

Аналитическое построение бароклинных потоков нелинейным суммированием

Д.Н. Раздобурдин

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга

Введение

Вопрос устойчивости дисков с вертикальным градиентом угловой скорости является одним из актуальных вопросов современной астрофизики. Такие потоки называются бароклинными. На сегодняшний день известно, что вертикальный градиент угловой скорости в сочетании с теплопроводностью может приводить к линейной неустойчивости (т. наз. вертикально-сдвиговая неустойчивость) с последующим переходом ламинарного потока в турбулентное состояние. При этом определяющую роль в турбулизации играют параметры фонового потока, в первую очередь вертикальный сдвиг скорости вращения. Все предшествующие исследования проводились для крайне простых моделей ламинарного потока. В настоящем докладе рассматривается способ построения более реалистичного ламинарного бароклинного диска и исследуются его основные свойства. Данный метод построения может быть применён для более полного исследования зависимости вертикально сдвиговой неустойчивости и связанной с ней турбулентности от свойств фонового потока.

Почему бароклинный поток трудно построить?

Проблема в построении осесимметричного бароклинного потока идеальной жидкости заключается в недостатке информации. Известно лишь то, что поток находится в динамическом равновесии, т. е. гравитация центрального тела уравнивается градиентом давления и вращением:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\rho r G M}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + \rho r \Omega^2$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\rho z G M}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

В эту систему уравнений входят три неизвестные величины: плотность, давление и скорость вращения потока. Очевидно, что найти все три неизвестные функции из системы уравнений невозможно.

Поэтому для построения решения необходимо постулировать дополнительные условия. Для баротропных потоков в литературе, как правило, задают закон вращения $\Omega(r)$ и уравнение состояния. Удобство такого задания состоит в том, что по виду закона вращения можно предсказать некоторые свойства итогового потока, например устойчивость по Рэлею, а также легко получить распределения прочих искомым величин.

Но если задача состоит в построении бароклинного потока, то скорость вращения должна быть уже функцией обеих координат, что делает невозможным как аналитическое интегрирование, так и предсказание свойств итогового потока. По этой причине стандартным на сегодняшний день методом построения бароклинных потоков является произвольный выбор распределения давления, плотности, энтропии или температуры в плоскости $r - z$ с последующим вычислением прочих функций из уравнения равновесия. При этом предсказание свойств потока по виду постулированной функции остаётся нетривиальной задачей, которая дополнительно осложняется тем, что эта функция должна зависеть от обеих координат. Выбранная функция должна порождать поток со следующими свойствами: во-первых, поверхности нулевого давления и нулевой плотности должны совпадать (добиться этого не так просто, и в некоторых работах исследовались бароклины, где это условие нарушено); во-вторых, бароклинность потока должна быть значительной (о количественном измерении бароклинности будет сказано ниже); и, наконец, в-третьих, поток должен быть устойчив по отношению к осесимметричным возмущениям, согласно критерию Хейланда-Зольдберга. Данная работа является первой, где все эти три условия удалось выполнить одновременно.

Метод построения

Ключевая идея метода состоит в том, чтобы искать бароклинное решение уравнения равновесия как сумму баротропных решений (впервые такой приём был использован в работе Amendt, P.; Lanza, A. & Abramowicz, M. A., 1989. В представленной работе метод был существенно модифицирован). В качестве примера возьмём семейство баротропных решений с адиабатическим уравнением состояния и законом вращения $\Omega \sim r^{-q_i}$, где параметр q_i принимает значения от 1.5 до 2.

$$p = \sum_{i=1}^N \beta_i p_i$$

В качестве функции распределения давления по плоскости $r - z$ в бароклине рассмотрим сумму давлений баротропных решений с весами β_i .

Найти аналитические профили распределения плотности и угловой скорости вращения по известному p не трудно (в уравнениях опущены все размерные константы):

$$\rho \sim \sum_{i=1}^N \beta_i \rho_i, \quad \Omega^2 \sim \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^N \beta_i \rho_i r^{-2q_i}$$

Эти функции полностью определяют бароклинный поток. При этом итоговый поток автоматически получает совпадающие поверхности нулевой плотности и нулевого давления, а варьируя веса β_i , можно получить конфигурации, устойчивые по критерию Хейланда и Зольдберга.

Результаты

Для иллюстрации метода в правой колонке приведены профили некоторых величин для одной из полученных бароклин.

