

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

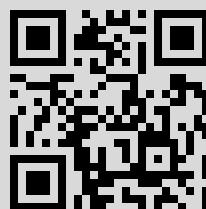
И. Я. Арефьева, Н. В. Булатов, С. Ю. Вернов, Ста-
бильные точные решения в космологических моделях
с двумя скалярными полями, *ТМФ*, 2010, том 163, но-
мер 3, 475–494

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 91.229.59.100

28 октября 2014 г., 00:03:19



© 2010 г. И. Я. Арефьева*, Н. В. Булатов†, С. Ю. Вернов‡

СТАБИЛЬНЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ С ДВУМЯ СКАЛЯРНЫМИ ПОЛЯМИ

Рассматривается устойчивость изотропных решений для двухполевых моделей в метрике Бьянки I. Доказано, что условия, достаточные для устойчивости по Ляпунову в метрике Фридмана–Робертсона–Уокера, обеспечивают устойчивость по отношению к анизотропным возмущениям в метрике Бьянки I, а также по отношению к возмущениям плотности энергии холодной темной материи. Найдены достаточные условия устойчивости по Ляпунову изотропных фиксированных точек системы уравнений Эйнштейна. Метод суперпотенциала применен для конструирования устойчивых решений типа кинка. Получены условия на суперпотенциал, которые являются достаточными условиями устойчивости по Ляпунову соответствующих точных решений. Проанализирована устойчивость изотропных решений типа кинка в моделях, связанных с полевой теорией струн.

Ключевые слова: космология, устойчивость, метрика Бьянки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для описания различных типов космической жидкости обычно используется феноменологическое соотношение между давлением (лагранжевой плотностью) p и плотностью энергии ρ каждого из компонентов жидкости $p = w\rho$. Функция w называется параметром состояния. Современные наблюдения [1] указывают на то, что в настоящее время во Вселенной доминирует равномерно распределенная космическая жидкость с отрицательным давлением, так называемая темная энергия, параметр которой примерно равен -1 : $w_{DE} = -1 \pm 0.2$. С помощью наблюдений получены сильные ограничения на анизотропию [2], а также показано, что на больших

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: arefeva@mi.ras.ru

†Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: nick_bulatov@mail.ru

‡Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: svernov@theory.sinp.msu.ru

расстояниях Вселенная пространственно плоская. Существует мнение (см. [3], [4], а также обзоры [5] и приведенную в них литературу), что параметр состояния, зависящий от времени, лучше отвечает экспериментальным данным, чем параметр $w_{DE} \equiv -1$, соответствующий космологической константе. Этим, в частности, обусловлен интерес к моделям с $w_{DE} < -1$. Теории поля с $w_{DE} < -1$ представляют интерес и как возможное решение проблемы космологической сингулярности [6], [7].

Стандартный способ получения переменного параметра состояния – добавление в космологическую модель скалярных полей. Двухполевые модели с пересечением барьера космологической константы, $w_{DE} = -1$, известны как квинтомные (quintom) модели и включают одно фантомное скалярное поле и одно стандартное скалярное поле. Квинтомные модели активно изучаются в настоящее время [5], [8]–[12]. Космологические модели с $w_{DE} < -1$ нарушают изотропное энергетическое условие, что в общем случае связано с появлением фантомных полей. Стандартное квантование этих моделей приводит к нестабильности и физически недопустимо. В работе [9] теория с $w_{DE} < -1$ рассматривается как приближение, сделанное в рамках фундаментальной теории. Поскольку фундаментальная теория должна быть устойчивой и допускать квантование, такая нестабильность может рассматриваться как артефакт приближения. Отметим проблемы квантовой нестабильности, возникающие в эффективных теориях и связанные с производными высоких порядков [13]. В работах [14] проблема нестабильности сведена к проблеме такого выбора параметров эффективной теории, чтобы нестабильность оказывалась существенной только при временах, не описываемых в рамках приближения эффективной теории. Математически это выражается в том, что члены с высшими производными рассматриваются как поправки, существенные только при малых энергиях, ниже уровня физического обрезания. Данный подход позволяет рассматривать такие эффективные теории как физически приемлемые, при этом подразумевается, что эффективная теория допускает погружение в некоторую фундаментальную теорию.

В метрике Фридмана–Робертсона–Уокера известны модели с нарушением изотропного энергетического условия, которые имеют классические стабильные решения, являющиеся аттракторами [15], [16], [10] (аттракторы в неоднородных космологических моделях рассмотрены в [17]).

Стабильность изотропных решений в метриках Бьянки [18], [19] (см. также [20]) исследовалась в инфляционных моделях (см. работы [21] и ссылки в них). В предположении, что энергетические условия выполнены, доказано, что все первоначально расширяющиеся модели Бьянки, кроме типа IX, приближаются к пространству-времени де Ситтера [22] (см. также [23]).

В настоящей статье рассматривается устойчивость изотропных решений в метрике Бьянки I. Рассматривая решения уравнений Фридмана как изотропные решения в метрике Бьянки I, мы включаем в рассмотрение анизотропные возмущения. Анализ устойчивости существенно упрощается подходящим выбором переменных [19], [20], [24]. Показано, что полученные в работе [10] условия достаточны для устойчивости не только в метрике Фридмана–Робертсона–Уокера, но также и в мет-

рике Бьянки I. Мы рассматриваем как квинтомные космологические модели, так и модели с двумя скалярными (двумя фантомными скалярными) полями. Достаточные условия устойчивости изотропных решений, стремящихся к неподвижной точке, для однополевых моделей получены в работе [25].

Стабильность непрерывного решения, стремящегося к неподвижной точке, означает устойчивость этой неподвижной точки. Используя теорему Ляпунова [26], мы находим условия, при которых неподвижная точка и стремящееся к ней решение устойчивы. Мы также анализируем устойчивость относительно малых колебаний плотности энергии холодной темной материи.

В работах [9], [27] для построения квинтомных моделей с точными решениями использовался метод суперпотенциала. В настоящей статье мы получили условия устойчивости в терминах суперпотенциала и использовали суперпотенциал для получения моделей с устойчивыми точными решениями. Мы также проверили устойчивость решений, полученных в работах [9], [27].

Заметим, что стандартный способ анализа устойчивости решений уравнений Фридмана в квинтомных моделях использует замену переменных [8], [10], [11]. В случае экспоненциальных потенциалов эта замена полезна тем, что преобразовывает класс нетривиальных решений в неподвижные точки новой системы уравнений. С помощью техники, используемой в настоящей статье, условия устойчивости для произвольного потенциала, найденные в работе [10], можно получить без введения новых переменных, т.е. более простым способом.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 рассматриваются двухполевые модели с произвольным потенциалом и находятся достаточные условия устойчивости в метриках Фридмана–Робертсона–Уокера и Бьянки I. В разделе 3 выводятся условия на суперпотенциал, достаточные для устойчивости точных решений. В разделе 4 мы проверяем устойчивость точных решений типа кинка в космологических моделях, происхождение которых связано с полевой теорией струн. В разделе 5 мы суммируем результаты.

2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

2.1. Уравнения Эйнштейна в метрике Бьянки I. Рассмотрим двухполевую космологическую модель со следующим действием:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{16\pi G_N} - \frac{C_1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{C_2}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \xi \partial_\nu \xi - V(\phi, \xi) \right],$$

где потенциал $V(\phi, \xi)$, включающий в себя космологическую постоянную Λ , является дважды непрерывно дифференцируемой функцией, G_N – ньютоновская гравитационная постоянная ($8\pi G_N = 1/M_P^2$, где M_P – масса Планка), каждое из полей ϕ и ξ является либо скалярным, либо фантомным скалярным полем в зависимости от знаков констант C_1 и C_2 .

