Теорема 2. *На всякой поверхности вращения типа сферы в целом с C^1-гладким и кусочно C^2-гладким меридианом вне полюсов интегральная кривизна поверхности равна 4π.*

Рассмотрим теперь случай кусочно C^1-гладкого меридиана, гладкие куски которого являются кусочно C^2-гладкими дугами. Пусть непрерывный меридиан длины L состоит из n гладких дуг, и пусть их концевым точкам соответствуют последовательные значения длины: $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_i < \ldots < \sigma_n = L$. Обозначим предельные значения производной $x'(\sigma)$ в точках σ_i как

$$x'(\sigma_i - 0) = \lim_{\sigma \to \sigma_i - 0} x'(\sigma) \quad \text{и} \quad x'(\sigma_i + 0) = \lim_{\sigma \to \sigma_i + 0} x'(\sigma)$$

(аналогично определяются и значения второй компоненты $z'(\sigma)$ единичного вектора касательной, и хотя для дальнейших вычислений они не нужны, но при наглядном представлении рассуждений полезно иметь в виду, что два вектора касательной, исходящие из угловой точки кривой со значением длины $\sigma = \sigma_i$, должны располагаться согласованно с направлением обхода кривой). По формуле (19) интеграл от кривизны поверхности равен сумме

$$2\pi[(x'(0) - x'(\sigma_1 - 0)) + (x'(\sigma_1 + 0) - x'(\sigma_2 - 0)) + \ldots + (x'(\sigma_{n-1} + 0) - x'(L - 0))] =$$
$$= 2\pi[x'(0) + (x'(\sigma_1{+}0) - x'(\sigma_1 - 0)) + \ldots + (x'(\sigma_{n-1} + 0) - x'(\sigma_{n-1} - 0)) - x'(L - 0)].$$

Видим, что в случае отсутствия угловых точек формула совпадает с формулой (20), а при наличии угловых точек интегральная кривизна зависит от величины и знака раствора углов. Здесь возможно, что в случае наличия самопересечения меридиана исследование вопроса о величине интегральной кривизны поверхности вращения может выйти на связь с вопросом о сумме углов многоугольника с самопересечениями, изученным в [6].

Считаю своим приятным долгом поблагодарить А. Н. Швеца за техническую помощь в оформлении статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chern Shiing-Shen.* An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface // Proc. Amer. Math. Soc. AMS. 1955. **6**, N 5. 771–782 (DOI: 10.2307/2032933, JSTOR 2032933).
2. *Bers L.* Riemann Surfaces. New York: New York University, Institute of Math. Sciences, 1957–1958. 15–35.
3. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: ГФМЛ, 1959.
4. *Норден А.П.* Теория поверхностей. М.: ГИТТЛ, 1956.
5. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. М.: ГИТТЛ, 1956.
6. *Сабитов И.Х.* Чему равна сумма углов многоугольника? М.: Изд-во Моск. ун-та, 2020.

Поступила в редакцию
30.04.2024

УДК 517.925.5

ПРИМЕРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С КОНТРАСТНЫМИ СОЧЕТАНИЯМИ РАДИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ

А. А. Бондарев[1]

На конкретных примерах доказано, что из наличия у неодномерной автономной нелинейной дифференциальной системы радиальных свойств устойчивости, асимптотической устойчивости или полной неустойчивости (ляпуновского, перроновского или верхнепредельного типа) вдоль каждого луча, выходящего из нуля, вообще говоря, не следует наличие у нее устойчивости, асимптотической устойчивости или соответственно полной неустойчивости того же типа.

[1] *Бондарев Алексей Андреевич* — асп. каф. дифференциальных уравнений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: albondarev1998@yandex.ru.

Bondarev Aleksei Andreevich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Equations.

Ключевые слова: дифференциальная система, нелинейная система, устойчивость по Ляпунову, устойчивость по Перрону, верхнепредельная устойчивость, радиальная устойчивость, почти устойчивость, асимптотические свойства решений.

Using specific examples, it is proved that the presence of radial stability, asymptotic stability or complete instability (of any type: Lyapunov, Perron or upper-limit) properties of a non-one-dimensional autonomous nonlinear differential system, along each ray starting from zero, generally speaking, does not imply the presence of stability, asymptotic stability or, accordingly, complete instability of the same type.

