Алгебра и логика, 46, № 5 (2007), 548—559

УДК 512.544

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПОДГРУППЫ, НЕ ЯВЛЯЮЩИЕСЯ РАЗРЕШИМЫМИ A_3-ГРУППАМИ

О. Ю. ДАШКОВА

Группа всех автоморфизмов векторного пространства A над полем F называется *полной линейной группой* и обозначается $GL(F, A)$. Подгруппы группы $GL(F, A)$ называются *линейными группами.* Пусть $H \leq GL(F, A)$. Если размерность $\dim_F A$ векторного пространства A над полем F конечна, то H называется *конечномерной линейной группой*, и $GL(F, A)$ в этом случае можно отождествить с группой невырожденных квадратных матриц размерности $n \times n$, где $n = \dim_F A$. Конечномерные линейные группы играют важную роль в математике и изучались достаточно широко.

Подгруппы группы $GL(F, A)$ в случае, когда $\dim_F A$ бесконечна, исследовались мало. Такие исследования требуют дополнительных ограничений на рассматриваемые группы. Достаточно успешным примером применения условий конечности для изучения бесконечномерных линейных групп является теория финитарных линейных групп [1, 2]. Группа G называется *финитарной*, если для каждого её элемента g подпространство $C_A(g)$ имеет конечную коразмерность в A.

Если H — подгруппа группы $GL(F, A)$, H реально действует на фактор-пространстве $A/C_A(H)$ естественным образом. Если $\dim_F(A/C_A(H))$ конечна, будем говорить, что H имеет конечную центральную размерность. В противном случае будем говорить, что H *имеет бесконечную центральную размерность.* Таким образом, группа является финитарной тогда и только тогда, когда каждая её циклическая подгруппа имеет конечную центральную размерность. Если $H \leq GL(F, A)$ имеет конечную центральную размерность, то и любая её подгруппа $K \leq H$ также имеет конечную центральную размерность.

В [3] изучались линейные группы, у которых семейство всех собственных подгрупп бесконечной центральной размерности удовлетворяет условию минимальности. Также рассматривалась аналогичная проблема для линейных групп, у которых семейство всех собственных подгрупп бесконечной центральной размерности удовлетворяет условию максимальности [4]. Кроме того, исследовались бесконечномерные линейные группы, у которых все собственные подгруппы различных бесконечных рангов имеют конечную центральную размерность [5].

Следует отметить, что наряду с центральной размерностью подгруппы $H \leq GL(F, A)$ в [6] было введено понятие фундаментальной размерности. Пусть H — подгруппа группы $GL(F, A)$. Рассмотрим подпространство $[H, A]$ пространства A, которое порождается следующими элементами: $[H, A] = \langle v(g - 1), g \in H, v \in A\rangle$. Назовем *фундаментальной размерностью группы* H размерность подпространства $[H, A]$. В [6] исследовались бесконечномерные линейные группы, у которых все собственные подгруппы различных бесконечных рангов имеют конечную фундаментальную размерность.

А. И. Мальцев [7] ввёл понятие разрешимой A_i-группы, $i = 1$–5. *Разрешимой A_i-группой* называется группа, обладающая конечным субнормальным рядом с факторами, являющимися абелевыми A_i-группами. В частности, *абелевой A_3-группой* называется абелева группа, фактор-группа которой по периодической части имеет конечный специальный ранг, а периодическая часть удовлетворяет условию минимальности. *Абелевой A_4-группой* называется абелева A_3-группа с конечной периодической частью. Напомним, что *минимаксной* называется группа, обладающая конечным субнормальным рядом, факторы которого удовлетворяют условию минимальности или максимальности. В частности, разрешимая минимаксная группа является разрешимой A_3-группой. Поэтому разрешимая минимаксная группа G содержит ряд нормальных подгрупп $Q \leq H \leq G$, где подгруппа Q является либо единичной, либо делимой абелевой черниковской, фактор-группа H/Q либо единичная, либо обладает конечным рациональным рядом, фактор-группа G/H конечна [8].

