ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2014, том 50, № 11, с. 1471–1476

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

ОБРАЩЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ СКОЛЬЗЯЩИХ РЕЖИМОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

© 2014 г. Д. А. Васин, А. В. Ильин, В. В. Фомичев

Рассматривается задача обращения динамической системы, т.е. задача восстановления неизвестного входа системы по измеряемому выходу. Для формирования непрерывной оценки неизвестного входа предлагается использовать управляемую модель системы, управление которой строится с использованием скользящих режимов высших порядков.

DOI: 10.1134/S0374064114110053

1. Введение. Постановка задачи. Пусть задана линейная стационарная динамическая система
$$\dot{x} = Ax + b\xi, \quad y = cx, \tag{1}$$
где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – неизвестный фазовый вектор системы, $y(t) \in \mathbb{R}$ – измеряемый выход, $\xi(t) \in \mathbb{R}$ – неизвестный вход системы; A, b, c – постоянные известные матрицы соответствующих размерностей. Требуется по измеряемому выходу $y(t)$ в режиме реального времени построить оценку $\tilde{\xi}(t)$, приближающую неизвестный вход $\xi(t)$ либо асимптотически (т.е. $|\xi(t) - \tilde{\xi}(t)| \to 0$ при $t \to \infty$), либо с наперед заданной точностью (т.е. для заданного $\varepsilon > 0$ существует момент времени t^* такой, что $|\xi(t) - \tilde{\xi}(t)| \le \varepsilon$ при $t > t^*$). При этом требуется, чтобы оценка непрерывного сигнала $\xi(t)$ была также непрерывной.

Задачам обращения посвящено большое число работ (см., например, [1–9]). Одним из эффективных подходов к решению этой задачи является метод управляемой модели, когда для построения оценки $\tilde{\xi}(t)$ берется управляемая модель системы (1), т.е.
$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + bu, \quad \tilde{y} = c\tilde{x}, \tag{2}$$
где управление $u(t)$ направлено на стабилизацию в нуле системы в отклонениях для $e(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$ с измеряемым выходом $\varepsilon(t) = \tilde{y}(t) - y(t)$, т.е.
$$\dot{e} = Ae + b(u - \xi), \quad \varepsilon = ce. \tag{3}$$

В случае стабилизации системы (3) при определенных условиях управление $u(t)$ близко к неизвестному входу $\xi(t)$, а информация об $u(t)$ может быть использована для построения оценки $\tilde{\xi}(t)$. Алгоритм обращения при этом определяется методом стабилизации, а также дальнейшей обработкой (фильтрацией) управления $u(t)$.

Так, в работах [8, 9] использовалось кусочно-постоянное управление, выбираемое из условия минимизации невязки.

В работах [1–7] использовалось разрывное управление, стабилизирующее систему (3) с применением скользящего режима первого порядка. Поскольку при этом само управление было разрывно, то для построения непрерывной оценки необходимо было использовать фильтр для сглаживания управления $u(t)$, в частности, "скользящее среднее", при этом ошибка оценивания с некоторого момента времени становится меньше $\xi^1 T/2$, где $\xi^1 \ge |\dot{\xi}(t)|$, $T > 0$ – параметр фильтра. Таким образом, погрешность метода определялась значением параметра T и может быть сделана меньше $\varepsilon > 0$ при уменьшении T. Однако уменьшение T влечет за собой увеличение чувствительности метода к высокочастотным помехам.

Основная цель данной работы – применить для решения задачи методы стабилизации системы с помощью скользящих режимов высших порядков, что позволяет конструировать непрерывные управления $u(t)$ и не использовать дополнительную фильтрацию.

2. Условия обратимости системы. Далее будем считать, что для системы (1) выполнены следующие условия.

Условие 1. Система (1) управляема и наблюдаема, т.е. находится в общем положении.

Для системы (1) определим передаточную функцию

$$W(s) = c(sI - A)^{-1}b.$$

Тогда передаточная функция скалярной системы (т.е. системы со скалярным входом и скалярным выходом) может быть представлена в виде отношения двух полиномов: $W(s) = \beta(s)/\alpha(s)$. Условие 1 эквивалентно взаимной простоте этих полиномов. Относительно входа будем считать, что выполнено

Условие 2. Функция $\xi(t)$ принадлежит множеству

$$\Omega^1 = \{\xi(t):\ \xi(t) \in C^1[0, +\infty),\ |\xi(t)| \le \xi^0,\ |\dot{\xi}(t)| \le \xi^1\}$$

(т.е. далее считаем, что неизвестный вход – гладкая функция, ограниченная вместе со своей первой производной на всем промежутке времени).