Key words: differential system, nonlinear system, Lyapunov stability, Perron stability, upper-limit stability, radial stability, almost stability, asymptotic properties of solutions.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-66-2-6

Введение. Настоящая работа посвящена исследованию реализуемости на конкретных дифференциальных системах контрастных сочетаний свойств классической устойчивости по Ляпунову [1, 2] и недавно введенных перроновской [3] и верхнепредельной [4] устойчивостей.

Некоторые исследования автора таких сочетаний для неавтономных систем содержатся в публикациях [5–10]. Наиболее логически сильные результаты представлены в работе [10], в которой конструктивно построены примеры многомерных дифференциальных систем со следующими наборами свойств:

ляпуновской крайней неустойчивостью [11], но *перроновской* и *верхнепредельной глобальными устойчивостями*;

и ляпуновской, и *перроновской*, и *верхнепредельной крайними неустойчивостями*, но *перроновской* и *верхнепредельной массивными частными устойчивостями* [12].

Исследования же подобных контрастных сочетаний свойств устойчивости и неустойчивости для автономных систем представлены в работах [13, 14], в последней из которых предъявлена система, обладающая следующими свойствами:

с одной стороны, имеются перроновская и верхнепредельная массивные частные устойчивости;

с другой стороны, *меры устойчивости* и *неустойчивости* [15] (всех трех типов: ляпуновского, перроновского и верхнепредельного [16]) равны соответственно нулю и единице.

Целью настоящей работы является исследование сочетаний еще нескольких недавно введенных разновидностей устойчивостей и неустойчивостей ляпуновского, перроновского и верхнепредельного типов, а именно *радиальных* и их логически усиленных модификаций — *общерадиальных* [17, 18] (см. также исследование [19] для случая двумерных систем).

1. Основные понятия. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (с нормой $|\cdot|$ и мерой Лебега mes) рассматриваем автономные системы вида

$$\dot{x} = f(x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с правой частью f, удовлетворяющей условиям

$$f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad f(0) = 0,$$

обеспечивающим существование и единственность решений задач Коши и наличие нулевого решения. Обозначим через $\mathcal{S}_\delta(f)$ множество всех непродолжаемых ненулевых решений системы (1) с начальным значением $x(0) \in \mathring{B}_\delta \equiv \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x_0| \leqslant \delta\}$, а через $\mathcal{S}_{\delta,x_0}(f) \subset \mathcal{S}_\delta(f)$ — его подмножество, состоящее из решений, удовлетворяющих для единичного вектора $x_0 \in \mathbb{R}^n$ дополнительному условию $x(0) = cx_0$, где $0 < c \leqslant \delta$.

Определение 1 [16–18]. Скажем, что у системы (1) (а точнее, у ее нулевого решения, о чем мы для краткости далее не будем упоминать) имеется *ляпуновская, перроновская* или *верхнепредельная*:

1) *устойчивость*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta(f)$ удовлетворяет соответственно требованию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t)| \leqslant \varepsilon, \quad \varliminf_{t \to +\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon, \quad \varlimsup_{t \to +\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon \tag{2}$$

(которое считается невыполненным, в частности, если решение попросту определено не на всем луче $\mathbb{R}_+$);

2) *асимптотическая устойчивость*, если в *перроновском* или *верхнепредельном* случае существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta(f)$ удовлетворяет соответствующему требованию (2)

при $\varepsilon = 0$, а в *ляпуновском* — система обладает ляпуновской устойчивостью и верхнепредельной асимптотической устойчивостью;

3) *полная неустойчивость*, если существуют такие $\varepsilon, \delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta(f)$ не удовлетворяет соответствующему требованию (2);

4) *почти устойчивость*, *почти асимптотическая устойчивость* или *почти полная неустойчивость*, если соответствующие условия из пп. 1–3 настоящего определения выполнены, быть может, не для всех решений $x \in S_\delta(f)$, но хотя бы для тех, начальные значения $x(0)$ которых образуют в проколотом шаре $\mathring{B}_\delta$ подмножество полной меры mes;

5) *радиальные устойчивость, асимптотическая устойчивость* или *полная неустойчивость* в *направлении* единичного вектора $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если система обладает соответствующим свойством из пп. 1–3 настоящего определения с заменой в них всюду множества $S_\delta(f)$ множеством $S_{\delta,x_0}(f)$;

6) *общерадиальные устойчивость, асимптотическая устойчивость* или *полная неустойчивость*, если система обладает этим свойством в каждом направлении.

