

РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ УДАРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НЕОДНОРОДНОЙ ПО ПЛОТНОСТИ СРЕДЫ

© 2017 г. *К.Е. Городничев, П.П. Захаров, С.Е. Куратов, И.С. Меньшов,
А.А. Серёжкин*

ФГУП ВНИИА им. Н.Л. Духова
surg085@gmail.com

Представлено аналитическое и численное исследование задачи о соударении двух полу-бесконечных пластин, одна из которых имеет начальное возмущение плотности при константном распределении давления. Исследуется случай больших скоростей соударения, при которых задачу можно рассматривать в гидродинамическом приближении. Теоретически показывается, что в зависимости от начальных данных реализуются различные режимы эволюции возмущений в пластинах. Численные расчеты проведены с использованием метода типа Годунова с различными вариантами аппроксимации численного потока. Применяются как стационарные эйлеровы сетки, так и подвижные сетки, отслеживающие положение контактной границы. Приводятся результаты численных расчетов, которые подтверждают теоретические выводы. На основе сравнения численных результатов с аналитическими результатами линейного анализа устойчивости делается вывод об оптимальной методике решения подобного класса задач.

Ключевые слова: ударное взаимодействие, энтропийная и ударная волны, линейный анализ устойчивости, численное моделирование.

DISTURBANCE EVOLUTION IN THE SHOCK IMPACT OF A DENSITY NON-UNIFORM MEDIUM

K.E. Gorodnichev, S.E. Kuratov, I.S. Menshov, A.A. Serezhkin, P.P. Zakharov

FSUE VNIIA

In this work the problem of two semi-infinite plates impact is analyzed theoretically and numerically. At initial, the density field in the impactor is perturbed while the pressure distribution is constant. We consider high velocity impact so that the problem is solved with the hydrodynamic approach. It is theoretically shown that different modes of the perturbation evolution in plates can be realized due to initial data. Numerical simulations are carried out by using Godunov-type methods with different numerical flux approximations. The stationary and moving eulerian meshes are employed. Analyzing comparison between numerical results with analytical solutions conclusions are inferred on numerical approaches best fitted for solving such impact contact problems.

Keywords: shock impact, entropy and shock waves, linear analysis of stability, numerical modeling.

1. Введение

В настоящей работе с использованием теоретического и численного анализа рассматривается задача об эволюции начального поля возмущений плотности в системе со-

ударяющихся пластин. Выводы, полученные при решении этой задачи, актуальны при рассмотрении вопросов лазерного инерциального термоядерного синтеза (см., например, [1-3]), моделирования опытов по соударению пластин [4] и т.п. В этих системах остаются важными вопросы распространения ударных волн (УВ) в средах с неоднородностями и их взаимодействие с контактными разрывами (КР).

При рассмотрении эволюции возмущений в системах с ударными взаимодействиями можно выделить два основных процесса: формирование и распространение фронта УВ [5-10] и изменение границы КР после прохождения через неё УВ. Возникающая при этом неустойчивость Рихтмайера-Мешкова (РМ) исследуется в многочисленных статьях и монографиях [11-18].

В отличие от работы [5], где исследована задача об устойчивости УВ в однородной среде, мы рассматриваем соударение пластин из двух различных материалов, в одной из которых задано начальное поле возмущений плотности при отсутствии возмущения давления (энтропийное поле возмущений). Ранее в литературе рассмотрение подобных задач проводилось для случая эволюции возмущений при распространении УВ через возмущенную границу КР двух газовых сред с использованием уравнения состояния (УРС) идеального газа (например, [6,8,16]). В данной работе для описания свойств материалов ударника и мишени мы используем УРС Ми-Грюнайзена [19], который позволяет учитывать упругие свойства веществ. Рассматривается случай высокоскоростного соударения, что позволяет при описании свойств материалов использовать гидродинамическое приближение.

При аналитическом рассмотрении задачи применяется подход, основанный на разделении решения на звуковую и энтропийно-вихревую часть (см., например, [5]). В результате проведенного анализа было получено, что характер поведения неоднородностей в сжатой области ударника и мишени зависит от соотношения проекций волнового вектора начальных энтропийных возмущений в ударнике. Определены условия, при которых возмущение фронта УВ в мишени не затухает с течением времени. Показано, что в некотором диапазоне начальных данных для описания поведения системы необходим учёт нелинейных взаимодействий в области за фронтом УВ.

В качестве альтернативного подхода к исследованию эволюции возмущений за ударным фронтом в мишени было проведено прямое численное моделирование задачи о соударении пластин. Путем сопоставления аналитического и численных решений можно сделать вывод о том, какой класс численных методов лучше подходит для расчета более сложных систем с эволюцией возмущений, не описываемых аналитическими решениями. При численном моделировании процессов эволюции возмущений особое внимание необходимо уделять влиянию схемной вязкости. В применяемом в данной работе методе конечного объема величина схемной вязкости зависит от способов аппроксимации численного потока, типа расчетной сетки, величины характерного размера сетки, порядка пространственной и временной аппроксимации. В разделе, посвященном численным расчетам, приводится анализ влияния этих факторов на численное решение.

Данная статья устроена следующим образом. Сначала приводятся результаты аналитического рассмотрения задачи в линейном приближении. В следующем разделе описываются численные методы и результаты численного моделирования. Из сравнения аналитических и численных решений следует, что практически во всем диапазоне начальных данных линейного анализа достаточно для качественного и количественного

описания поведения системы, но существует область параметров, в которой требуется учет нелинейных эффектов.

2. Общее описание задачи

В работе рассматривается вопрос переноса возмущений в системе соударяющихся полубесконечных пластин, в одной из которых в начальный момент времени присутствует возмущение плотности при отсутствии возмущения давления (энтропийное поле). Постановка задачи приведена на рис.1. В результате соударения по ударнику и мишени в противоположных направлениях будут распространяться УВ. Скорость УВ в ударнике обозначим d_1 , в мишени – d_2 . Обозначим область в ударнике за фронтом УВ индексом «21», а перед фронтом – индексом «1». Аналогично для мишени введем обозначения «22» и «3» соответственно. На контактном разрыве нормальная компонента скорости и давление непрерывны, поэтому для области «2», являющейся объединением областей «21» и «22», можно записать

$$v_{21} = v_{22} \equiv v_2, \quad P_{21} = P_{22} \equiv P_2. \tag{1}$$

Мы будем рассматривать соударение с характерными скоростями порядка нескольких километров в секунду. В этих условиях можно пренебречь упруго-пластическими свойствами веществ и рассматривать задачу в гидродинамическом приближении.

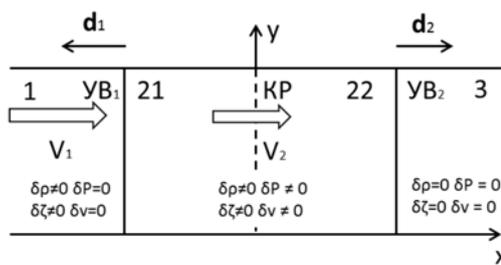


Рис.1. Постановка задачи.

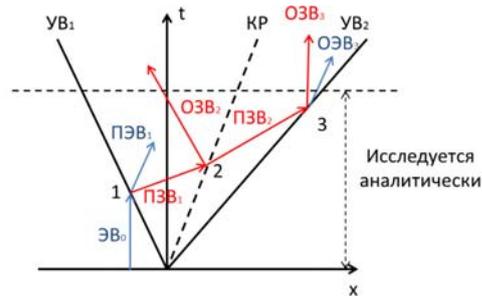


Рис.2. Схема распространения волн в системе.

