ОРДЕНА ЛЕНИНА ВСЕСОЮЗНОЕ ОБЩЕСТВО «ЗНАНИЕ»

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ МУЗЕЙ

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ПРОБЛЕМ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ
ГОСУДАРСТВЕННОГО КОМИТЕТА
ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ СССР

НОВЫЕ МЕТОДЫ И СРЕДСТВА ОБУЧЕНИЯ

№ 1 (9)

ПРОБЛЕМНЫЕ ЗАДАЧИ И ИХ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

(В помощь слушателям факультета новых методов и средств обучения при Политехническом музее)

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗНАНИЕ»

Задача 6. От неправильного включения испортилась выходная микросхема компьютера, которая худо-бедно работала на малой мощности и отказывала на большой.

Задача 7. Парадоксально, но магнит, шарик и скрепка не имеют прямого отношения к эффекту вращения. Причиной вращения при натяжении нити является закрученность ее волокон.

В нашей модели причина и следствие были переставлены местами: не скрепка закручивала нить, а нить, раскручиваясь, вращала скрепку.

В заключение напомним, что и в литературе и в кино тема несоответствия ситуации и представления о ней всегда актуальна. Вспомним Моцарта, который считает Сальери другом, а тот (по версии Пушкина) его убийца. Вспомним "Ревизора" Гоголя, вспомним любой детектив, который состоит из цепочки ложных версий, и т.д. Исследование наших представлений сближает естественные науки с психологией и философией, синтезирует знания, опыт, интуицию и эксперимент, т.е. глубже проникнуть в природу человека.

Литература

1. Дубнов Я.С. Ошибки в геометрических доказательствах.- М.: Наука, 1973.

2. Игнатьев Е.И. В царстве смекалки.-М.: Наука, 1987.

3. Фейгенберг И.М. Проблемные ситуации и развитие активности личности.-М.: Знание, 1981.

А Белов

А.Я.Белов

ПРИЕМЫ МЫШЛЕНИЯ РАЗЛИЧНОГО УРОВНЯ ЧЕТКОСТИ НА ПРИМЕРАХ РЕШЕНИЯ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ

Для выполнения достаточно сложной физической работы нужны инструменты - материальные орудия труда, для решения достаточно сложных задач нужны "интеллектуальные орудия труда" - подходы, приемы, методы, техника. "Интеллектуальные орудия труда" могут осознаваться в различной степени и находиться на разных уровнях четкости. Даже в математике существуют неформальные приемы мышления.

Удобный материал для изучения приемов мышления дают олимпиадные задачи - содержательные задачи средней трудности: слишком простая задача не является убедительной иллюстрацией, слишком сложная отвлекает внимание на трудности самого предмета, а обилие идей и приемов мешает изучению чего-либо в отдельности. Каждую олимпиадную задачу решает большое количество школьников, имеются записи их решений, многие из них можно наблюдать в развитии, наконец, одну и ту же задачу могут решать разные поколения "олимпиадников". К сожалению, олимпиадный опыт с этой точки зрения не изучался.

Г.Айзенк исследовал творческие способности человека на решении искусственных задач (например, каждой букве по определенному правилу приписывается число, нужно найти закономерность). Подобный подход к исследованию имеет смысл, поскольку "живая" задача имеет слишком много граней. Однако при этом теряется много важного: эстетические критерии при поиске решения, поиск решения из содержательных соображений.

Творчество может быть направлено как на решение задачи, так и на создание аппарата (в том числе и не осознаваемого) решения задач, которое с его помощью воспринимается как техническое. Здесь мы имеем дело с понятиями подхода, метода, техники. Подход - это изначально взятое направление мысли, метод - это более или менее целостная совокупность ранее известных идей, техника - совокупность идей и приемов (возможно,не вполне осознанных), умений и навыков с ними оперировать.

Под четкостью рассуждений мы будем понимать степень их формализованности. Различные техники решения задач могут находиться на разном уровне четкости: есть техника вычислений (алгебраических преобразований, дифференцирования и т.д.) - наиболее формальная и четкая. Менее формальные - техника сведения задач к частному случаю, техника проведения индукции и т.д. В шахматах, когда говорят о технической реализации преимущества или о техническом эндшпиле, имеют в виду технику не столь формальную, как техника алгебраических преобразований: шахматист, технически выигрывающий с лишней фигурой, не в состоянии дать формальное доказательство этого факта, тем самым его техника является принципиально нечеткой. Заметим также, что у математика уровень четкости изложения ниже, чем у машины, у физика - чем у математика, у инженера - чем у физика, у гуманитария - чем у инженера, так что существует много различных уровней четкости.