Определение 2. Также будем говорить, что у системы (1) имеется *перроновская* или *верхнепредельная*:

7) *частичная крайняя неустойчивость*, если для любого $\delta > 0$ существует решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$, удовлетворяющее требованию

$$\varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty \quad \text{или соответственно} \quad \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty \tag{3}$$

(которое считается выполненным, в частности, если решение определено не на всем луче $\mathbb{R}_+$).

Замечание 1. Приведенное в определении 2 свойство представляет собой разновидность крайней неустойчивости [11], а именно

усиленную тем, что предел (3) в ней даже бесконечен;

ослабленную тем, что требование (3) здесь выполнено не обязательно для всех решений $x \in S_\delta(f)$, но хотя бы для одного из них.

2. Полученные результаты. Наличие любого из введенных в пп. 1–3 определения 1 свойств у дифференциальной системы автоматически обеспечивает [17, 18] наличие у нее соответствующего одноименного общерадиального свойства из п. 6 этого же определения. Обратная же импликация, вообще говоря, не имеет места, как показывают контрастные примеры в нижеследующих теоремах.

Теорема 1. *Для каждого $n > 1$ существует система* (1) *с нулевым линейным приближением* (*вдоль нулевого решения*)*, которая одновременно*

обладает общерадиальной асимптотической устойчивостью всех трех типов;

обладает перроновской и верхнепредельной частичными крайними неустойчивостями;

не обладает почти устойчивостью никакого типа.

Теорема 2. *Для каждого $n > 1$ существует система* (1) *с нулевым линейным приближением* (*вдоль нулевого решения*)*, которая одновременно*

обладает общерадиальной полной неустойчивостью всех трех типов;

обладает перроновской и верхнепредельной частичными крайними неустойчивостями;

не обладает почти полной неустойчивостью никакого типа.

Теорема 3. *Для каждого $n > 1$ существует система* (1) *с нулевым линейным приближением* (*вдоль нулевого решения*)*, обладающая одновременно*

общерадиальной асимптотической устойчивостью всех трех типов;

перроновской и верхнепредельной частичными крайними неустойчивостями;

перроновской и верхнепредельной почти асимптотическими устойчивостями.

Замечание 2. Усилить теорему 3 добавлением в ее формулировку еще и ляпуновской почти асимптотической устойчивости не представляется возможным, поскольку из нее вытекает ляпуновская устойчивость (см. [16, теорема 3]), которая не реализуется в одновременном сочетании с перроновской частичной крайней неустойчивостью.

Замечание 3. В одномерном случае контрастные сочетания свойств устойчивости и неустойчивости, указанные в формулировках всех трех теорем 1–3, также не реализуются, поскольку при $n = 1$ из общерадиальной асимптотической устойчивости или полной неустойчивости какого-либо типа вытекает асимптотическая устойчивость или соответственно полная неустойчивость того же типа (см. [17, теорема 2]).

3. Доказательства теорем.

Доказательства теорем 1 и 2. На двумерной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами (x_1, x_2) рассмотрим автономную дифференциальную систему (ее фазовый портрет показан на рис. 1)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1\left(x_2^2 - x_1^4\right)\left(x_2^2 - 4x_1^4\right), \\ \dot{x}_2 = -2x_2\left(x_2^2 - x_1^4\right)\left(x_2^2 - 4x_1^4\right), \end{cases} \qquad x \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{4}$$

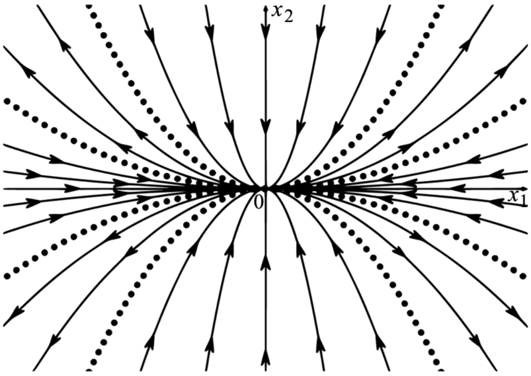

Рис. 1. Фазовый портрет системы (4)