Начальное возмущение плотности в ударнике имеет вид

$$\delta\rho_1 = \alpha\rho_1 \exp\{ik_{0x}x + ik_y y\}, \tag{2}$$

где α – константа. Отметим, что величина проекции волнового вектора k_y будет одинакова для всех возмущений в системе, что следует из сшивки фаз на фронте УВ и границе КР.

Для нахождения базового невозмущенного решения необходимо рассмотреть условия Рэнкина-Гюгоньо на УВ в ударнике и мишени, дополненные УРС. В [6-8] задача об эволюции возмущений рассматривается для случая прохождения УВ через КР двух сред, при описании которых используется УРС идеального газа. В данной работе мы используем УРС Ми-Грюнайзена [19]:

$$P = \frac{\rho_0 c_0^2}{n} \left((\rho / \rho_0)^n - 1 \right) + \Gamma\rho\zeta, \tag{3}$$

где ρ_0, c_0 – плотность и скорость звука несжатого ("холодного") вещества; ρ – плот-

ность сжатого вещества; Γ – коэффициент Грюнайзена; ζ – удельная тепловая энергия; n – константа УРСа.

Полная удельная внутренняя энергия $\varepsilon = \zeta + \varepsilon_x$, где ε_x – удельная упругая («холодная») энергия. В соответствии с [19] для упругой составляющей можно записать

$$\varepsilon_x = \frac{c_0^2}{n} \left(\frac{1}{n-1} (\rho/\rho_0)^{n-1} + \frac{\rho_0}{\rho} - \frac{n}{n-1} \right). \quad (4)$$

Выражение для скорости звука в случае использования УРС Ми-Грюнайзена выглядит следующим образом [20]:

$$c = \sqrt{c_0^2 (\rho/\rho_0)^{n-1} + \Gamma(\Gamma+1)\zeta}. \quad (5)$$

Взаимодействие возмущений с фронтом УВ в общем случае порождает в зафронтной области преломленную энтропийно-вихревую волну и быструю или медленную звуковую волну [9]. В рассматриваемой задаче быстрая звуковая волна образуется при взаимодействии с фронтом УВ в пластине-ударнике, медленная – с фронтом УВ в мишени.

На рис.2 на $x-t$ диаграмме изображен процесс распространения волн в системе. Первичное взаимодействие (точка 1 на рис.2) соответствует взаимодействию начального энтропийного возмущения (ЭВ_1) с фронтом УВ, в результате в зафронтной области появляются прошедшие энтропийно-вихревая (ПЭВ_1) и звуковая (ПЗВ_1) волны. При рассмотрении вторичного взаимодействия (точка 2 на рис.2) исследуется процесс взаимодействия звуковой волны ПЗВ_1 с границей КР, сопровождающийся образованием отраженной звуковой волны (ОЗВ_2) и прошедшей звуковой волны ПЗВ_2 . Третичное взаимодействие (точка 3 на рис.2) соответствует взаимодействию звуковой волны ПЗВ_2 с фронтом УВ в мишени, в результате она отражается в звуковую волну ОЗВ_3 и энтропийно-вихревую ОЭВ_3 .

Из рис.2 видно, что в точках 2 и 3 образуются отраженные звуковые волны ОЗВ_2 и ОЗВ_3 , которые при распространении в зафронтной области будут взаимодействовать с разрывами с образованием новых энтропийно-вихревых и звуковых волн. В данной работе теоретические результаты для амплитуд возмущений гидродинамических величин приведены на основе рассмотрения процессов в точках 1, 2 и 3, дальнейшая последовательность переотражений не рассматривается.

3. Теоретическое исследование

Как и в [21], аналитическое решение получено с использованием линейного приближения. При рассмотрении первичного взаимодействия исследуется прохождение возмущений через фронт УВ в ударнике (точка 1 на рис.2) с использованием линеаризованной системы уравнений газовой динамики и соотношений Рэнкина-Гюгонио, содержащих неоднородные слагаемые, отвечающие наличию возмущения в предфронтной области. Таким образом, в ударнике за фронтом УВ определяются параметры звуковой и энтропийно-вихревой волн. При рассмотрении вторичного взаимодействия исследуется падение звуковой волны, полученной при первичном взаимодействии, на границу КР (точка 2 на рис.2) с учетом условий сшивки слева и справа от КР (1). Далее рассмат-

ривается третичное взаимодействие прошедшей через границу КР звуковой волны с фронтом УВ в мишени. Используемая при этом система уравнений аналогична системе уравнений первичного взаимодействия, с учетом того, что падающее возмущение в этом случае отвечает полю возмущений зафронтальной области. Последующий процесс переотражения в данной работе не рассматривается в силу слабого влияния получаемых при этом волн на конечный результат.

3.1. Первичное взаимодействие. Для исследования процесса взаимодействия начальных возмущений с фронтом УВ в ударнике рассмотрим линеаризованную систему гидродинамических уравнений и условия Рэнкина-Гюгонио на фронте УВ относительно малых изменений гидродинамических величин δP , $\delta \rho$, δv , $\delta \varepsilon$, полагая, что $P = P' + \delta P$, $\rho = \rho' + \delta \rho$, $v = v' + \delta v$, $\varepsilon = \varepsilon' + \delta \varepsilon$. В дальнейшем при обозначении невозмущенных величин штрихи мы будем опускать.

Возмущения гидродинамических величин δv_{21x} , δv_{21y} , δP_2 , ξ , $\delta \zeta_{21}$, $\delta \rho_{21}$ являются функциями координат и времени $f(x, y, t)$. Исходя из вида начального возмущения (2), будем искать решение также в виде $f(x, y, t) = \tilde{f} \exp\{ik_y y + ik_x x - i\omega t\}$. Тогда система уравнений для определения амплитуд поля малых возмущений за фронтом УВ запишется следующим образом:

$$\frac{\partial \delta v_{2x}}{\partial t} + v_2 \frac{\partial \delta v_{2x}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_{21}} \frac{\partial \delta P_2}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \delta v_{2y}}{\partial t} + v_2 \frac{\partial \delta v_{2y}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_{21}} \frac{\partial \delta P_2}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \delta \rho_{21}}{\partial t} + v_2 \frac{\partial \delta \rho_{21}}{\partial x} + \rho_{21} \left(\frac{\partial \delta v_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial \delta v_{2y}}{\partial y} \right) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \delta \zeta_{21}}{\partial t} - \frac{\Gamma \zeta_{21}}{\rho_{21}} \frac{\partial \delta \rho_{21}}{\partial t} + v_2 \frac{\partial \delta \zeta_{21}}{\partial x} - \frac{\Gamma \zeta_{21}}{\rho_{21}} v_2 \frac{\partial \delta \rho_{21}}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

$$[\delta v_{2y} - \delta v_{1y} - ik_y \xi (v_1 - v_2)]|_{x=d_1 t} = 0, \quad (10)$$

$$\left[2 \frac{\delta v_{2x} - \delta v_{1x}}{v_2 - v_1} - \frac{\delta P_2 - \delta P_1}{P_2 - P_1} - \frac{\frac{\rho_1}{\rho_{21}} \delta \rho_{21} - \frac{\rho_{21}}{\rho_1} \delta \rho_1}{\rho_{21} - \rho_1} \right]_{x=d_1 t} = 0, \quad (11)$$