Рассматривая метрику Бьянки I

$$ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t) dx_1^2 + a_2^2(t) dx_2^2 + a_3^2(t) dx_3^2, \quad (1)$$

удобно выразить a_i через новые переменные a и β_i (мы используем обозначения из работы [24]):

$$a_i(t) = a(t)e^{\beta_i(t)}. \quad (2)$$

Налагая ограничение $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$, получаем следующие соотношения:

$$a(t) = (a_1(t)a_2(t)a_3(t))^{1/3}, \quad (3)$$

$$H_i \equiv \frac{\dot{a}_i}{a_i} = H + \dot{\beta}_i, \quad H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{3}(H_1 + H_2 + H_3), \quad (4)$$

где точка обозначает производную по времени.

Заметим, что β_i не являются компонентами вектора и, следовательно, не подчиняются правилу суммирования Эйнштейна. В случае метрики Фридмана–Робертсона–Уокера все β_i равны нулю и H представляет собой параметр Хаббла. Следуя работам [19], [20], [24], мы вводим переменную

$$\sigma^2 \equiv \dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2. \quad (5)$$

Уравнения Эйнштейна имеют следующий вид:

$$3H^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 = 8\pi G_N \varrho, \quad (6)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 = -8\pi G_N p, \quad (7)$$

$$\dot{\phi} = \psi, \quad \dot{\psi} = -3H\psi - \frac{1}{C_1} \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (8)$$

$$\dot{\xi} = \zeta, \quad \dot{\zeta} = -3H\zeta - \frac{1}{C_2} \frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad (9)$$

где

$$\varrho = \frac{C_1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{C_2}{2}\dot{\xi}^2 + V(\phi, \xi), \quad p = \frac{C_1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{C_2}{2}\dot{\xi}^2 - V(\phi, \xi). \quad (10)$$

Для β_i и σ^2 мы получаем уравнения

$$\ddot{\beta}_i = -3H\dot{\beta}_i, \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt}(\sigma^2) = -6H\sigma^2. \quad (12)$$

Функции $H(t)$, $\sigma^2(t)$, $\phi(t)$ и $\xi(t)$ могут быть получены из уравнений (6)–(9) и (12). Если функция $H(t)$ известна, то переменные β_i находятся тривиально из (11). Далее мы покажем, что функции $H(t)$, $\dot{\beta}_i(t)$ и $\sigma^2(t)$ прекрасно подходят для того, чтобы анализировать устойчивость изотропных решений в метрике Бьянки I.

2.2. Достаточные условия устойчивости по Ляпунову фиксированной точки. Складывая уравнения (6) и (7), мы получаем следующую систему:

$$\begin{aligned}\dot{H} &= -3H^2 + 8\pi G_N V(\phi, \xi), \\ \dot{\phi} &= \psi, \quad \dot{\psi} = -3H\psi - \frac{1}{C_1} \frac{\partial V}{\partial \phi}, \\ \dot{\xi} &= \zeta, \quad \dot{\zeta} = -3H\zeta - \frac{1}{C_2} \frac{\partial V}{\partial \xi}.\end{aligned}\tag{13}$$

Пусть поля ϕ и ξ стремятся к конечным пределам при $t \rightarrow +\infty$. Система (13) имеет фиксированную точку $y_f = (H_f, \phi_f, \psi_f, \xi_f, \zeta_f)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}H_f^2 &= \frac{8\pi G_N}{3} V(\phi_f, \xi_f), \\ \psi_f &= 0, \quad \zeta_f = 0, \\ V'_\phi &\equiv \frac{\partial V}{\partial \phi}(\phi_f, \xi_f) = 0, \quad V'_\xi \equiv \frac{\partial V}{\partial \xi}(\phi_f, \xi_f) = 0.\end{aligned}\tag{14}$$

Все фиксированные точки y_f соответствуют $\psi_f = 0$ и $\zeta_f = 0$. Мы обозначим фиксированную точку $y_f = (H_f, \phi_f, \psi_f, 0, 0)$ как $y_f = (H_f, \phi_f, \psi_f)$. Чтобы проанализировать устойчивость y_f , мы исследуем устойчивость этой фиксированной точки для соответствующей линеаризованной системы уравнений и используем теорему Ляпунова [26]. В окрестности точки y_f

$$\begin{aligned}H(t) &= H_f + \varepsilon h_1(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \phi(t) &= \phi_f + \varepsilon \phi_1(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \psi(t) &= \varepsilon \psi_1(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \xi(t) &= \xi_f + \varepsilon \xi_1(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \zeta(t) &= \varepsilon \zeta_1(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{15}$$

где ε – малый параметр. В первом порядке по ε мы получаем систему уравнений

$$\dot{h}_1(t) = -6H_f h_1(t),\tag{16}$$

$$\dot{\phi}_1(t) = \psi_1(t),\tag{17}$$

$$\dot{\psi}_1(t) = -3H_f \psi_1(t) - \frac{1}{C_1} (V''_{\phi\phi} \phi_1(t) + V''_{\phi\xi} \xi_1(t)),\tag{18}$$

$$\dot{\zeta}_1(t) = \zeta_1(t), \quad (19)$$

$$\dot{\zeta}_1(t) = -3H_f \zeta_1(t) - \frac{1}{C_2} (V''_{\xi\xi} \phi_1(t) + V''_{\xi\xi} \xi_1(t)), \quad (20)$$

где

$$V''_{\phi\phi} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}(\phi_f, \xi_f), \quad V''_{\xi\xi} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}(\phi_f, \xi_f), \quad V''_{\phi\xi} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \xi}(\phi_f, \xi_f).$$

Уравнение (16) имеет решение

$$h(t) = b_0 e^{-6H_f t}, \quad (21)$$

где b_0 – константа. Для асимптотической устойчивости фиксированной точки y_f необходимо, чтобы функция $h(t)$ стремилась к нулю при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, асимптотическая устойчивость требует выполнения условия $H_f > 0$.

Система четырех уравнений первого порядка (17)–(20) может быть записана как система двух уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_1(t) + 3H_f \dot{\phi}_1(t) + \frac{1}{C_1} (V''_{\phi\phi} \phi_1(t) + V''_{\phi\xi} \xi_1(t)) &= 0, \\ \ddot{\xi}_1(t) + 3H_f \dot{\xi}_1(t) + \frac{1}{C_2} (V''_{\phi\xi} \phi_1(t) + V''_{\xi\xi} \xi_1(t)) &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

В случае, когда $V''_{\phi\xi} = 0$, система уравнений (22) становится системой двух независимых уравнений второго порядка. Общее решение легко находится:

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \tilde{D}_1 \exp \left[- \left(\frac{3}{2} H_f - \frac{1}{2} \sqrt{9H_f^2 - 4 \frac{V''_{\phi\phi}}{C_1}} \right) t \right] + \\ &\quad + \tilde{D}_2 \exp \left[- \left(\frac{3}{2} H_f + \frac{1}{2} \sqrt{9H_f^2 - 4 \frac{V''_{\phi\phi}}{C_1}} \right) t \right] \quad \text{при } H_f^2 \neq \frac{4}{9} \frac{V''_{\phi\phi}}{C_1}, \\ \phi_1(t) &= (\tilde{D}_1 + \tilde{D}_2 t) e^{-3H_f t/2} \quad \text{при } H_f^2 = \frac{4}{9} \frac{V''_{\phi\phi}}{C_1}, \\ \xi_1(t) &= \tilde{D}_3 \exp \left[- \left(\frac{3}{2} H_f - \frac{1}{2} \sqrt{9H_f^2 - 4 \frac{V''_{\xi\xi}}{C_2}} \right) t \right] + \\ &\quad + \tilde{D}_4 \exp \left[- \left(\frac{3}{2} H_f + \frac{1}{2} \sqrt{9H_f^2 - 4 \frac{V''_{\xi\xi}}{C_2}} \right) t \right] \quad \text{при } H_f^2 \neq \frac{4}{9} \frac{V''_{\xi\xi}}{C_2}, \\ \xi_1(t) &= (\tilde{D}_3 + \tilde{D}_4 t) e^{-3H_f t/2} \quad \text{при } H_f^2 = \frac{4}{9} \frac{V''_{\xi\xi}}{C_2}, \end{aligned}$$

здесь и далее $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \tilde{D}_3, \tilde{D}_4$ – произвольные константы.

