

3. Ильин, А.В. Цифровая стабилизация переключаемой линейной системы с соизмеримыми запаздываниями / А.В. Ильин, А.С. Фурсов // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2023. — Т. 514, № 1. — С. 82–88.
4. Фурсов, А.С. Одновременная стабилизация: теория построения универсального регулятора для семейства динамических объектов / А.С. Фурсов. — М. : Аргатак-медиа, 2016. — 238 с.

В. В. Фомичев, К. Ю. Шутова (МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия) “Алгоритм равномерного размещения агентов в прямоугольнике на основе локальной информации” (14 октября 2024 г.).

Равномерное размещение агентов на плоскости является одной из ключевых задач в теории многоагентных систем, которые находят применение в различных областях, таких как моделирование динамики толпы, робототехника, в задачах покрытия территории агентами и других.

Агент — это автономный объект, способный взаимодействовать с другими объектами и окружающей средой на основе заданных правил.

В работах [1, 2] предложены алгоритмы равномерного размещения агентов на отрезке. В данном исследовании рассматривается задача равномерного размещения агентов в ограниченной области на плоскости, устанавливается диссипативность системы; основное внимание уделяется взаимодействиям между агентами на плоскости с учётом силы отталкивания друг от друга, а также форме матрицы локальных связей для поддержания локального взаимодействия между соседями. Цель этого исследования — разработать алгоритм, обеспечивающий равномерное размещение агентов в ограниченной двумерной области, в котором будут учтены взаимодействие с ближайшими соседями и силы отталкивания для предотвращения слипания агентов.

Пусть имеется система из N агентов, находящихся в области $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Каждый агент с номером i в момент времени t имеет позицию $(x_i(t), y_i(t)) \in \mathbb{R}^2$, он может находиться как внутри, так и снаружи Ω . Агенты взаимодействуют друг с другом на основе матрицы A , которая определяет силы притяжения между соседними агентами и предотвращающие слипание агентов при их сближении силы отталкивания f_{rep} . Цель агентов — разместиться равномерно в области Ω . Обновление положения агентов описывается следующей системой разностных уравнений:

$$\begin{cases} x(t+1) = (1-\beta)x(t) + \beta Ax(t) + \gamma f_{x_{\text{rep}}}, \\ y(t+1) = (1-\beta)y(t) + \beta Ay(t) + \gamma f_{y_{\text{rep}}}, \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T$, $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t))^T$ — векторы текущих позиций агентов по осям Ox , Oy соответственно; A — матрица взаимодействий, каждая строка в которой описывает влияние соседей на агента; $f_{x_{\text{rep}}}$, $f_{y_{\text{rep}}}$ — компоненты силы отталкивания f_{rep} по осям Ox , Oy , действующей между агентами, чтобы предотвратить их сближение; $\beta \in [0, 1]$ — коэффициент, управляющий вкладом матрицы взаимодействий в обновление позиций; $\gamma \in [0, 1]$ — коэффициент, определяющий силу отталкивания.

Матрица A — стохастическая и симметричная, т.е. $A_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=1}^N A_{ij} = 1$ и $A = A^T$. Для таких матриц все собственные значения $\lambda_i \in [-1, 1] \in \mathbb{R}$, при этом $\lambda_1 = \lambda_{\max} = 1$ — максимальное собственное значение. Поскольку предполагается, что каждый агент взаимодействует лишь с небольшим числом соседей, то матрица A разреженная с преимущественно нулевыми элементами: для любого i существует j , $i \neq j$, что $A_{ij} \neq 0$. Из теоремы Перрона–Фробениуса [3] следует, что при $i \geq 2$ $0 \leq \lambda_i < 1$. Путём несложных преобразований можно показать липшицевость матрицы (1).

Остаётся вопрос о влиянии коэффициентов β и γ на поведение многоагентной системы. Параметр β определяет вес взаимодействия агентов со своими соседями через матрицу A . При $\beta = 0$ отсутствует взаимодействие с соседями, агенты не стремятся к среднему положению, а система может быть неустойчивой, так как отталкивание может привести к неравномерному размещению или даже выходу за границы области. При $\beta = 1$ взаимодействие максимальное, агенты стремятся к среднему положению своих соседей с максимальной силой, что может привести к медленному размещению и игнорированию отталкивания для избежания столкновений. Значения параметра $\beta \in (0, 1)$ задают баланс между текущим положением агента и его средним положением относительно соседей, что способствует плавной сходимости системы.