Для асимптотической разрешимости задачи обращения требуется, чтобы нулевому выходу системы (1) соответствовал вход $\xi(t) \to 0$ при $t \to \infty$ (т.е. чтобы ядро оператора $P\xi(t) = y(t)$, отображающего функцию $\xi(t)$ в $y(t)$, содержало только убывающие функции $\xi(t)$). Это гарантирует

Условие 3. Инвариантные нули системы (1) лежат в $\mathbb{C}_-$.

Под *инвариантными нулями* понимаются нули числителя передаточной функции $\beta(s)$, т.е. условие 3 означает, что полином $\beta(s)$ гурвицев. В этом случае ядро оператора P содержит функции $\xi(t)$, являющиеся решениями дифференциального уравнения $\beta\left(\dfrac{d}{dt}\right)\xi(t) = 0$, поэтому $\xi(t) \to 0$ экспоненциально (при условии $y(t) \equiv 0$).

Инвариантные нули также могут быть найдены как значения s, при которых понижается ранг матрицы Розенброка

$$R(s) = \left[\begin{array}{c|c} sI - A & -b \\ \hline c & 0 \end{array}\right] \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}, \tag{4}$$

т.е. такие s^*, что $\operatorname{rank} R(s^*) < n + 1$. Для скалярной системы $\det R(s) = \beta(s)$.

3. Алгоритм обращения. Перейдем теперь непосредственно к решению задачи обращения системы (1). Для этого, как указано выше, используем управляемую модель системы. Однако для удобства дальнейших исследований приведем сначала систему (1) к каноническому виду, а затем будем строить управляемую модель уже для этого вида. Пусть система (1) для простоты имеет первый относительный порядок, т.е. выполнено условие $cb \ne 0$ (это условие эквивалентно условию $\deg \beta(s) = n - 1$). Далее считаем, что $cb = 1$, этого всегда можно добиться нормировкой выхода.

Тогда невырожденным преобразованием координат система (1) приводится к виду с выделением нулевой динамики [6, с. 87]

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2, \\
&\ldots \\
&\dot{x}_{n-1} = -\beta_1 x_1 - \ldots - \beta_{n-1} x_{n-1} + y, \\
&\dot{y} = -\bar{a}_1 x_1 - \ldots - \bar{a}_{n-1} x_{n-1} - \bar{a}_n y + \xi(t),
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
&\beta(s) = \beta_1 + \beta_2 s + \ldots + \beta_{n-1}s^{n-2} + s^{n-1},\\
&\alpha(s) = \alpha_1 + \alpha_2 s + \ldots + \alpha_{n-1}s^{n-2} + \alpha_n s^{n-1} + s^n,\\
&\alpha(s) = \varphi_1(s)\beta(s) + \psi_{n-2}(s),\\
&\varphi_1(s) = s + \bar{a}_n,\\
&\psi_{n-2}(s) = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 s + \ldots + \bar{a}_{n-1}s^{n-2},
\end{aligned}$$

т.е. коэффициенты системы (5) являются коэффициентами полинома $\beta(s)$ и полиномов $\varphi_1(s)$ и $\psi_{n-2}(s)$ – частного и остатка деления $\alpha(s)$ на $\beta(s)$. При этом в системе (5) в явном виде присутствует измеряемый выход системы $y(t)$. Первые же $n-1$ уравнения системы (5) при $y(t)\equiv 0$ описывают нулевую динамику системы, которая в силу условия 3 устойчива. В этом случае для этих уравнений системы (5) можно построить наблюдатель

$$\begin{aligned}
&\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2,\\
&\ldots\\
&\dot{\tilde{x}}_{n-2} = \tilde{x}_{n-1},\\
&\dot{\tilde{x}}_{n-1} = -\beta_1\tilde{x}_1 - \ldots - \beta_{n-1}\tilde{x}_{n-1} + y,
\end{aligned} \tag{6}$$

который, по сути, является первой частью управляемой модели системы. Ошибка наблюдения $e(t) = (e_1(t),\ldots,e_{n-1}(t))$, где $e_i(t) = \tilde{x}_i(t) - x_i(t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\dot{e}_1 = e_2,\\
&\ldots\\
&\dot{e}_{n-2} = e_{n-1},\\
&\dot{e}_{n-1} = -\beta_1 e_1 - \ldots - \beta_{n-1}e_{n-1},
\end{aligned} \tag{7}$$

и в силу условия 3 $e(t)\to 0$ экспоненциально при $t\to\infty$.