В настоящей работе исследуются локально разрешимые группы бесконечной центральной размерности, не являющиеся A_3-группами, у которых любая собственная подгруппа, не являющаяся A_3-группой, имеет конечную центральную размерность. Аналогичная проблема рассматривается для локально разрешимых групп, не являющихся минимаксными группами и A_4-группами.

ЛЕММА 1. *Пусть G — линейная группа бесконечной центральной размерности, не являющаяся разрешимой A_3-группой. Если каждая собственная подгруппа группы G, не являющаяся разрешимой A_3-группой, имеет конечную центральную размерность, то справедливы следующие утверждения*:

(1) *если U и V — собственные подгруппы группы G и $G = \langle U, V\rangle$, то по крайней мере одна из подгрупп U или V является разрешимой A_3-группой*;

(2) *если H — собственная подгруппа группы G, не являющаяся разрешимой A_3-группой, то любая подгруппа группы H и любая собственная подгруппа группы G, содержащая H, имеют конечную центральную размерность*;

(3) *если K, L — собственные подгруппы группы G и содержат подгруппу H, не являющуюся разрешимой A_3-группой, то $\langle K, L\rangle$ является собственной подгруппой группы G.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Предположим противное. Пусть U и V являются разрешимыми A_3-группами. Тогда размерности фактор-пространств $A/C_A(U)$ и $A/C_A(V)$ конечны. Поскольку фактор-пространство $A/(C_A(U) \cap C_A(V))$ вкладывается в прямую сумму фактор-пространств $A/C_A(U)$ и $A/C_A(V)$, то размерность фактор-пространства $A/(C_A(U) \cap \cap C_A(V))$ также конечна. Отсюда пространство $A/C_A(G)$ конечномерно. Следовательно, группа G имеет конечную центральную размерность; противоречие.

(2) Если $K \leq H$, то справедливо включение $C_A(H) \leq C_A(K)$. Отсюда любая подгруппа K группы H, не являющейся разрешимой A_3-группой, имеет конечную центральную размерность. Поскольку любая собственная подгруппа L группы G, содержащая H, не является разрешимой A_3-группой, то подгруппа L также имеет конечную центральную размерность.

(3) Предположим, что $G = \langle K, L \rangle$. Согласно п. (1) по крайней мере одна из подгрупп K или L является разрешимой A_3-группой. Однако подгруппы K и L содержат подгруппу H, не являющуюся разрешимой A_3-группой. Следовательно, K и L не являются разрешимыми A_3-группами; противоречие. Лемма доказана.

Следует отметить, что имеют место аналогичные утверждения, если вместо разрешимых A_3-групп рассматривать минимаксные группы или разрешимые A_4-группы.

Рассмотрим сначала локально разрешимые группы бесконечной центральной размерности, не являющиеся A_3-группами, у которых каждая собственная подгруппа группы G, не являющаяся A_3-групой, имеет конечную центральную размерность. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть G — локально разрешимая линейная группа бесконечной центральной размерности, не являющаяся разрешимой A_3-группой. Если каждая собственная подгруппа группы G, не являющаяся разрешимой A_3-группой, имеет конечную центральную размерность, то группа G разрешима, имеет бесконечный специальный ранг, и удовлетворяет следующим условиям:*

(1) *$G = HQ$, где H — нормальная подгруппа группы G, $H \cap Q = E$, $Q \simeq C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа q;*

(2) $\operatorname{char} F = p$, $q \neq p$;

(3) *H является p-группой конечной центральной размерности;*

(4) *$K = H \cap Z(G)$ — конечная подгруппа;*

(5) *H/K — бесконечная элементарная абелева p-группа;*

(6) *H/K — минимальная нормальная подгруппа фактор-группы G/K.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда специальный ранг группы G бесконечен. Любая собственная подгруппа группы G, имеющая бесконечный специальный ранг, не является разрешимой A_3-группой, и по основному результату из [5] группа G является разрешимой и удовлетворяет заданным условиям.