Для асимптотической устойчивости рассматриваемой фиксированной точки функции $\phi_1(t)$ и $\xi_1(t)$ должны стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$. При $V''_{\phi\xi} = 0$ достаточные условия асимптотической устойчивости имеют вид

$$H_f > 0, \quad \frac{V''_{\xi\xi}}{C_2} > 0, \quad \frac{V''_{\phi\phi}}{C_1} > 0. \quad (23)$$

Рассмотрим случай, когда $V''_{\phi\xi} \neq 0$.

1. При

$$V''_{\phi\xi}{}^2 \neq \frac{C_1 C_2}{16} \left(9H_f^2 - \frac{4V''_{\xi\xi}}{C_2} \right) \left(9H_f^2 - \frac{4V''_{\phi\phi}}{C_1} \right), \quad V''_{\phi\xi}{}^2 \neq -\frac{C_1 C_2}{4} \left(\frac{V''_{\xi\xi}}{C_2} - \frac{V''_{\phi\phi}}{C_1} \right)^2$$

получаем

$$\begin{aligned} \phi_1(t) = & \tilde{D}_1 \exp \left[- \left(\frac{3}{2} H_f + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_1 - 2\sqrt{\Delta_2}} \right) t \right] + \\ & + \tilde{D}_2 \exp \left[- \left(\frac{3}{2} H_f - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_1 - 2\sqrt{\Delta_2}} \right) t \right] + \\ & + \tilde{D}_3 \exp \left[- \left(\frac{3}{2} H_f + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_1 + 2\sqrt{\Delta_2}} \right) t \right] + \\ & + \tilde{D}_4 \exp \left[- \left(\frac{3}{2} H_f - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_1 + 2\sqrt{\Delta_2}} \right) t \right], \\ \xi_1(t) = & \frac{1}{2} \frac{C_1 V''_{\xi\xi} - C_2 V''_{\phi\phi} + \sqrt{(C_1 V''_{\xi\xi} - C_2 V''_{\phi\phi})^2 + 4V''_{\phi\xi}{}^2 C_1 C_2}}{C_2 V''_{\phi\xi}} \times \\ & \times \left\{ \tilde{D}_1 \exp \left[- \left(\frac{3}{2} H_f + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_1 - 2\sqrt{\Delta_2}} \right) t \right] + \right. \\ & + \tilde{D}_2 \exp \left[- \left(\frac{3}{2} H_f - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_1 - 2\sqrt{\Delta_2}} \right) t \right] \left. \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{C_1 V''_{\xi\xi} - C_2 V''_{\phi\phi} - \sqrt{(C_1 V''_{\xi\xi} - C_2 V''_{\phi\phi})^2 + 4C_1 C_2 V''_{\phi\xi}{}^2}}{C_2 V''_{\phi\xi}} \times \\ & \times \left\{ \tilde{D}_3 \exp \left[- \left(\frac{3}{2} H_f + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_1 + 2\sqrt{\Delta_2}} \right) t \right] + \right. \\ & + \tilde{D}_4 \exp \left[- \left(\frac{3}{2} H_f - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_1 + 2\sqrt{\Delta_2}} \right) t \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\Delta_1 = 9H_f^2 - 2\frac{V''_{\xi\xi}}{C_2} - 2\frac{V''_{\phi\phi}}{C_1}, \quad \Delta_2 = \left(\frac{V''_{\xi\xi}}{C_2} - \frac{V''_{\phi\phi}}{C_1} \right)^2 + 4\frac{V''_{\phi\xi}{}^2}{C_1 C_2}. \quad (25)$$

Достаточные условия асимптотической устойчивости имеют вид

$$H_f > 0, \quad \frac{V''_{\xi\xi}}{C_2} + \frac{V''_{\phi\phi}}{C_1} > 0, \quad \frac{V''_{\xi\xi}V''_{\phi\phi}}{C_1C_2} > \frac{V''_{\phi\xi}{}^2}{C_1C_2}. \quad (26)$$

2. В случае

$$V''_{\phi\xi}{}^2 = \frac{C_1C_2}{16} \left(9H_f^2 - \frac{4V''_{\xi\xi}}{C_2} \right) \left(9H_f^2 - \frac{4V''_{\phi\phi}}{C_1} \right), \quad V''_{\phi\xi}{}^2 \neq -\frac{C_1C_2}{4} \left(\frac{V''_{\xi\xi}}{C_2} - \frac{V''_{\phi\phi}}{C_1} \right)^2$$

справедливо неравенство $\Delta_1 \neq 0$ и система (22) имеет решение

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \tilde{D}_1 e^{-3H_f t/2} + \tilde{D}_2 e^{-3H_f t/2} t + \tilde{D}_3 \exp \left[\left(-\frac{3}{2} H_f + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\Delta_1} \right) t \right] + \\ &\quad + \tilde{D}_4 \exp \left[\left(-\frac{3}{2} H_f - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\Delta_1} \right) t \right], \\ \xi_1(t) &= \frac{C_1}{4V''_{\phi\xi}} \left\{ \left(9H_f^2 - \frac{4V''_{\phi\phi}}{C_1} \right) (\tilde{D}_1 e^{-3H_f t/2} + \tilde{D}_2 e^{-3H_f t/2} t) - \right. \\ &\quad - \left(9H_f^2 - \frac{4V''_{\xi\xi}}{C_2} \right) \left[\tilde{D}_3 \exp \left[\left(-\frac{3}{2} H_f + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\Delta_1} \right) t \right] + \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{D}_4 \exp \left[\left(-\frac{3}{2} H_f - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\Delta_1} \right) t \right] \right] \right\}. \end{aligned}$$

Легко получить, что достаточные условия асимптотической устойчивости рассматриваемой фиксированной точки в этом случае совпадают с (26).

3. В случае

$$V''_{\phi\xi}{}^2 = -\frac{C_1C_2}{4} \left(\frac{V''_{\xi\xi}}{C_2} - \frac{V''_{\phi\phi}}{C_1} \right)^2,$$

или, другими словами, $\Delta_2 = 0$, и

$$V''_{\phi\xi}{}^2 \neq \frac{C_1C_2}{16} \left(9H_f^2 - \frac{4V''_{\xi\xi}}{C_2} \right) \left(9H_f^2 - \frac{4V''_{\phi\phi}}{C_1} \right)$$

выполняется неравенство $\Delta_1 \neq 0$, поэтому

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= (\tilde{D}_1 + \tilde{D}_3 t) \exp \left[-\left(\frac{3}{2} H_f - \frac{\sqrt{\Delta_1}}{2} \right) t \right] + \\ &\quad + (\tilde{D}_2 + \tilde{D}_4 t) \exp \left[-\left(\frac{3}{2} H_f + \frac{\sqrt{\Delta_1}}{2} \right) t \right], \\ \xi_1(t) &= \frac{C_1}{\sqrt{-C_1C_2}} \left\{ \left(\tilde{D}_1 + \left(1 - \frac{C_1\sqrt{\Delta_1}}{V''_{\phi\xi}} \right) \tilde{D}_3 t \right) \exp \left[-\left(\frac{3}{2} H_f - \frac{\sqrt{\Delta_1}}{2} \right) t \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left(\tilde{D}_2 + \left(1 + \frac{C_1\sqrt{\Delta_1}}{V''_{\phi\xi}} \right) \tilde{D}_4 t \right) \exp \left[-\left(\frac{3}{2} H_f + \frac{\sqrt{\Delta_1}}{2} \right) t \right] \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Достаточные условия для асимптотической устойчивости рассматриваемой фиксированной точки следующие:

$$H_f > 0, \quad \frac{V''_{\xi\xi}}{C_2} + \frac{V''_{\phi\phi}}{C_1} > 0. \quad (28)$$