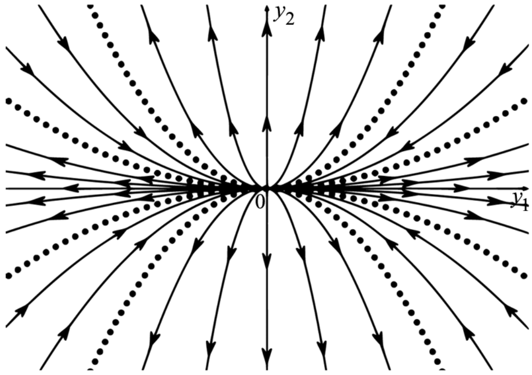

Рис. 2. Фазовый портрет системы (8) при $n = 2$

Каждое решение этой системы относится к одному из следующих трех типов:

1) параболы

$$x_2 = \pm x_1^2 \quad \text{и} \quad x_2 = \pm 2x_1^2, \quad x_1 \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

целиком заполнены неподвижными точками, поскольку каждая из таких точек обнуляет векторное поле системы (4);

2) фазовые кривые решений x, удовлетворяющих какому-либо из начальных условий $x_1(0) = 0$ или $x_2(0) = 0$, целиком лежат на осях координат x_2 и x_1 соответственно, причем на первой из них имеет место равенство $\dot{x}_2 = -2x_2^5$, а на второй — равенство $\dot{x}_1 = -4x_1^9$, из которых следует монотонное стремление таких решений к нулю при неограниченном росте времени;

3) фазовые кривые всех остальных решений x, т.е. удовлетворяющих сразу четырем начальным условиям $x_2(0) \neq \pm x_1^2(0)$, $x_2(0) \neq \pm 2x_1^2(0)$, $x_1(0) \neq 0$ и $x_2(0) \neq 0$ одновременно, представляют собой параболы вида

$$x_2 = Cx_1^2, \quad C \neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,$$

причем те из этих решений, которые соответствуют значениям констант $1 < |C| < 2$, стремятся по норме к бесконечности при неограниченном росте времени, а все остальные, наоборот, к нулю.

Покажем, что предъявленная двумерная автономная система (4) удовлетворяет всем условиям теоремы 1.

Во-первых, она обладает C^∞-гладкой правой частью и нулевым линейным приближением (вдоль нулевого решения), поскольку правая часть является многочленом (а следовательно, и бесконечно дифференцируемой функцией) и минимальная степень встречающихся в нем мономов равна пяти.

Во-вторых, каждый открытый луч $L_{x_0} \equiv \{cx_0 \mid c > 0\}$, выходящий из начала координат, либо не пересекает параболы (5) вовсе (и тогда он лежит целиком на одной из осей координат x_1, x_2), либо пересекает ровно две из этих парабол и притом по одному разу. Отсюда и из вышеизложенного описания качественного поведения всех решений системы (4) следует наличие у нее радиальной асимптотической устойчивости вдоль каждого ненулевого направления x_0, т.е. общерадиальной асимптотической устойчивости (и притом сразу всех трех типов: ляпуновского, перроновского и верхнепредельного).

В-третьих, каждое решение x с начальным значением $x(0) \in U \equiv U_+ \sqcup U_-$ в параболических кольцах

$$U_+ \equiv \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2(0) < x_2(0) < 2x_1^2(0)\right\}, \quad U_- \equiv \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid -2x_1^2(0) < x_2(0) < -x_1^2(0)\right\} \tag{6}$$

стремится по норме к бесконечности при неограниченном росте времени, откуда вытекает наличие у системы как перроновской, так и верхнепредельной частичной крайней неустойчивости.

В-четвертых, пересечение любого двумерного шара $\mathring{B}_\delta$ с областью U имеет непустую меру Лебега mes. Отсюда и из описания качественного поведения решений с начальным значением $x(0) \in U$ следует отсутствие у системы почти устойчивости всех трех типов.

Рассмотрим теперь при каждом натуральном $n > 1$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $y \equiv (y_1, \bar{y}) \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ дифференциальную систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1\left(|\bar{y}|^2 - y_1^4\right)\left(|\bar{y}|^2 - 4y_1^4\right), \\ \dot{y}_i = -2y_i\left(|\bar{y}|^2 - y_1^4\right)\left(|\bar{y}|^2 - 4y_1^4\right), \end{cases} \qquad i = 2, \ldots, n, \quad |\bar{y}|^2 \equiv y_2^2 + \ldots + y_n^2, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

которая, как и система (4), является системой вида (1) и обладает нулевым линейным приближением (вдоль нулевого решения), поскольку автономна, допускает нулевое решение и обладает C^∞-гладкой правой частью (являющейся векторным многочленом девятой степени от n переменных), причем минимальная степень встречающихся в ней мономов равна пяти.