Рассмотрим управляемую модель для последнего уравнения системы (1)

$$\dot{\tilde{y}} = -\bar{a}_1\tilde{x}_1 - \ldots - \bar{a}_{n-1}\tilde{x}_{n-1} - \bar{a}_n y + u. \tag{8}$$

Ошибка $\varepsilon(t) = \tilde{y}(t) - y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\varepsilon} = u - \sum_{i=1}^{n-1}\bar{a}_i e_i - \xi(t) = u - \Delta(t) - \xi(t), \tag{9}$$

где $\Delta(t) = \sum_{i=1}^{n-1}\bar{a}_i e_i \overset{\exp}{\to} 0$. Если обозначить $\tilde{\xi} = \xi(t) + \Delta(t)$, где $\xi(t)$ – ограниченный вместе с производной неизвестный вход (в силу условия 2 и сходимости $\Delta(t)$), то (9) представляет собой скалярное уравнение с ограниченной помехой $\tilde{\xi}(t)$ и управлением $u(t)$.

Для стабилизации ошибки $\varepsilon(t)$ можно использовать различные методы стабилизации систем в условиях неопределенности. В частности, в работах [1–7] для стабилизации системы (9) предлагалось использовать разрывное управление

$$u(t) = -\alpha\varepsilon - F\operatorname{sgn}(\varepsilon(t)), \quad \alpha > 0, \quad F > \xi^0. \tag{10}$$

При таком выборе параметров α и F в уравнении (9) за конечное время возникает скользящий режим первого порядка: $\varepsilon(t)\equiv 0$, $\dot{\varepsilon}(t)$ ограничена.

В качестве непрерывной оценки неизвестного входа $\xi(t)$ в этом случае взять $u(t)$ нельзя, а можно взять скользящее среднее для оценки $u(t)$ (см. [1–7]):

$$\tilde{\xi}(t) = \frac{1}{T}\int\limits_{t-T}^{t} u(\tau)\,d\tau. \tag{11}$$

Тогда с момента возникновения скользящего режима (см. [1]) для погрешности оценивания справедлива оценка

$$|\xi(t) - \tilde{\xi}(t)| \le K_0 e^{-\gamma t} + \frac{\xi^1 T}{2}, \tag{12}$$

где $K_0 = \text{const} > 0$ определяется параметрами системы и начальными условиями, а γ характеризует устойчивость полинома $\beta(s)$ (т.е. $\operatorname{Re}(s^*) < -\gamma < 0$ для всех s^*, для которых $\beta(s^*) = 0$). Ошибка может быть сделана меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ выбором параметра фильтра T.

Пример 1. Для простоты рассмотрим только последнее уравнение системы (5)

$$\dot{y} = \xi(t) \quad \text{при} \quad \xi(t) = \sin(t).$$

Управляемая модель имеет вид

$$\dot{\tilde{y}} = u(t), \quad u = -y - 2\operatorname{sgn}(y(t)).$$

Оценка определяется равенством

$$\tilde{\xi}(t) = \frac{1}{T} \int\limits_{t-T}^{t} u(\tau)\, d\tau, \quad T = 0.01.$$

Результаты моделирования приведены на рис. 1 (график управления $u(t)$ и $\xi(t)$) и рис. 2 (график оценки $\tilde{\xi}(t)$ и $\xi(t)$).

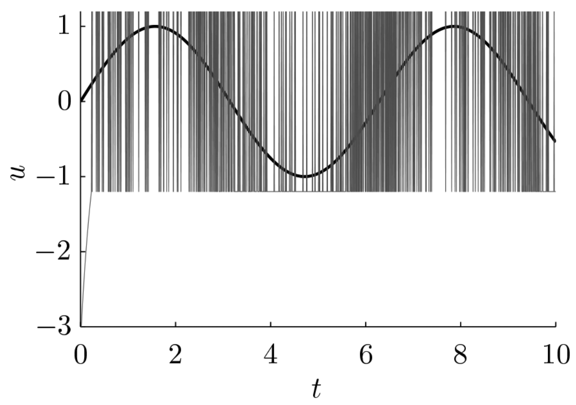

Рис. 1.

