

МГУ имени М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики



НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

Тихоновские чтения

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

*Посвящается памяти академика
Андрея Николаевича Тихонова*

28 октября – 02 ноября 2024 года

МОСКВА
2024

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И КИБЕРНЕТИКИ

НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

Тихоновские чтения

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

*Посвящается памяти академика
Андрея Николаевича Тихонова*

28 октября – 02 ноября 2024 года



МОСКВА – 2024



*Заседания конференции проходят
на факультете ВМК и физическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова*

Т46 **Тихоновские чтения** : тезисы докладов : научная конференция ; 28 октября – 02 ноября 2024 г. – Москва : Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова (лицензия ИД № 05899 от 24.09. 2001 г.) ; МАКС Пресс, 2023. – 116 с.
e-ISBN 978-5-89407-646-1 (ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова)
ISBN 978-5-317-07282-7 (МАКС Пресс)
<https://doi.org/10.29003/m4086.978-5-317-07282-7>

В издании публикуются тезисы докладов, посвященные исследованиям в области прикладной математики и информатики, которые будут прочитаны на конференции «Тихоновские чтения».

УДК 517
ББК 22.16

Tikhonov readings: abstracts: scientific conference: October, 28 – November, 02, 2024. – Moscow: MAK Press, 2024. – 116 p.
e-ISBN 978-5-89407-646-1 (ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова)
ISBN 978-5-317-07282-7 (МАКС Пресс)
<https://doi.org/10.29003/m4086.978-5-317-07282-7>

The brochure publishes abstracts of reports that will be read at the “Tikhonov Readings” conference dedicated to research in the field of applied mathematics and computer science.

Научное издание

Научная конференция
ТИХОНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ
Тезисы докладов
28 октября – 02 ноября 2024 г.

Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. Лицензия ИД N 05899 от 24.09.01 г. 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус

Издательство «МАКС Пресс».
Главный редактор: *Е. М. Бугачева*

Напечатано с готового оригинал-макета
Подписано в печать 23.10.2024 г. Формат 70х100 1/16. Усл. печ. л. 9,43. Тираж 20 экз. Изд. № 176.

Издательство ООО «МАКС Пресс» Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г. 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к. Тел. 8(495)939-3890/91. Тел./Факс 8(495)939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42, корп. 5, эт. 1, пом. I, ком. 6.3-23Н

e-ISBN 978-5-89407-646-1
ISBN 978-5-317-07282-7

© Авторы докладов, 2024
© Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, 2024
© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2024

КОНФЕРЕНЦИЯ «ТИХОНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ 2024»

Секция: «Информационная безопасность»

1. Лысаков И. В., Применко Э. А. О решении задач из теории целочисленных решеток с помощью метода квантового отжига	9
2. Рубенков А.Д., Чижов И.В. Структурная атака на кодовую криптосистему PQSIGRM	10
3. Чижов И.В. Неасимптотическая оценка вероятности того, что квадрат Адамара случайного длинного линейного кода имеет максимальную размерность	11
4. Идрисов И.Э., Намиот Д.Е. Метод оптимизации для сжатия и восстановления медиа данных	12
5. Макаров А.В., Намиот Д.Е. Модели использования расширенного адвертайзинга....	13
6. Рушечников Я.И., Третьяков И.А., Данилов В.В. Алгоритм автоматизированной оценки сигналов на принадлежность к ПЭМИН	14

Секция: «Теория дифференциальных уравнений»

1. Коровина М.В. Метод построения асимптотик решений дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами в окрестности иррегулярных особых точек	15
2. Капустин Н.Ю., Васильченко Д.Д. Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с полуполосой в эллиптической части	16
3. Костин А.Б., Шерстюков В.Б. Главное значение аргумента гамма-функции на мнимой оси в задачах для нелинейных дифференциальных уравнений	17
4. Зайцева Н.В. Нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами	18
5. Емельянов Д.П. Асимптотика решения специальной задачи Коши для сингулярно возмущённого вырождающегося уравнения	19

Секция: «Математическое моделирование и вычислительные методы»

Подсекция кафедры Вычислительных методов

1. Еленина Т.Г., Еленин Г.Г. О численных методах, основанных на точной линеаризации задачи Кеплера.....	20
2. Егоренков В.А., Трофимов В.А. О построении адаптивных искусственных краевых условий для уравнения Шредингера, описывающего дифракцию оптических пучков	21
3. Петрова Л.И. Скрытые свойства уравнений Эйлера и Навье-Стокса	22
4. Широков И. А. Нестационарное сверхзвуковое обтекание модели НВ-2: влияние сеточных характеристик на результаты моделирования.....	23
5. Мокин А.Ю., Савенкова Н.П., Ходалицкий Д.Н. Частные решения задачи теплопроводности с подвижной границей.....	24
6. Дородницын Л.В. Применение комбинированных моделей для генерации анизотропной синтетической турбулентности.....	25
7. Панферова И.А., Богомолов С.В. Один вариант разрывного метода частиц.....	26
8. Мещеряков А.О., Головизнин В.М. Разработка общего решения для интерактивного каталога разностных схем на примере однородного уравнения переноса	27

Подсекция кафедры Автоматизации научных исследований

1. Жилин В.А., Матвеев С.А., Смирнов А.П. Использование адаптивных шагов в задачах агрегации-дробления вещества	28
2. Шишкин А.Г., Никонов М.В. Использование легковесных языковых моделей для диффузионных процессов в задачах обработки речи	29
3. Шишкин А.Г., Четкин Е.И. Применение методов машинного обучения для решения задач управляемого термоядерного синтеза	31
4. Шишкин А.Г., Бердышев Д.А. Современные подходы машинного обучения в классификации эмоциональных состояний на основе мультимодальных данных.....	33
5. Зотов И.В., Дементьев Н.С., Пахнушев А.В. Анализ временной эволюции границы тороидальной плазмы с помощью метода подвижных филаментов.....	35
6. Ожигов Ю.И., Мяо Хуэйхуэй, Кулагин А.В., Кузьминский А.В., Ли Ваньшунь, Чэнь Жань, Ю Цзянчуань. Исследование энтропийной динамики многокубитной системы КЭД.....	36
7. Ожигов Ю.И., Ю Цзянчуань, Чэнь Жань, Ли Ваньшунь, Мяо Хуэйхуэй, Кулагин А.В., Кузьминский А.В.О компьютерном моделировании химических превращений	37

Секция: «Математическая физика и обратные задачи»

1. Денисов А.М., Чжу Дунцинъ. Численное решение нелинейной обратной задачи для модели динамики сорбции.....	38
2. Тихонов И.В., Гаврилов О.А. Спектральная теория полугрупп и её применение в нелокальных эволюционных задачах	39
3. Романенко Т.Е., Разгулин А.В., Ларичев А.В. Применение физически-информированных нейронных сетей к задаче восстановления волнового фронта.....	40
4. Баев А.В. Некоторые задачи для модели Ферми-Паста-Улама с неоднородной решеткой.....	41
5. Лопушенко В.В., Ерёмин Ю.А. Аномальное поведение парных частиц щелочных металлов при наличии квантового эффекта.....	42
6. Харитонов Д.М., Трофимов В.А. Комбинированный подход к нахождению многоцветных солитонов в задаче трёхволнового взаимодействия.....	43
7. Барашков И.С. Алгоритм решения двумерной обратной задачи магнитотеллурического зондирования для неоднородности с плавным изменением проводимости.....	44

Секция: «Вычислительные технологии и моделирование»

1. Косолапов И.А., Шелопут Т.О., Замарашкин Н.Л., Желтков Д.А., Дьяченко Р.Р. Исследование структуры матрицы коэффициентов РВМ-модели для уменьшения вычислительной сложности фильтрации нелинейных искажений	45
2. Моложавенко А.А., Рахуба М.В. Оптимизация на многообразии тензорных поездов с общими факторами.....	46
3. Закс Р.Т., Матвеев С.А. Использование малоранговых аппроксимаций в задаче идентификации функции-источника в уравнении коагуляции-дробления.....	47
4. Бурцев Л.А., Таумурзаев А.К., Замарашкин Н.Л., Петров С.В. Построение канонических приближений тензоров специального вида.....	48
5. Когтенов Д.А., Замарашкин Н.Л. Разреженные матричные аппроксимации для	