Пусть теперь специальный ранг группы G конечен. Обозначим через $T(G)$ периодический радикал группы G. Согласно [9] фактор-группа $G/T(G)$ разрешима. Если $G \neq T(G)$, то фактор-группа $G/T(G)$ является группой почти без кручения и имеет нормальную подгруппу $H/T(G)$ конечного индекса, обладающую конечным рациональным рядом.

Рассмотрим сначала случай, когда $G = H$. Тогда найдется нормальная подгруппа $H_1/T(G) \leq G/T(G)$, для которой фактор-группа G/H_1 — абелева группа без кручения специального ранга 1. Если эта фактор-группа циклическая, то группа G представима в виде произведения $G = UV$, где U и V — собственные подгруппы группы G, не являющиеся разрешимыми A_3-группами; это противоречит лемме 1(3). В случае нециклической фактор-группы H/H_1 выберем максимальную нормальную свободную абелеву подгруппу $M/H_1 \leq G/H_1$. Если фактор-группа G/M не является локально циклической p-группой для некоторого простого числа p, то группа G представима в виде произведения $G = UV$, где U и V — собственные подгруппы группы G, не являющиеся разрешимыми A_3-группами; это противоречит лемме 1(3). Если же фактор-группа G/M является локально циклической p-группой для некоторого простого числа p, то рассмотрим фактор-группу G/M^r для простого числа $r \neq p$. Эта фактор-группа согласно [10, лемма 1.D.4] разлагается в произведение $G/M^r = (M/M^r)(V/M^r)$, где V/M^r — p-группа. И тогда группа G представима в виде произведения $G = MV$, где M и V — собственные подгруппы группы G, не являющиеся разрешимыми A_3-группами; это противоречит лемме 1(3).

Рассмотрим случай, когда $G \neq H$. Если фактор-группа G/H не является конечной циклической p-группой для некоторого простого числа p, то G/H является конечной разрешимой нециклической группой, и поэтому разлагается в произведение $G/H = (U/H)(V/H)$ двух собственных подгрупп. Следовательно, группа G представима в виде произведения $G = UV$, где U и V — собственные подгруппы группы G, не являющиеся разрешимыми A_3-группами; это противоречит лемме 1(3).

Пусть теперь фактор-группа G/H является конечной циклической p-группой для некоторого простого числа p. Подгруппа $H/T(G)$ обладает конечным рациональным рядом, поэтому фактор-группа H/H' не является периодической. Отсюда фактор-группа $(G/H')/T(H/H')$ будет расширением абелевой группы без кручения $(H/H')/T(H/H')$ конечного специального ранга при помощи циклической p-группы. Если фактор-группа $(H/H')/T(H/H')$ не является свободной абелевой, то найдется нормальная свободная абелева подгруппа $(N/H')/T(H/H') \leq (G/H')/T(H/H')$, содержащаяся в $(H/H')/T(H/H')$, для которой фактор-группа G/N является периодической и имеет конечный специальный ранг. Если эта фактор-группа окажется p-группой, то она будет черниковской, и тогда группа G представима в виде произведения $G = UV$, где U и V — собственные подгруппы группы G, не являющиеся разрешимыми A_3-группами; это противоречит лемме 1(3). Если же фактор-группа G/N не является p-группой, то найдется нормальная подгруппа $G_1/N \leq G/N$, для которой G/G_1 — нециклическая черниковская группа, и поэтому группа G представима в виде произведения $G = UV$, где U и V — собственные подгруппы группы G, не являющиеся разрешимыми A_3-группами; это противоречит лемме 1(3).

Пусть теперь $G = T(G)$. Согласно [11, теор. 2] группа G является расширением делимой абелевой группы D с помощью группы G/D с конечными силовскими подгруппами по всем простым числам p. Пусть $G \neq D$, а фактор-группа G/D является бесконечной. Тогда найдутся два различных простых числа $p_1, p_2 \in \pi(G/D)$, и по [12, теор. 2] максимальная нормальная подгруппа L/D фактор-группы G/D, не содержащая элементов порядков p_1 и p_2, имеет в G/D конечный индекс. Следовательно, G/L является конечной нециклической разрешимой группой, и поэтому она представима в виде произведения $G/L = (U/L)(V/L)$, где U и V —

собственные подгруппы группы G, не являющиеся A_3-группами. Отсюда $G = UV$, что противоречит лемме 1(3).

