КОМБИНАТОРНЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В МАТЕМАТИКЕ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ
МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
(28-31 августа 1998 г.)

Омск
1998

Комбинаторные и вычислительные методы в математике (28–31 августа 1998 г.): Тезисы докладов международной конференции. Омск: ОмГУ, 1998. 158 с.

Сборник адресован математикам различных специальностей.

Ответственный редактор
д-р. физ.-мат. наук проф. В.А. Романьков

ISBN 5-7779-0127-1

Р.Ж. Алеев (Челябинск)[1]

ТЕОРИЯ ГРУПП ЦЕНТРАЛЬНЫХ ЕДИНИЦ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ ГРУПП $PSL_2(2^n)$

Ранее рассмотрены в [1] $PSL_2(4) \cong A_5$ и в [2] $PSL_2(8)$.

Обозначения. Пусть $q = 2^n$, a и b — элементы порядков $q-1$ и $q+1$, соответственно, V — группа всех нормализованных центральных единиц, то есть единиц, у которых сумма коэффициентов при разложении по элементам группы равна 1. Для центральной единицы u обозначим через $\gamma_u(x)$ коэффициент при классовой сумме класса сопряженности с представителем x.

Лемма 1. Пусть $A = \{u \in V \mid \gamma_u(b^m) = 0\ \forall m\}$. Тогда A — подгруппа V.

Лемма 2. Пусть $B = \{u \in V \mid \gamma_u(a^l) = 0\ \forall l\}$. Тогда B — подгруппа V.

Теорема 1. $V = A \times B$.

Теорема 2. Ранг группы центральных единиц

$$\mathrm{r(Z(ZG)) = q + 1 - \nu(q-1) - \nu(q+1)},$$

где $\nu(m)$ — число делителей числа m.

Следствие 1. $\mathrm{r(Z(ZG)) = 1 \iff q = 4}$.

Следствие 2. $\mathrm{r(Z(ZG))} \neq 2, 3$.

В заключение приведем таблицу рангов:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
r	0	1	4	11	27	55	123	247	501	1011

[1]Работа поддержана РФФИ (грант 96-01-01893).

References

[1] *G. Baumslag, A. Myasnikov and V. Remeslennikov.* Algebraic geometry over groups.- Preprint.- 41p.

[2] *G. Baumslag, A. Myasnikov and V. Remeslennikov.* Residually hyperbolic groups.- Препринт N 24.- Омск: ОмГУ, 1995.- 37с.

А.Я. Белов (Москва)

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНО СВОБОДНЫХ И КРИТИЧЕСКИХ КОЛЬЦАХ

Известны [1] вопросы, относящиеся к теории PI-колец: Существует ли бесконечное критическое кольцо? Верно ли, что любое относительно свободное кольцо финитно аппроксимируемо?

Кольцо называется *критическим*, если все его подкольца и факторы порождают собственное подмногообразие.

Основные результаты работы заключаются в следующем.

Теорема 1. Бесконечных критических колец не существует.

Теорема 2. Любое относительно свободное кольцо локально представимо (т.е. вкладывается в кольцо, являющееся нетеровым модулем над центром). В частности, оно финитно аппроксимируемо.

Техника доказательства устроена так. Многообразие можно задать двумя путями: через систему тождеств и через носитель - алгебру или набор алгебр,- в которых выполняются все тождества из данного многообразия. Строится *промежуточный носитель* - представимая алгебра, обладающая меньшим набором тождеств. Этот промежуточный носитель постоянно улучшается, и в конце концов получается алгебра (или кольцо), порождающая искомое многообразие. Для улучшения носителя используются следующие идеи: во-первых, замыкание, по Зарисскому, представления алгебры более просто устроено и порождает то же многообразие. В замыкании снова выбираются общие элементы - так улучшается представление. Во-вторых, ищется экстремальный T-идеал в промежуточном носителе, на котором определена структура модуля над нетеровым кольцом. В случае алгебры общих матриц - это полиномы Капелли, в общем случае ситуация, разумеется, сложнее. Если существует бесконечное критическое кольцо, то можно построить в нем такой Т-идеал, который будет к тому же устроен как бесконечный простой нетеров модуль над нетеровым коммутативным кольцом, что невозможно.

Отметим, что техника улучшения носителя и поиск экстремального идеала восходят еще к А.Р.Кемеру.

Литература

[1] Днестровская тетрадь. Нерешенные проблемы теории колец и модулей. 3-е изд.- Новосибирск, 1982.

Peter Biryukov (Kemerovo)

FREE SUBGROUPS IN HIGHLY TRANSITIVE PERMUTATION GROUPS

The symmetric group $\mathrm{Sym}(X)$ of an infinite set X is considered as a topological group with a neighbourhood base at 1 consisting of the pointwise stabilizers of finite sets. A subgroup $G \leq \mathrm{Sym}(X)$ is highly transitive (i.e. n-transitive for all $n < \omega$) iff it is dense in $\mathrm{Sym}(X)$. Given a group G and a cardinal $k \leq \omega$, we denote by $F(G^k)$ the set of all k-tuples in G^k whose components freely generate a subgroup of G.

Theorem 1. If G is a highly transitive permutation group, then $F(G^k)$ is the intersection of countably many dense open sets in the topological group G^k for all $k \leq \omega$.

We say that a topological group G has many free subgroups if $F(G^k)$ is dense in G^k for all $k \leq \omega$. A Baire space is a topological space in which any intersection of countably many dense open sets is dense. Let G be a highly transitive permutation group. If G^ω is a Baire space, then so is G^k for all $k < \omega$, and hence G has many free subgroups by Theorem 1. Moreover, in this case "almost all" (in the sense of Baire category) countable subgroups of G are free. There is a wide class of permutation groups with this property, including e.g. automorphism groups of Borel spaces and groups of measure-preserving transformations of measure spaces:

Theorem 2. Let X be an uncountable set. If a subgroup $G \leq \mathrm{Sym}(X)$ contains all permutations with countable supports, then G^ω is a Baire space.

The group $\mathrm{Sym}(\omega)$, being metrizable and complete, also belongs to this class. On the other hand, dense proper subgroups of $\mathrm{Sym}(\omega)$ can not be complete, and there are no general methods to recognize when their powers are Baire spaces.