4. В случае

$$V''_{\phi\xi}{}^2 = \frac{C_1 C_2}{16} \left(9H_f^2 - \frac{4V''_{\xi\xi}}{C_2} \right) \left(9H_f^2 - \frac{4V''_{\phi\phi}}{C_1} \right), \quad V''_{\phi\xi}{}^2 = -\frac{C_1 C_2}{4} \left(\frac{V''_{\xi\xi}}{C_2} - \frac{V''_{\phi\phi}}{C_1} \right)^2$$

несложно проверить, что равенство $\Delta_1 = 0$ выполняется автоматически и

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= (\tilde{D}_1 + \tilde{D}_2 t + \tilde{D}_3 t^2 + \tilde{D}_4 t^3) e^{-3H_f t/2}, \\ \xi_1(t) &= \frac{C_1}{2V''_{\phi\xi}} \left\{ \tilde{D}_1 \left(\frac{V''_{\xi\xi}}{C_2} - \frac{V''_{\phi\phi}}{C_1} \right) + \tilde{D}_2 \left(\frac{V''_{\xi\xi}}{C_2} - \frac{V''_{\phi\phi}}{C_1} \right) t + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{D}_3 \left[\left(\frac{V''_{\xi\xi}}{C_2} - \frac{V''_{\phi\phi}}{C_1} \right) t^2 - 4 \right] + \tilde{D}_4 \left[\left(\frac{V''_{\xi\xi}}{C_2} - \frac{V''_{\phi\phi}}{C_1} \right) t^3 - 12t \right] \right\} e^{-3H_f t/2}. \end{aligned}$$

Для асимптотической устойчивости рассматриваемой фиксированной точки достаточно выполнения неравенства $H_f > 0$.

Таким образом, мы получили, что в случае $V''_{\phi\xi} \neq 0$ условия (26) являются достаточными условиями асимптотической устойчивости фиксированной точки $y_f = (H_f, \phi_f, \psi_f)$ системы уравнений (13). Как несложно видеть, условия (23), полученные в случае $V''_{\phi\xi} = 0$, эквивалентны условиям (26), если подставить в них $V''_{\phi\xi} = 0$. Следовательно, в общем случае, включающем в себя все частные случаи с определенными соотношениями между параметрами, достаточные условия асимптотической устойчивости фиксированной точки $y_f = (H_f, \phi_f, \psi_f)$ системы (13) имеют вид (26).

Добавим холодную темную материю в нашу модель. Однополевые модели с холодной темной материей в метрике Бьянки I были рассмотрены в работе [25]. Обобщение на случай двухполевых моделей достаточно тривиально, поэтому укажем лишь наиболее важные шаги. Если добавить в рассмотрение плотность энергии холодной темной материи ρ_m , то система уравнений (13) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= -3H^2 + 8\pi G_N (V(\phi, \xi) + \rho_m), \\ \dot{\phi} &= \psi, \quad \dot{\xi} = \zeta, \\ \dot{\psi} &= -3H\psi - \frac{1}{C_1} \frac{\partial V}{\partial \phi}, \\ \dot{\zeta} &= -3H\zeta - \frac{1}{C_2} \frac{\partial V}{\partial \xi}, \\ \dot{\rho}_m &= -3H\rho_m. \end{aligned} \quad (29)$$

Рассмотрим возможные фиксированные точки системы уравнений (29). Из последнего уравнения этой системы следует, что в фиксированной точке либо $H_f = 0$, либо $\rho_{mf} = 0$. Подставляя (15) и

$$\rho_m(t) = \rho_{mf} + \varepsilon \tilde{\rho}_m(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (30)$$

в систему уравнений (29), мы получаем следующую систему уравнений в первом порядке по ε :

$$\dot{h}(t) = -6H_f h(t) + 8\pi G_N \tilde{\rho}_m(t), \quad (31)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_m(t) = -3H_f \tilde{\rho}_m(t) - 3\rho_{mf} h(t), \quad (32)$$

$$\dot{\phi}_1(t) = \psi_1(t), \quad \dot{\xi}_1(t) = \zeta_1(t), \quad (33)$$

$$\dot{\psi}_1(t) = -3H_f \psi_1(t) - \frac{1}{C_1} (V''_{\phi\phi} \phi_1(t) + V''_{\phi\xi} \xi_1(t)), \quad (34)$$

$$\dot{\zeta}_1(t) = -3H_f \zeta_1(t) - \frac{1}{C_2} (V''_{\xi\phi} \phi_1(t) + V''_{\xi\xi} \xi_1(t)). \quad (35)$$

Нетрудно увидеть, что уравнения (33)–(35) совпадают с уравнениями (17)–(20). Следовательно, случай $H_f = 0$ не может быть проанализирован с помощью теоремы Ляпунова. Докажем, что условия (26) являются достаточными для устойчивости фиксированных точек в моделях с холодной темной материей. Прежде всего, из $H_f \neq 0$ следует, что $\rho_{mf} = 0$. Решая уравнения (31)–(33), мы получаем

$$\tilde{\rho}_m(t) = b_1 e^{-3H_f t}, \quad h(t) = b_0 e^{-6H_f t} + \frac{b_1}{3H_f} e^{-3H_f t}, \quad (36)$$

где b_0 и b_1 – произвольные константы. Мы приходим к выводу, что если условия (26) выполнены, то решение системы (29) является устойчивым.

В работе [10] рассматривалась устойчивость фиксированных точек в квинтомных моделях ($C_1 = -1$, $C_2 = 1$) с произвольным потенциалом в метрике Фридмана–Робертсона–Уокера. Авторы представили уравнения Эйнштейна в виде динамической системы, введя нормализованные переменные [28]

$$x_\phi = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}H}, \quad x_\xi = \frac{\dot{\xi}}{\sqrt{6}H}, \quad y = \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{3}H},$$

и рассмотрели систему дифференциальных уравнений с дифференцированием по новой переменной $\tau = \ln a^3$ вместо t . В настоящей работе продемонстрировано, что такая замена переменных не является необходимой, поскольку условия устойчивости могут быть найдены в исходных переменных.

Исходя из физических соображений авторы работы [10] предположили, что $H_f > 0$. Мы показали, что условие $H_f < 0$ достаточно для неустойчивости фиксированной точки. Заметим, что случай $H_f = 0$, или, что эквивалентно, $V(\phi_f, \xi_f) = 0$, не проанализирован ни в работе [10], ни в настоящей статье. В случае $H_f > 0$ и мы, и авторы работы [10] получили одинаковые условия на потенциал, которые гарантируют устойчивость фиксированной точки. Мы доказали, что полученные условия являются достаточными для устойчивости не только в метрике Фридмана–Робертсона–Уокера, но и в метрике Бьянки I.

3. ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ МЕТОДОМ СУПЕРПОТЕНЦИАЛА

3.1. Суперпотенциал для моделей с двумя полями. Рассмотрим метод суперпотенциала [29] (см. также [30], [31]) для моделей с двумя скалярными полями. Предположим, что параметр Хаббла $H(t)$ является функцией (суперпотенциалом) от $\phi(t)$ и $\xi(t)$:

$$H(t) = W(\phi(t), \xi(t)), \quad (37)$$

при этом функции $\phi(t)$ и $\xi(t)$ – решения следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\phi} = F(\phi, \xi), \quad \dot{\xi} = G(\phi, \xi). \quad (38)$$

Поскольку

$$\ddot{\phi} = \frac{\partial F}{\partial \phi} F + \frac{\partial F}{\partial \xi} G, \quad \ddot{\xi} = \frac{\partial G}{\partial \phi} F + \frac{\partial G}{\partial \xi} G, \quad (39)$$

то уравнения Фридмана получаются в следующем виде:

$$3W^2 = 8\pi G_N \left(\frac{C_1}{2} F^2 + \frac{C_2}{2} G^2 + V \right), \quad (40)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \phi} F + \frac{\partial W}{\partial \xi} G = -4\pi G_N (C_1 F^2 + C_2 G^2), \quad (41)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} F + \frac{\partial F}{\partial \xi} G + 3WF + \frac{1}{C_1} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (42)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \phi} F + \frac{\partial G}{\partial \xi} G + 3WG + \frac{1}{C_2} \frac{\partial V}{\partial \xi} = 0. \quad (43)$$