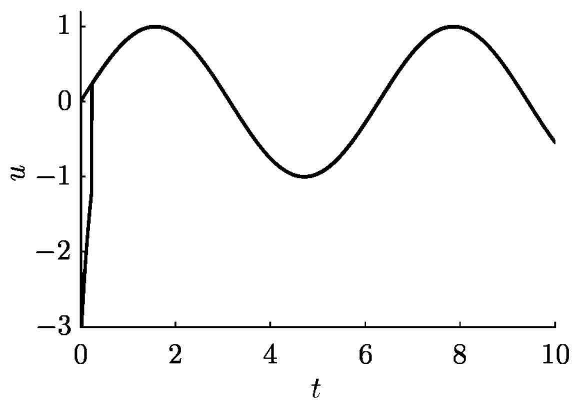

Рис. 2.

При реальном скользящем режиме с неидеальностями в переключениях типа петли гистерезиса либо зоны нечувствительности при управлении (10) возникает скользящий режим первого порядка, который определяется неравенством $|\varepsilon(t)| < \Delta$, где Δ характеризует величину неидеальностей. Общая погрешность (12) приобретает дополнительное слагаемое порядка Δ.

Дополнительной фильтрации можно избежать, если для стабилизации отклонения $\varepsilon(t)$ использовать скользящие режимы высших порядков. Теория таких режимов хорошо разработана (см., в частности, [10–12]).

Скользящий режим (по поверхности скольжения $\varepsilon \equiv 0$) произвольного порядка p характеризуется соотношениями

$$\varepsilon \equiv 0, \quad \dot{\varepsilon} \equiv 0, \ldots, \quad \varepsilon^{(p-1)} \equiv 0, \quad |\varepsilon^{(p)}| \le \text{const}\,.$$

При этом для системы с относительным порядком r может быть реализован скользящий режим порядка $p \ge r$ (см. [12]), а для рассматриваемой системы с первым относительным порядком – скользящий режим произвольного порядка (в том числе $p > 1$).

В случае скользящего режима претерпевает скачок p-я производная погрешности $\varepsilon(t)$, поэтому в качестве оценки $\tilde{\xi}(t)$ можно взять непосредственно стабилизирующее управление $u(t)$, которое реализует соответствующий скользящий режим. При этом при $p=2$ оценка $u(t)$ будет непрерывной, а при $p>2$ – гладкой (степень гладкости $p-1$).

Если в системе возникает реальный скользящий режим порядка p, то погрешность имеет порядок Δ^p, где Δ – величина неидеальностей в переключениях.

Для решения задачи обращения используем скользящий режим второго порядка. Снова рассмотрим управляемую модель (8), где управление направлено на стабилизацию системы в отклонениях (9), т.е.

$$\dot{\varepsilon} = u - \tilde{\xi}(t),$$

где $\tilde{\xi} = \xi(t) + \Delta(t)$, $\Delta(t) \to 0$ экспоненциально.

В работе [13] приведен алгоритм скольжения второго порядка для системы с известным выходом

$$\begin{aligned} &u = u_1 + u_2, \\ &u_1 = \begin{cases} -u_1, & \text{если} \quad |u_1| > \mu, \\ -\alpha\,\mathrm{sgn}(\varepsilon(t)), & \text{если} \quad |u_1| \le \mu, \end{cases} \\ &u_2 = -\lambda|\varepsilon|^\rho\,\mathrm{sgn}(\varepsilon(t)), \end{aligned} \tag{13}$$

где $\alpha > \xi^1$, $\mu > \xi^0$, $\lambda > 0$, $\rho \in (0,1)$.

При указанном выборе параметров в системе за конечное время возникает скользящий режим по поверхности $\varepsilon \equiv 0$ (см. [13]). При этом реализуется скользящий режим второго порядка. Управление (13), реализующее скользящий режим, является непрерывным, его производная разрывна, хотя и ограничена. Для $\varepsilon(t)$ также справедливы оценки $\varepsilon(t) \equiv 0$, $\dot{\varepsilon}(t) \equiv 0$, $\ddot{\varepsilon}(t) \le \mathrm{const}$.