$$\left[\left\{ \frac{c_{01}^2}{n_1} \left(\frac{\rho_1^{n_1-2}}{\rho_{01}^{n_1-1}} - \frac{\rho_{01}}{\rho_1^2} \right) - \frac{P_1 + P_2}{2\rho_1^2} \right\} \delta \rho_1 - \left\{ \frac{c_{01}^2}{n_1} \left(\frac{\rho_{21}^{n_1-2}}{\rho_{01}^{n_1-1}} - \frac{\rho_{01}}{\rho_{21}^2} \right) - \frac{P_1 + P_2}{2\rho_{21}^2} \right\} \delta \rho_{21} + \delta \zeta_1 - \delta \zeta_{21} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_{21}} \right) (\delta P_1 + \delta P_2) \right]_{x=d_1 t} = 0, \quad (12)$$

$$\left[\frac{\delta \rho_1}{\rho_1} + \frac{\delta v_{1x}}{v_1 - d_1} + \frac{i\omega_\xi \xi}{v_1 - d_1} + \frac{\rho_1 \delta \rho_{21} - \rho_{21} \delta \rho_1}{2(\rho_{21} - \rho_1)} - \frac{\delta P_2 - \delta P_1}{2(P_2 - P_1)} \right]_{x=d_1 t} = 0, \quad (13)$$

$$\delta P_2 - c_{01}^2 \left(\frac{\rho_{21}}{\rho_{01}} \right)^{n_1 - 1} \delta \rho_{21} - \Gamma_1 \zeta_{21} \delta \rho_{21} - \Gamma_1 \rho_{21} \delta \zeta_{21} = 0. \quad (14)$$

Выражения (6)–(9) – это линеаризованная система гидродинамических уравнений для области, обозначенной нами индексом «21». Уравнение (10) отвечает условию непрерывности тангенциальной составляющей скорости на УВ, выражение для скачка продольной составляющей скорости отражено в уравнении (11), УРС для среды «21» записан в (14), уравнение (13) отвечает условию непрерывности потока через фронт УВ. Выражения (10)–(13) – это линеаризованные соотношения Рэнкина-Гюгонио на фронте УВ $x = d_1 t$ (см. рис.1).

Как уже отмечалось выше, из рассмотрения линеаризованной системы гидродинамических уравнений (6)–(9) (см., например, [9]) следует, что гидродинамические возмущения можно разложить на звуковую и энтропийно-вихревую составляющие и рассматривать их отдельно. Далее энтропийные решения будем обозначать индексом «эн», а звуковые – индексом «зв».

При рассмотрении линеаризованных условий Рэнкина-Гюгонио на фронте УВ с учетом возмущений гидродинамических величин в уравнениях будут присутствовать слагаемые, пропорциональные экспонентам с тремя различными показателями (фазами). В лабораторной системе отсчета фазе энтропийно-вихревой волны соответствует $(k_x^{(эн)} d_1 t - \omega^{(эн)} t)$, фазе звуковой – $(k_x^{(зв)} d_1 t - \omega^{(зв)} t)$, фазе начального возмущения – $(k_{0x} (d_1 + v_1) t)$. Следовательно, для выполнения условий на фронте УВ необходимо, чтобы фаза начального возмущения равнялась либо фазе звуковой волны, либо энтропийно-вихревой, либо все экспоненты имели одинаковые показатели. Первые два условия в общем случае невыполнимы, поэтому мы приходим к следующему соотношению:

$$k_x^{(эн)} d_1 - \omega^{(эн)} = k_x^{(зв)} d_1 - \omega^{(зв)} = k_{0x} (d_1 - v_1). \quad (15)$$

Используя (15), из дисперсионного соотношения для звуковой волны в зафронтальной области $(\omega - v_2 k_x)^2 = c_{21}^2 (k_x^2 + k_y^2)$ получим, что для проекции волнового вектора $k_x^{(зв)}$ можно записать

$$\left(k_x^{(зв)} \right)_\pm = \frac{k_{0x} (d_1 - v_1) (v_2 - d_1) \pm c_{21} \sqrt{k_{0x}^2 (v_1 - d_1)^2 - (c_{21}^2 - (v_2 - d_1)^2) k_y^2}}{c_{21}^2 - (v_2 - d_1)^2}. \quad (16)$$

Из уравнения (16) следует, что существует значение x -проекции волнового вектора k_{0x}^* , при котором мнимая часть $k_x^{(зв)}$ обращается в ноль ($\text{Im}(k_x^{(зв)}) = 0$). Это значение соответствует обращению в ноль подкоренного выражения в (16):

$$k_{0x}^* = \frac{k_y}{v_1 - d_1} \sqrt{c_{21}^2 - (v_2 - d_1)^2}. \quad (17)$$

Приравнявая (16) к нулю, получим, что изменение знака в решении $(k_x^{(3B)})_+$ происходит при $k_{0x}^{**} = k_y c_{21} / (v_1 - d_1)$.

Анализ (16) показывает, что действительная часть $(k_x^{(3B)})_-$ всегда отрицательна, и при $0 < k_{0x} < k_{0x}^*$ присутствует мнимая часть, которая также отрицательна. Для $(k_x^{(3B)})_+$ действительная часть отрицательна при $0 < k_{0x} < k_{0x}^{**}$, положительна при $k_{0x} > k_{0x}^{**}$ и при $0 < k_{0x} < k_{0x}^*$ имеется положительная мнимая часть.

Используя (15), можно показать, что действительные значения соответствующих частот звуковых волн всегда положительны. Соответственно можно выделить три под-области начальных данных, для которых решение для звуковой волны в зафронтной области будут качественно различаться. Исходя из постановки задачи, в зафронтной области будем рассматривать только быструю звуковую волну. При значениях $0 < k_{0x} < k_{0x}^*$ решение для x -проекции волнового вектора звуковой волны в зафронтной области комплексно. Будем называть эту подобласть *темной* зоной. При значениях $k_{0x}^* \leq k_{0x} \leq k_{0x}^{**}$ решение для x -проекции волнового вектора звуковой волны действительное и отрицательное. Соответственно этот режим будем называть *серой* зоной. Наконец, при значениях $k_{0x} > k_{0x}^{**}$ решение для x -проекции волнового вектора звуковой волны действительно и положительно. Этот режим будем называть *светлой* зоной.

В случае $0 < k_{0x} < k_{0x}^*$ (*темная* зона) из (16) следует, что звуковая волна распространяется в сторону фронта УВ с амплитудой, затухающей по мере удаления от него в сжатую область. На фронте УВ её фаза в силу «сшивки» с энтропийным возмущением предфронтной области не имеет мнимой части. Другими словами, звуковое решение имеет постоянное значение амплитуды на фронте УВ и быстро затухает вглубь области. По этой причине в мишени звуковые волны распространяться не будут. Энтропийно-вихревые возмущения присутствуют во всей зафронтной области ударника.

В случае $k_{0x}^* \leq k_{0x} \leq k_{0x}^{**}$ (*серая* зона) аналитическое решение линеаризованных уравнений для звуковых возмущений в области сжатого вещества является суперпозицией двух звуковых волн, распространяющихся в направлении фронта УВ. Энтропийно-вихревые возмущения присутствуют во всей зафронтной области ударника.

В случае $k_{0x} > k_{0x}^{**}$ (*светлая* зона) решение представляет из себя суперпозицию быстрой и медленной звуковых волн. По физическим соображениям в решении оставим только быструю звуковую волну. Как будет показано далее, энтропийно-вихревые возмущения присутствуют во всей зафронтной области ударника и мишени.