Из (40) и (42) получаем

$$G \left(\frac{C_2}{C_1} \frac{\partial G}{\partial \phi} - \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) = 3W \left(\frac{1}{4\pi G_N C_1} \frac{\partial W}{\partial \phi} + F \right). \quad (44)$$

Также легко получить

$$F \left(\frac{C_1}{C_2} \frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{\partial G}{\partial \phi} \right) = 3W \left(\frac{1}{4\pi G_N C_2} \frac{\partial W}{\partial \xi} + G \right). \quad (45)$$

Пусть функции F и G удовлетворяют условию

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{C_2}{C_1} \frac{\partial G}{\partial \phi}, \quad (46)$$

тогда

$$\frac{\partial W}{\partial \phi} = -4\pi G_N C_1 F, \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} = -4\pi G_N C_2 G. \quad (47)$$

Отметим, что, используя (46) и (47), легко удостовериться в выполнении равенства

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \phi \partial \xi} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \phi}.$$

Таким образом, для получения частных решений системы (6)–(9) достаточно потребовать выполнения условий

$$\frac{\partial W}{\partial \phi} = -4\pi G_N C_1 \dot{\phi}, \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} = -4\pi G_N C_2 \dot{\xi}, \quad (48)$$

$$V = \frac{3}{8\pi G_N} W^2 - \frac{1}{32\pi^2 G_N^2} \left(\frac{1}{C_1} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{C_2} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 \right). \quad (49)$$

3.2. Условия устойчивости в методе суперпотенциала. Получим условия на суперпотенциал W , которые являются эквивалентными условиям (26) для соответствующего потенциала V . В неподвижной точке $y_f = (H_f, \phi_f, \psi_f)$

$$W_f \equiv W(\phi_f, \xi_f) = H_f, \quad W'_\phi \equiv \frac{\partial W}{\partial \phi}(\phi_f, \xi_f) = 0, \quad W'_\xi \equiv \frac{\partial W}{\partial \xi}(\phi_f, \xi_f) = 0. \quad (50)$$

Как легко видеть, из условий (50) следует $V'_\phi = 0$, $V'_\xi = 0$, а также

$$\begin{aligned} V''_{\phi\phi} &= \frac{1}{16C_1 C_2 \pi^2 G_N^2} (12C_1 C_2 \pi G_N W_f W''_{\phi\phi} - C_2 (W''_{\phi\phi})^2 - C_1 (W''_{\phi\xi})^2), \\ V''_{\xi\xi} &= \frac{1}{16C_1 C_2 \pi^2 G_N^2} (12C_1 C_2 \pi G_N W_f W''_{\xi\xi} - C_1 (W''_{\xi\xi})^2 - C_2 (W''_{\phi\xi})^2), \\ V''_{\phi\xi} &= \frac{1}{16C_1 C_2 \pi^2 G_N^2} W''_{\phi\xi} (12C_1 C_2 \pi G_N W_f - C_2 W''_{\phi\phi} - C_1 W''_{\xi\xi}). \end{aligned} \quad (51)$$

Условие $H_f > 0$ переписывается как $W_f > 0$. Если $W''_{\phi\xi} = 0$, то и $V''_{\phi\xi} = 0$, и условия (23) принимают вид¹⁾

$$(12\pi G_N C_1 W_f - W''_{\phi\phi})W''_{\phi\phi} > 0, \quad (12\pi G_N C_2 W_f - W''_{\xi\xi})W''_{\xi\xi} > 0. \quad (52)$$

В общем случае условия (26) получаются в следующем виде:

$$\begin{aligned} 12C_1 C_2 \pi G_N (C_2 W''_{\phi\phi} + C_1 W''_{\xi\xi}) W_f &> C_2^2 (W''_{\phi\phi})^2 + 2C_1 C_2 (W''_{\phi\xi})^2 + C_1^2 (W''_{\xi\xi})^2, \\ (144C_1 C_2 \pi^2 G_N^2 W_f^2 - 12C_1 C_2 \pi G_N (C_2 W''_{\phi\phi} + C_1 W''_{\xi\xi}) W_f + \\ &+ W''_{\xi\xi} W''_{\phi\phi} - (W''_{\phi\xi})^2) (W''_{\xi\xi} W''_{\phi\phi} - (W''_{\phi\xi})^2) > 0. \end{aligned}$$

4. СТРУННЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

4.1. Квинтомная модель с потенциалом шестой степени. Интерес к космологическим моделям, связанным с полевой теорией открытых струн [32], вызван возможностью получения решений, описывающих переходы из возмущенного вакуума в истинный (так называемые роллинговые решения [33]). После того как все массивные поля (или часть низших массивных полей) проинтегрированы с помощью уравнений движения, тахион открытой струны приобретает потенциал с нетривиальным вакуумом, соответствующим минимуму энергии. Модель темной энергии [32] (см. также [31], [34], [9]) предполагает, что наша Вселенная представляет собой медленно распадающуюся D3-брану, динамика которой описывается модой тахиона открытой струны. Для открытой фермионной струны Невё-Шварца-Рамона с GSO(−)-сектором [35] используется приближение потенциала тахионного поля в виде “мексиканской шляпы” (см. обзор [36]). Движение тахиона из нестабильного вакуума к стабильному описывает, согласно гипотезе Сена [36], переход D-браны в истинный вакуум. Фактически получается нелокальный потенциал с параметром нелокальности, определяемым струнным масштабом. С помощью подходящего переопределения полей потенциал можно сделать локальным, при этом кинетический член становится нелокальным. Этот нестандартный кинетический член приводит к поведению нелокального поля, подобному поведению фантомного поля, и может быть приближен фантомным кинетическим членом²⁾. Таким образом, поведение тахиона открытой струны эффективно моделируется скалярным полем с отрицательным кинетическим членом [38]. Обратная реакция браны определяется динамикой тахиона замкнутой струны, которая эффективно описывается с помощью локального скалярного поля ξ со стандартным кинетическим членом [39] и, возможно,

¹⁾Для рассмотренных в работе [25] однополевых моделей с потенциалом $V(\phi)$ условия устойчивости (формула (55) статьи [25]) также могут быть записаны в виде условий на суперпотенциал. Первое из условий (52) соответствует условию на потенциал однополевой модели $V(\phi)$ при $C_1 = C$.

²⁾Отметим, что квинтомные модели могут быть получены и из нелокальных космологических моделей с квадратичным потенциалом [37].

неполиномиальным самодействием [40]. Точная форма взаимодействия открытых и замкнутых струн неизвестна, поэтому, следуя статье [9], мы рассматриваем простейшее полиномиальное взаимодействие.

В работах [9], [27] были построены квинтомные модели ($C_1 = -C_2 < 0$) с эффективным потенциалом $V(\phi, \xi)$. Форма потенциала определяется с помощью метода обрезания по уровням из действия полевой теории струн, при этом постулируется, что потенциал является полиномом. Конкретно, мы полагаем, что $V(\phi, \xi)$ – это четный полином шестой степени:

$$V(\phi, \xi) = \sum_{k=0}^6 \sum_{j=0}^{6-k} c_{kj} \phi^k \xi^j, \quad V(\phi, \xi) = V(-\phi, -\xi), \quad (53)$$

т.е. $c_{kj} = 0$, если сумма $k + j$ нечетна. Из струнной теории поля также получаются асимптотические условия на решения [9], [27]. А именно, мы ищем функцию $\phi(t)$, обладающую ненулевой асимптотикой при $t \rightarrow +\infty$: $\phi(+\infty) = A$. Функция $\xi(t)$ должна стремиться к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Другими словами, мы анализируем устойчивость решений, стремящихся к фиксированной точке с $\phi_f = A$ и $\xi_f = 0$.