Исследуем сначала ее решения y, удовлетворяющие начальному условию $y_3^2(0) + \ldots + y_n^2(0) = 0$. Двумерная плоскость

$$\Pi_0 \equiv \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_3 = \ldots = y_n = 0\}$$

инвариантна относительно системы (7), т.е. фазовые кривые рассматриваемых решений целиком лежат в плоскости Π_0. В этой плоскости система (7) имеет тот же вид, что и система (4), поэтому их качественное поведение в точности такое же, как и соответствующих решений системы (4).

Далее рассмотрим решения y, удовлетворяющие начальному условию $y_3^2(0) + \ldots + y_n^2(0) \neq 0$, которое эквивалентно существованию такого индекса i_0, что $y_{i_0}(0) \neq 0$ и $3 \leqslant i_0 \leqslant n$.

С помощью непосредственного интегрирования находим, что функции

$$\Psi_j(y) \equiv y_j / y_{i_0}, \quad j = 2, \ldots, n, \quad j \neq i_0,$$

постоянны вдоль решений y системы (7) (являются ее первыми интегралами), т.е.

$$y_j = C_j y_{i_0}, \quad C_j \in \mathbb{R}, \quad j = 2, \ldots, n, \quad j \neq i_0.$$

Подставив эти равенства в систему (7) и сделав замену переменных

$$z_j = y_j, \quad j = 1, \ldots, n, \quad j \neq i_0, \quad z_{i_0} = C_0 y_{i_0}, \quad C_0^2 \equiv 1 + \sum_{\substack{j=2,\\ j \neq i_0}}^{n} C_j^2, \quad C_0 > 0,$$

получим в двумерной плоскости

$$\Pi_{i_0} \equiv \left\{z \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; C_0 z_j = C_j z_{i_0},\, j = 2, \ldots, n,\, j \neq i_0\right\}$$

дифференциальную систему такого же вида, что и система (4).

В результате получим полное описание качественного поведения всех решений системы (7):

во-первых, фазовая кривая каждого ее решения является плоской и лежит либо в плоскости Π_0, либо в некоторой плоскости вида Π_{i_0}, либо во всех таких плоскостях сразу (для решений, удовлетворяющих начальному условию $y_2^2(0) + \ldots + y_n^2(0) = 0$);

во-вторых, в каждой такой плоскости имеются решения в точности трех типов: а) соответствующие (т.е. лежащие в плоскости вида Π_{i_0} или Π_0) параболы вида (5) целиком заполнены особыми точками; б) решения, начинающиеся внутри соответствующих параболических колец вида (6), стремятся по норме к бесконечности при неограниченном росте времени; в) все остальные решения, наоборот, монотонно стремятся к нулю при $t \to +\infty$.

Из вышесказанного следует, что система (7) обладает всеми свойствами, указанными в формулировке теоремы 1, а потому является искомой. Теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 2 следует лишь умножить всю правую часть системы (7) на минус единицу, т.е. рассмотреть систему (ее фазовый портрет при $n = 2$ представлен на рис. 2)

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1\left(|\bar{y}|^2 - y_1^4\right)\left(|\bar{y}|^2 - 4y_1^4\right), \\ \dot{y}_i = 2y_i\left(|\bar{y}|^2 - y_1^4\right)\left(|\bar{y}|^2 - 4y_1^4\right), \end{cases} \qquad i = 2, \ldots, n, \quad |\bar{y}|^2 = y_2^2 + \ldots + y_n^2, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

у которой направление движения вдоль каждой фазовой кривой (они, к слову, те же) противоположно направлению движения вдоль соответствующей фазовой кривой системы (7), и система (8) вместо общерадиальной асимптотической устойчивости обладает уже общерадиальной полной неустойчивостью (всех трех типов), но не обладает даже почти полной неустойчивостью (никакого типа) в силу качественного поведения ее решений в параболических кольцах вида (6). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. На двумерной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами (x_1, x_2) рассмотрим автономную дифференциальную систему (ее фазовый портрет показан на рис. 3)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1x_2^3, \\ \dot{x}_2 = x_2^4 - 3x_1^4, \end{cases} \qquad x \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{9}$$