Секция: «Асимптотические методы и дифференциальные уравнения с малым параметром»

1. Волков В.Т., Никитин А.Г., Никулин Е.И. Стабилизация по аргументу нелинейности в сингулярно возмущенной интегродифференциальной задаче..... 50
2. Быков А.А. Двумерные нестационарные контрастные структуры в случае слабой адвекции и в случае нормальной адвекции 51
3. Юшков Е.В., Коновалова Д.А., Соколов Д.Д. Асимптотическая реконструкция профиля магнитного поля плоской галактики по поляризации синхротронного излучения релятивистских электронов 52
4. Даник Ю.Э. Асимптотические приближения в регулярно и сингулярно возмущенных задачах управления и Падерегуляторы 53
5. Макаров Д.А. Приближенное решение некоторых сингулярно возмущенных задач управления на основе асимптотического анализа 54
6. Давыдова М.А., Еланский Н.Ф., Рублев Г.Д., Шилкин А.В. Об использовании асимптотических приближений по малому параметру в задаче реконструкции параметров атмосферной турбулентности и эмиссий антропогенных и природных примесей..... 55
7. Орлов А.О. Решения с пограничными слоями в двухкомпонентной двумерной тихоновской системе с КРЗ нелинейностями 56
8. Аргун Р.Л., Левашова Н.Т., Лукьяненко Д.В. Использование методов асимптотического анализа для сверхбыстрого решения обратной задачи по определению объёма сгоревшей биомассы в ландшафтных лесных пожарах 57
9. Махмудов Р.А., Орлов А.О. Движение фронта в задаче реакция-диффузия в случае баланса реакции и диффузии 58
10. Никулин Е.И., Карамышев А.В. Слабый внутренний слой в периодической задаче реакция-диффузия-адвекция в случае разрыва реакции 59
11. Никулин Е.И., Карманов Д.А. Периодические контрастные структуры в дрейфодиффузионной модели полупроводника..... 60

Секция: «Нелинейная динамика: качественный анализ и управление»

1. Шутова К.Ю., Фомичев В.В. Алгоритм равномерного распределения агентов в прямоугольнике на основе локальной информации 61
2. Бегишев Р.Р., Ильин А.В. Передвижение группы роботов в неопределенной среде с применением обучения с подкреплением 63
3. Чонсыщинь Ц., Фомичев В.В. Алгоритмы сверхфинитной стабилизации..... 64
4. Крылов П.А., Фурсов А.С. Некоторые аспекты проблемы стабилизации нелинейной аффинной системы второго порядка..... 65

Секция: «Обратные задачи управления»

1. Никольский М.С. Об одной минимаксной задаче управления пучками траекторий .. 66
2. Хайлов Е.Н. О сопряжении особого режима локального второго порядка с неособым релейным участком 67
3. Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В., Орлов С.М. Об особых режимах в многомерных задачах экономического роста..... 68
4. Дряженков А.А., Потапов М.М. Алгоритм устойчивого решения системы

операторных уравнений при наличии разнотипной априорной информации для составляющих её подсистем	69
5. Жуковский В.И., Жуковская Л.В. Об одной дифференциальной игре на перетягивание.....	70
6. Орлов С.М., Ровенская Е.А. Исследование модели DICE с двумя агентами	71
7. Шатков С.А. Об учете ограничений в задаче управления космическим аппаратом при использовании метода АКАР	72
8. Самсонов С.П., Гончарова М.Н. О построении множества управляемости одного объекта	73
9. Кулевский А.В. Об одном свойстве геометрической разности множеств	74
10. Григоренко Н.Л., Горьков В.П. Некоторые задачи управления в динамике квадрокоптера	75

Секция: «Системный анализ»

1. Сафонова Е.С., Смирнов С.Н. Оценка точности преобразования Моро-Бертсекаса и приложение к задаче суперхеджирования	76
2. Парастаев Г.С. Гипотеза Рамсея в условиях ограниченной ликвидности капитала.....	77
3. Мельникова А.А. О модификации процедуры построения множества разрешимости для линейной системы с управляющими параметрами и неопределённостью	78
4. Паршиков М.В., Точилин П.А. Об алгоритме приближённого решения задачи управления с фазовыми ограничениями по части переменных	79

Секция: «Математическая кибернетика»

1. Алексеев В.Б., Назаров А.А. О вопросе существования билинейного алгоритма сложности 17 для перемножения матриц размеров 5×2 и 2×2	80
2. Бухман А.В. О распознавании свойств полиномиальных форм с ограничениями на степень слагаемых	81

Секция: «Исследования операций»

1. Васин А.А. О развитии исследований в области оптимизации энергетических рынков.	82
2. Давидсон М.Р., Павленко Д.Ю. Анализ метода последовательного квадратичного программирования для задачи оптимального потокораспределения в электрических сетях	83
3. Янь Чжибай. Сравнительное тестирование ньютоновских методов для задачи поиска обобщенного равновесия Нэша	84
4. Морозов В.В., Романов С.И. Построение целочисленного дележа ядра вполне сбалансированной кооперативной игры.....	85
5. Морозов В.В., Галеев Д.О. Модель защиты объектов средствами обнаружения и поражения.....	86
6. Голембиовский Д.Ю., Арбузов П.А. Модель ARIMA-GARCH в прогнозировании базового актива на основе рыночных цен опционов	87

Секция: «Системное программирование и информационные технологии»

Подсекция кафедр суперкомпьютеров и квантовой информатики, автоматизации систем вычислительных комплексов

1. Никольский И.М. О сегментации сканированных 3d-изображений древесной растительности	88
2. Гарькавый И.С., Степанов Е.П. Управление загрузкой очередей маршрутизатора при помощи балансировки флоулетов на основе машинного обучения	89
3. Воеводин Вад.В., Сетяев А.В. Определение свойств суперкомпьютерных заданий на основе данных системы мониторинга	91
4. Александров А.В., Волканов Д.Ю., Волчанинов А.П., Никифоров Н.И. Современные подходы к построению сетевых процессорных устройств	92
5. Попова Н.Н., Козинцева А.А. Подходы к ускорению нейросетевой обработки данных на примере реализации инференса моделей на узлах суперкомпьютера “270 лет МГУ”	94
6. Никифоров Н.И., Волканов Д.Ю. Задача распределения программы обработки сетевых пакетов на стадии конвейера сетевого процессорного устройства	95
7. Воеводин Вад.В., Матвеев В.А. Разработка и реализация переносимого решения для проверки корректности данных от системы мониторинга суперкомпьютеров	96
8. Рязанов А.М., Волканов Д.Ю. Система сбора, хранения и обработки сетевого трафика для обучения алгоритмов прогнозирования качества наложенных каналов в сетях передачи данных	97
9. Ершов Н.М., Чернов А.М. Разработка и исследование алгоритмов быстрой реконструкции треков частиц для проекта BM@N	98
10. Го Фэнжуй, Смелянский Р.Л., Королев В.Ю. Применение метода векторной авторегрессии для прогнозирования качества канала передачи данных	99
11. Буряк Д.Ю., Новиков Д.А. Исследование влияния параметров метода прореживания в процессе обучения на его эффективность	100
12. Буряк Д.Ю., Панкина А.А. Исследование методов обучения представлению данных	101

Подсекция кафедры алгоритмических языков

1. Ефремова Н.Э., Елисеева М.А. Перевод набора данных Visual Genome на русский язык	102
2. Вылиток А.А., Мельников Б.Ф., Лю Бовэнь. Экспериментальное сравнение двух методов вычисления инварианта в графе турнира	103
3. Большакова Е.И., Мещерякова Ю.Ф. Метод восстановления словообразовательных деревьев по группам однокоренных слов	105
4. Гулак М.А., Панфёров А.А. Об одном алгоритме преобразования операторных матриц	106
5. Ефремова Н.Э., Коляскина И.С. Программный модуль лексической нормализации текстов на русском языке	107
6. Вылиток А.А., Мельников Б.Ф., Мэн Линцянь. Свойства группоида и полугруппы конечного автомата PRI	108

Секция: «Теория вероятностей и математическая статистика»

1. Захарова Т.В., Панов П.В. Современные подходы и методы оценки биоэквивалентности лекарственных средств.	109
2. Савушкин Е.В., Захарова Т.В. Условия существования и единственности сильных решений стохастических дифференциальных уравнений	110