4.2. Построение стабильных решений. Пусть существует полиномиальный суперпотенциал $W(\phi, \xi)$, определяющий потенциал вида (53) по формуле (49). Очевидно, что $W(\phi, \xi)$ должен быть полиномом третьей степени следующего вида:

$$W_3(\phi, \xi) = 4\pi G_N (a_{1,0}\phi + a_{3,0}\phi^3 + a_{0,1}\xi + a_{0,3}\xi^3 + a_{2,1}\phi^2\xi + a_{1,2}\phi\xi^2), \quad (54)$$

где $a_{i,j}$ – константы. Для W_3 получаем систему (48) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{1}{C_2} (a_{1,0} + 3a_{3,0}\phi^2 + 2a_{2,1}\phi\xi + a_{1,2}\xi^2), \\ \dot{\xi} &= -\frac{1}{C_2} (a_{0,1} + 3a_{0,3}\xi^2 + a_{2,1}\phi^2 + 2a_{1,2}\phi\xi). \end{aligned} \quad (55)$$

Используя асимптотические условия $\phi(+\infty) = A$, $\xi(+\infty) = 0$, $\dot{\phi}(+\infty) = 0$, $\dot{\xi}(+\infty) = 0$, получаем

$$a_{1,0} = -3a_{3,0}A^2, \quad a_{0,1} = -a_{2,1}A^2. \quad (56)$$

Следовательно, система (55) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{1}{C_2} (3a_{3,0}(\phi^2 - A^2) + 2a_{2,1}\phi\xi + a_{1,2}\xi^2), \\ \dot{\xi} &= -\frac{1}{C_2} (a_{2,1}(\phi^2 - A^2) + 3a_{0,3}\xi^2 + 2a_{1,2}\phi\xi). \end{aligned} \quad (57)$$

В фиксированной точке $\phi_f = A$, $\xi_f = 0$ имеем $W_f = -8\pi G_N a_{3,0} A^3$. Условие $W_f > 0$ эквивалентно условию $a_{3,0} A < 0$. Как легко показать,

$$W''_{\phi\phi} = 24\pi G_N a_{3,0} A, \quad W''_{\xi\xi} = 8\pi G_N a_{1,2} A, \quad W''_{\phi\xi} = 8\pi G_N a_{2,1} A. \quad (58)$$

Используя (51), получаем

$$\begin{aligned} V''_{\phi\phi} &= \frac{4A^2}{C_2} (9(1 - 4\pi G_N C_2 A^2) a_{3,0}^2 - a_{2,1}^2), \\ V''_{\xi\xi} &= \frac{4A^2}{C_2} (a_{2,1}^2 - a_{1,2}^2 - 12\pi G_N C_2 A^2 a_{3,0} a_{1,2}), \\ V''_{\phi\xi} &= \frac{4A^2 a_{2,1}}{C_2} (3(1 - 4\pi G_N C_2 A^2) a_{3,0} - a_{1,2}). \end{aligned} \quad (59)$$

Если $a_{2,1} = 0$, то $V''_{\phi\xi} = 0$ и достаточные условия устойчивости суть

$$a_{3,0} A < 0, \quad 4\pi G_N C_2 A^2 > 1, \quad a_{1,2} (a_{1,2} + 12\pi G_N C_2 a_{3,0} A^2) < 0. \quad (60)$$

При $a_{2,1} \neq 0$ условия (26) равносильны следующим:

$$\begin{aligned} a_{3,0} A &< 0, \\ 2a_{2,1}^2 - a_{1,2}^2 - 12\pi G_N C_2 A^2 a_{3,0} a_{1,2} + 9(4\pi G_N C_2 A^2 - 1) a_{3,0}^2 &> 0, \\ (3a_{3,0} a_{1,2} - a_{2,1}^2) (3(4\pi G_N A^2 C_2 - 1) a_{3,0} a_{1,2} - \\ - 36\pi G_N A^2 C_2 (4\pi G_N A^2 C_2 - 1) a_{3,0}^2 + a_{2,1}^2) &< 0. \end{aligned} \quad (61)$$

4.3. Примеры стабильных точных решений. Случай суперпотенциала $W(\phi, \xi)$ с $a_{2,1} = 0$ и $a_{0,3} = 0$ был рассмотрен в работе [9]. В этом случае система (57) имеет вид

$$\phi = -\frac{C_2}{2a_{1,2}} \frac{\dot{\xi}}{\xi}, \quad (62)$$

$$\ddot{\xi} = \frac{2a_{1,2} - 3a_{3,0}}{2a_{1,2}\xi} \dot{\xi}^2 + \frac{2a_{1,2}}{C_2^2} \xi (3a_{3,0} A^2 - a_{1,2} \xi^2). \quad (63)$$

Уравнение (63) интегрируется в квадратурах:

$$\int \frac{\sqrt{\xi^{3B-2} (3B+2) C_2}}{\sqrt{(12BA^2 + 8A^2 - 4\xi^2) \xi^{3B} a_{1,2}^2 + (3B+2) C_2^2 D_1}} d\xi = \pm(t - t_0), \quad (64)$$

где D_1 и t_0 – произвольные константы, $B = a_{3,0}/a_{1,2}$.

При $B = -1/3$, $a_{2,1} = 0$ и $a_{0,3} = 0$ общее решение системы (57) может быть получено в явном виде [27]:

$$\phi_s(t) = \frac{A(C_2^2 e^{4a_{1,2}At/C_2} - 64a_{1,2}^4 C_2^2 A^2 D_1^2 - 4a_{1,2}^2 A^2 D_2^2)}{(C_2 e^{2a_{1,2}At/C_2} - 2D_2 a_{1,2} A)^2 + 64D_1^2 a_{1,2}^4 C_2^2 A^2}, \quad (65)$$

$$\xi_s(t) = \frac{16D_1 C_2^2 a_{1,2}^2 A^2 e^{2a_{1,2}At/C_2}}{(C_2 e^{2a_{1,2}At/C_2} - 2D_2 a_{1,2} A)^2 + 64D_1^2 a_{1,2}^4 C_2^2 A^2}. \quad (66)$$

Функции $\phi_s(t)$ и $\xi_s(t)$ являются непрерывными функциями, стремящимися к фиксированной точке при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, полученное точное решение является притягивающим тогда и только тогда, когда эта фиксированная точка асимптотически стабильна. Рассмотрим устойчивость фиксированных точек с $\phi_f = A$ и $\xi_f = 0$. При $a_{3,0} = -a_{1,2}/3$ мы получаем, что три условия (60) трансформируются в два независимых условия

$$a_{1,2}A > 0, \quad C_2 > \frac{1}{4\pi G_N A^2}. \quad (67)$$

Из этих условий следует $a_{1,2}A/C_2 > 0$.

Проанализируем устойчивость решений в терминах статьи [27], где рассмотрена модель с плотностью энергии

$$\rho = \frac{8\pi G_N}{m_p^2} \left(-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\xi^2 + V_1 \right), \quad (68)$$

где $m_p^2 = g_o/(8\pi G_N M_s^2)$, g_o – константа взаимодействия открытых струн, M_s – характерная масса струны,

$$V_1 = \frac{\omega^2}{8A^2} \left((A^2 - \phi^2 + \xi^2)^2 - 4\phi^2 \xi^2 + \frac{1}{6m_p^2} \phi^2 (3A^2 - \phi^2 + 3\xi^2)^2 \right), \quad (69)$$

где ω – ненулевая константа.

Таким образом, получаем $C_2 = M_s^2/g_o$ и потенциал

$$V_s = \frac{1}{8\pi G_N m_p^2} V_1 = \frac{M_s^2}{g_o} V_1, \quad (70)$$

соответствующий суперпотенциалу

$$W_s = 4\pi G_N \omega \phi \left(A \left(\frac{1}{2} - \frac{\phi^2}{6A^2} \right) + \frac{\xi^2}{2A} \right). \quad (71)$$

Данный выбор соответствует $a_{1,2} = \omega/(2A)$. Следовательно, условия устойчивости примут вид

$$\omega > 0, \quad 4\pi G_N A^2 M_s^2 > g_o. \quad (72)$$

Таким образом, точные решения, полученные в работе [27], стабильны при достаточно больших A .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы проанализировали устойчивость изотропных решений в метрике Бьянки I для двухполевых моделей. Используя теорему Ляпунова, мы нашли достаточные условия устойчивости изотропных решений, стремящихся к конечным пределам, в метрике Бьянки I для этих моделей. Полученные результаты позволяют доказать, что точные решения, найденные в квинтомных моделях [9], [27], устойчивы.