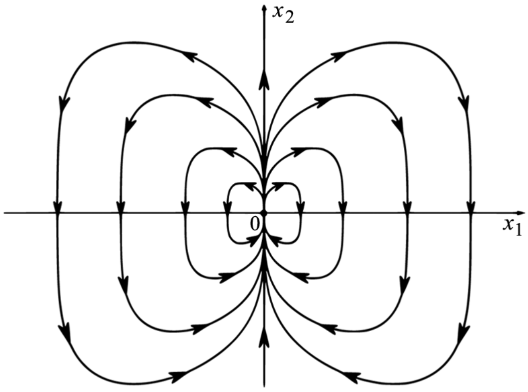

Рис. 3. Фазовый портрет системы (9)

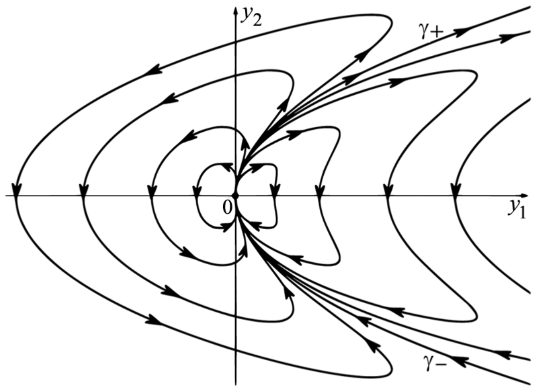

Рис. 4. Фазовый портрет системы (12)

Она является системой вида (1) и обладает нулевым линейным приближением (вдоль нулевого решения), поскольку ее правая часть является многочленом (а следовательно, и бесконечно дифференцируемой функцией) и минимальная степень встречающихся в нем мономов равна четырем.

Рассмотрим сначала ненулевые решения x, удовлетворяющие начальному условию $x_1(0) = 0$. Такие решения удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = x_2^4 > 0, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

следовательно, их фазовые кривые целиком лежат на оси координат x_2, причем те из этих решений, которые удовлетворяют еще и неравенству $x_2(0) > 0$, стремятся по норме к бесконечности при неограниченном росте времени, а все другие, наоборот, к нулю.

Для описания же качественного поведения остальных ненулевых решений системы (9) разделим ее второе уравнение на первое и получим в результате однородное дифференциальное уравнение относительно переменных x_1 и x_2, из которого после непосредственного интегрирования находим, что фазовыми кривыми рассматриваемой системы являются дуги кривых вида

$$K_C \equiv \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + x_2^4 = Cx_1\right\} \setminus \{(0,0)\}, \quad C \neq 0. \tag{10}$$

Их замыкания имеют ровно одну общую точку (в которой к тому же еще и касаются друг друга), а именно точку $(0, 0)$.

Предъявленная система (9) хоть и обладает почти устойчивостью (и перроновской, и верхнепредельной), но не обладает общерадиальной асимптотической устойчивостью никакого типа, поскольку решения x с начальным значением $x(0) \in L_e \equiv \left\{ce \mid c > 0\right\}$, $e \equiv (0, 1)^{\mathrm{T}}$, согласно вышесказанному, монотонно стремятся к бесконечности по норме при неограниченном росте времени.

Сделаем в системе (9) автономную замену переменных, заданную равенствами

$$y_1 \equiv x_1 + x_2^2, \quad y_2 \equiv x_2, \quad (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2, \tag{11}$$

в результате чего получим новую систему:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_2\left(2y_1y_2^2 - y_2^4 - 3\left(y_1 - y_2^2\right)^4\right), \\ \dot{y}_2 = y_2^4 - 3\left(y_1 - y_2^2\right)^4, \end{cases} \qquad y \equiv (y_1, y_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2, \tag{12}$$

фазовый портрет которой изображен на рис. 4.

Лучи L_e и L_{-e} при таком преобразовании переходят соответственно в фазовые кривые

$$\gamma_+ \equiv \left\{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 = y_2^2,\ y_2 > 0\right\} \quad \text{и} \quad \gamma_- \equiv \left\{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 = y_2^2,\ y_2 < 0\right\}$$

системы (12), а фазовые кривые всех остальных ненулевых решений системы (12) (т.е. являющиеся результатом искривления преобразованием (11) дуг (10)) касаются кривых γ_+ и γ_- в нуле.