3.2. Вторичное взаимодействие. Далее рассмотрим падение на контактную границу быстрой звуковой волны со стороны ударника. Как показано выше, данный процесс возможен только при начальных условиях, соответствующих *светлой* зоне. Описание взаимодействия звуковой волны с КР приведено, например, в [9]. В общем случае в

ударнике будут присутствовать как падающая, так и отраженная от границы КР звуковые волны, а в мишени – прошедшая волна. Порождение звуком энтропийно-вихревой волны в данном случае невозможно, поскольку её фаза $\varphi^{(эН)}$ на контактной границе равна нулю $\varphi^{(эН)} = k_x^{(эН)}v_2 - \omega^{(эН)} = 0$, а из дисперсионного соотношения следует, что звуковая волна на контактной границе не может обладать нулевой фазой.

Обозначим величины, отвечающие падающей волне, верхним индексом (i) , отраженной – (r) , прошедшей – (t) . На контактной границе должны выполняться условия равенства давлений и величины смещения границы раздела. В итоге получим

$$\delta P^{(r)} = \left(\frac{k_x^{(i)}}{\rho_{21}} - \frac{k_x^{(t)}}{\rho_{22}} \right) / \left(\frac{k_x^{(i)}}{\rho_{21}} + \frac{k_x^{(t)}}{\rho_{22}} \right) \delta P^{(i)}, \quad \delta P^{(t)} = 2 \frac{k_x^{(i)}}{\rho_{21}} / \left(\frac{k_x^{(i)}}{\rho_{21}} + \frac{k_x^{(t)}}{\rho_{22}} \right) \delta P^{(i)}. \quad (18)$$

Из равенства фаз звуковых волн на КР и соответствующих дисперсионных соотношений выражения для волновых векторов отраженной и прошедшей звуковых волн можно записать следующим образом:

$$k_x^{(t)} = \sqrt{\frac{c_{21}^2}{c_{22}^2} \left((k_x^{(i)})^2 + k_y^2 \right) - k_y^2}, \quad k_x^{(r)} = -k_x^{(i)}. \quad (19)$$

Отметим, что появление мнимой части в $k_x^{(t)}$ соответствует полному внутреннему отражению звука от границы КР [9]. Из (19) видно, что на возможность полного внутреннего отражения звуковой волны от границы КР значительное влияние оказывает соотношение скоростей звука в сжатой области ударника и мишени. Следовательно, соответствие начальных условий *светлой* зоне не всегда приводит к переносу возмущений из ударника в мишень.

Используя линеаризованные уравнения гидродинамики и (18), легко получить выражения для $\delta \rho_{21}^{(r),(t)}$, $\delta \zeta_{21}^{(r),(t)}$, $\delta v_{2x}^{(r),(t)}$, $\delta v_{2y}^{(r),(t)}$.

3.3. Третичное взаимодействие. После прохождения КР быстрой звуковой волной она распространяется в мишени вплоть до фронта УВ. Для исследования ее взаимодействия с УВ необходимо рассмотреть систему, аналогичную (6)–(14), с учетом того, что вместо индекса «21» необходимо использовать «22», а вместо «1» – индекс «3». В зафронтальной области в данном случае присутствует падающая быстрая звуковая волна, это необходимо учитывать при записи соответствующих возмущений гидродинамических величин $\delta g_{22} \equiv \delta g_{22} + \delta g_{22}^{\text{ПЗВ}_2}$, где g обозначает любую гидродинамическую переменную. Решение этой системы также представляет из себя суперпозицию энтропийно-вихревой и звуковой волн. Здесь также можно выделить три решения в зависимости от угла падения звуковой волны ПЗВ₂, как это было сделано в разделе 3.1.

3.4. Вывод теоретического анализа. Проведенный выше анализ взаимодействия падающей энтропийной волны с УВ, возникающей в результате соударения двух пластин, позволяет определить возмущенные значения гидродинамических величин в зафронтальной области ударника и мишени.

Полученное аналитическое решение задачи можно использовать для тестирования различных численных алгоритмов на возможность описания временной эволюции малых возмущений и процесса их взаимодействия с гидродинамическими разрывами. Далее приведено численное решение и сопоставление его с теоретическим решением задачи для случая, когда материал ударника – железо, а мишени – алюминий.

4. Численное решение

4.1. Основные положения численных методик. Задача о соударении железной и алюминиевой пластин исследовалась с использованием двух численных методик на основе метода конечного объема. В первой методике используется подвижная сетка так, что контактная граница между материалами в каждый момент времени совпадает с линией сетки. Во второй методике используется неподвижная эйлерова сетка, а контактная граница, как и ударные волны, рассчитывается сквозным образом.

В обоих подходах математическая модель каждой из пластин представляется системой уравнений Эйлера течения сжимаемой жидкости, которая в двумерном плоском случае записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_x(\mathbf{q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_y(\mathbf{q})}{\partial y} = 0, \quad (20)$$

где \mathbf{q} , \mathbf{f}_x , \mathbf{f}_y – векторы консервативных переменных и потоков соответственно:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + P \\ \rho v_x v_y \\ (\rho e + P)v_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_y = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_y^2 + P \\ (\rho e + p)v_y \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Здесь ρ – плотность; v_x , v_y – компоненты вектора скорости в декартовой системе координат; P – давление; $e = \varepsilon + (v_x^2 + v_y^2)/2$ – удельная полная энергия; ε – удельная внутренняя энергия.

В первой численной методике (ТИС-2D) расчетная область разбивается на два блока. В каждом блоке содержится только один материал и рассчитывается система уравнений (20), (21), которая замыкается для каждого блока своим УРС вида $\varepsilon = \varepsilon(\rho, P)$. Узлы сетки на границе между блоками двигаются со скоростью среды. Таким образом, положение границы между блоками соответствует положению контактной границы между материалами. Скорость движения узлов на других границах блоков определяется в соответствии с заданным на них типом граничных условий. Скорость движения внутренних узлов блоков не совпадает со скоростью среды.

Во второй численной методике (ТИС-M) для отслеживания контактной границы на неподвижной эйлеровой сетке вводятся дополнительные параметры – массовые концентрации железа и алюминия. В этом случае используется математическая модель многофазной среды с равновесием по скорости, давлению и температуре [22], которая представляется расширенной системой уравнений (20) с соответствующими векторами консервативных переменных и потоков:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho e \\ \rho \beta_1 \\ \rho \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + P \\ \rho v_x v_y \\ (\rho e + P)v_x \\ \rho v_x \beta_1 \\ \rho v_x \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_y = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho u_x v_y \\ \rho v_y^2 + P \\ (\rho e + P)v_y \\ \rho v_y \beta_1 \\ \rho v_y \beta_2 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Здесь $\rho = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \rho_i^0$ – суммарная плотность смеси; $\varepsilon = \sum_{i=1}^2 \beta_i \varepsilon_i(\rho_i^0, P)$ – удельная внутренняя энергия смеси; ρ_i^0 , β_i , α_i – истинная плотность, массовая и объемная концентрации i -й компоненты соответственно; $\beta_i = \alpha_i \rho_i^0 / \rho$; $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\rho_i^0, P)$, $T_i = T_i(\rho_i^0, P)$ – УРС i -й компоненты. Система уравнений (20), (22) замыкается смесевым УРС, который получается из предположения о равенстве давлений и температуры в компонентах:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^2 \beta_i \varepsilon_i(P, T), \quad (23)$$

$$\rho \sum_{i=1}^2 \frac{\beta_i}{\rho_i^0(P, T)} - 1 = 0. \quad (24)$$

Рассмотрим пространственную дискретизацию уравнений (20) методом конечного объема на подвижных сетках [23]. Проинтегрируем систему (20) по ячейке i и, перейдя в правой части системы от интеграла по площади к интегралу по контуру ячейки, приходим к системе полудискретных уравнений вида

$$\frac{d}{dt}(S_i \mathbf{q}_i) = - \sum_{\sigma} (\mathbf{f}_k n_k - \mathbf{q} V_n)_{\sigma} l_{\sigma}, \quad (25)$$

где индексы i и σ означают ячейку и ее грань соответственно, S_i – площадь i -й ячейки и l_{σ} – длина ее грани, n_k – компоненты внешней к ячейке нормали ($k = x, y$), V_n – нормальная компонента скорости движения грани, которая должна удовлетворять геометрическому закону сохранения $dS_i / dt = \sum_{\sigma} (l_{\sigma} V_n)$.