В силу непрерывности $u(t)$ само управление можно взять в качестве оценки для неизвестного сигнала $\varepsilon(t)$, при этом ошибка оценивания (в случае идеального скользящего режима) будет экспоненциально сходиться к нулю, скорость сходимости определяется скоростью сходимости наблюдателя (6). Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Пусть для системы (1) выполнены условия 1–3. Тогда наблюдатель (6) и управление* $\tilde{u}(t)$ *из (13) дают с некоторого момента времени асимптотическую оценку* $\tilde{\xi}(t) = u(t)$ *для неизвестного входного сигнала* $\xi(t)$.

Для иллюстрации работы предложенного алгоритма было проведено моделирование.

Пример 2. Для простоты снова рассмотрим систему первого порядка (без использования наблюдателя, т.е. $\dot{\varepsilon} = u - \xi(t)$). Возьмем $\xi(t) = \sin t$, а в качестве оценки $\tilde{\xi}(t)$ – управление вида (13) при $\alpha = 2$, $\mu = 3/2$, $\lambda = 5$, $\rho = 1/2$. Результаты моделирования приведены на рис. 3, где представлены $\xi(t)$ и оценки $\tilde{\xi}(t) = u(t)$.

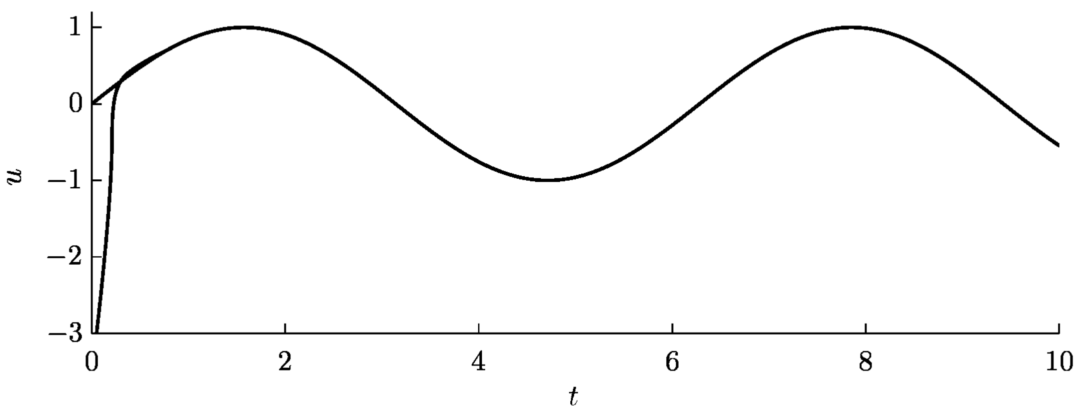

Рис. 3.

Работа выполнена при поддержке программы Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4179.2014.9) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 14-01-90010, 14-07-00795, 12-07-00456).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Алгоритмы обращения линейных скалярных динамических систем: метод управляемой модели // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 3. С. 329–339.
2. *Коровин С.К., Ильин А.В., Фомичев В.В.* Метод управляемой модели в задачах обращения динамических систем // Докл. РАН. Теория управления. 1997. Т. 354. № 2. С. 171–173.
3. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Алгоритмы обращения линейных управляемых систем // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 34. № 6. С. 744–750.
4. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Робастное обращение векторных систем // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 11. С. 1478–1486.
5. *Ильин А.В., Емельянов С.В., Фомичев В.В.* Синтез робастных инверторов минимального порядка // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 4. С. 575–585.
6. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Методы робастного обращения динамических систем. М., 2009.
7. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Обращение линейных динамических систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 3. С. 405–413.
8. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В.* О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. Т. 269. № 2. С. 51–60.
9. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В.* О динамическом решении операторных уравнений // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. Т. 269. № 3. С. 552–556.
10. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Новые типы обратной связи. М., 1997.
11. *Уткин В.И.* Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. М., 1974.
12. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Левантовский Л.В.* Скользящие режимы высших порядков в системах управления // Нелинейные динамические системы: качественный анализ и управление: Сб. трудов. 1993. № 2. С. 39–70.
13. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Левантовский Л.В.* Новый класс алгоритмов скольжения второго порядка // Мат. моделирование. 1990. Т. 2. № 3. С. 89–100.

Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва,
Институт системного анализа РАН,
г. Москва,
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
19.06.2014 г.