Покажем, что построенная таким образом двумерная автономная система (12) удовлетворяет всем условиям теоремы 3.

Во-первых, она обладает C^∞-гладкой правой частью и нулевым линейным приближением (вдоль нулевого решения), поскольку ее правая часть является многочленом (а следовательно, и бесконечно дифференцируемой функцией) и минимальная степень встречающихся в нем мономов равна четырем.

Во-вторых, преобразование (11) переводит фазовые кривые (10) системы (9) в фазовые кривые

$$\tilde{K}_C \equiv \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(y_1 - y_2^2\right)^4 + y_2^4 = C\left(y_1 - y_2^2\right)\right\} \setminus \{(0,0)\}, \quad C \neq 0,$$

каждая из которых

в объединении с началом координат представляет собой простую замкнутую кривую;

либо не пересекает лучи L_e и L_{-e} вовсе (такие кривые соответствуют значениям констант $C > 0$), либо пересекает каждый из них и притом ровно по одному разу (а такие кривые — значениям $C < 0$) в некоторых точках вида $(0, \pm a(C))^{\mathrm{T}}$, $a(C) > 0$, соответственно.

Отсюда и из равенств нулю пределов

$$\lim_{C\to 0} \operatorname{diam} K_C = 0, \quad \lim_{C\to 0} \operatorname{diam} \tilde{K}_C = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{C\to 0} a(C) = 0, \tag{13}$$

где $\operatorname{diam} S$ обозначает диаметр множества S, т.е. $\operatorname{diam} S \equiv \sup\limits_{a,b\in S} \operatorname{dist}(a,b)$, а $\operatorname{dist}(a,b)$ — расстояние между точками a и b, вытекает наличие у системы ляпуновской радиальной асимптотической устойчивости вдоль направлений векторов e и $-e$.

Перроновская и верхнепредельная радиальные асимптотические устойчивости вдоль этих направлений также имеют место в силу стремления к нулю при неограниченном росте времени всех решений y с начальным значением $y(0) \notin \gamma_+$ системы (12).

В-третьих, для каждого открытого луча L_{y_0}, выходящего из начала координат, существует шар $\mathring{B}_\delta$, такой, что все решения y с начальным значением $y(0) \in L_{y_0} \cap \mathring{B}_\delta$ стремятся к нулю при неограченном росте времени. Более того, из равенств (13) вытекает, что величина максимального по t и равномерного по всем решениям с начальными значениями $y(0) \in L_{y_0} \cap \mathring{B}_\delta$ отдаления их от нуля стремится к нулю при $\delta \to 0$, т.е.

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{y(0)\in L_{y_0}\cap \mathring{B}_\delta} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |y(t)| = 0.$$

Из вышесказанного следует наличие у системы и ляпуновской, и перроновской, и верхнепредельной радиальной асимптотической устойчивости вдоль каждого ненулевого направления y_0, т.е. общерадиальной асимптотической устойчивости всех трех типов.

В-четвертых, каждое решение y с начальным значением $y(0) \in \gamma_+$ стремится по норме к бесконечности при неограниченном росте времени, следовательно, система обладает как перроновской, так и верхнепредельной частичной крайней неустойчивостью.

В-пятых, для системы имеют место и перроновская, и верхнепредельная почти асимптотическая устойчивости, поскольку для каждого $\delta > 0$ мера Лебега mes начальных значений $y(0) \in \mathring{B}_\delta$ решений y, не стремящихся к нулю при $t \to +\infty$, равна нулю (такие решения суть в точности решения с начальными значениями $y(0) \in \gamma_+ \cap \mathring{B}_\delta$).

Рассмотрим теперь при каждом натуральном $n > 1$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $z \equiv (z_1, \ldots, z_n)$ дифференциальную систему

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 2z_2\left(2z_1z_2^2 - z_2^4 - 3\left(z_1 - z_2^2\right)^4\right), \\ \dot{z}_2 = z_2^4 - 3\left(z_1 - z_2^2\right)^4, \\ \dot{z}_i = -z_i^3, \end{cases} \qquad i = 3, \ldots, n, \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{14}$$

которая в случае размерности $n = 2$ совпадает с системой (12) с точностью до переобозначения переменных y, y_1 и y_2 в z, z_1 и z_2 соответственно.