Рассмотрим теперь случай, когда G/D конечна. Пусть G/D не является циклической. Подгруппа D не является разрешимой A_3-группой, а фактор-группа G/D представима в виде произведения $G/D = (U/D) \cdot \cdot (V/D)$, где U и V — собственные подгруппы группы G, содержащие подгруппу D; противоречие с леммой 1(3).

Пусть G/D является циклической p-группой. Подгруппа D разлагается в прямое произведение своих силовских черниковских подгрупп, причём множество $\pi(D)$ бесконечно. Подгруппу D можно представить в виде произведения $D = D_1 \times D_2$, где D_1 — p_1-подгруппа, $p_1 \neq p$, а D_2 — p_1'-подгруппа. Подгруппа D_1 является черниковской, следовательно, фактор-группа G/D_2 представима в виде произведения $G/D_2 = (U/D_2)(V/D_2)$, где U и V — собственные подгруппы группы G, содержащие подгруппу D_2, не являющуюся разрешимой A_3-группой; противоречие с леммой 1(3).

Осталось рассмотреть случай, когда $G = D$. Разложим группу G в прямое произведение своих силовских черниковских подгрупп. Поскольку множество $\pi(D)$ бесконечно, группа G представима в виде произведения $G = D_1 \times D_2$, где множества $\pi(D_1)$ и $\pi(D_2)$ также бесконечны. Следовательно, D_1 и D_2 — собственные подгруппы группы G, не являющиеся разрешимыми A_3-группами; противоречие с леммой 1(1).

Следовательно, группа G имеет бесконечный специальный ранг, и, по основному результату работы [5], группа G является разрешимой и удовлетворяет заданным условиям. Теорема доказана.

Поскольку разрешимые минимаксные группы и разрешимые A_4-группы являются разрешимыми A_3-группами, справедливы приводимые ниже следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Пусть G — локально разрешимая неминимаксная линейная группа бесконечной центральной размерности. Если каждая собственная неминимаксная подгруппа группы G имеет конечную центральную размерность, то группа G разрешима, имеет бесконечный специальный ранг, а её строение определяется теоремой* 1.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Пусть G — локально разрешимая линейная группа бесконечной центральной размерности, не являющаяся разрешимой A_4-группой. Если каждая собственная подгруппа группы G, не являющаяся разрешимой A_4-группой, имеет конечную центральную размерность, то G разрешима, имеет бесконечный специальный ранг, а её строение определяется теоремой* 1.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G — локально нильпотентная линейная группа. Если каждая собственная подгруппа группы G, не являющаяся разрешимой A_3-группой, имеет конечную центральную размерность, то группа G либо разрешимая A_3-группа, либо её центральная размерность конечна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда группа G имеет бесконечную центральную размерность. Предположим, что специальный ранг группы G бесконечен. Согласно теореме 2 группа G разрешима, и её строение определяется теоремой 1. Однако группа, удовлетворяющая условиям теоремы 1, не является локально нильпотентной; противоречие с условием теоремы. Следовательно, специальный ранг группы G конечен.

Предположим, что группа G не является разрешимой A_3-группой. Рассмотрим случай, когда $G \neq T(G)$. Поскольку фактор-группа $G/T(G)$ без кручения и имеет конечный специальный ранг, то согласно [13] фактор-группа $G/T(G)$ нильпотентна. В силу того, что G не является разрешимой A_3-группой, её периодическая часть $T(G)$ не будет черниковской, и поэтому группа G представима в виде произведения $G = UV$, где U и V — собственные подгруппы группы G, не являющиеся разрешимыми A_3-группами; это противоречит лемме 1(3).