3. Клименко В.К., Захарова Т.В. Вероятностные свойства критериев проверки гипотезы биоэквивалентности.....	111
4. Воронцов М.О., Шестаков О.В. Асимптотические результаты для среднеквадратичного риска при использовании методов множественной проверки гипотез в условиях зависимости наблюдений	112
5. Наволоцкий А.А., Шевцова И.Г., Берговин А.К. Моделирование распределений сообщений при декодировании кодов с низкой плотностью проверок на четность	113
6. Достовалова А.М., Горшенин А.К. Нейросетевые аналоги случайных полей Маркова в задачах сегментации объектов на спутниковых снимках	114
7. Осипова А.А., Горшенин А.К., Беляев К.П. Стохастические методы совместного анализа данных температуры воды, потоков тепла и атмосферного давления в Северной Атлантике.....	115
8. Хохлов Ю.С. Об одном многомерном аналоге логистического распределения.....	116

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ИЗ ТЕОРИИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ РЕШЕТОК С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КВАНТОВОГО ОТЖИГА

Лысаков И. В.¹, Применко Э. А.²

1) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра информационной безопасности,
e-mail: lysakoviv@my.msu.ru

2) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра информационной безопасности,
e-mail: primenko@inbox.ru

Известно, что в квантовой модели вычислений существуют эффективные алгоритмы решения сложных математических задач, для которых отсутствуют известные и эффективные модели в классической модели вычислений. Однако на сегодняшний день существуют другие модели вычислений, основанные на принципах квантовой механики. Одна из них - квантовая адиабатическая модель вычислений, принцип работы которой основан на методе квантового отжига. В данной работе рассматривается возможность решения задач из теории решеток, которые, предположительно, являются стойкими в гейтовой модели вычислений, с помощью квантового адиабатического вычислителя.

Предлагается алгоритм, позволяющий свести задачи поиска ближайшего вектора и декодирования с ограниченным расстоянием к задаче Изинга [2] по нахождению минимума функционала $I(s_1, s_2, \dots, s_n) = \sum_{k=1}^n h_k s_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n J_{ij} s_i s_j$, где $h_k \in R, k = \overline{1, n}$, $J_{ij} \in R, i = \overline{1, n}, i < j \leq n$ на множестве переменных $s_p \in \{-1, 1\}, p = \overline{1, n}$. Такая задача оптимизации может быть решена непосредственно квантовым адиабатическим вычислителем. Важным параметром, влияющим на точность решения, является время работы вычислителя - T , измеряемое в секундах. При этом чем больше было выбрано T , тем ближе найденное решение будет к точному минимуму функционала.

Так же исследуется применимость алгоритма для решения упомянутых выше задач на классе так называемых q -ичных решеток. Данный тип решеток играет важную роль для анализа стойкости криптосистемы NTRUEncrypt [1]. Для определения q -ичной решетки необходимо задать 2 параметра: n и q . Параметр n определяет размерность решетки - $2n \times 2n$, а q - максимальное значение коэффициентов в базисе решетки. Было доказано, что для решения задачи декодирования с ограниченным расстоянием с параметром γ в q -арной решетке, определенной параметрами n и q , требуется не более $2n \log(2\gamma\sqrt{2}n^{3/2}\sqrt{q} + Nq)$ кубитов [3]. При этом найдется такое достаточно малое $\delta > 0$, что точное решение будет найдено за $T = \Omega\left(\left(\frac{n}{2}q^3\right)^{1+\delta}\right)$.

Литература

1. Hoffstein J., Pipher J., Silverman J. H. NTRU: A Ring-Based Public Key Cryptosystem // ANTS 1998: 267-288.
2. Kadowaki T., Nishimori H. Quantum annealing in the transverse Ising model // Physical Review E. -1998. - nov. - Vol. 58, no. 5. - P. 5355-5363.
3. Lysakov I. V. Solving some cryptanalytic problems for lattice-based cryptosystems with quantum annealing method // Матем. вопр. криптогр. - 2023. - Т. 14., вып. 2. - С. 111-122.

СТРУКТУРНАЯ АТАКА НА КОДОВУЮ КРИПТОСИСТЕМУ PQSIGRM

Рубенков А.Д.¹, Чижов И.В.²

- 1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра информационной безопасности, e-mail: adrmsk@mail.ru
- 2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра информационной безопасности, e-mail: ichizhov@cs.msu.ru

Впервые использовать коды Рида-Маллера в кодовых криптосистемах предложил В. М. Сидельников [1]. Эта идея позволила повысить скорость декодирования криптосистемы Мак-Элиса за счет алгебраических свойств класса кодов. Однако богатство их алгебраической структуры было использовано для построения на них структурных атак [2, 3]. Наличие этих атак повлекло отказ от использования оригинальных кодов Рида-Маллера в схемах шифрования и подписи.

Однако криптографы все еще пытаются уйти от уязвимостей рассматриваемого класса кодов при сохранении их полезных свойств. Так, например, корейские ученые в схеме подписи pqsigRM [4] предложили применить ряд преобразований к кодам Рида-Маллера для сокрытия их структуры. Эта схема проходит стандартизацию в рамках нескольких конкурсов и в их процессе структура кода видоизменилась, но в своей основе сохраняет ключевое преобразование. Стойкость модификации кодов Рида-Маллера с применением этого преобразования исследуется в работе и далее такие коды называются частично модифицированными кодами Рида-Маллера.

Идея атаки на такие коды состоит в использовании свойств произведения Шура-Адамара на самого себя, называемого квадратом Шура-Адамара. Произведением Шура-Адамара кодов A и B называется код $C = A \circ B$, состоящий из линейной оболочки векторов $c = a \circ b$, $a \in A, b \in B$, где $a \circ b$ — покоординатное произведение векторов. При помощи него для некоторых параметров код разделяется на блоки, в которых содержатся коды Рида-Маллера. Далее к выделенным кодам применяются известные на них атаки [2, 3] и алгоритм очистки блоков при помощи декодирования кода Рида-Маллера.

Предложенный алгоритм для некоторых размерностей позволяет полностью восстановить секретный ключ со сложностью, эквивалентной сложности известных атак на коды Рида-Маллера, что показывает бессмысленность использования этого преобразования кода. Ключевой результат работы отражен в следующей теореме.

Теорема 1. Если размерности частично модифицированного кода Рида-Маллера удовлетворяют неравенству $2r < m - 2$, то существует атака, раскрывающая структуру кода со сложностью $O(n^4 + n^2 \text{DecRM}(n) + L(n))$, где $\text{DecRM}(n)$ — сложность декодирования кода Рида-Маллера, $L(n)$ — сложность атаки на код Рида-Маллера, например, из работ [2, 3].

Литература

1. Сидельников В. М. Открытое шифрование на основе двоичных кодов Рида-Маллера // Дискретная математика. 1994. Т. 6, No 2. С. 3–20.
2. Minder L., Shokrollahi A. Cryptanalysis of the Sidelnikov Cryptosystem // Advances in Cryptology — EUROCRYPT. 2007. Т. 4515. С. 347–360.
3. Бородин М. А., Чижов И. В. Эффективная атака на криптосистему Мак-Элиса, построенную на основе кодов Рида-Маллера // Дискретная математика. 2014. Т. 26, No 1. С. 10–20.
4. Lee, Y., Lee, W., Kim, Y., No, J. Modified pqsigRM: RM Code-Based Signature Scheme // IEEE Access. 2020. Т. 8. С. 177506–177518.

НЕАСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ТОГО, ЧТО КВАДРАТ АДАМАРА СЛУЧАЙНОГО ДЛИННОГО ЛИНЕЙНОГО КОДА ИМЕЕТ МАКСИМАЛЬНУЮ РАЗМЕРНОСТЬ

Чижов И.В.

*МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики,
кафедра информационной безопасности, e-mail: ichizhov@cs.msu.ru*

Недавний прогресс в области анализа кодовых постквантовых криптографических систем с открытым ключом в первую очередь обязан применению такой операции над линейными кодами как покоординатное произведение, произведение Шура–Адамара, или просто произведение Адамара линейных кодов (линейных подпространств векторных пространств над конечным полем). Для построения произведения Адамара двух кодовых выбирают их базисы, выполняют покоординатное умножение каждого вектора первого базиса на каждый вектор второго базиса и произведением Адамара объявляют код, равный линейной оболочке построенных векторов.