Выражение $\mathbf{f}_k n_k$, входящее в сумму в правой части уравнения (25), может быть записано с помощью одного вектора потока F

$$\mathbf{f}_k n_k = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{F}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{T} \mathbf{q}, \quad (26)$$

где \mathbf{T} – матрица поворота от абсолютной системы координат к системе координат, связанной с рассматриваемым ребром σ . Вектор потока $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{Q})$ имеет вид локально-одномерного потока в направлении нормали:

$$\mathbf{F} = (\rho v_n, \rho v_n^2 + P, \rho v_n v_\tau, \rho e v_n + P v_n)^T, \quad (27)$$

где v_n , v_τ – нормальная и касательная к рассматриваемой грани σ составляющие вектора скорости. Тогда система уравнений (25) принимает следующий вид:

$$\frac{d}{dt}(S_i \mathbf{q}_i) = - \sum_{\sigma} \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{F} - \mathbf{Q} V_n)_{\sigma} l_{\sigma}. \quad (28)$$

В настоящей работе аппроксимация вектор-функции численного потока F_{σ} в системе уравнений (28) осуществлялась по методу С.К. Годунова [24] и по методу В.В. Русанова [25].

В методе С.К. Годунова вектор \mathbf{F}_{σ} представляет собой численный поток, который вычисляется на векторе состояния \mathbf{Q}_{σ}^{3P} :

$$\mathbf{F}_{\sigma} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{\sigma}^{3P}), \quad (29)$$

где \mathbf{Q}_{σ}^{3P} – вектор состояния на грани σ , который зависит от состояния среды в ячейках, примыкающих к данной грани, $\mathbf{q}^{(1)}$ и $\mathbf{q}^{(2)}$. Он представляет собой точное решение задачи Римана вдоль направления внешней нормали \mathbf{n} :

$$\mathbf{Q}_{\sigma}^{3P} = \mathbf{Q}_{\sigma}^{3P}(\mathbf{Q}^{(1)}, \mathbf{Q}^{(2)}) = \mathbf{Q}_{\sigma}^{3P}(\mathbf{T}\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{T}\mathbf{q}^{(2)}) = \mathbf{Q}_{\sigma}^{3P}(\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}, \mathbf{n}). \quad (30)$$

Точное решение задачи Римана существует для двучленного УРС:

$$\varepsilon = \frac{P + \gamma P_0}{(\gamma - 1)\rho} - \frac{c_0^2}{\gamma - 1}. \quad (31)$$

Для поиска решения при произвольном УРС производят его локальную аппроксимацию эффективным двучленным УРС [20]. Значения констант P_0 , γ , c_0^2 определяются из условия, чтобы при заданных значениях давления P и плотности ρ величины внутренней энергии ε и производных $\partial\varepsilon/\partial P$ и $\partial\varepsilon/\partial\rho$ равнялись соответствующим значениям, рассчитанным по исходному УРС.

В качестве альтернативного метода используется метод В.В. Русанова [25]. Метод модифицируется для расчета потока на подвижном ребре сетки следующим образом:

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(1)}), & W - V_n < -\lambda, \\ \frac{(V_n + \lambda)\mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(1)}) + (V_n - \lambda)\mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(2)}) + (V_n^2 - \lambda^2)\mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(2)} - \mathbf{Q}^{(1)})}{2\lambda}, & -\lambda \leq W - V_n \leq \lambda, \\ \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(2)}), & W - V_n > \lambda, \end{cases} \quad (32)$$

где λ – максимальное значение скорости звука в связанных с гранью ячейках.

Явное интегрирование по времени уравнения (28) приводит к монотонной схеме первого порядка по времени и пространству

$$q_i^{n+1} = \frac{1}{S_i^{n+1}} \left[S_i^n q_i^n - \Delta t \sum_{\sigma} T_{\sigma}^{-1} (F - QV_n)_{\sigma} l_{\sigma} \right]. \quad (33)$$

Для повышения порядка аппроксимации до второго используется схема интегрирования по времени «предиктор-корректор» с интерполяционной схемой типа MUSCL [26].

Дискретизация системы уравнений (20), (22) для случая неподвижных эйлеровых сеток получается, если в системе дискретных уравнений (33) положить величину V_n равной нулю. В случае расчета на неподвижных сетках возникает эффект численного размазывания контактных границ между разными материалами. С целью уменьшения этого эффекта применяется аппроксимация численного потока с учетом подсеточной структуры [27]. Эта аппроксимация совпадает с гоудоновской аппроксимацией в области чистых ячеек, которые содержат только один материал. В области смешанных ячеек, содержащих два материала, аппроксимация численного потока осуществляется с использованием решения так называемой составной задачи Римана. Формулировка этой задачи отличается от формулировки классической задачи Римана точкой контактного разрыва, которая вводится в начальные условия наряду со стандартной точкой начального разрыва параметров. Более подробно о составной задаче Римана и ее решении можно посмотреть в [27].

4.2. Постановка задачи. Приведем постановку задачи для расчета по численной методике ТИС-2D с использованием подвижной эйлеровой сетки.

На покоящуюся однородную по плотности алюминиевую пластину налетает железная пластина со скоростью 5 км/с (рис.3). Железная пластина имеет распределение плотности вида

$$\rho(x, y) = \rho_0 \left[1 + \delta_{\rho} \cos(k_x x + k_y y) \right], \quad k_x = 2\pi / \lambda_x, \quad k_y = 2\pi / \lambda_y. \quad (34)$$

В начальный момент времени подвижная расчетная сетка покрывает область, которая представляет собой прямоугольник $(x, y) \in [-L_{Fe}, L_{Al}] \times [0, \lambda_y]$. В начальный момент железо находится в области $(x, y) \in [-L_{Fe}, 0] \times [0, \lambda_y]$, а алюминий – в области $(x, y) \in [0, L_{Al}] \times [0, \lambda_y]$, где $L_{Fe} = 10\lambda_x$, $L_{Al} = 1.5L_{Fe}$.

Введем обозначение $\alpha = k_x / k_y$. Численные расчеты были проведены для трех наборов значений λ_x , λ_y , которые соответствуют *светлой* ($\alpha = 5$), *серой* ($\alpha = 0.75$) и *темной* ($\alpha = 0.1$) зонам. Для нахождения соответствующих длин волн используем следующие формулы: $\lambda_y = \lambda_y^{(0)} [(1 + \alpha^2) / (1 + (\alpha^{(0)})^2)]^{0.5}$, $\lambda_x = \lambda_y / \alpha$, где $\lambda_y^{(0)} = 100$ мкм, $\alpha^{(0)} = 0.1$. Границы каждой из зон зависят от скорости удара, констант УРС Ми-Грюнайзена. Выбранные значения α соответствуют скорости удара 5 км/с и константам железа и

алюминия. Давление во всей расчетной области в начальный момент равняется 1 атм. Расчеты проводились для значения $\delta_p = 0.05$.