Изучение устойчивости изотропных решений в квинтомных моделях в метрике Бьянки I показывает, что изотропное энергетическое условие не является необходимым для классической устойчивости изотропных решений. Мы показали, что модели, рассмотренные в работах [9], [27], имеют устойчивые изотропные решения. Это означает, что рассмотренные модели не нарушают ограничения на анизотропные модели, полученные из наблюдений [2].

Предложен алгоритм построения изотропных точных устойчивых решений, стремящихся к конечным пределам, с помощью метода суперпотенциала и сформулированы условия устойчивости в терминах суперпотенциала для двухполевых моделей.

Благодарности. Работа частично поддержана Российским федеральным агентством по науке и инновациям (контракт № 02.740.11.5057) и РФФИ (грант № 08-01-00798). Работа И. Я. Арефьевой частично финансировалась за счет гранта поддержки ведущих научных школ НШ-795.2008.1, а работа С. Ю. Вернова – за счет гранта поддержки ведущих научных школ НШ-1456.2008.2.

Список литературы

- [1] A. G. Riess et al. (Team Collab.), *J. Astrophys.*, **607**:2 (2004), 665–687; [arXiv: astro-ph/0402512](#); M. Tegmark et al. (SDSS Collab.), *J. Astrophys.*, **606**:2 (2004), 702–740; [arXiv: astro-ph/0310725](#); E. Komatsu et al. (WMAP Collab.), *J. Astrophys. Suppl.*, **180**:2 (2009), 330–376; [arXiv: 0803.0547](#); P. Astier et al., *Astron. Astrophys.*, **447**:1 (2006), 31–48; [arXiv: astro-ph/0510447](#); Shirley Ho, Ch. Hirata, N. Padmanabhan, U. Seljak, N. Bahcall, *Phys. Rev. D*, **78**:4 (2008), 043519; [arXiv: 0801.0642](#); W. M. Wood-Vasey et al. (ESSENCE Collab.), *J. Astrophys.*, **666**:2 (2007), 694–715; [arXiv: astro-ph/0701041](#); D. Baumann et al. (Team Collab.), “Probing inflation with CMB polarization”, *CMB Polarization workshop: theory and foregrounds: CMBPol mission concept*, AIP Conf. Proc., **1141**, eds. S. Dodelson, D. Baumann, A. Cooray et al., AIP, Melville, NY, 2009, 10–120; [arXiv: 0811.3919](#).
- [2] J. D. Barrow, *Phys. Rev. D*, **55**:12 (1997), 7451–7460; [arXiv: gr-qc/9701038](#); A. Bernui, B. Mota, M. J. Rebouças, R. Tavakol, *Astron. Astrophys.*, **464**:2 (2007), 479–485; [arXiv: astro-ph/0511666](#).

- [3] U. Alam, V. Sahni, T.D. Saina, A. A. Starobinsky, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **354**:1 (2004), 275–291; [arXiv: astro-ph/0311364](#).
- [4] S. Nesseris, L. Perivolaropoulos, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, **01** (2007), 018; [arXiv: astro-ph/0610092](#); Jingfei Zhang, Yuan-Xing Gui, *Reconstructing quintom from WMAP 5-year observations: Generalized ghost condensate*, [arXiv: 0910.1200](#).
- [5] Yi-Fu Cai, E. N. Saridakis, M. R. Setare, Jun-Qing Xia, *Quintom cosmology: theoretical implications and observations*, [arXiv: 0909.2776](#); Hongsheng Zhang, *Crossing the phantom divide*, [arXiv: 0909.3013](#).
- [6] С. Хокинг, Дж. Эллис, *Крупномасштабная структура пространства-времени*, Мир, М., 1977.
- [7] P. J. Steinhardt, N. Turok, *Phys. Rev. D*, **65**:12 (2002), 126003; [arXiv: hep-th/0111098](#); M. Gasperini, G. Veneziano, *Phys. Rept.*, **373**:1–2 (2003), 1–212; [arXiv: hep-th/0207130](#).
- [8] Zong-Kuan Guo, Yun-Song Piao, Xinmin Zhang, Yuan-Zhong Zhang, *Phys. Lett. B*, **608**:3–4 (2005), 177–182; [arXiv: astro-ph/0410654](#).
- [9] I. Ya. Aref'eva, A. S. Koshelev, S. Yu. Vernov, *Phys. Rev. D*, **72**:6 (2005), 064017; [arXiv: astro-ph/0507067](#).
- [10] R. Lazkoz, G. León, I. Quiros, *Phys. Lett. B*, **649**:2–3 (2007), 103–110; [arXiv: astro-ph/0701353](#).
- [11] R. Lazkoz, G. León, *Phys. Lett. B*, **638**:4 (2006), 303–309; [arXiv: astro-ph/0602590](#); G. León, R. Cardenas, J. L. Morales, *Equilibrium sets in quintom cosmologies: the past asymptotic dynamics*, [arXiv: 0812.0830](#).
- [12] J. Sadeghi, M. R. Setare, A. Banijamali, *Phys. Lett. B*, **678**:2 (2009), 164–167; [arXiv: 0903.4073](#); M. R. Setare, E. N. Saridakis, *Phys. Rev. D*, **79**:4 (2009), 043005; [arXiv: 0810.4775](#); M. R. Setare, E. N. Saridakis, *Internat. J. Modern Phys. D*, **18**:4 (2009), 549–557; [arXiv: 0807.3807](#); H. M. Sadjadi, M. Alimohammadi, *Phys. Rev. D*, **74**:4 (2006), 043506; [arXiv: gr-qc/0605143](#); M. Alimohammadi, *Gen. Rel. Grav.*, **40**:1 (2008), 107–115; [arXiv: 0706.1360](#); Wen Zhao, Yang Zhang, *Phys. Rev. D*, **73**:12 (2006), 123509; [arXiv: astro-ph/0604460](#); Zong-Kuan Guo, Yun-Song Piao, Xinmin Zhang, Yuan-Zhong Zhang, *Phys. Lett. B*, **608**:3–4 (2005), 177–182; [arXiv: astro-ph/0410654](#); Xiao-Fei Zhang, Hong Li, Xinmin Zhang, Yun-Song Piao, *Modern Phys. Lett. A*, **21**:3 (2006), 231–241; [arXiv: astro-ph/0501652](#); H. Štefančić, *Phys. Rev. D*, **71**:12 (2005), 124036; [arXiv: astro-ph/0504518](#); E. Elizalde, Sh. Nojiri, S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D*, **70**:4 (2004), 043539; [arXiv: hep-th/0405034](#); Yi-Fu Cai, Hong Li, Yun-Song Piao, Xinmin Zhang, *Phys. Lett. B*, **646**:4 (2007), 141–144; [arXiv: gr-qc/0609039](#); Yi-Fu Cai, Taotao Qiu, Yun-Song Piao, Mingzhe Li, Xinmin Zhang, *JHEP*, **10** (2007), 071; [arXiv: 0704.1090](#); Xin Zhang, *Phys. Rev. D*, **74**:10 (2006), 103505; [arXiv: astro-ph/0609699](#).
- [13] И. Я. Арефьева, И. В. Волович, *ТМФ*, **155**:1 (2008), 3–12; [arXiv: hep-th/0612098](#); R. Kallosh, J. U. Kang, A. Linde, V. Mukhanov, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, **04** (2008), 018; [arXiv: 0712.2040](#).
- [14] S. Weinberg, *Phys. Rev. D*, **77**:12 (2008), 123541; [arXiv: 0804.4291](#); J. Z. Simon, *Phys. Rev. D*, **41**:12 (1990), 3720–3733; P. Creminelli, G. D'Amico, J. Noreña, F. Vernizzi, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, **02** (2009), 018; [arXiv: 0811.0827](#).
- [15] Z.-K. Guo, Y.-S. Piao, Y.-Zh. Zhang, *Phys. Lett. B*, **594**:3–4 (2004), 247–251; [arXiv: astro-ph/0404225](#).
- [16] I. Ya. Aref'eva, A. S. Koshelev, S. Yu. Vernov, *Phys. Lett. B*, **628**:1–2 (2005), 1–10; [arXiv: astro-ph/0505605](#).
- [17] А. А. Старобинский, *Письма в ЖЭТФ*, **37**:1 (1983), 55–58; V. Müller, H. J. Schmidt, A. A. Starobinsky, *Class. Quant. Grav.*, **7**:7 (1990), 1163–1168.
- [18] L. Bianchi, *Mem. Soc. Ital. delle Scienze* (3), **11** (1898), 267–352; *Gen. Rel. Grav.*, **33**:12 (2001), 2171–2253; L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, Spoerri, Pisa, 1918.

