[2], y[2], z[2], 1> | <x[3], y[3], z[3], 1> >);
```

Здесь и далее использованы средства пакета **LinearAlgebra** системы **Maple** (компактное описание основных операторов данного пакета, сопровождаемое примерами, содержится в учебном пособии [13]). Для подключения пакета в первой строке программы следует записать:

```
> restart;  with(LinearAlgebra);
```

Далее предполагаем, что декартовы координаты базисных точек заданы. Тогда нетрудно решить две задачи. Во-первых, если известны барицентрические координаты λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 точки M, то столбец **r[M]** и его элементы находим умножением матрицы M_C на столбец λ барицентрических координат:

```
> X := M[C].Lambda;
> ( x[M], y[M], z[M] ) := ( X[1], X[2], X[3] );
```

заметим, что прямое присваивание

```
> r[M] := M[C] . Lambda;
```

также допустимо, но приводит к потере возможности обращаться к элементам столбца, используя обозначения x_M, y_M, z_M. В порядке комментария к записанным строкам напомним, что индексы элементов векторов и матриц в пакете **LinearAlgebra** отсчитываются от единицы, а не от нуля.

Во-вторых, если известны декартовы координаты точки M, то её барицентрические координаты находим, умножая столбец **r[M]** на обратную матрицу M_C^{-1}:

```
> X := 1 / M[C] .r[M];
> ( lambda[0], lambda[1], lambda[2], lambda[3] ) := ( X[1], X[2], X[3],
    X[4] );
```

Совершенно аналогичные операции позволяют переходить от декартовых компонент вектора $\bar{\mathbf{u}}$ из формулы (2) к его барицентрическим компонентам и обратно. При этом столбец **U**, отвечающий вектору $\bar{\mathbf{u}}$, разумно описать так:

```
> U := Vector (<u[0], u[1], u[2], 0>);
```

(появление нуля вместо единицы вызвано тем, что барицентрические компоненты вектора образуют уже не барицентрическую, а сбалансированную линейную комбинацию).

В монографиях и учебниках, где излагаются основы барицентрического исчисления (уже упоминавшиеся книги [8–11] и ряд других), это исчисление служит базой, на которой строится последующее изложение аффинной геометрии; впрочем, при переходе к геометрии евклидова точечного пространства аппарат барицентрического исчисления практически уже не используется, уступая место традиционному языку аналитической геометрии и линейной алгебры. Исключение составляет монография [14]: в ней представлена интерпретация средствами барицентрического исчисления весьма обширного набора понятий и соотношений евклидовой геометрии.

Представляется, что исходным пунктом при регулярном применении языка барицентрического исчисления к евклидовой геометрии должен стать перевод на этот язык основных операций векторной алгебры: скалярного и векторного умножения. При этом будем опираться на понятия *матрицы Грама* и *взаимного базиса*, т.е. на фундаментальные понятия тензорного исчисления [15,16].

Начнём с операции скалярного умножения. В силу соотношения

$$(\bar{\mathbf{u}},\bar{\mathbf{v}}) \;=\; \sum_{i,\,k} u_i\, v_k\, (\bar{\mathbf{e}}_i,\bar{\mathbf{e}}_k) \;\equiv\; \sum_i u_i \sum_k g_{ik} v_k \,, \tag{3}$$

справедливого в произвольном базисе $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$, вычисление скалярного произведения двух векторов сводится к умножению матрицы Грама базисных векторов (элементы g_{ik} которой совпадают с попарными скалярными произведениями векторов базиса) на столбец компонент вектора $\bar{\mathbf{v}}$ в данном базисе, а затем остаётся просуммировать произведения элементов полученного столбца на соответствующие компоненты вектора $\bar{\mathbf{u}}$.

В барицентрическом исчислении разложению вектора по базису $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$ соответствует разложение по точечному базису, даваемое формулой (2). Базисные точки здесь можно заменить их радиус-векторами относительно произвольного полюса, и удобнее всего принять за полюс барицентр базисных точек, т.е. точку

$$E \;=\; \sum_j \frac{1}{n+1}\, P_j \;.$$

Тогда формула (2) и аналогичная формула для вектора $\bar{\mathbf{v}}$ переходят в формулы

$$\bar{\mathbf{u}} \;=\; \sum_i \lambda_i\, \bar{\mathbf{e}}_i \,, \qquad \bar{\mathbf{v}} \;=\; \sum_k \mu_k\, \bar{\mathbf{e}}_k \;; \tag{4}$$

здесь $\bar{\mathbf{e}}_i = \overline{EP_i} \equiv P_i - E$, $i = 0, \ldots, n$.

Семейство введённых только что векторов $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$ уже не является базисом (поскольку сумма данных векторов равна нулю; разумеется, нетрудно превратить это семейство в базис, отбросив один из векторов – например, последний, но хотелось бы пока сохранить равноправие барицентрических компонент векторов). Однако по-прежнему для любого вектора разложение по векторам из рассматриваемого семейства оказывается однозначным (единственность разложения обеспечивается требованием сбалансированности получаемой линейной комбинации).

Соотношение (3) переходит в соотношение

$$(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = \sum_i \lambda_i \sum_k g_{ik} \mu_k ,$$

где через g_{ik} обозначены уже элементы матрицы Грама G семейства векторов $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$. Таким образом, для скалярного произведения векторов, заданных в барицентрическом представлении, получаем формулу

$$(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = \lambda^{\mathrm{T}} G \mu , \tag{5}$$

в которой λ и μ – столбцы барицентрических компонент векторов $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$, а $^{\mathrm{T}}$ – знак операции транспонирования, которая сопоставляет столбцам строки и наоборот.

Для проведения расчётов с использованием формулы (5) нужно уметь вычислять матрицу G для заданного точечного базиса. Если декартовы координаты базисных точек известны, то проще всего воспользоваться формулой $g_{ik} = (\bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_k)$. Если же в постановке задаче декартовы координаты не используются, то при вычислении G следует опираться на имеющуюся информацию о метрических соотношениях между базисными точками.

Наиболее простой способ задания такой информации – указать расстояния между данными точками (т.е. длины соединяющих их отрезков $P_i P_k$); в этом случае положения точек будут определены однозначно – с точностью до перемещения точечного базиса как абсолютно твёрдого тела (здесь и далее мы предполагаем, что нумерация базисных точек существенна).

На практике удобнее, впрочем, пользоваться не самими длинами отрезков, а их квадратами, и хранить последние в виде *матрицы квадратов длин*. При $n = 3$ она имеет следующий вид:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & L_{10} & L_{20} & L_{30} \\ L_{10} & 0 & L_{21} & L_{31} \\ L_{20} & L_{21} & 0 & L_{32} \\ L_{30} & L_{31} & L_{32} & 0 \end{pmatrix} ;$$

представляя её в этой форме, мы учитывали, что данная матрица симметрична: $L_{ik} = L_{ki} \equiv$ $\equiv (P_i - P_k, P_i - P_k)$. В **Maple**-программе её можно описать так:

```
> LL := Matrix (<<0, L[10], L[20], L[30]> | <L[10], 0, L[21], L[31]> |
                 <L[20], L[21], 0, L[32]> | <L[30], L[31], L[32], 0>>);
```

Если матрица M_C задана, то элементы матрицы L могут быть найдены как скалярные квадраты разностей столбцов матрицы M_C:

```
> X := VectorAdd ( Column (M[C],1), Column (M[C],2), 1, -1):
> L[10] := DotProduct ( X, X, conjugate=false);
```

и аналогично для остальных пяти элементов, задающих матрицу L. В противном случае следует задать эти элементы непосредственно.

Получим выражение матрицы Грама G через элементы матрицы L. Начнём с диагональных элементов; в ходе преобразований будем пользоваться соотношением

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) \;=\; \frac{1}{2}\Big[\,(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}) + (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{b}}) - (\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}},\, \bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}})\,\Big], \tag{6}$$

которое является следствием хорошо известного из векторной алгебры тождества

$$(\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}},\, \bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}) \;=\; (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}) + (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{b}}) - 2\,(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})\ .$$

Имеем:

$$g_{ii} \;=\; (\bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_i) \;=\; (P_i - E,\, P_i - E)\ ;$$

так как

$$P_i - E \;=\; P_i - \sum_k \frac{1}{n+1} P_k \;=\; \frac{1}{n+1} \sum_k (P_i - P_k)\ ,$$

то, выразив по формуле (6) скалярные произведения $(P_i - P_k,\, P_i - P_l)$ через L_{ik}, найдём:

$$g_{ii} \;=\; \frac{1}{n+1} \sum_k L_{ik} - \frac{1}{2\,(n+1)^2} \sum_{i,k} L_{ik}\ . \tag{7}$$

Внедиагональные элементы матрицы G проще вычислять, используя соотношение (6). В результате для них получается такая формула:

$$g_{ik} \;=\; \frac{1}{2}\,(g_{ii} + g_{kk} - L_{ik})\ . \tag{8}$$

В частности, при $n = 3$ формулы (7) и (8) принимают следующий вид (где через i, k, l, m обозначены четыре различных числа из набора 0, 1, 2, 3):

$$g_{ii} \;=\; \frac{1}{16}\,(3L_{ik} + 3L_{il} + 3L_{im} - L_{kl} - L_{km} - L_{lm})\ , \tag{9}$$

$$g_{ik} \;=\; \frac{1}{16}\,(-5L_{ik} + L_{il} + L_{im} + L_{kl} + L_{km} - L_{lm})\ . \tag{10}$$

Предположим, что векторы $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ представлены в **Maple**-программе столбцами своих барицентрических компонент, описанными следующим образом:

```
> Lambda := Vector (<lambda[0], lambda[1], lambda[2], lambda[3]>);
> Mu := Vector (<mu[0], mu[1], mu[2], mu[3]>);
```

а элементы матрицы Грама G, представляемой переменной **GG** типа **Matrix**, уже вычислены (например, по формулам (9)−(10)). Тогда скалярное произведение s векторов $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ в соответствии с (5) находим так:

```
> s := DotProduct ( Lambda, GG.Mu, conjugate=false);
```

Рассмотрим столбец $G\mu$ в формуле (5). В силу равенства $\bar{\mathbf{e}}_0 + \bar{\mathbf{e}}_1 + \ldots + \bar{\mathbf{e}}_n = 0$ из определения матрицы G непосредственно следует, что все её строки подчиняются условию сбалансированности: сумма элементов строки равна нулю. Поскольку матрица G – симметричная, то условие сбалансированности выполнено и для её столбцов; отсюда вытекает, что и сумма элементов столбца $\mu' \equiv G\mu$ равна нулю, так что его элементы μ'_k можно трактовать как барицентрические компоненты некоторого вектора $\bar{\mathbf{v}}'$. Этот вектор представляет собой линейную комбинацию

$$\bar{\mathbf{v}}' \;=\; \sum_k \mu_k \bar{\mathbf{e}}'_k \;\equiv\; \sum_k \mu'_k \bar{\mathbf{e}}_k\ , \qquad \text{где} \quad \bar{\mathbf{e}}'_k \;=\; \overline{\mathbf{G}}\,\bar{\mathbf{e}}_k,\;\; k = 0, \ldots, n\ ;$$

через $\overline{\mathbf{G}}$ здесь обозначен линейный оператор, переводящий векторы $\bar{\mathbf{e}}_k$ в векторы $\bar{\mathbf{e}}'_k$.

Таким образом, столбцы матрицы G – это одновременно столбцы барицентрических компонент вновь введённых векторов $\bar{\mathbf{e}}'_k$.

В тензорном исчислении мы встречаемся с аналогичной ситуацией. Умножая столбец компонент некоторого вектора $\bar{\mathbf{v}}$ на матрицу Грама выбранного в евклидовом векторном пространстве базиса, мы получаем набор чисел, представляющих собой скалярные про изведения вектора $\bar{\mathbf{v}}$ на векторы исходного базиса (их называют *ковариантными* компонентами данного вектора). Одновременно эти числа можно трактовать как обычные (*контравариантные*) компоненты нового вектора $\bar{\mathbf{v}}'$ в исходном базисе. Базис, относительно которого вектор $\bar{\mathbf{v}}'$ имеет те же компоненты, которые вектор $\bar{\mathbf{v}}$ имел в исходном базисе, называют *взаимным базисом* (по отношению к исходному) [15,16].

Однако в рассматриваемой сейчас ситуации семейство векторов $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$ базисом, как уже говорилось, не является, а единственным базисом, относительно которого определяются барицентрические компоненты рассматриваемых нами векторов, является исходный точечный базис. Возникает вопрос: что может служить аналогом понятия взаимного базиса в рамках барицентрического исчисления?

Для ответа на этот вопрос введём в рассмотрение точки $P_k' = E + \bar{\mathbf{e}}_k'$, $k = 0, \ldots, n$. Поскольку выполняется равенство $\bar{\mathbf{e}}_0' + \bar{\mathbf{e}}_1' + \ldots + \bar{\mathbf{e}}_n' = 0$, то точка E играет роль барицентра также и по отношению к новому точечному базису из точек P_k'. Этот новый точечный базис мы и будем трактовать как *взаимный точечный базис* (по отношению к исходному точечному базису из точек P_i).

Барицентрические координаты точек P_k' представляют собой суммы барицентрических компонент векторов $\bar{\mathbf{e}}_k'$ и барицентрических компонент точки E (у последней все такие компоненты одинаковы и равны $1/(n+1)$). Поэтому, обозначив через C матрицу, у которой все элементы равны 1, и прибавив к матрице Грама G эту матрицу C, умноженную на $1/(n+1)$, мы получим матрицу, столбцами которой служат столбцы барицентрических координат точек P_k':

$$G' = G + \frac{1}{n+1} C .$$

У матрицы G' столбцы (впрочем, как и строки) подчиняются условию барицентричности: сумма элементов столбца равна единице. Поэтому её можно интерпретировать как барицентрическую матрицу некоторого аффинного отображения (а именно – такого, которое переводит точки исходного базиса $\{P_i\}$ в точки базиса $\{P_k'\}$ с теми же номерами) [5]; оператор $\overline{\mathbf{G}}$ служит ассоциированным линейным оператором этого аффинного отображения.

В частном случае, когда за точки исходного базиса взяты вершины правильного тетраэдра с квадратом длины ребра, равным 2, данное отображение оказывается тождественным, матрица G' – единичной, а взаимный точечный базис совпадает с исходным.