Параметр γ регулирует влияние отталкивающей силы, которая отвечает за предотвращение столкновения агентов. При $\gamma = 0$ отталкивание между агентами отсутствует, это позволяет им двигаться исключительно в зависимости от взаимодействия с соседями через матрицу A , что может привести к скоплению агентов в одном месте. При $\gamma = 1$ влияние отталкивающих сил максимальное, при этом сохраняется взаимодействие агентов со своими соседями, определяемое параметром β , но в численных экспериментах, если $\beta \in (0, 1)$ и $\gamma = 1$, при увеличении числа агентов начинает сильно преобладать влияние силы отталкивания, что приводит к их (агентов) разбеганию на границы области. Значения $\gamma \in (0, 1)$ позволяют агентам избегать столкновений и одновременно учитывать их текущее положение относительно соседей, что способствует более равномерному размещению.

Для определения матрицы связей предлагается следующая схема. Пусть имеется $N = n \times m$ агентов a_{ij} . Тогда соседями считаются агенты, индексы которых отличаются не более чем на единицу, т.е. a_{ij} — сосед с a_{pq} , если $|i - p| \leq 1$, $|j - q| \leq 1$. В результате у каждого агента есть от двух до четырёх соседей. В случае размещения на плоскости 3×3 ($n = 3$, $m = 3$) имеем следующую интерпретацию расположения 9 агентов:

$$\begin{array}{ccc} \bullet_{a_{11}} & \bullet_{a_{12}} & \bullet_{a_{13}} \\ \bullet_{a_{21}} & \bullet_{a_{22}} & \bullet_{a_{23}}, \\ \bullet_{a_{31}} & \bullet_{a_{32}} & \bullet_{a_{33}} \end{array}$$

где у угловых агентов a_{11} , a_{13} , a_{31} , a_{33} есть два соседа, у агентов a_{12} , a_{21} , a_{23} , a_{32} на границах — три соседа, у агентов внутри (в данном случае только a_{22}) — четыре соседа. Далее каждому агенту a_{pq} поставим в соответствие номер $j = q + (p - 1)$, т.е. нумеруем агентов “по строкам”:

$$\begin{array}{ccc} \bullet_1 & \bullet_2 & \bullet_3 \\ \bullet_4 & \bullet_5 & \bullet_6. \\ \bullet_7 & \bullet_8 & \bullet_9 \end{array}$$

Матрицу взаимодействия определяем следующим образом: в i -й строке ненулевые элементы соответствуют только соседям, все ненулевые элементы равны одному и тому же значению, при этом сумма элементов в строке равна 1.

Например, для агента в левом верхнем углу a_{11} , соответствующего первой строке A_1 матрицы A , будет верно

$$A_1 = (A_{11} \ A_{12} \ A_{13} \ A_{14} \ A_{15} \ A_{16} \ A_{17} \ A_{18} \ A_{19}) = \left(0 \ \frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\right),$$

так как ближайшими соседями являются два агента: a_{12} и a_{21} .

В общем случае для $N = n \times m$ агентов матрица A имеет размерность $N \times N$ и её элементы записываются следующим образом:

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{k_i}, & \text{если } j \text{ — сосед } i, \text{ при этом } i \neq j, \\ 0, & \text{если } i \text{ и } j \text{ не соседи или } i = j, \end{cases}$$

где k_i — количество соседей агента i (здесь i и j — номера агентов в “сквозной нумерации”).

Сила отталкивания $f_{\text{rep}}(t)$ моделируется как функция, зависящая от расстояния между агентами: чем ближе находятся агенты, тем сильнее они отталкиваются друг от друга.

Пусть положения агентов i и j в момент времени t определяются как

$$\vec{r}_i(t) = [x_i(t), y_i(t)] \quad \text{и} \quad \vec{r}_j(t) = [x_j(t), y_j(t)].$$

Расстояние между агентами i и j в момент времени t обозначим

$$r_{ij}(t) = \|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)\| = \sqrt{(x_i(t) - x_j(t))^2 + (y_i(t) - y_j(t))^2}.$$

Для каждого агента i сила отталкивания рассчитывается по формулам

$$f_{x_{\text{rep}}}^{(i)}(t) = - \sum_{j \neq i} \frac{1}{r_{ij}^2(t)} (x_i(t) - x_j(t)), \quad f_{y_{\text{rep}}}^{(i)}(t) = - \sum_{j \neq i} \frac{1}{r_{ij}^2(t)} (y_i(t) - y_j(t)),$$

где γ — коэффициент силы отталкивания, регулирующий общий вклад силы отталкивания в обновление положения агентов.