- [19] G.F.R. Ellis, H. van Elst, “Cosmological models”, *Theoretical and Observational Cosmology. Proceedings of the NATO ASI*, NATO Adv. Study Inst. Ser. C, **541**, ed. M. Lachièze-Rey, Kluwer, Boston, 1999, 1–116; [arXiv: gr-qc/9812046](#); G.F.R. Ellis, *Gen. Rel. Grav.*, **38**:6 (2006), 1003–1015.
- [20] J. Wainwright, G.F.R. Ellis (eds.), *Dynamical Systems in Cosmology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [21] C. Germani, A. Kehagias, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, **03** (2009), 028; [arXiv: 0902.3667](#); T.S. Koivisto, D.F. Mota, C. Pitrou, *JHEP*, **09** (2009), 092; [arXiv: 0903.4158](#).
- [22] R.M. Wald, *Phys. Rev. D*, **28**:8 (1983), 2118–2120.
- [23] I. Moss, V. Sahni, *Phys. Lett. B*, **178**:2–3 (1986), 159–162; J. Wainwright, L. Hsu, *Class. Quant. Grav.*, **6**:10 (1989), 1409–1431; A.A. Coley, J. Wainwright, L. Hsu, *Class. Quant. Grav.*, **9**:3 (1992), 651–665; Yu. Kitada, K. Maeda, *Phys. Rev. D*, **45**:4 (1992), 1416–1419; Yu. Kitada, K. Maeda, *Class. Quant. Grav.*, **10**:4 (1993), 703–734; A.D. Rendall, “Mathematical properties of cosmological models with accelerated expansion”, *Analytical and Numerical Approaches to Mathematical Relativity*, Lecture Notes Phys., **692**, eds. J. Frauendiener, D.J.W. Giulini, V. Perlick, Springer, Berlin, 2006, 141–155; [arXiv: gr-qc/0408053](#).
- [24] T.S. Pereira, C. Pitrou, J.-P. Uzan, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, **09** (2007), 006; [arXiv: 0707.0736](#).
- [25] I. Ya. Aref’eva, N. V. Bulatov, L. V. Joukovskaya, S. Yu. Vernov, *Phys. Rev. D*, **80**:8 (2009), 083532; [arXiv: 0903.5264](#).
- [26] А. М. Ляпунов, *Общая задача об устойчивости движения*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950; Л. С. Понтрягин, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1982.
- [27] С. Ю. Вернов, *ТМФ*, **155**:1 (2008), 47–61; [arXiv: astro-ph/0612487](#).
- [28] J. Wainwright, W.C. Lim, *J. Hyperbolic Differ. Equat.*, **2**:2 (2005), 437–469; [arXiv: gr-qc/0409082](#).
- [29] O. DeWolfe, D.Z. Freedman, S.S. Gubser, A. Karch, *Phys. Rev. D*, **62**:4 (2000), 046008; [arXiv: hep-th/9909134](#).
- [30] A. G. Muslimov, *Class. Quant. Grav.*, **7**:2 (1990), 231–237; D.S. Salopek, J.R. Bond, *Phys. Rev. D*, **42**:12 (1990), 3936–3962; A.R. Liddle, D.H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000; D. Bazeia, M.J. dos Santos, R.F. Ribeiro, *Phys. Lett. A*, **208**:1–2 (1995), 84–88; [arXiv: hep-th/0311265](#); A. Brandhuber, K. Sfetsos, *JHEP*, **10** (1999), 013; [arXiv: hep-th/9908116](#); D. Bazeia, C.B. Gomes, L. Losano, R. Menezes, *Phys. Lett. B*, **633**:4–5 (2006), 415–419; [arXiv: astro-ph/0512197](#); K. Skenderis, P.K. Townsend, *Phys. Rev. D*, **74**:12 (2006), 125008; [arXiv: hep-th/0609056](#); D. Bazeia, L. Losano, J.J. Rodrigues, *First-order formalism for scalar field in cosmology*, [arXiv: hep-th/0610028](#); A.S. Mikhailov, Yu.S. Mikhailov, M.N. Smolyakov, I.P. Volobuev, *Class. Quant. Grav.*, **24**:1 (2007), 231–242; [arXiv: hep-th/0602143](#); P.K. Townsend, *Class. Quant. Grav.*, **25**:4 (2008), 045017; [arXiv: 0710.5178](#).
- [31] И. Я. Арефьева, С. Ю. Вернов, А. С. Кошелев, *ТМФ*, **148**:1 (2006), 23–41; [arXiv: astro-ph/0412619](#).
- [32] I. Ya. Aref’eva, “Nonlocal string tachyon as a model for cosmological dark energy”, *p-Adic Mathematical Physics*, AIP Conf. Proc., **826**, eds. A. Yu. Khrennikov, Z. Rakić, I. V. Volovich, AIP, Melville, NY, 2006, 301–311; [arXiv: astro-ph/0410443](#); I. Ya. Aref’eva, “Stringy model of cosmological dark energy”, *Particles, Strings, and Cosmology*, AIP Conf. Proc., **957**, eds. A. Rajantie, P. Dauncey, C. Contaldi, H. Stoica, AIP, Melville, NY, 2007, 297–300; [arXiv: 0710.3017](#).
- [33] И. Я. Арефьева, *ТМФ*, **163**:3 (2010), 355–365.
- [34] I. Ya. Aref’eva, L. V. Joukovskaya, *JHEP*, **10** (2005), 087; [arXiv: hep-th/0504200](#).
- [35] I. Ya. Aref’eva, A. S. Koshelev, D. M. Belov, P. B. Medvedev, *Nucl. Phys. B*, **638**:1–2 (2002), 3–20; [arXiv: hep-th/0011117](#).

- [36] I. Ya. Aref'eva, D. M. Belov, A. A. Giryavets, A. S. Koshelev, P. B. Medvedev, "Noncommutative field theories and (super)string field theories", *Particles and Fields*, eds. G. A. Alves, O. J. P. Eboli, V. O. Rivelles, World Sci., Singapore, 2002, 1–163; [arXiv: hep-th/0111208](#).
- [37] I. Ya. Aref'eva, L. V. Joukovskaya, S. Yu. Vernov, *J. Phys. A*, **41**:30 (2008), 304003; [arXiv: 0711.1364](#); D. J. Mulryne, N. J. Nunes, *Phys. Rev. D*, **78**:6 (2008), 063519; [arXiv: 0805.0449](#); S. Yu. Vernov, *Class. Quant. Grav.*, **27**:3 (2010), 035006; [arXiv: 0907.0468](#).
- [38] I. Ya. Aref'eva, A. S. Koshelev, L. V. Joukovskaya, *JHEP*, **09** (2003), 012; [arXiv: hep-th/0301137](#).
- [39] K. Ohmori, *Phys. Rev. D*, **69**:2 (2004), 026008; [arXiv: hep-th/0306096](#).
- [40] B. Zwiebach, *Ann. Phys.*, **267**:2 (1998), 193–248; [arXiv: hep-th/9705241](#).