В процессе движения пластин граничные узлы сетки смещаются в соответствии с граничным условием как лагранжевы точки. По полученным величинам скоростей смещения граничных узлов интерполяцией находятся скорости смещения внутренних узлов расчетной сетки таким образом, чтобы топология сетки – множество контрольных объемов и структура связей – не менялась с течением времени. На верхней и нижней границах ставятся периодические граничные условия, так что на этих границах узлы сетки могут только скользить вдоль прямых $y = 0$, $y = \lambda_y$. Левая и правая границы (в начальный момент $x = -L_{Fe}$, $x = L_{Al}$) являются подвижными лагранжевыми границами, а узлы на этих границах двигаются согласно граничному условию свободной поверхности. Кроме того, отдельно выделяется граница между железом и алюминием (в начальный момент $x = 0$), так что расчетная сетка разбивается на два блока. Скорость смещения узлов сетки, лежащих на этой границе, соответствуют скоростям смещения контактной границы, которые определяются из решения задачи Римана [28].

Для описания поведения железа и алюминия используется УРС Ми-Грюнаизена (3), (4) с константами, приведенными в [29]. Для железа: плотность $\rho_{Fe} = 7855 \text{ кг/м}^3$, скорость звука $c_{Fe} = 3837 \text{ м/с}$, $n_{Fe} = 4.3$, $\Gamma_{Fe} = 1.6$. Для алюминия: $\rho_{Al} = 2710 \text{ кг/м}^3$, $c_{Al} = 5333 \text{ м/с}$, $n_{Al} = 3.5$, $\Gamma_{Al} = 2.13$.

В случае расчета по численной методике ТИС-М с использованием фиксированной эйлеровой сетки постановка задачи полностью совпадает с выше описанной постановкой за исключением граничных условий. Расчетная область представляет собой прямоугольник $(x, y) \in [-L_{Fe}, L_{Al}] \times [0, \lambda_y]$, где вводится равномерная стационарная эйлерова сетка. На границах $y = 0$, $y = \lambda_y$ ставятся периодические граничные условия. На $x = -L_{Fe}$, $x = L_{Al}$ ставятся граничные условия, соответствующие экстраполяции решения из ячейки на грань.

4.3. Результаты расчетов. Численные расчеты проводились в рамках двух методик, рассмотренных выше – ТИС-2D и ТИС-М. В расчетах варьировались порядок аппроксимации расчетной схемы и количество ячеек на длину волны начального возмущения. Кроме этого, для методики ТИС-2D применялись два варианта аппроксимации численного потока, по схеме С.К. Годунова и В.В. Русанова соответственно. Исследование влияния различных элементов численной модели на решение связано с необходимостью выбрать численную схему и размеры сетки, наиболее подходящие для численного моделирования специальных прикладных задач. Во всех расчетах шаг по времени соответствовал значению числа CFL, равному 0.5.

На основе результатов проведенных численных исследований можно сделать следующие выводы. Расчеты, выполненные по методикам ТИС-2D и ТИС-М, дают решения, хорошо согласующиеся между собой. Для *светлой*, *серой* и *темной* зон характер поведения возмущений, полученных в расчетах с первым и вторым порядками точности по обоим методикам, качественно совпадает с аналитическими решениями. Однако количественное совпадение с аналитическим решением при одинаковом сеточном разре-

шении достигается только при использовании схем второго порядка точности. Для исследования вопроса о сеточной сходимости расчеты проводились с различным количеством ячеек N_λ на волну начальных возмущений. Оно бралось равным 20, 30, 50 и 100 соответственно. Численные результаты показывают, что $N_\lambda = 50$ ячеек является достаточным для того, чтобы расчет со вторым порядком точности давал хорошее количественное соответствие с аналитическим решением. Поэтому все приведенные ниже численные результаты соответствуют расчетам с $N_\lambda = 50$.

На рис.4–6 представлены распределения давления, полученные по методике ТИС-М. В *светлой* зоне звуковые и энтропийно-вихревые возмущения присутствуют как в ударнике, так и в мишени. Направление волнового вектора звуковых возмущений в зафронтной области совпадает с направлением волнового вектора начальных возмущений. Это также следует из рассмотрения рис.4, на котором в сжатой области ударника заметно искривление полос, связанное с присутствием отраженных звуковых волн.

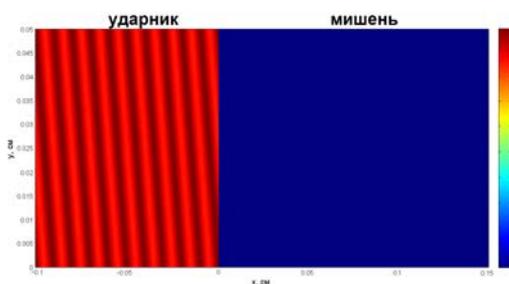


Рис.3. Начальное распределение плотности в задаче.

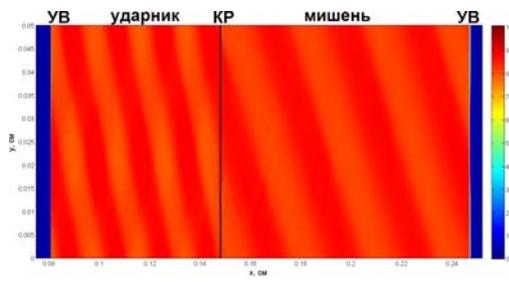


Рис.4. Распределение давления для *светлой* зоны (ГПа); $t = 0.15$ мкс.

В *серой* зоне звуковая волна присутствует только вблизи фронта УВ, а энтропийно-вихревые возмущения – только в ударнике. Из рис.5 следует, что звуковые волны в зафронтной области ударника направлены в сторону фронта УВ. При теоретическом рассмотрении задачи было получено, что звуковая волна в зафронтной области для случая *серой* зоны всегда распространяется в сторону УВ без затухания. Численные расчеты показывают, что затухание звуковой волны для режима *серой* зоны имеет место (см. рис.5). Этот факт можно объяснить нелинейными эффектами, которые не учитываются в теоретическом анализе.

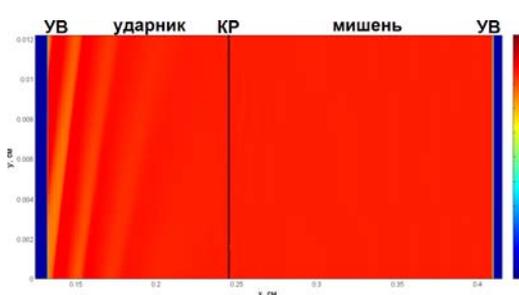


Рис.5. Распределение давления для *серой* зоны (ГПа); $t = 0.25$ мкс.

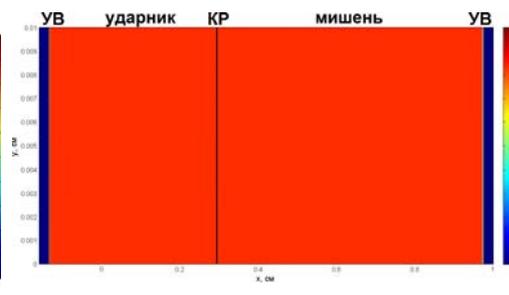


Рис.6. Распределение давления для *темной* зоны (ГПа); $t = 1$ мкс.