В 2015 году в работе [1] установлена асимптотическая оценка того, что квадрат Адамара случайного линейного кода имеет максимально возможную размерность. Таким образом, было впервые установлено, что при росте параметров кода найти случайно код, квадрат Адамара которого имеет не максимальную размерность почти невозможно. Получается, что с помощью квадрата Адамара можно отличать некоторые коды от случайных. Однако в криптографических приложениях значения параметров линейных кодов фиксированы. И возникает вопрос насколько эффективен тот или иной отличитель код от случайного при заданных параметрах, а не в бесконечности.

В 2023 в работе [2] получена неасимптотическая оценка вероятности того, что квадрат Адамара линейного кода заполняет собой все пространство. Однако эта оценка становится тривиальной, если рассматриваются длинные линейные коды, т.е. такие коды, у которых длина больше, чем половина квадрата размерности исходного кода.

В настоящей же работе изучается случай длинных кодов. В итоге была доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть числа $k, n \in \mathbb{N}$ таковы, что $k \geq 6$ и $n > \frac{k(k+1)}{2}$. Выберем случайно и равномерно матрицу G из множества всех $(k \times n)$ -матриц над некоторым конечным полем $\mathbb{F}_q$, эта матрица будет порождать линейный код C . Тогда для квадрата Адамара $C^{\circ 2}$ справедливо неравенство

$$\Pr \left\{ \dim C^{\circ 2} = \frac{k(k+1)}{2} \right\} > 1 - q^{\frac{k(k+1)}{2} + \log_q 2 - (1 - \log_q q - 1)n}.$$

Эта теорема позволяет строить оценку вероятности того, что квадрат Адамара длинного линейного кода имеет максимально возможную размерность при фиксации параметров кода. При этом техника доказательства значительно проще, чем та, что была использована в работе [1].

Литература

1. Cascudo I., Cramer R., Mirandola D., Zémor G. Squares of random linear codes // IEEE Transactions on Information Theory (2015) vol. 61, no. 3, pp. 1159–1173.
2. Чижов И. Квадрат Адамара и обобщенное минимальное расстояние кода Риды–Маллера порядка 2 // Дискрет. матем (2023) 35 (1), с. 128–152.

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ СЖАТИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ МЕДИА ДАННЫХ

Идрисов И.Э.¹, Намиот Д.Е.²

1) *Кафедра информационной безопасности, e-mail: iidrisov@outlook.com*

2) *Кафедра информационной безопасности, e-mail: dnamiot@gmail.com*

Высокую долю информации в цифровом пространстве составляют видео и аудио данные, то есть медиаданные. Их хранение, обработка и распространение требуют высоких расходов. Развитие методов сжатия и восстановления таких типов данных позволяет более эффективно и экономно утилизировать имеющиеся ресурсы.

Современные подходы к задаче основываются на техниках анализа данных и статистики. Так, более узкая специализация метода позволяет добиться лучшей описательной способности получаемых сжатых представлений. Алгоритмы, приспособленные к работе с конкретными наборами данных, основываются на машинном обучении, суть которого заключается в постановке и решении соответствующей задачи оптимизации.

В рамках работы анализируется и демонстрируется эффективность метода оптимизации с использованием функции потерь в виде метрического расстояния между векторами (сигналами) в частотной области [1], взвешенной в зависимости от поставленной задачи. Формула (1) представляет функцию в общем виде:

$$\mathcal{L}(X, Y) = \rho(DCT(X), DCT(Y)) \odot W, \quad (1)$$

где $\rho(\cdot, \cdot)$ – функция расстояния, например, Евклидово расстояние, $DCT(\cdot)$ – дискретное косинусное преобразование, W – тензор весов.

Такая функция позволяет контролировать фокус статистического алгоритма на лучше или хуже воспринимаемых наблюдателем (человеком), то есть более или менее значимых, частотах.

Все чаще при формулировании и решении задач оптимизации предлагается использовать многоцелевые функции для минимизации ошибки [2]. Рассматриваемое выражение также может выступать в качестве дополнительной целевой функции, призванной повысить качество восприятия, в зависимости от используемых коэффициентов взвешивания. Представленный метод оптимизации применим в широком спектре задач, а частотное представление используется ввиду особенностей аудио и видео рядов с точки зрения теории обработки сигналов, их разложений в это представление.

Литература

1. Sims S.D. Frequency domain-based perceptual loss for super resolution // 2020 IEEE 30th International Workshop on Machine Learning for Signal Processing. – 2020.
2. Dosovitskiy A., Djolonga J. You only train once: Loss-conditional training of deep networks // International conference on learning representations. – 2019.

МОДЕЛИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РАСШИРЕННОГО АДВЕРТАЙЗИНГА

Макаров А.В.¹, Намиот Д.Е.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИБ,
e-mail: artmakar01@mail.ru

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИБ,
e-mail: dnamiot@gmail.com

С развитием технологий сервисы для передачи данных становятся неотъемлемой частью современного мира, обеспечивая быстрый обмен информацией в образовании и профессиональной среде. Однако большинство технологий, например, таких как Apple AirDrop, Huawei Share и NFC рассчитаны на P2T соединения. Среди других ограничений можно отметить такие проблемы, как использование дополнительной инфраструктуры, ограничение на количество одновременно подключенных устройств, необходимость доступа к интернету, а также требование установить и поддерживать соединение с конкретным устройством.

Сервис для трансляции презентаций, рассмотренный в статье [1] показывает, что обычный (легаси) адвертайзинг хоть и позволяет частично отказаться от использования серверной инфраструктуры и, как следствие, решить перечисленные проблемы, он все же еще не способен исключить её полностью, так как для передачи слайдов используются URL ссылки, ведущие на файлообменник. Наряду с этим возникает еще одна немаловажная проблема, связанная с отсутствием возможности шифровать передаваемые данные. Из-за этого архитектура становится уязвимой, так как нарушитель, находясь в радиусе действия беспроводного сигнала, может совершать различные атаки. Все эти проблемы напрямую связаны с ограниченным размером передаваемых байт, доступным в легаси адвертайзинге (до 31 байт).

Целью работы являлось построение и описание различных моделей на основе пространственной близости [2] с применением расширенного адвертайзинга [3]. В качестве возможных драйверов для сервисов были рассмотрены такие технологии, как Extended BLE Advertising, Wi-Fi Direct и Nearby Share, способные транслировать в эфир от 255 до 102400 байт.

Результаты работы показали, что применение расширенного адвертайзинга позволяет построить новые модели пространственной близости с более богатым функционалом. В частности, теперь открываются такие возможности, как передача файлов в их бинарном или текстовом представлениях вместо ссылок на них, как это было раньше. Помимо этого, большой доступный для передачи размер пакетов даёт возможность применять шифрование и, тем самым, решает ранее имеющуюся проблему с безопасностью, а также исключает необходимость в доступе к сервисам оператора связи.

Литература

1. Makarov A., Namiot D. On Proximity Presentation System // 27th International Conference on Distributed Computer and Communication Networks. – 2024, pp. 155–161.
2. Namiot D. Network spatial proximity between mobile devices // International Journal of Open Information Technologies. – 2021. vol. 9, no. 1, pp. 80–85.
3. Bluetooth Low Energy 5.0: Extended Advertising feature <https://www.bluetooth.com/blog/exploring-bluetooth5-whats-new-in-advertising> Retrieved: October, 2024.

АЛГОРИТМ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ОЦЕНКИ СИГНАЛОВ НА ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ К ПЭМИН

Рушечников Я.И., Третьяков И.А., Данилов В.В.

Донецкий государственный университет, ФТФ, кафедра РФиИКТ
e-mail: i.tretiakov@mail.ru

В условиях постоянно растущей компьютеризации всех отраслей народного хозяйства важной проблемой информационной безопасности являются побочные электромагнитные излучения (ПЭМИН) [1]. В данной работе осуществлена попытка оценки исследуемых сигналов на принадлежность к ПЭМИН используя в качестве широкополосного спектроанализатора SDR Play RSP1 (стоимость которого ниже более чем в 100 раз, чем у специализированных комплексов), а также математический аппарат табличного процессора MS Excel, посредством которого реализуется расчет спектральной плотности (PSD), описывающей распределение мощности сигнала по частотам в его спектре и представляющей собой меру, определяющую какая часть мощности сигнала находится в каждом частотном диапазоне.