Заметим попутно, что аналогичная операция переводит матрицу H, столбцами которой служат столбцы барицентрических компонент векторов $\bar{\mathbf{e}}_k$, в единичную матрицу I:

$$I = H + \frac{1}{n+1} C ;$$

в самом деле, столбцы матрицы в левой части данного равенства – это столбцы барицентрических координат точек базиса $\{P_i\}$ в этом же базисе (так что соответствующее аффинное отображение вновь оказывается тождественным).

Произведение матрицы C на какой либо столбец даёт новый столбец, любой элемент которого равен сумме всех элементов исходного столбца. Поэтому $C\mu = 0$, а отсюда следует, что $G'\mu = G\mu \equiv \mu'$. Таким образом, в формуле (5), служащей для вычисления скалярных произведений, матрицу G можно заменить на G', и мы приходим к следующей формуле:

$$(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = \lambda^{\mathrm{T}} G' \mu . \tag{11}$$

В действительности имеется бесконечно много матриц, которые можно использовать в формуле (5) вместо матрицы G. Наличие такой неоднозначности кажется – на первый взгляд – парадоксальным; однако оно связано с тем, что произведения, стоящие в правых частях формул (5), (11) и подобных им, должны совпадать лишь в тех случаях, когда столб цы λ и μ удовлетворяют условию сбалансированности, а для произвольных столбцов совпадать не обязаны.

В частности, заменить матрицу G в формуле (5) способна матрица $-(1/2)\,L$. Для доказательства этого сначала перейдём от разложения векторов $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ по точечному базису $\{P_i\}$ к их разложению по базису из векторов $P_i - P_n$, для чего в формулах

$$\bar{\mathbf{u}} = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n \quad \text{и} \quad \bar{\mathbf{v}} = \mu_0 P_0 + \mu_1 P_1 + \ldots + \mu_n P_n$$

заменим λ_n на $-\lambda_0 - \lambda_1 - \ldots - \lambda_{n-1}$ и μ_n на $-\mu_0 - \mu_1 - \ldots - \mu_{n-1}$:

$$\bar{\mathbf{u}} = \lambda_0 (P_0 - P_n) + \ldots + \lambda_{n-1}(P_{n-1} - P_n)\,, \quad \bar{\mathbf{v}} = \mu_0 (P_0 - P_n) + \ldots + \mu_{n-1}(P_{n-1} - P_n)\,. \quad (12)$$

Теперь в скалярное произведение $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ подставим разложения (12) и раскроем внешние скобки, а скалярные произведения векторов, записанных в круглых скобках, преобразуем, учитывая соотношение (6), по формулам

$$(P_i - P_n, P_i - P_n) = L_{in}\,, \qquad (P_i - P_n, P_k - P_n) = \frac{1}{2}\,(L_{in} + L_{kn} - L_{ik})\,. \quad (13)$$

После этого в выражениях, стоящих при квадратах длин, выделим произведения компонент столбцов λ и μ с совпадающими индексами сомножителей (например, $\lambda_0\mu_0$) и преобразуем их так:

$$\lambda_0\mu_0 = \frac{1}{2}\lambda_0\mu_0 + \frac{1}{2}\lambda_0\mu_0 = \frac{1}{2}\Big[\,(-\lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_n)\,\mu_0 + \lambda_0\,(-\mu_1 - \mu_2 - \ldots - \mu_n)\,\Big]\,,$$

а затем вновь раскроем скобки и приведём подобные члены. В итоге имеем:

$$(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = -\frac{1}{2}\sum_{i<k} L_{ik}\,(\lambda_i\,\mu_k + \lambda_k\,\mu_i)\,,$$

откуда получаем следующую окончательную формулу:

$$(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = -\frac{1}{2}\,\lambda^{\mathrm{т}} L\,\mu\,. \quad (14)$$

Столбцы и строки матрицы $-(1/2)\,L$ уже не подчинены каким-либо специальным условиям (подобным условиям на строки и столбцы матриц G и G'), а потому произведение столбца μ на эту матрицу уже не будет, вообще говоря, совпадать с μ'. Однако в случае, когда требуется лишь умение вычислять скалярные произведения векторов, представленных своими барицентрическими компонентами, применение формулы (14) открывает возможность вообще обойтись без вычисления матрицы Грама G.

В частности, в этом случае в **Maple**-программе вычисление скалярного произведения осуществляется так:

```
> s := - (1/2) * DotProduct ( Lambda, LL.Mu, conjugate=false);
```

Переходим к операции векторного умножения и, соответственно, окончательно полагаем, что $n = 3$. Сейчас нам предстоит получить выражение для столбца ν из барицентрических компонент ν_k вектора $\bar{\mathbf{w}} = [\,\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}\,]$, представляющего собой векторное произведение векторов $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$, которые представлены столбцами λ и μ своих барицентрических компонент.

Стремление сохранить равноправие барицентрических компонент векторов привело бы нас к получению искомого выражения в виде линейной комбинации шести определителей второго порядка, составленных из элементов столбцов λ и μ; вычисления по этой формуле были бы достаточно громоздкими. Поэтому на этот раз не будем пытаться сохранить равноправие компонент и перейдём к работе с базисом из векторов $P_i - P_n$, в котором векторы $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ представлены разложениями (12); искомому вектору $\bar{\mathbf{w}}$ отвечает разложение

$$\bar{\mathbf{w}} = \nu_0 (P_0 - P_n) + \nu_1 (P_1 - P_n) + \nu_2 (P_2 - P_n)\,. \quad (15)$$

Наложим далее ограничение на порядок нумерации точек базиса $\{P_i\}$, считая её такой, что базис из векторов $P_i - P_n$ является *правым* (при этом со стороны внешней нормали к грани $P_0P_1P_2$ симплекса $P_0P_1P_2P_3$ обход точек $P_0, \ldots, P_2$, совершаемый в циклическом порядке, выглядит происходящим против хода часовой стрелки). Известно, что для правого базиса корень квадратный из определителя матрицы Грама базисных векторов (которую далее мы во избежание путаницы будем обозначать G_3) равен объёму V параллелепипеда, построенного на базисных векторах, а векторы $\bar{\mathbf{e}}^{\,i}$ взаимного базиса равны попарным векторным произведениям базисных векторов, делённым на V:

$$V = \sqrt{\det G_3}\,, \qquad \bar{\mathbf{e}}^{\,0} = \frac{1}{V}\,[\,P_1 - P_n\,, P_2 - P_n\,]\,, \text{ и т.д.;}$$

(индексы в данных произведениях стоят в циклическом порядке) [15,16].

Пользуясь антикоммутативностью векторного произведения и его линейностью по каждому из сомножителей, преобразуем выражение для вектора $\overline{\mathbf{w}} = [\,\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}\,]$ в линейную комбинацию

$$\overline{\mathbf{w}} = \sigma_0 V \bar{\mathbf{e}}^{\,0} + \sigma_1 V \bar{\mathbf{e}}^{\,1} + \sigma_2 V \bar{\mathbf{e}}^{\,2}\,, \tag{16}$$

где через σ_i обозначены определители второго порядка, составленные из элементов столбцов λ и μ:

$$\sigma_0 = (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)\,, \qquad \sigma_1 = (\lambda_2\mu_0 - \lambda_0\mu_2)\,, \qquad \sigma_2 = (\lambda_0\mu_1 - \lambda_1\mu_0)\,.$$

Столбцы из компонент векторов $\bar{\mathbf{e}}^{\,i}$ в рассматриваемом базисе могут быть найдены как столбцы обратной матрицы G_3^{-1}; вычисления, впрочем, упрощаются, если учесть, что обратная матрица равна присоединённой матрице A, делённой на $\det G_3$ (т.е. на V^2). В результате замены матрицы G_3^{-1} матрицей A вместо умножения на V мы получим уже деление, и формула (16) перейдёт в формулу

$$\tilde{\nu} = (\sigma_0 A_0 + \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2)\,/\,V\,, \tag{17}$$

где $\tilde{\nu}$ – столбец, состоящий из первых трёх элементов столбца ν, а A_i – это столбцы матрицы A (она составлена из алгебраических дополнений элементов матрицы G_3). Расчётные формулы для вычислений элементов матрицы G_3 были выписаны ранее – это формулы (13).

Нахождение столбца $\tilde{\nu}$ можно ещё более упростить, если заметить, что в формуле (17) выражение в скобках представляет собой произведение матрицы A на трёхэлементный столбец σ из определителей σ_i, причём данный столбец можно вычислить как формальное векторное произведение столбцов, получаемых из λ и μ отбрасыванием последнего элемента. В результате формула (17) принимает вид

$$\tilde{\nu} = A\sigma\,/\,V\,; \tag{18}$$

последний элемент ν_3 столбца ν находим из условия сбалансированности.

В соответствии со всем вышесказанным для вычисления векторного произведения в **Maple**-программе следует задать описание