Если $G = T(G)$, то разложим группу G в прямое произведение своих силовских черниковских подгрупп. Множество $\pi(T(G))$ бесконечно, поэтому группа G представима в виде произведения $G = D_1 \times D_2$, где множества $\pi(D_1)$ и $\pi(D_2)$ также бесконечны. Следовательно, D_1 и D_2 — собственные подгруппы группы G, не являющиеся разрешимыми A_3-группами. Вновь получаем противоречие с леммой 1(3). Отсюда периодическая часть группы G является черниковской, а группа G — разрешимой A_3-группой. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Пусть G — локально нильпотентная линейная группа. Если каждая собственная неминимаксная подгруппа группы G имеет конечную центральную размерность, то G либо минимаксна, либо её центральная размерность конечна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая собственная подгруппа группы G, не являющаяся разрешимой A_3-группой, неминимаксна, поэтому G удовлетворяет условиям теоремы 2. Следовательно, G есть либо разрешимая A_3-группа, либо её центральная размерность конечна. Пусть G является разрешимой A_3-группой, а её центральная размерность бесконечна. Предположим, что она неминимаксна. Тогда фактор-группа $G/T(G)$ также неминимаксна, и G можно представить в виде произведения $G = UV$, где U и V — собственные неминимаксные подгруппы группы G; это противоречит лемме 1(3). Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Пусть G — локально нильпотентная линейная группа. Если каждая собственная подгруппа группы G, не являющаяся разрешимой A_4-группой, имеет конечную центральную размерность, то G есть либо разрешимая A_3-группа, либо её центральная размерность конечна.*

Рассмотрим теперь локально разрешимые линейные группы бесконечной фундаментальной размерности. Следующая лемма аналогична лемме 1.

ЛЕММА 2. *Пусть G — линейная группа бесконечной фундаментальной размерности, не являющаяся разрешимой A_3-группой. Предположим также, что каждая собственная подгруппа группы G, не являющаяся разрешимой A_3-группой, имеет конечную фундаментальную размерность.*

(1) *Если U, V — собственные подгруппы группы G, а $G = \langle U, V\rangle$, то по крайней мере одна из подгрупп U или V является разрешимой A_3-группой.*

(2) *Если H — собственная подгруппа группы G, не являющаяся разрешимой A_3-группой, то все собственные подгруппы группы G, содержащие H, и подгруппы группы H имеют конечную фундаментальную размерность.*

(3) *Если K и L — собственные подгруппы группы G, содержащие подгруппу H, не являющуюся разрешимой A_3-группой, то $\langle K, L\rangle$ является собственной подгруппой группы G.*

Рассуждения, аналогичные проведённым в теоремах 1 и 2 (используем [6, теор. 3.3 и 4.9] вместо основного результата из [5] и лемму 2 вместо леммы 1, соответственно), позволяют доказать, что имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Пусть G — локально разрешимая линейная группа бесконечной фундаментальнойной размерности, не являющаяся разрешимой A_3-группой. Если каждая собственная подгруппа группы G, не являющаяся разрешимой A_3-группой, имеет конечную фундаментальную размерность, то группа G разрешима, имеет бесконечный специальный ранг, и удовлетворяет следующим условиям:*

(1) *$G = HQ$, где H — нормальная подгруппа группы G, $H \cap Q = E$, $Q \simeq C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа q;*

(2) $\operatorname{char} F = p$, $q \neq p$;

(3) *H является p-группой конечной фундаментальной размерности;*

(4) *$K = H \cap Z(G)$ — конечная подгруппа;*

(5) *H/K — бесконечная элементарная абелева p-группа;*

(6) *H/K — минимальная нормальная подгруппа фактор-группы G/K.*

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Пусть G — локально разрешимая неминимаксная линейная группа бесконечной фундаментальной размерности. Если каждая собственная неминимаксная подгруппа группы G имеет конечную фундаментальную размерность, то группа G разрешима, имеет бесконечный специальный ранг, а её строение определяется теоремой* 3.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Пусть G — локально разрешимая линейная группа бесконечной фундаментальной размерности, не являющаяся раз-*