Найти идею легче на более низком уровне четкости, так как нечеткие рассуждения легче и быстрее ведут к результату (и к ошибке). Нечеткое мышление творчески более мощное (абсолютно четко "мыслит" ЭВМ, "творческие" возможности которой общеизвестны). Принципиальная нечеткость нашего мышления подтверждается тем, что, казалось бы, самый четкий алгоритм зачастую трудно перевести на машинный язык.

Вместе с тем ценность доказательства, идеи, метода или другого результата тем выше, чем на более высоком уровне четкости он находится, поэтому результат угадывается обычно с помощью нечетких рассуждений, дальнейшая же цель - повышение его уровня четкости (обоснование, формализация и т.д.).

Однако на самом деле важен не столько уровень четкости результата, сколько его уровень строгости, т.е. уровень четкости, до которого читатель может его легко довести. В процессе интеллектуальной работы достаточно следить только за уровнем строгости мысли. В математике полностью формальные рассуждения почти не приводят, ограничиваются строгими, т.е. такими, которые возможно формализовать полностью. Уровень строгости рассуждения - понятие относительное и зависит от профессиональной культуры адресата.

Представляет интерес эволюция отношения математика к формализму по мере его профессионального роста: после пренебрежения им на определенном этапе формализм возводится в абсолют: не совсем формальные рассуждения воспринимаются плохо, человек становится привередливым в мелочах. На следующем этапе приходит понимание того,что важна прежде всего строгость рассуждений. Чем больше человек понимает предмет, тем больше у него разница между уровнем четкости и уровнем строгости, тем менее четкими рассуждениями он может ограничиться.

Теперь рассмотрим некоторые неформальные приемы и техники решения задач применительно к математике.

На математику можно смотрть с двух точек зрения: первая - "административная" - состоит в рассмотрении специальных дисциплин и встречается наиболее часто. Вторая - "индустриальная" - состоит в рассмотрении идей и методов, работающих в различных ситуациях (встречается редко, главным образом в популярной литературе). Первая точка зрения отвечает изучению преимущественно формальных объектов, вторая - неформальных, поэтому она представляет для нас больший интерес. Мы рассмотрим два неформальных метода - метод "накрывания на стол" и метод процессов.

Метод "накрывания на стол"

Известно, что человек некультурный ест руками, в то время как культурный перед едой накрывает на стол. Некультурный математик решает задачу "в лоб", а культурный "приготовит" задачу, т.е. преобразует ее к наиболее удобному для решения виду (случается, что после этого от задачи ничего не остается).

Преобразование условия задачи может состоять в переформулировке, отщеплении простых случаев, сведении к частному случаю. Типичные соображения - симметрия, "явно не хуже", "можно считать, что ...". Приведем примеры.

Пример I

Каждый ученик класса ходил хотя бы в один из двух походов. В каждом походе мальчиков было не более 2/5 от общего числа участников. Доказать, что всего в классе мальчиков не более 4/7.

Решение

Если решать задачу "в лоб", то следует рассмотреть количество мальчиков только в первом походе, только во втором, в обоих, то же для девочек, составить систему уравнений и неравенств и решить ее. Этого делать не хочется, поэтому будем избавляться от лишних параметров, сводя задачу к ее частному случаю. Дальнейшее изложение соответствует тому, как придумывалось решение. После каждого шага упрощения становится очевидным следующий шаг:

I шаг. Заставим всех девочек ходить в оба похода. От этого доля мальчиков в классе не изменится, а в походах - уменьшится. Можно считать, что все девочки ходили в оба похода;

2 шаг. Аналогично, если мальчик ходил в первый поход, освободим его от посещения второго. Можно считать, что каждый мальчик ходил только в один поход;

3 шаг. Если в один поход ходило больше мальчиков, чем в другой, то добавим в класс мальчиков, "приписав" их к походу с меньшим числом мальчиков. Доля мальчиков в походах останется в тех же пределах, а количество мальчиков в классе увеличится. Можно считать, что мальчиков ходило поровну в каждый поход. Теперь задача стала тривиальной: пусть в первом походе было $2X$ мальчиков и не менее $3X$ девочек, тогда всего мальчиков $4X$, а в классе не менее $7X$ человек.

Пример 2

Из бумажного треугольника вырезали параллелограмм. Доказать, что его площадь не превосходит половины площади треугольника.