В качестве характеристики степени бароклинности потока используется функция:

$$G^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \int \rho \frac{\nabla p \cdot \nabla \rho}{|\nabla p| |\nabla \rho|} dr dz \right) \left(\int \rho dr dz \right)^{-1}$$

Для баротропного потока G в точности равно нулю, а для предельно бароклинного $G = 1$. В приведённом примере $G = 0.26$.

Для характеристики градиентов угловой скорости удобно использовать факторы радиального и вертикального сдвига:

$$q_r = -\frac{r}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial r}, \quad q_z = -\frac{r}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

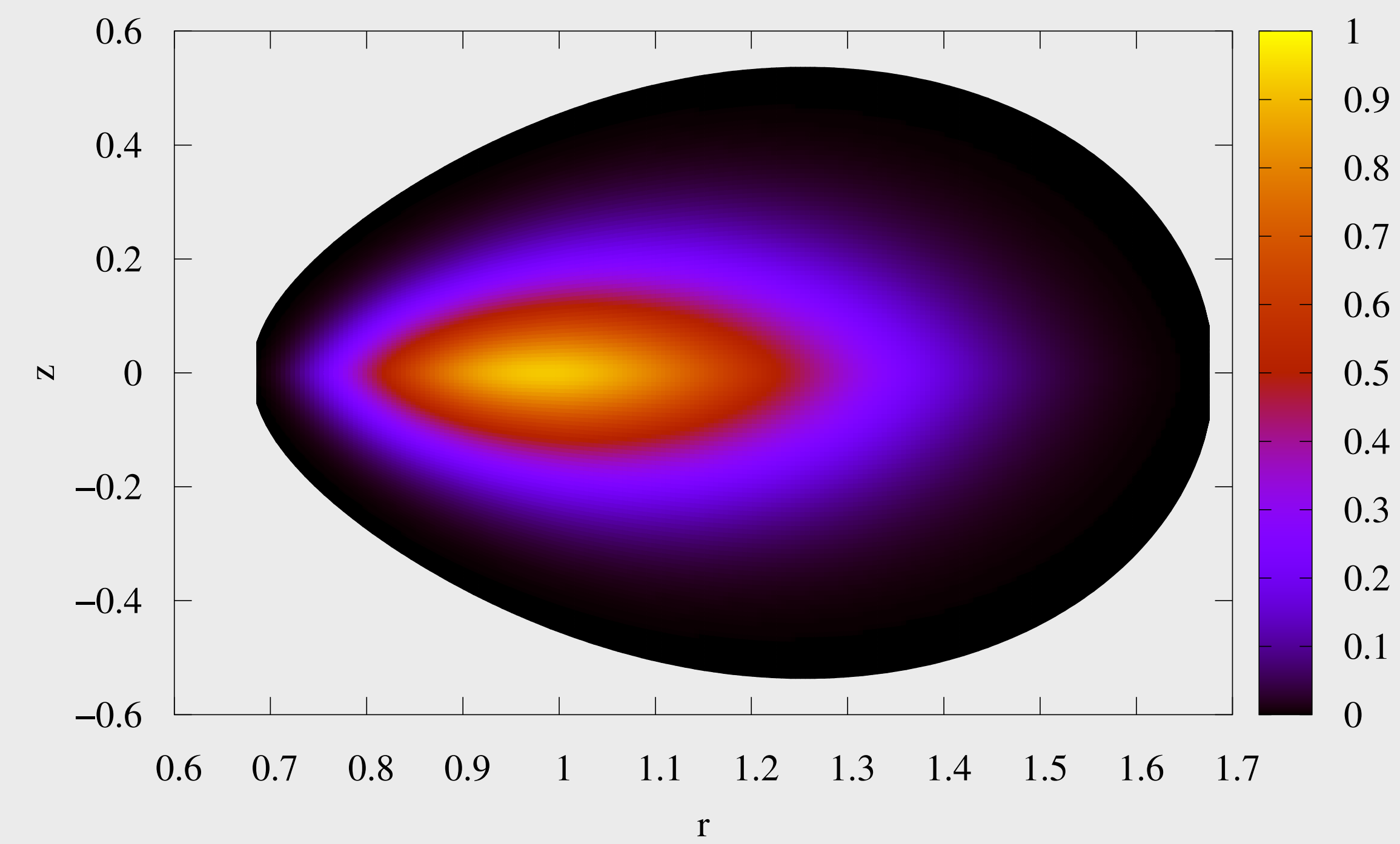
Для баротропного потока с кеплеровским законом вращения $q_r = 3/2$, $q_z = 0$, для изомоментного потока $q_r = 2$, $q_z = 0$. Нестратифицированные потоки с $q_r > 2$ не устойчивы по критерию Рэлея, однако градиент энтропии может играть стабилизирующую роль. В представленном примере в некоторых областях $q_r > 3$, однако поток остаётся устойчивым.