решимой A_4-группой. Если каждая собственная подгруппа группы G, не являющаяся разрешимой A_4-группой, имеет конечную фундаментальную размерность, то группа G разрешима, имеет бесконечный специальный ранг, а её строение определяется теоремой 3.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть G — локально нильпотентная линейная группа. Если каждая собственная подгруппа группы G, не являющаяся разрешимой A_3-группой, имеет конечную фундаментальную размерность, то группа G есть либо разрешимая A_3-группа, либо её фундаментальная размерность конечна.*

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Пусть G — локально нильпотентная линейная группа. Если каждая собственная неминимаксная подгруппа группы G имеет конечную фундаментальную размерность, то группа G либо минимаксна, либо её фундаментальная размерность конечна.*

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Пусть G — локально нильпотентная линейная группа бесконечной фундаментальной размерности. Если каждая собственная подгруппа группы G, не являющаяся разрешимой A_4-группой, имеет конечную фундаментальную размерность, то группа G есть либо разрешимая A_3-группа, либо её фундаментальная размерность конечна.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. E. Phillips*, The structure of groups of finitary transformations, J. Algebra, **119**, No. 2 (1988), 400—448.
2. *R. E. Philips*, Finitary linear groups: a survey, in: B. Hartley (ed.) et al., Finite and locally finite groups, Proc. NATO Adv. Study Inst. Istanbul, Turkey, 14–27 August 1994 (NATO ASI Ser., Ser. C, Math. Phys. Sci., **471**), Dordrecht, Kluwer, 1995, 111—146.
3. *M. R. Dixon, M. J. Evans, L. A. Kurdachenko*, Linear groups with the minimal condition on subgroups of infinite central dimension, J. Algebra, **277**, No. 1 (2004), 172—186.

4. *L. A. Kurdachenko, I. Ya. Subbotin*, Linear groups with the maximal condition on subgroups of infinite central dimension, Publ. Mat., **50**, No. 1 (2006), 103—131.

5. *O. Yu. Dashkova, M. R. Dixon, L. A. Kurdachenko*, Linear groups with rank restrictions on the subgroups of infinite central dimension, J. Pure Appl. Algebra, **208**, No. 3 (2007), 785—795.

6. *М. Р. Диксон, Л. А. Курдаченко, О. Ю. Дашкова*, Бесконечномерные линейные группы с ограничениями на подгруппы бесконечных рангов, Изв. Гомельского гос. ун-та, **36**, № 3 (2006), 109—123.

7. *А. И. Мальцев*, О некоторых классах бесконечных разрешимых групп, Матем. сб., **28**, № 2 (1951), 567—588.

8. *Д. И. Зайцев*, К теории минимаксных групп, Укр. матем. ж., **23**, № 5 (1971), 652—660.

9. *В. С. Чарин*, О локально разрешимых группах конечного ранга, Матем. сб., **41**, № 1 (1957), 37—48.

10. *O. H. Kegel, B. A. F. Wehrfritz*, Locally finite groups (North-Holland Math. Library, **3**), Amsterdam-London, North-Holland; New York, Elsevier, 1973.

11. *М. И. Каргаполов*, Локально конечные группы, обладающие нормальными системами с конечными факторами, Избранные труды. Группы, Новосибирск, Наука, Сибирское отделение, 1991, 33—56.

12. *С. Н. Черников*, О бесконечных локально конечных группах с конечными силовскими подгруппами, Матем. сб., **52**, № 1 (1960), 647—652.

13. *Н. Н. Мягкова*, О группах конечного ранга, Известия АН СССР, **13**, № 6 (1949), 495—512.

Поступило 17 августа 2006 г.

Окончательный вариант 26 апреля 2007 г.

Адрес автора:

ДАШКОВА Ольга Юрьевна, пр. Кирова, д. 102-Д, кв. 35, г. Днепропетровск, 49055, УКРАИНА. Тел.: (0562)924425, e-mail: odashkova@yandex.ru