Для численного эксперимента рассматривалась область $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Начальные координаты в момент времени $t = 0$ каждого агента выбираются из равномерного распределения на области Ω . Численный эксперимент показал, что независимо от начального размещения агенты в асимптотике приходят к одной и той же конфигурации, определяемой матрицей A , параметрами β , γ . На рис. 1, 2 представлены варианты предельного расположения 9 агентов (фактически при достаточно большом t); точками обозначены агенты, а линиями, соединяющими их между собой, показаны связи с ближайшими соседями. На рис. 1 при $\beta = 0.9$ видно, что меньшее значение γ приводит к агрегации не по всей области Ω , а при большем значении γ агенты занимают всю область Ω . На рис. 2 при $\gamma = 0.02$ видно, что большее

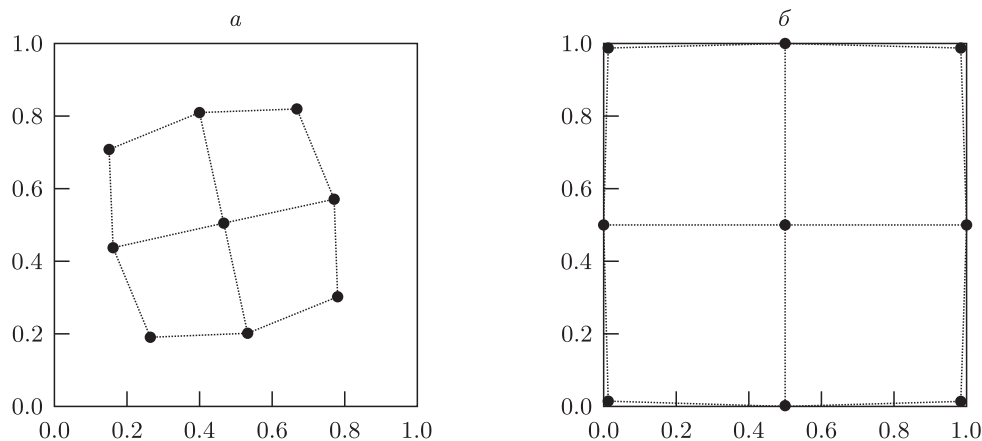


Рис. 1. Распределение 9 агентов при $\beta = 0.9$: a — $\gamma = 0.01$, b — $\gamma = 0.06$

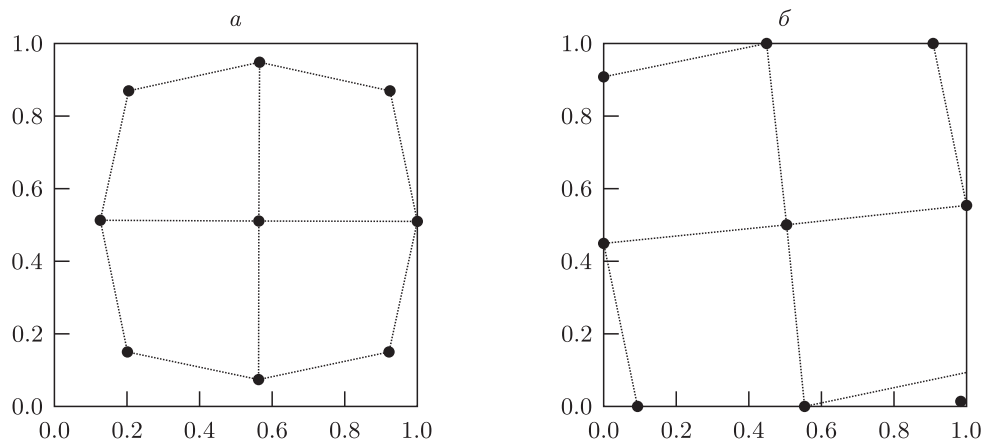


Рис. 2. Распределение 9 агентов при $\gamma = 0.02$: $a - \beta = 0.8$, $b - \beta = 0.4$

значение β приводит к размещению агентов только на части области Ω , при меньшем значении β они стремятся разместиться по всей области Ω . Были предложены полученные опытным путём значения $\beta = 2/\sqrt{N}$, $\gamma = 1/(2N\sqrt{N})$, на рис. 3 смоделировано их влияние на формирование равномерного размещения $N = 9$ агентов.