Также стоит обратить внимание, что фактор вертикального сдвига в полученной бароклине сравним с радиальным.

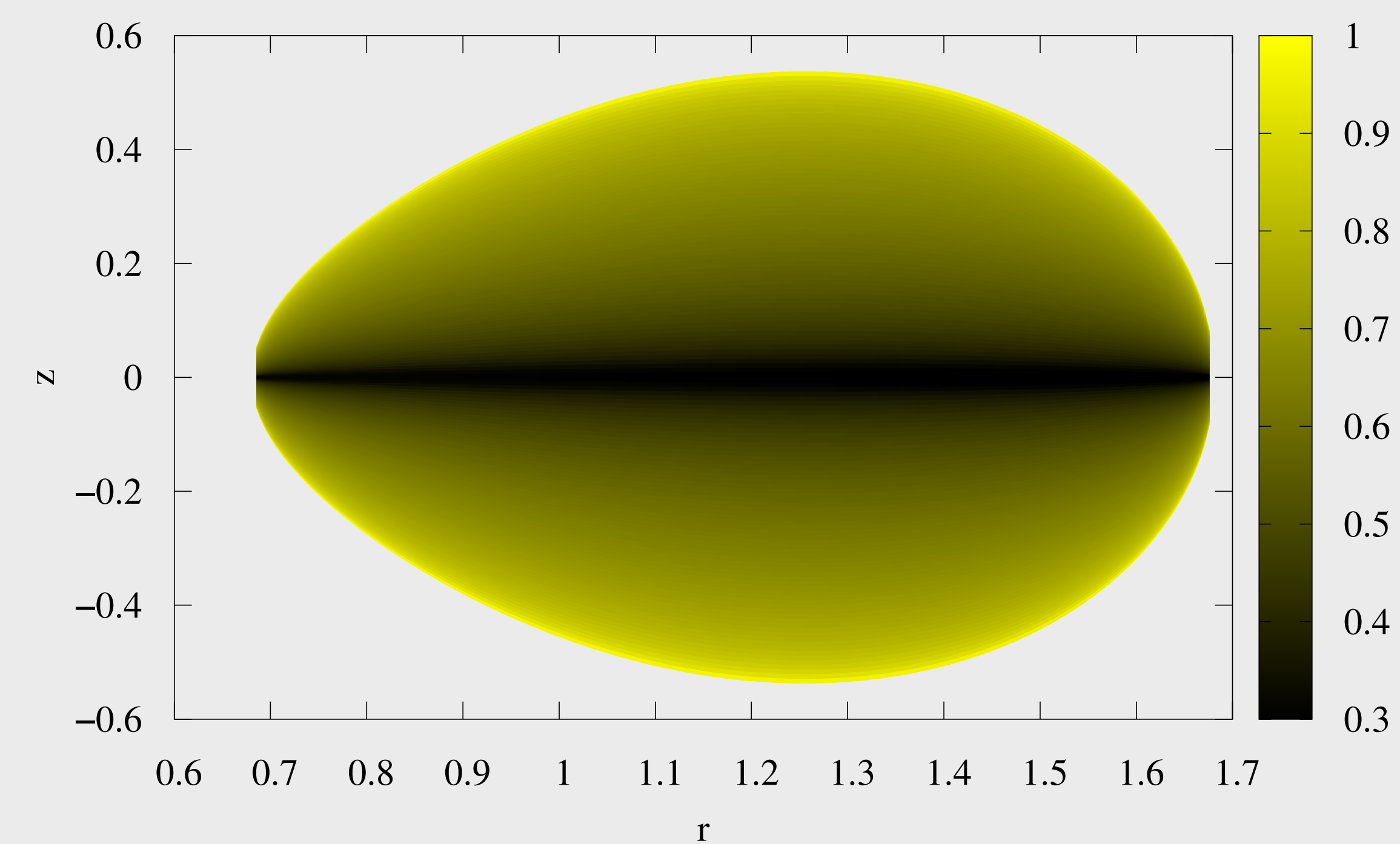
Таким образом, представленный метод позволяет строить устойчивые по отношению к осесимметричным возмущениям бароклинные потоки со сложной структурой и значительными показателями бароклинности и вертикального сдвига. Полученные бароклинные решения будут полезны при исследовании зависимости вертикально-сдвиговой неустойчивости и неустойчивостей, приводимых в действие градиентом энтропии от свойств фонового течения.