```
> Nu := Vector (<nu[0], nu[1], nu[2], nu[3]>);
```

столбца ν барицентрических компонент искомого вектора $\overline{\mathbf{w}}$, а также вычислить матрицу 3-го порядка `G[3]`, после чего находим присоединённую матрицу A и объём V:

```
> A := Adjoint(G[3]);
> V := sqrt (Determinant(G[3]);
```

Для нахождения векторного произведения векторов $\bar{\mathbf{u}}$ и $\bar{\mathbf{v}}$ теперь можно записать:

```
> X := A . ( Lambda[1..3] &x Mu [1..3] ) / V;
> ( nu[0], nu[1], nu[2] ) := ( X[1], X[2], X[3]);
> nu[3] := - nu[0] - nu[1] - nu[2];
```

(знаком `&x` в системе **Maple** обозначается операция векторного умножения).

В нашем изложении мы умышленно не касались вопросов, связанных с физической размерностью элементов рассматриваемых столбцов и матриц (предполагая молчаливо, что единица длины выбрана и все встречающиеся величины можно трактовать как безразмерные). В этом плане отметим лишь, что если давать рассматриваемому евклидову точечному пространству обычную геометрическую интерпретацию (а возможны и иные), то расстояния между точками и длины векторов имеют размерность длины, барицентрические компоненты точек и векторов представляют собой безразмерные величины, а элементы матрицы квадратов длин L и матриц Грама G и G_3 имеют размерность площади.

Что касается элементов матрицы M_C, то они различны по своей размерности, а элементы матрицы G' вообще не удовлетворяют правилу, по которому складывать можно лишь величины одинаковой размерности (заметим, впрочем, что последняя матрица фигурирует лишь в промежуточных выкладках).

Литература

1. Möbius A. F. Der barycentrishe Calcül: ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie. Leipzig: J. A. Barth, 1827. XXIV + 454 S.
2. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
3. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
4. Луизов А. В. Цвет и свет. Л.: Энергоатомиздат, 1989. 256 с.
5. Корецкий А. В., Осадченко Н. В. Компьютерное моделирование кинематики манипуляционных роботов. М.: Изд-во МЭИ, 2000. 48 с.
6. Hou Cuiqin, Hou Yibin, Huang Zhangqin. A framework based on barycentric coordinates for localization in wireless sensor networks // *Computer Networks*, 2013, **57** (13). Pp. 3701–3712.
7. Beacco A., Pelechano N., Kapadia M., Badler N. I. Footstep parameterized motion blending using barycentric coordinates // *Computers & Graphics*, 2015, **47**. Pp. 105–112.
8. Бурбаки Н. Алгебра. Том 1. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М.: ГИФМЛ, 1962. 516 с.
9. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973. 446 с.
10. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. 2-е изд. М.: Наука, 1986. 304 с.
11. Винберг Э. Б. Курс алгебры. 2-е изд. СПб.: Изд-во МЦНМО, 2013. 590 с.
12. Rees E. G. Notes on Geometry. Berlin: Springer, 2000. viii + 109 p.
13. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во «Лань», 2012. 512 с.
14. Ungar A. A. Barycentric Calculus in Euclidean and Hyperbolic Geometry: A Comparative Introduction. Singapore: World Scientific, 2010. xiv + 344 p.
15. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. 3-е изд. М.: Наука, 1984. 294 с.
16. Победря Б. Е. Лекции по тензорному анализу. 3-е изд. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. 264 с.