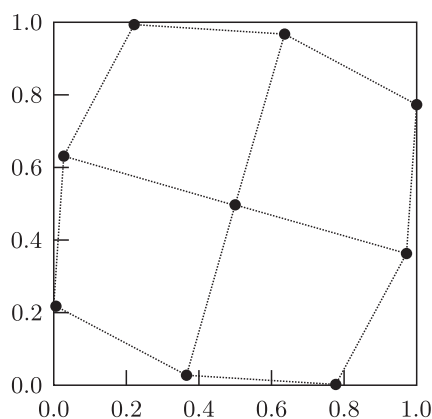


Рис. 3. Равномерное размещение 9 агентов при $\beta = 2/\sqrt{N}$, $\gamma = 1/(2N\sqrt{N})$

Численные эксперименты показали, что предложенный метод позволяет достичь равномерного размещения агентов при корректной настройке параметров модели, таких как β и γ . Подробный анализ зависимости размещения от параметров требует дополнительных исследований и выходит за рамки данной работы. Выводы сделаны также на основе анализа липшицевости матрицы A , что позволяет гарантировать базовые свойства устойчивости движения агентов. Однако для строгого обоснования устойчивости модели необходимо дополнительно провести теоретические исследования, включая анализ положений равновесия системы (1) и их устойчивости. Эти аспекты будут рассмотрены в дальнейших публикациях.

Работа выполнена при поддержке некоммерческого фонда развития науки и образования “Интеллект” (проект № 1/ГКМУ-2022 от 23.12.2022 г.).

Литература

1. Kvinto, Y.I. Equidistant arrangement of agents on line: analysis of the algorithm and its generalization / Y.I. Kvinto, S.E. Parsegov // Automation and Remote Control. — 2012. — V. 73, № 11. — P. 1784–1793.

2. Parsegov, S.E. Uniform deployment of second-order agents on a line segment / S.E. Parsegov, A.V. Proskurnikov // 6th Intern. Congress on Ultra-Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops. — 2014. — P. 631–636.
3. Horn, R.A. Matrix Analysis / R.A. Horn, C.R. Johnson. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1985. — 534 p.

В. Е. Хартовский (ГрГУ имени Я. Купалы, Гродно, Республика Беларусь) “К вопросу экспоненциальной стабилизируемости по неполным измерениям линейных систем нейтрального типа” (28 октября 2024 г.).

Объектом исследования является линейная автономная система нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + D\dot{x}(t-h) + bu(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — решение уравнения (1); $u(t)$ — скалярное управление, выбираемое из класса кусочно-непрерывных функций; $y(t) \in \mathbb{R}^l$ — наблюдаемый выход; $A, A_1, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$; $b \in \mathbb{R}^n$; $h > 0$ — постоянное запаздывание. Считаем, что начальное состояние системы (1) имеет вид $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [-h, 0]$, где φ — непрерывная функция, имеющая кусочно-непрерывную производную.

Пусть $I_i \in \mathbb{R}^{i \times i}$ — единичная матрица, $W(p) = p(I_n - e^{-ph}D) - A - e^{-ph}A_1$ — характеристическая матрица уравнения (1), $\Lambda = \{p \in \mathbb{C} : \det W(p) = 0\}$ — спектр (множество собственных значений) разомкнутой ($u \equiv 0$) системы (1).

Спектральный критерий экспоненциальной устойчивости системы нейтрального типа заключается в требовании [1], чтобы все её собственные значения лежали в левой полуплоскости и были отделены от мнимой оси. Например, в случае системы (1) должно выполняться условие

$$\operatorname{Re} p < \varepsilon, \quad \varepsilon < 0, \quad p \in \Lambda. \quad (3)$$

При этом если система нейтрального типа экспоненциально устойчива, то экспоненциально устойчива разностная система, описывающая поведение скачков первой производной решения однородной системы. В случае однородной системы (1) ($u \equiv 0$) это условие будет иметь вид

$$|\lambda| > 1, \quad \lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(I_n - \lambda D) = 0\}. \quad (4)$$

В настоящее время имеется ряд работ (см. [1–6] и библиографии в них), посвящённых стабилизации систем нейтрального типа, однако большинство из них предлагают качественные результаты. Что касается конструктивных алгоритмов построения соответствующих стабилизирующих управлений, то их очень мало. В статье [7] получен критерий экспоненциальной стабилизируемости системы (1) регулятором с обратной связью в виде вектора состояния x и предложен способ проектирования соответствующего регулятора. В [8] доказан критерий существования и описан метод построения регулятора с обратной связью в виде выхода y , одновременно обеспечивающего финитную стабилизацию и конечный спектр системе нейтрального типа. В настоящем исследовании разработан метод построения регуляторов с обратной связью в виде выхода y для экспоненциальной стабилизации системы (1), (2), получены условия существования соответствующих регуляторов.

Обозначим через λ_h оператор сдвига, определяемый для заданного $h > 0$ и любой функции $\psi(t)$ правилом $\lambda_h \psi(t) = \psi(t-h)$. Введём регулятор с обратной связью по выходу вида

$$u(t) = \Re_{01}[x_1(t)] + \Re_{00}[y(t)], \quad \dot{x}_1(t) = \Re_{11}[x_1(t)] + \Re_{10}[y(t)]. \quad (5)$$