Профили величин в плоскости $r - z$

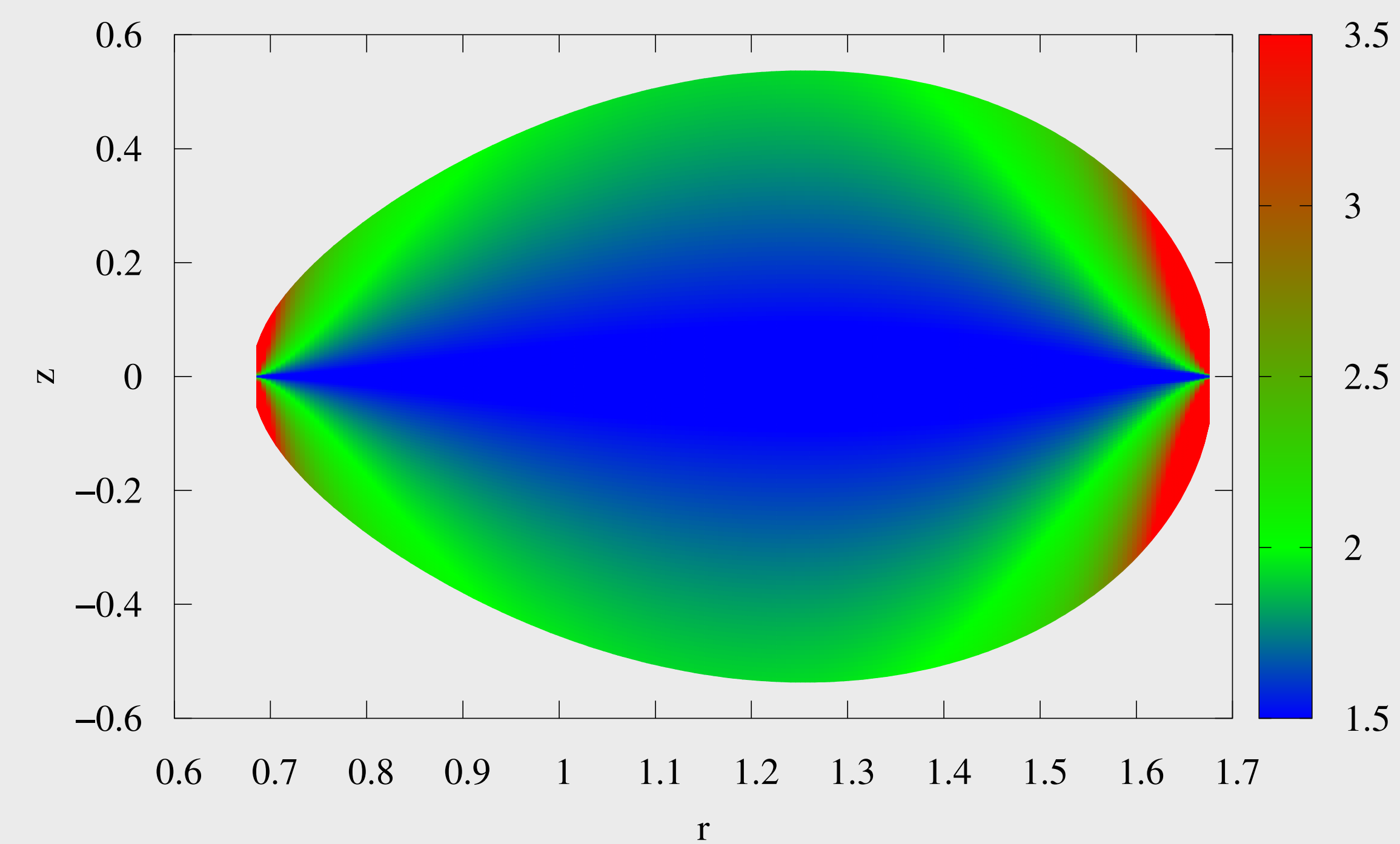
Давление p :



Энтропия s :



Фактор радиального сдвига q_r :



Фактор вертикального сдвига q_z :