Решение

Трудность: произвольное расположение параллелограмма внутри треугольника. Будем преобразовывать параллелограмм, не уменьшая его площади:

I шаг. "Раздуем" параллелограмм так, чтобы одна его вершина попала на сторону треугольника (рис. I,A);

2 шаг. "Раздвигая" параллелограмм (рис. I,B), добьемся того, что две его вершины попадут на стороны треугольника;

3 шаг. С помощью "перестройки" параллелограмма, не меняющей его площадь, добьемся того, что сторона параллелограмма попадет на контур треугольника (рис. I,C);

4 шаг. Наращиваем параллелограмм (рис.I,D), теперь все вершины лежат на сторонах треугольника;

5 шаг. Снова "Перестройка" (рис.I,E), теперь все вершины и две стороны параллелограмма лежат на сторонах треугольника. "Стол накрыт". Теперь задача решается прямым вычислением.

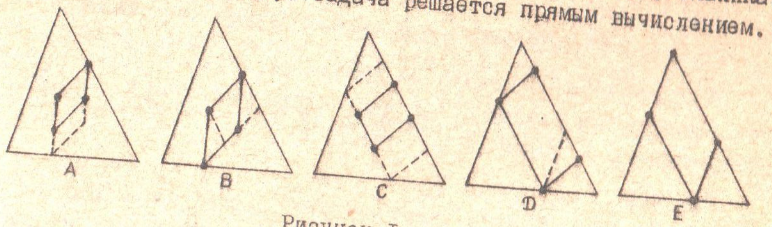

Рисунок I

"Накрывание на стол" не всегда представляет собой сведение задачи к частному случаю. Например, в математическом анализе часто заменяют $SIN\ (X)$ на X в окрестности нуля.

Метод процессов

Часто для решения задачи организуется процесс (процесс построения нужного объекта, процесс "накрывания на стол", процесс последовательного улучшения некоторой величины и т.д.), он воспринимается как нечто внешнее, производимое над задачей. Остановка процесса обычно означает либо приведение задачи к нужному виду, либо построение требуемого объекта, либо получение противоречия. Для доказательства остановки обычно используют полуинварианты процесса, т.е. величины, монотонно уменьшающиеся (растущие) при каждом шаге.

Пример I

За круглым столом сидят IO мальчиков и IO девочек. Докажите, что число пар рядом сидящих мальчиков равно числу пар рядом сидящих девочек.

Решение

Сидящих за столом можно разбить на группы: несколько мальчиков, затем несколько девоек и т.д. Что произойдет, если пересадить группы мальчиков с последующей группой девочек? Число пар мальчиков увеличится на единицу и число пар девочек увеличится на единицу. В итоге разница числа пар мальчиков и пар девочек не изменится. После нескольких пересаживаний все мальчики окажутся в одной группе и все девочки - в одной группе, но разность чисел пар мальчиков и пар девочек не изменилась и равна нулю.

Пример 2 (Всесоюзная олимпиада 1979 г.)

В парламенте у каждого не более трех врагов. Доказать, что парламент можно разделить на две палаты так, что у каждого парламентария в своей палате будет не более одного врага.

Решение

Нет никакой надежды сразу указать нужное разбиение парламента, это разбиение можно построить только поэтапно с помощью процесса. Самое простое, что можно придумать: пересаживать парламентариев по одному.

Разобьем парламент произвольным образом на две палаты и рассмотрим процесс: выберем парламентария, имеющего не менее двух врагов в своей палате, и перенесем его в другую палату. Остановка процесса означает построение нужного разбиения. Доказательство остановки процесса: соединим врагов в своей палате черточкой, на каждом шаге общее число черточек уменьшается, а начальное число черточек конечно.

К нечетким рассуждениям распространено неоправданно отрицательное отношение, формализм и видимая четкость иногда становятся чуть ли не предметом поклонения (хотя они могут скрывать нечеткость мысли по существу). Результат "на выходе" фетишизируется, и то, что привело к результату, не считают достойным публикации.

Д.Пойя в своих замечательных книгах дал анализ многих неформальных приемов мышления в математике, их важность была показана также Ж.Адамаром.

Поскольку накоплен огромный опыт проведения олимпиад, есть возможность глубоко исследовать эти вопросы. Первым шагом могло бы стать составление коллекции содержательных задач с анализом того, как можно было додуматься до решения, вторым - составление учебника по решению олимпиадных задач (подобно учебнику шахматной игры).

Автор выражает свою признательность А.К.Ковальджи за помощь при написании этой статьи.

Литература

1. Ж.Адамар. Исследование психологии процесса изобретения в области математики.-М.: Советское радио, 1970.
2. Д.Пойа. Как решать задачу.-М.: Учпедгиз, 1961.
3. Д.Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения.-М.: Наука, 1975.
4. Д.Пойа. Математическое открытие.-М.: Наука, 1976.