На рис.6 представлено распределение давления для случая *темной* зоны. Видно, что возмущения давления как в ударнике, так и в мишени отсутствуют. Возмущения плотности, так же как и в случае *серой* зоны присутствуют только в ударнике.

На рис.7–12 представлены распределение давления и плотности для *светлой* и *серой* зон в сечении $x = \lambda / 2$. При анализе рисунков необходимо учитывать, что возмущения давления обусловлены только наличием звуковой волны, в отличие от возмущения плотности, на которое влияет наличие как звуковой волны, так и энтропийно-вихревой.

Из рис.7–12 видно, что расчеты в рамках методики ТИС-2D с годуновской и русановской аппроксимациями численного потока согласуются между собой. Однако расчеты с большими длинами ударника L_{Fe} и мишени L_{Al} показали, что большая схемная вязкость русановской аппроксимации численного потока приводит к более сильному вплоть до полного затухания амплитуды волны по сравнению с расчетом по годуновской схеме.

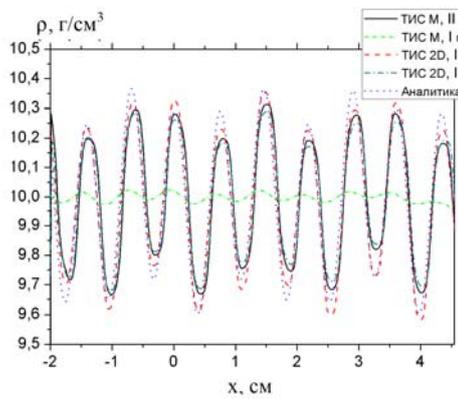


Рис.7. Профиль плотности в ударнике для *светлой* зоны (г/см^3); $t = 0.15$ мкс.

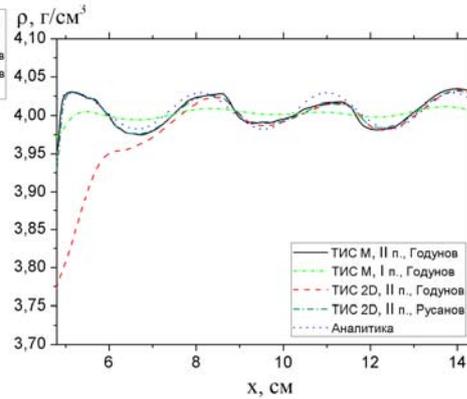


Рис.8. Профиль плотности в мишени для *светлой* (г/см^3); $t = 0.15$ мкс.

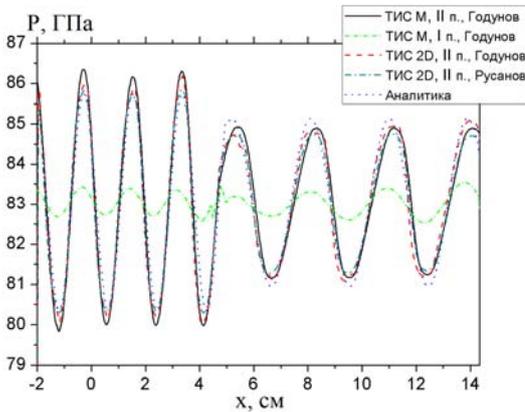


Рис.9. Профиль давления для *светлой* зоны (ГПа); $t = 0.15$ мкс.

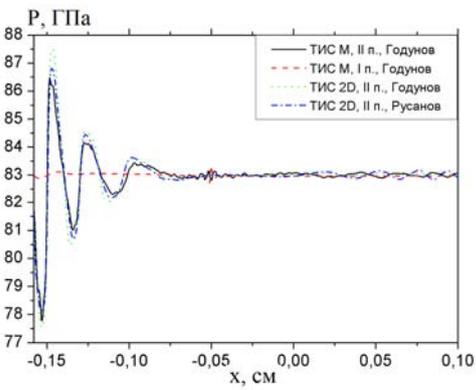


Рис.10. Профиль давления для *серой* зоны (ГПа); $t = 0.25$ мкс.

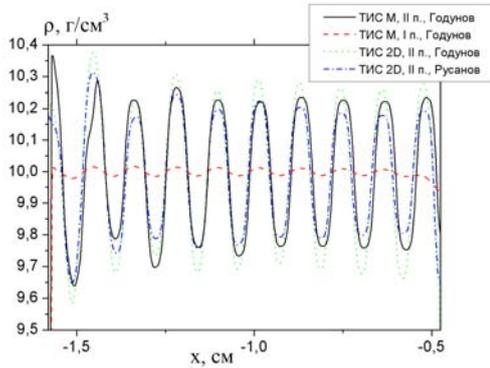


Рис.11. Профиль плотности в ударнике для серой зоны (г/см^3); $t = 0.25$ мкс.

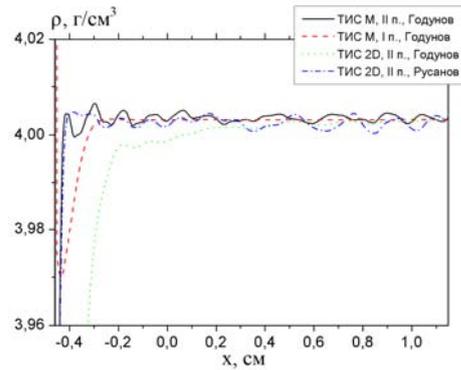


Рис.12. Профиль плотности в мишени для серой зоны (г/см^3); $t = 0.25$ мкс.

5. Заключение

В работе численно и аналитически рассмотрена задача о соударении двух пластин, одна из которых обладает начальным возмущением плотности, с использованием УРС Ми-Грюнаизена. В результате показано, что существуют три области начальных данных в зависимости от соотношения проекций волнового вектора начального возмущения $\alpha = k_{0x} / k_y$, в которых решения для малых возмущений в зафронтной области качественно отличаются. В данной работе они обозначены

$$\text{темная зона: } \alpha < k_y (c_{21}^2 - (v_2 - d_1)^2)^{0.5} / (v_1 - d_1);$$

$$\text{серая зона: } k_y (c_{21}^2 - (v_2 - d_1)^2)^{0.5} / (v_1 - d_1) < \alpha < k_y c / (v_1 - d_1);$$

$$\text{светлая зона: } k_y c / (v_1 - d_1) < \alpha.$$

В *темной* зоне в ударнике присутствует энтропийно-вихревое возмущение. Волновой вектор звуковых возмущений чисто мнимый, следовательно, как в ударнике, так и в мишени звуковые волны отсутствуют.

В *серой* зоне в ударнике также присутствуют энтропийно-вихревые возмущения. Волновой вектор звуковых возмущений имеет действительную и мнимую части. Следовательно, звуковые волны присутствуют в некоторой ограниченной области за фронтом УВ в ударнике, но в мишень они также не проникают. В *светлой* зоне энтропийно-вихревые и звуковые возмущения присутствуют как в ударнике, так и в мишени. Присутствие энтропийно-вихревой волны в мишени обусловлено взаимодействием звуковой волны с фронтом УВ в мишени. Выводы теоретического анализа для *темной* и *светлой* зон подтверждаются прямым численным моделированием. Численное моделирование для случая *серой* зоны показывает, что теоретическое исследование этого случая требует учета нелинейных эффектов.