Коль скоро правые части уравнений $\dot{z}_i = -z_i^3$, $i = 3, \ldots, n$, суть многочлены третьей степени, их добавление (фактически к системе (12)), во-первых, не уменьшает гладкости системы, а во-вторых, не меняет линейного приближения вдоль нулевого решения.

Из исследованного ранее качественного поведения всех решений системы (12) и монотонного стремления к нулю добавленных $n-2$ координат $z_3,\ldots,z_n$ (некоторые из которых могут быть даже тождественно равны нулю) решений системы (14) вытекает, что построенная таким образом n-мерная система обладает всеми свойствами, указанными в формулировке теоремы 3:

общерадиальной асимптотической устойчивостью (всех трех типов);

частичной крайней неустойчивостью (и перроновской, и верхнепредельной), поскольку решения z, удовлетворяющие одновременно начальным условиям $z_3^2(0)+\ldots+z_n^2(0)=0$ и $(z_1(0),z_2(0))^{\mathrm{T}}\in\gamma_+$, стремятся по норме к бесконечности при неограниченном росте времени;

перроновской и верхнепредельной почти асимптотическими устойчивостями, поскольку мера Лебега mes начальных условий не стремящихся при $t\to+\infty$ к нулю (и уже упомянутых в предыдущем пункте) решений равна нулю. Теорема 3 доказана.

Автор приносит благодарность профессору И. Н. Сергееву за ценные замечания, способствовавшие значительному улучшению текста работы.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект № 22–8–10–3–1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
2. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
3. *Сергеев И.Н.* Определение устойчивости по Перрону и ее связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. **54**, № 6. 855–856.
4. *Сергеев И.Н.* Определение верхнепредельной устойчивости и ее связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. **56**, № 11. 1556–1557.
5. *Бондарев А.А.* Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2021. № 2. 43–47.
6. *Бондарев А.А.* Существование вполне неустойчивой по Ляпунову дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2022. **58**, № 2. 147–152.
7. *Бондарев А.А.* О существовании дифференциальной системы с ляпуновской глобальной неустойчивостью, все решения которой стремятся к нулю при неограниченном росте времени // Дифференц. уравнения. 2022. **58**, № 8. 1011–1019.
8. *Bondarev A.A.* An example of contrasting combination to stability and instability properties in even-dimensional spaces // Mem. Diff. Equations Math. Phys. 2022. **87**. 25–36.
9. *Бондарев А.А., Сергеев И.Н.* Примеры дифференциальных систем с контрастными сочетаниями ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2022. **506**. 25–29.
10. *Бондарев А.А.* Два контрастных примера многомерных дифференциальных систем с ляпуновской крайней неустойчивостью // Матем. заметки. 2024. **115**, № 1. 24–42.
11. *Сергеев И.Н.* Определение и свойства крайней неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2023. **59**, № 6. 858–859.
12. *Сергеев И.Н.* Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2021. **57**, № 11. 1576–1578.
13. *Сергеев И.Н.* Примеры автономных дифференциальных систем с контрастными сочетаниями мер ляпуновской, перроновской и верхнепредельной устойчивости // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2024. № 1. 50–54.
14. *Бондарев А.А.* Многомерная автономная дифференциальная система, обладающая единичной мерой неустойчивости, но массивной частной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2024. **60**, № 8. 1011–1020.
15. *Сергеев И.Н.* Определение мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2023. **59**, № 6. 851–852.
16. *Сергеев И.Н.* О перроновских, ляпуновских и верхнепредельных свойствах устойчивости дифференциальных систем // Тр. семинара имени И.Г. Петровского. 2023. **33**. 353–423.
17. *Сергеев И.Н.* Связь между устойчивостью и радиальной устойчивостью дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2024. **60**, № 11. 1572–1573.
18. *Сергеев И.Н.* Радиальная устойчивость и неустойчивость дифференциальной системы // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2025. № 2. 83–88.
19. *Бондарев А.А.* Три контрпримера двумерных автономных дифференциальных систем с тотальными радиальными свойствами // Дифференц. уравнения. 2024. **60**, № 11. 1573–1574.

Поступила в редакцию
06.09.2024