Представленный на рис. 1 алгоритм позволяет автоматизированно определять принадлежность исследуемого сигнала к классу ПЭМИН посредством оценки количественных характеристик в виде локальных максимумов, а также их спектральной плотности на оси частот.

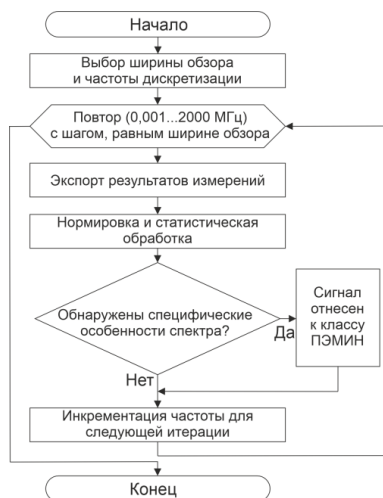


Рис. 1: Алгоритм классификации исследуемых сигналов

Последующий анализ комбинаций локальных максимумов позволит определить энергетические характеристики сигнала, а также оценить потенциальный периметр контролируемой зоны, в рамках которой сигналы ПЭМИН становятся техническим каналом утечки информации. Работа выполнена в рамках г/б НИР №124012400347-2.

Литература

1. Третьяков И.А., Рушечников Я.И. Проблемы информационной безопасности электромагнитных излучений и наводок в средствах вычислительной техники // Информационные системы и технологии: мат. межд. науч. конгр. по информатике. – Ч. 1. – Минск: БГУ, 2022. – С. 108–112. – EDN GTKGIM.

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МЕРОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОКРЕСТНОСТИ ИРРЕГУЛЯРНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Коровина М.В.

МГУ им. М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ОМ, e-mail: betelgeuser1@yandex.ru

Проблема построения асимптотик решений дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами является фундаментальной проблемой аналитической теории дифференциальных уравнений. Она была сформулирована Пуанкаре в работах [1], [2]. Наша задача состоит в определении вида асимптотик уравнения общего вида

$$a_n(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x) + a_{n-1}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u(x) + \dots + a_1(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^1 u(x) + \dots + a_0(x) u(x) = 0. \quad (1)$$

Здесь $a_i(x), i = 0, \dots, n$ – мероморфные функции. Без ограничения общности будем считать, что точка $x=0$ является особой для коэффициентов уравнения (1). В работе [3] доказано, что уравнение (1) можно привести к виду

$$H\left(r, -r^k \frac{d}{dr}\right) u = 0, \quad \hat{H} = H\left(r, -r^k \frac{d}{dr}\right) = \left(-r^k \frac{d}{dr}\right)^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(r) \left(-r^k \frac{d}{dr}\right)^i.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Символом дифференциального оператора $\hat{H}$ называется функция $H(r, p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(r) p^i$.

Основным символом оператора $\hat{H}$ называется функция $H_0(p) = H(0, p)$.

Если основной символ дифференциального оператора имеет более одного корня, то асимптотики решений, соответствующие каждому из корней, можно построить последовательно с помощью экспоненциальной подстановки, сдвигая последовательно корни в ноль.

ТЕОРЕМА. Асимптотики любого из решений уравнения (1) в пространстве функций экспоненциального роста представимы в виде суммы асимптотических членов, каждый из которых соответствует i -му корню основного символа кратности v_i .

$$u_i \approx \exp\left(P_i\left(r^{\frac{1}{l_i}}\right)\right) \sum_{j=1}^{m_i} r^{\sigma_j^i} \ln^j r \sum_{l=0}^{\infty} a_l^i r^l.$$

Здесь $l_i \leq v_i, P_i(x) = M_i x^{k_i} + \dots + M_1 x$ – полином $\frac{k_i}{l_i} \leq 1, m_i, \sigma_j^i, a_l^i$ – соответствующие константы, $\sum_{l=0}^{\infty} a_l^i r^l$ – асимптотические степенные ряды.

Литература

1. Poincare H. Sur les integrales irregulieres des equations lineaires. //Acta math. 1886, v. 8, p. 295–344
2. Пуанкаре. Избранные труды в трех томах. Том 3. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественных работ Анри Пуанкаре. Изд-во наука 1974.
3. Кац Д.С. Вычисление асимптотик решений уравнений с полиномиальными вырождениями коэффициентов // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 12. – С. 1612–1617.

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ С ПОЛУПОЛОСОЙ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ

Капустин Н.Ю.¹, Васильченко Д.Д.²

1) МГУ, ВМК, кафедра общей математики, e-mail: n.kapustin@bk.ru

2) МГУ, ВМК, кафедра общей математики, e-mail: dvasil.arm@gmail.com

Рассматривается задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$(sgn(y)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (1)$$

в области $D = D^+ \cup D^-$, где $D^+ = \{(x, y): 0 < x < \pi, 0 < y < +\infty\}$, $D^- = \{(x, y): -y < x < y + \pi, -\pi/2 < y < 0\}$ в классе функций $u(x, y) \in C^2(D^+) \cap C^2(D^-) \cap C(\overline{D^+ \cup D^-})$ с

граничными условиями

$$u(0, y) = 0, u(\pi, y) = 0, 0 < y < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, -x) = f(x), 0 \leq x \leq \pi/2, f(0) = 0, \quad (3)$$

$$u(x, y) \rightarrow 0, y \rightarrow +\infty \quad (4)$$

и условием склеивания Франкля

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y}(x, +0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, -0), 0 < x < \pi, k \in (-\infty, +\infty), k \neq 0. \quad (5)$$

Используя формулу для общего решения в области D^- , получим в области D^+ вспомогательную задачу для оператора Лапласа с граничными условиями (2), (4) и условием

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0 + 0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0 + 0) = -f' \left(\frac{x}{2} \right). \quad (6)$$

Теорема 1. *Решение задачи (1) - (5) единственно.*

Теорема 2. *Пусть $|k| < 1, k \neq 0, f(x) \in C[0, \pi/2] \cap C^2(0, \pi/2), f'(x) \in L_2(0, \pi/2)$. Тогда решение вспомогательной задачи существует, единственно и представимо в виде ряда*

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-ny} \sin nx,$$

где коэффициенты A_n определяются из равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin[nx + \arctan(k)] = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} f' \left(\frac{x}{2} \right).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Литература

1. Моисеев, Е.И., Моисеев Т.Е., Вафадорова Г.О. Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения, 2015 Т.51 №8 С.1070-1075
2. Моисеев Е.И. О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения, 1987 Т.23 №1 С.177-189

ГЛАВНОЕ ЗНАЧЕНИЕ АРГУМЕНТА ГАММА-ФУНКЦИИ НА МНИМОЙ ОСИ В ЗАДАЧАХ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Костин А.Б.¹, Шерстюков В.Б.²

- 1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики,
кафедра общей математики, e-mail: abkostin@yandex.ru
- 2) МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра
математического анализа, e-mail: shervb73@gmail.com

В вопросах, связанных с асимптотическими формулами для решений нелинейных дифференциальных уравнений, часто встречаются значения гамма-функции Эйлера в точках мнимой оси (см., например, [1]). Вычисление главного значения аргумента, взятого от подобной комплексной величины, представляет особый интерес. Авторами предложен аналитический подход к решению указанной задачи. Он использует классическое интегральное представление Мальмстена и основан на результатах недавней работы [2].

Литература

1. Сулейманов Б.И. Влияние малой дисперсии на самофокусировку в пространственно одномерном случае // Письма в ЖЭТФ (2017) 106, №6, с. 375–380.
2. Костин А.Б., Шерстюков В.Б. Об интегральных представлениях величин, связанных с гамма-функцией // Уфимский матем. журнал (2021) 13, №4, с. 51–64.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Зайцева Н.В.