Из сравнения численных и теоретических результатов следует, что при рассмотрении задач об эволюции возмущений при прохождении ударно-волновых процессов в многоматериальных системах необходимо использовать схемы с минимум вторым порядком точности с аппроксимацией численного потока, обладающей минимальной численной вязкостью.

Режимы, при которых отсутствует перенос возмущений, могут быть полезны для оптимизации работы систем инерциального термоядерного синтеза для уменьшения развития возмущений при прохождении ударно-волновых процессов в системе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *J. Lindl, O. Landen et al.* Review of the National Ignition Campaign 2009-2012 // *Phys. Plasmas*, 2014, v.21, p.050201.
2. *T.R. Dittrich, O.A. Hurricane.* Design of a High-Foot High-Adiabatic ICF Capsule for the National Ignition Facility // *Phys. Rev. Lett.*, 2014, v.112, p.055002.
3. *V.A. Smalyuk, R.E. Tipton et al.* Measurements of an Ablator-Gas Atomic Mix in Indirectly Driven Implosions at the National Ignition Facility // *Phys. Rev. Lett.*, 2014, v.112, p.025002.
4. *Г.И. Канель, С.В. Разоренов и др.* Экспериментальные профили ударных волн в конденсированных веществах. – М.: Физматлит, 2008;
G.I. Kanel, S.V. Razorenov i dr. Eksperimentalnye profili udarnykh voln v kondensirovannykh veshchestvakh. – М.: Fizmatlit, 2008.
5. *С.П. Дьяков.* Об устойчивости ударных волн // *ЖЭТФ*, 1954, т.27, №3(9), с.288-295;
S.P. Diakov. Ob ustoychivosti udarnykh voln // *ZhETF*, 1954, t.27, №3(9), s.288-295.
6. *A.L. Velikovich, J.G. Wouchuk et al.* Shock front distortion and Richtmyer-Meshkov-like growth caused by a small pre-shock non-uniformity // *Phys. Plasmas*, 2007, v.14, p.072706.
7. *C. Huete Ruiz de Lira, A.L. Velikovich, J.G. Wouchuk.* Analytical linear theory for the interaction of a planar shock wave with a two- or three-dimensional random isotropic density field // *Phys. Rev. E*, 2011, v.83, p.056320.
8. *C. Huete Ruiz de Lira.* Turbulence generation by a shock wave interacting with a random density inhomogeneity field // arXiv:1006.1819v2, 2010.
9. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.* Теоретическая физика. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986;
англ. пер.: *L.D. Landau, E.M. Lifshitz.* Fluid Mechanics. – NY.: Pergamon, 1987.
10. *Н.М. Кузнецов.* Устойчивость ударных волн // *УФН*, 1989, т.159, №3, с.495-527;
англ. пер.: *N.M. Kuznetsov.* Stability of shock waves // *Sov. Phys. Usp.*, 1989, v.32, p.993-1012.
11. *R.D. Richtmyer.* Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids // *Comm. on Pure and Appl. Math.*, 1960, v.13, p.297-319.
12. *Е.Е. Мешков.* Исследования гидродинамических неустойчивостей в лабораторных экспериментах. – Саров: 2006;
E.E. Meshkov. Issledovaniia gidrodinamicheskikh neustoychivostei v laboratornykh eksperimentakh. – Sarov: 2006.
13. *А.Н. Разин.* Моделирование неустойчивости и турбулентного перемешивания в слоистых системах. – Саров: 2010;
A.N. Razin. Modelirovanie neustoychivosti i turbulentnogo peremeshivaniia v sloistykh sistemakh. – Sarov: 2010.
14. *Н.А. Иногамов, А.Ю. Демьянов, Е.Е. Сон.* Гидродинамика перемешивания. – М.: МФТИ, 1999;
N.A. Inogamov, A.Yu. Demianov, E.E. Son. Gidrodinamika peremeshevaniia. – М.: MFTI, 1999.
15. *N.A. Inogamov.* Statistics of Long-Wavelength Fluctuations and the Expansion Rate of Richtmyer–Meshkov Turbulence Zone // *JETP Lett.*, 2002, v.75, №11, p.547-551.
16. *J.G. Wouchuk.* Growth rate of linear Richtmyer-Meshkov instability when a shock is reflected // *Phys. Rev. E*, 2001, v.63, p.056303.
17. *Y. Yang, Q. Zhang.* Small amplitude theory of Richtmyer-Meshkov instability // *Phys. Fluids*, 1994, №6(5).
18. *K. Nishihara, J.G. Wouchuk, C. Matsuoka et al.* Richtmyer-Meshkov instability: theory of linear

- and nonlinear evolution // *Phil. Trans. R. Soc. A*, 2010, №368, p.1769-1807.
19. *Е.И. Забабакхин*. Некоторые вопросы гидродинамики взрыва. – Снежинск, 1997;
E.I. Zababakhin. Nekotorye voprosy gidrodinamiki vzryva. – Snezhinsk, 1997.
 20. *А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Ю. Семенов*. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Наука, 2001;
A.G. Kulikovskii, N.V. Pogorelov, A.Yu. Semenov. Mathematical aspects of numerical solution of hyperbolic systems. – Chapman & Hall, 2001.
 21. *К.Е. Городничев, С.Е. Куратов*. Развитие возмущений в системе сталкивающихся пластин // ВАНТ сер. Мат. мод. физ. проц., 2013, №2, с.37-47;
K.E. Gorodnichev, S.E. Kuratov. Razvitie vozmushchenii v sisteme stalkivaiushchikhsia plastin // VANT ser. Mat. mod. fiz. prots., 2013, №2, s.37-47.
 22. *Р.И. Нигматулин*. Динамика многофазных сред. – Наука, 1987;
R.I. Nigmatulin. Dinamika mnogofaznykh sred. – Nauka, 1987.
 23. *И.С. Меньшов, А.В. Мищенко, А.А. Серёжкин*. Численное моделирование упругопластических течений методом Годунова на подвижных эйлеровых сетках // Мат. мод., 2013, т.25, с.89-108;
I.S. Menshov, A.V. Mischenko, and A.A. Serejkin. Numerical Modeling of Elastoplastic Flows by the Godunov Method on Moving Eulerian Grids // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2014, v.6, №2, p.127-141.
 24. *С.К. Годунов, А.В. Забродин и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976;
S.K. Godunov, A.V. Zabrodin i dr. Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoi dinamiki. – М.: Nauka, 1976.
 25. *В.В. Русанов*. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // Выч. мат. и мат. физ., 1961, т.1, №2, с.267-279;
V.V. Rusanov. Raschet vzaimodeistviia nestatsionarnykh udarnykh voln s prepiatstviiami // Vych. Mat. I Mat. Fiz., 1961, t.1, №2, s.267-279.
 26. *W.K. Anderson, J.L. Thomas, B. Van Leer*. Comparison of finite volume flux vector splittings for the Euler equation // *AIAA Journal*, 1986, №24(9), p.1453-1460.
 27. *I. Menshov, P. Zakharov*. On the composite Riemann problem for multi-material fluid flows // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.*, 2014, №76(2), p.109-127.
 28. *J.K. Dukowicz*. The Richtmyer-Meshkov Instability // *J. of Comp. Phys.*, 1985, v.61, p.119-137.
 29. Код ЭГИДА-2D для моделирования двумерных задач / Ред. Ю.В. Янилкин. – Саров, 2008;
Kod EGIDA-2D dlia modelirovaniia dvumernykh zadach/ Red. Iu.V. Ianilkin. – Sarov, 2008.

Поступила в редакцию 21.12.15