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики,
кафедра общей математики, e-mail: zaitseva@cs.msu.ru

В прямоугольной области $D = \{(x, y): 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$ координатной плоскости Oxy , где l, α, β – заданные положительные числа, исследованы вопросы корректной разрешимости нелокальных краевых задач с интегральным условием вида

$$\int_0^l x^p u(x, y) dx = A, \quad -\alpha \leq y \leq \beta,$$

где A – заданная постоянная величина, для уравнения

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y) u_{yy} + \frac{p}{x} u_x = 0$$

при различных значениях параметра p (см. работы [1, 2]) и для уравнений

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y) u_{yy} + \frac{p}{x} u_x + \frac{q}{|y|} u_y = 0$$

при различных значениях параметров p и q (см. статьи [3–5]).

Решения всех рассматриваемых задач построены в явном виде – в виде суммы ряда Фурье–Бесселя. Получены достаточные условия существования и единственности этих решений в классе $C(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-)$, где $D_+ = D \cap \{y > 0\}$ и $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Литература

1. Zaitseva N.V. Boundary value problem with integral equation with a singular coefficient // Transmutation Operators and Applications. – Kravchenko V., Sitnik S. (eds). Trends in Mathematics. – Cham Switzerland: Birkhäuser (2020), p.671–686.
2. Зайцева Н.В. Нелокальная краевая задача с интегральным условием для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // Дифференц. уравнения (2021) 57, №2, с.224–234.
3. Зайцева Н.В. Единственность решения нелокальной задачи для одного эллиптико-гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами // Мат. заметки (2021) 109, №4, с.544–551.
4. Zaitseva N.V. Uniqueness of solution of boundary-value problem with integral condition for mixed-type equation with Bessel operator // Lobachevskii J. of Math. (2023) 44, №8, p.3640–3645.
5. Zaitseva N.V. Nonlocal problem with integral condition for mixed-type equation with Bessel operator // Lobachevskii J. of Math. (2024) 45, №9, p.4618–4625.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ

Емельянов Д.П.

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет Вычислительной математики и кибернетики,
кафедра общей математики, e-mail: emelianov@cs.msu.ru

Рассматривается специальная задача Коши, связанная с краевыми задачами для вырождающихся эллиптических уравнений [1].

$$\begin{cases} xy'' + c(x)y' - (a(x) + \pi^2 k^2)y = 0, & 0 < x < b, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь коэффициенты $c(x)$ и $a(x)$ аналитичны в круге $U = \{x \in \mathbb{C}: |x| < R\} \supset [0, b]$, при этом $a(x) \geq 0$ при $x \in [0, b]$, а $c(0) \geq 1$. Поставленная задача имеет линейное вырождение xy'' и большой параметр $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. При выполнении указанных выше условий решение задачи Коши (1) в классе $A(U)$ существует и единственно.

Основной интерес представляет асимптотическое поведение решения задачи (1) при $k \rightarrow +\infty$. В силу наличия вырождения, результаты теоремы Тихонова [2] не имеют места в рассматриваемом случае. Была доказана следующая теорема.

Теорема 2. Для решения задачи (1) при $k \rightarrow +\infty$ справедлива асимптотика:

$$y(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(\pi k i \sqrt{x})^\alpha} \cdot J_\alpha(2\pi k i \sqrt{x}) \cdot \left(\exp\left(-\int_0^x \frac{\bar{c}(\xi)}{2} d\xi\right) + \bar{o}(1) \right),$$

равномерная по $x \in [0, b]$. Здесь Γ – гамма-функция Эйлера, $\alpha = c(0) - 1$, i – мнимая единица, J_α – функция Бесселя первого рода порядка α , $\bar{c}(x) = (c(x) - c(0))/x$.

Литература

1. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырожденных уравнений эллиптического типа на границе области // Доклады АН СССР. — 1951. — Т. 77, № 2. — С. 181–183.
2. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Матем. сб. — 1952. — Т. 31(73), № 3. — С. 575–586.
3. Емельянов Д.П. Эллиптические дифференциальные операторы с аналитическими коэффициентами и линейным вырождением // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 5. — С. 607–627.

Секция: «Математическое моделирование и вычислительные методы»

Подсекция кафедры Вычислительных методов

О ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ, ОСНОВАННЫХ НА ТОЧНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ЗАДАЧИ КЕПЛЕРА

Еленина Т.Г.¹, Еленин Г.Г.²

*1) Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математического моделирования и информатики,
e-mail: t.yelenina@gmail.com*

*2) Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра вычислительных методов,
e-mail: elenin2@rambler.ru*

Одной из проблем вычислительной математики является создание численных методов, сохраняющих все глобальные свойства точных решений задачи Коши для гамильтоновых систем [1]. К глобальным свойствам точного решения относятся симплектичность отображения начального состояния в любое текущее состояние, сохранение фазового объема, полного импульса, полного момента импульса, полной энергии и, возможно, существование некоторых дополнительных первых интегралов, вызванных симметрией потенциальной энергии. К настоящему времени не существует численных методов, сохраняющих все глобальные свойства точных решений задачи Коши для гамильтоновых систем в случае общего положения.

Задача Кеплера является простейшим примером задачи Коши для гамильтоновой системы. Для этого случая можно построить семейство численных методов различного порядка точности, сохраняющих все глобальные свойства в рамках точной арифметики, включая сохранение вектора Лапласа-Рунге-Ленца.

Основная идея заключается в определении такой канонической замены переменных, которая приводит все первые интегралы к виду многочленов второго порядка, и применении к новой гамильтоновой системе симметрично-симплектических методов Рунге-Кутты. Как известно, эти методы дают симплектическое отображение на шаге интегрирования и сохраняют квадратичные первые интегралы [1].

В докладе излагается способ получения канонического преобразования и приводятся формулы численных методов решения задачи Кеплера, сохраняющих все глобальные свойства ее точных решений. Эти методы следует использовать для решения задачи на больших отрезках времени.

Литература

1. Hairer E., Lubich C., Wanner G. Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations//Springer-Verlag Berlin Heidelberg - 2nd Edition - 2006.

О ПОСТРОЕНИИ АДАПТИВНЫХ ИСКУССТВЕННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА, ОПИСЫВАЮЩЕГО ДИФРАКЦИЮ ОПТИЧЕСКИХ ПУЧКОВ

Егоренков В.А.¹, Трофимов В.А.².

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов,
e-mail: egorenkov-v-a@cs.msu.ru

2) Южно-Китайский университет технологий, SCUT, Guangzhou, China,
e-mail: trofimov@scut.edu.cn

Компьютерное моделирование научных и прикладных задач, которые ставятся в неограниченной или большой физической области, требуют ограничить вычислительную область посредством постановки искусственных краевых условий (ИКУ), которые должны быть неотражающими (прозрачными). Часто необходимость использовать ИКУ возникает в задачах лазерной физики. В связи с этим разработка ИКУ для линейного и нелинейного уравнения Шредингера является актуальной задачей. Эффективность таких условий существенно зависит от их адаптации к решению задачи вблизи искусственной границы.

В данном докладе развивается предложенный нами метод построения адаптивных неотражающих ИКУ для двумерного линейного уравнения Шредингера, описывающего дифракцию оптических пучков. Он основан на использовании в ИКУ локальных волновых чисел (ЛВЧ), зависящих как от пространственных координат, так и от времени. Для вычисления ЛВЧ используется их аппроксимация в виде интегрального соотношения, записанного на основе инвариантов уравнения Шредингера, и решение задачи вблизи искусственной границы [1]. Это позволяет учесть изменения локальных характеристик оптического излучения из-за его дифракции, а также из-за нелинейных эффектов.

Ранее мы продемонстрировали эффективность данного подхода в 2D случае при построении ИКУ вдоль координаты распространения оптического пучка [2]. В докладе представлены результаты компьютерного моделирования с постановкой ИКУ для координаты, поперечной к направлению распространения оптического пучка. Ключевым отличием данных результатов является то, что основной вклад в изменение ЛВЧ происходит за счет дифракции пучка, что позволяет оценить влияние дифракции на эффективность рассматриваемого метода. Для подтверждения адекватности предложенного подхода к построению ИКУ проводилось сравнение полученных результатов компьютерного моделирования с аналитическим решением задачи и расчетами, проведенными в существенно расширенной области.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 24-71-00031).

Литература

1. Trofimov V.A., Loginova M.M., Egorenkov V.A. Efficiency of using adaptive artificial boundary conditions at computer simulation of contrast spatio-temporal laser-induced structures in a semiconductor // *Comp and Math Methods*. – 2021. – Vol 3(6). – P e1165.
2. Trofimov V.A., Loginova M.M., Egorenkov V.A. et al. Cross-impact of the beam local wavenumbers on the efficiency of self-adaptive artificial boundary conditions for 2D nonlinear Schrödinger equation // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. – 2023. – Vol 46(15). – P 16006-16036.

СКРЫТЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА И НАВЬЕ-СТОКСА.

Петрова Л. И.

МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Вычислительных методов, e-mail:
ptr@cs.msu.ru

Уравнения Эйлера и Навье-Стокса, описывающие потоки жидкостей и газов, обладают скрытыми свойствами, которые обнаруживаются при изучении согласованности уравнений законов сохранения, входящих в уравнения Эйлера и Навье-Стокса. При таком исследовании получается нетождественное эволюционное соотношение для энтропии как функционала состояния. Это соотношение раскрывает особенности решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса, благодаря которым уравнения Эйлера и Навье-Стокса не только описывают изменение физических величин (таких как энергия, давление, плотность), но раскрывают и состояние среды, процессы перехода от неравновесного состояния в локально-равновесное, которые сопровождаются возникновением завихренности и турбулентности.

Из эволюционного соотношения следует, что уравнения Эйлера и Навье-Стокса обладают двойными решениями, а именно, решениями, которые не являются функциями

(то есть зависят не только от переменных), и решениями, которые являются дискретными функциями. Решения первого типа описывают неравновесное состояние жидкости и газа. А решения второго типа описывают локально равновесное состояние жидкости и газа. Переход от решений первого типа к решениям второго типа описывает процесс возникновения различных образований, таких как волны, вихри, турбулентные пульсации. Это объясняет механизм возникновения завихренности и турбулентности.

Такие результаты были получены с помощью кососимметричных дифференциальных форм, математический аппарат которых содержит такие нетрадиционные элементы, как нетождественные соотношения, вырожденные преобразования, переход от одной системы координат к другой, неэквивалентной, системе координат.

НЕСТАЦИОНАРНОЕ СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ МОДЕЛИ НВ-2: ВЛИЯНИЕ СЕТОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НА РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Широков И.А.

МГУ им. М.В. Ломоносова, ф-т ВМК, кафедра вычислительных методов,
e-mail: ivanshirokov@inbox.ru

В задачах моделирования газодинамических течений, в том числе нестационарных, важную роль могут играть свойства расчетных сеток. Если сетки слишком неравномерны, слишком грубы или качество ячеек сетки недостаточно, точность и качество моделирования падают, поскольку уменьшается точность аппроксимации макроскопических уравнений. В работе исследуется влияние параметров неструктурированных тетраэдральных сеток на результаты моделирования обтекания стандартной модели НВ-2 [1] вязким теплопроводным газом. При этом число Маха 1.5, число Рейнольдса, отнесенное к диаметру цилиндрической части модели, $2 \cdot 10^5$, угол атаки равен нулю. Расчетные сетки строились с помощью свободно распространяемых пакетов TetGen и Gmsh. В качестве математической модели использован алгоритм, основанный на системе регуляризованных (квазигазодинамических) уравнений [2]. На рис. 1 приведены уровни плотности и линии тока, рассчитанные на разных сетках.

Показано, что при использовании сеток, наилучших по совокупности критериев (малый размер ячеек на поверхности модели, степень неравномерности, качество ячеек [3]), результаты моделирования ближе к эталонным экспериментальным данным, чем на сетках, худших по указанным критериям. Кроме того, при улучшении качества сеток появляется возможность моделирования нестационарных режимов обтекания.

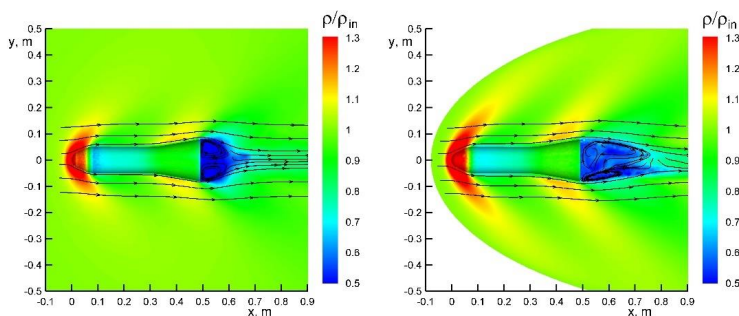


Рис. 1. Картина обтекания модели на сетках TetGen (слева) и Gmsh (справа)

Литература

1. Gray J.D. Summary Report on Aerodynamic Characteristics of Standard Models HB-1 and HB-2 // AEDC-TDR-64-137 (1964).
2. Елизарова Т.Г., Широков И.А. Коэффициенты искусственной диссипации в регуляризованных уравнениях сверхзвуковой аэродинамики // ДАН (2018) 483, №3, с. 260–264.
3. Ермаков М.К., Крючкова А.С. Генерация неструктурированных тетраэдральных сеток для обтекания летательных аппаратов на основе открытых пакетов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике (2020) 21, вып. 2.

ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Ходалицкий Д.Н.¹, Мокин А.Ю.², Савенкова Н.П.³

1) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов,
e-mail: s02230544@qse.cs.msu.ru

2) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов,
e-mail: mknandrew@mail.ru

3) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов,
e-mail: nsavenkova@cs.msu.su

В работе рассматривается одномерная задача теплопроводности с подвижной правой границей

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < L(t), t > 0 \\ u(0, t) = 0, u(L(t), t) = u_1, t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), 0 \leq x \leq L(0). \end{cases} \quad (1)$$

В случае линейной функции $L(t) = At + B$ в результате замены

$$\omega(s, t) = u(sL(t), t) \exp[-(\lambda(s, t)s + \mu(s, t))] \quad (2)$$

удается подобрать $\lambda(s, t)$ и $\mu(s, t)$ так, чтобы исходная задача (1) приняла вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{k^2}{L^2(t)} \frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2}, 0 < s < 1, t > 0, \\ \omega(0, t) = 0, \omega(1, t) = u_1 \sqrt{L(t)} \exp\left(\frac{AL(t)}{4k^2}\right), t \geq 0, \\ \omega(s, 0) = u_0(sL(0))\sqrt{B} \exp\left(\frac{s^2 AB}{4k^2}\right), 0 \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Задача (3) допускает разделение переменных, ее решение имеет вид

$$\omega(s, t) = v(s, t) + su_1 \sqrt{L(t)} \exp\left(\frac{AL(t)}{4k^2}\right),$$

где

$$v(s, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n(t) \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 k^2}{B} \left(\frac{t}{At + b}\right)\right) \sin(\pi ns),$$

$$C_n(t) = \exp\left(\frac{\pi^2 n^2 k^2}{AB}\right) \frac{u_1 (-1)^n}{\pi n k^2} \int_{AB}^{AL(t)} [\xi + 2k^2] \exp\left(\frac{\xi}{4k^2} - \frac{\pi^2 n^2 k^2}{\xi}\right) \frac{1}{2\sqrt{A\xi}} d\xi + C_n(0).$$

Результат, полученный выше, подтвержден с помощью вычислительного эксперимента.

Литература

1. Rodrigo, M.R., Thamwattana, N. A Unified Analytical Approach to Fixed and Moving Boundary Problems for the Heat Equation // Mathematics 2021. – 19с.
2. Crank, J. Free and Moving Boundary Problems // Clarendon: Oxford, UK. 1984. – 444с.

ПРИМЕНЕНИЕ КОМБИНИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ АНИЗОТРОПНОЙ СИНТЕТИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Дородницын Л.В.

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов, e-mail: dorodn@cs.msu.ru

В современных прикладных задачах аэродинамики и аэроакустики важную роль играют свойства турбулентности, влияющей на картину течения газа и излучаемого шума. На данном этапе развития вычислительных средств широко используется технология синтетической турбулентности. Как показывает опыт, искусственно сгенерированное турбулентное поле должно максимально соответствовать статистическим характеристикам физического поля.

Ключевую роль в описании турбулентного течения играет тензор двухточечных корреляций (точнее, ковариаций) пульсационных скоростей. Существуют стохастические алгоритмы генерации синтетического турбулентного поля по заданному ковариационному тензору [1 – 3]. Однако вид этого тензора на практике неизвестен, и система уравнений, его определяющая, является незамкнутой. Требуется моделировать тензор ковариаций, из которого следуют физически наблюдаемые характеристики: кинетическая энергия турбулентности, скорость ее диссипации, напряжения Рейнольдса, продольные и поперечные турбулентные масштабы, энергетический спектр и др.

Имеющееся разнообразие моделей энергетического спектра и двухточечных корреляций всё же не позволяет выразить важные характеристики анизотропных турбулентных полей, встречающихся в реальной физике. Мы приходим к необходимости создания так называемых «комбинированных» моделей турбулентности.

Пусть имеется набор тензоров двухточечных ковариаций скоростей. Составим из них линейную комбинацию с некоторыми постоянными коэффициентами:

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^M \lambda^{(m)} R_{ij}^{(m)}(\mathbf{r}). \quad (1)$$

В случае, когда в выражении (1) все коэффициенты $\lambda^{(m)} > 0$, а для каждого из тензоров $R_{ij}^{(m)}(\mathbf{r})$ построено случайное поле, то ковариациям $R_{ij}(\mathbf{r})$ будет удовлетворять линейная комбинация этих полей.

С помощью комбинирования тензоров удастся решить ряд практических задач. В частности, можно построить корреляционную функцию, одновременно удовлетворяющую интегральному и тейлоровскому масштабам турбулентности (последний отвечает за скорость диссипации турбулентной энергии), используя разность двух подобных тензоров ковариаций. Другой пример – построение поля пульсационных скоростей, обладающего различной степенью анизотропии на разных масштабах.

Литература

1. Сабельфельд К.К. Методы Монте-Карло в краевых задачах //Новосибирск: Наука. – 1989. – 280 с.
2. Shen Z., Zhang X. Direct anisotropic filter method of generating synthetic turbulence applied to turbulence-airfoil interaction noise prediction //J. of Sound and Vibration (2019) **458**, p.544–564.
3. Александров А.В., Дородницын Л.В. Прямой тензорный метод фильтрации для генерации синтетических турбулентных полей скорости //Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. – 2021, №95. – 15 с.

ОДИН ВАРИАНТ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ЧАСТИЦ

Богомолов С.В.¹, Панферова И.А.²

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов, e-mail: bogomo@cs.msu.su

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов, e-mail: panferova1998@gmail.com

Метод частиц — численный метод моделирования больших систем на основе их лагранжева описания. Метод разрывных частиц относится к типу «частица-частица» и состоит из двух основных этапов: предиктора и корректора. На этапе предиктора частицы перемещаются. На этапе корректора выбирается партнер для взаимодействия из числа соседей частицы, оказывающих наибольшее влияние на локальную динамику системы.

«Разрывность» заключается в методе коррекции плотности только одной из взаимодействующих частиц. Именно поэтому восстановление плотности распределения происходит в минимальной области, определяемой всего двумя выбранными частицами, поэтому фронт размывается только одной частицей.

Новшество нашего метода заключается в выборе плотности в качестве основной характеристики частицы, если только не ее форма. Критерием реконструкции плотности является сохранение проекции массы на плоскость, проходящую через центры масс взаимодействующих частиц. Сосед для коррекции плотности выбирается с помощью «параметра удара». Плотность строится с использованием двух выбранных взаимодействующих частиц, что позволяет свести двумерную задачу к одномерной.

Эффективность метода представлена на примере теста Кроули. Несмотря на линейность данной задачи, траектории частиц не являются простыми — соседи частиц постоянно меняются. Поэтому для повышения точности нам необходим метод Рунге-Кутты на этапе предиктора.

Литература

1. Bogomolov S.V., Kuvshinnikov A.E., Discontinuous particle method on gas dynamic examples // Math. Models and Comp. Simul. V. 11. P. 768-777 (2019)
2. Bogomolov S.V., Filippova M.A., Kuvshinnikov A.E., A discontinuous particle method for the inviscid Burgers' equation, J.Phys. Conf. Series. V. 1715. P.012066 (2021)

РАЗРАБОТКА ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ИНТЕРАКТИВНОГО КАТАЛОГА РАЗНОСТНЫХ СХЕМ НА ПРИМЕРЕ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Мещеряков А.О.¹, Головизнин В.М.²

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, Филиал в городе Сарове, кафедра математики. e-mail: alexmeshr@yandex.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, Филиал в городе Сарове, кафедра математики. e-mail: gol@ibrae.ac.ru

Понимание таких явлений как дисперсия, диссипация и устойчивость разностных схем является необходимым условием для успешного освоения учебного курса "Сеточные методы решения систем нелинейных дифференциальных уравнений". Коллективом студентов кафедры было разработано приложение для изучения и наглядного сравнения свойств различных разностных схем на задаче простейшего уравнения переноса. Приложение представляет из себя интерактивный каталог, позволяющий наглядно продемонстрировать свойства различных разностных схем.

Реализация программы основана на решении методом обратной характеристики [1] в общем виде для шаблона разностной схемы 4×3 . Выбор метода обратной характеристики обусловлен возможностью обобщить данный метод для любых наборов точек вычислительной схемы, так как коэффициенты интерполяционного полинома Лагранжа однозначно рассчитываются исходя из предоставленного набора точек. Далее, вычисленные коэффициенты используются в прямом подсчете нового значения (для явных схем) либо как элементы матрицы СЛАУ (для неявных).

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Соответственно, программа корректно обрабатывает любые компактные шаблоны, не превышающие размер 4×3 при числе Куранта < 2 . Корректность решения была верифицирована коллективом студентов филиала МГУ в г. Сарове путем сравнения результатов вычислений с личными реализациями различных схем. Также для проверки был использован интерактивный каталог дисперсионных и диссипативных поверхностей лаборатории индустриальной математики ВМК МГУ [2].

Программы призвана, в первую очередь, облегчить понимание учебного материала студентами путём визуализации численного решения дифференциального уравнения различными разностными схемами. Данное приложение распространяется свободно и может быть использовано в учебных и исследовательских целях.

Литература

1. Головизнин В.М., Соловьев А.В. Дисперсионные и диссипативные характеристики разностных схем для уравнений в частных производных гиперболического типа. М.: МАКС Пресс, 2018.
2. Сайт лаборатории индустриальной математики ВМК МГУ. URL: <http://lim.cmc.msu.ru> (дата обращения: 14.09.2024).

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АДАПТИВНЫХ ШАГОВ В ЗАДАЧАХ АГРЕГАЦИИ-ДРОБЛЕНИЯ ВЕЩЕСТВА

Жилин В.А.¹, Матвеев С.А.², Смирнов А.П.³

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: s02240418@qse.cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ВТМ, ИВМ РАН, e-mail: matseralex@cs.msu.ru

3) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: sap@cs.msu.ru

Процессы агрегации лежат в основе огромного количества важных физических явлений и приносят пользу в разнообразных технологических процессах [1]. В однородных системах эти процессы описываются системой уравнений Смолуховского [2]. Пусть n_k - концентрация (т.е. количество частиц в единице объёма) агрегатов, которые содержат k «элементарных» частиц, и даны кинетические коэффициенты C_{ij} (интенсивность), определяющие число возникающих агрегатов размера $i + j$ в единицу объёма в единицу времени при столкновении частиц с размерами i и j . Слагаемые p_k отвечают за мощность внешних источников агрегатов. Уравнения Смолуховского описывают эволюцию концентраций n_k во времени.

Полная система кинетических уравнений, описывающая динамику агрегации с учётом ударных дроблений:

$$\begin{aligned}\frac{dn_1(t)}{dt} &= -n_1 \sum_{j \geq 1} C_{1j} n_j + \frac{\lambda}{2} \sum_{i, j \geq 2} C_{ij} (i + j) n_i n_j + \lambda n_1 \sum_{j \geq 2} j C_{1j} n_j + p_1 \\ \frac{dn_k(t)}{dt} &= \frac{1}{2} \sum_{i+j=k} C_{ij} n_i n_j - (1 + \lambda) n_k \sum_{j \geq 1} C_{jk} n_j + p_k\end{aligned}$$

В данной работе рассмотрена группа задач агрегационно-фрагментационной кинетики в классе уравнений коагуляции Смолуховского. Для быстрых методов с использованием малоранговых представлений ядер коагуляции были реализованы разностные схемы с адаптивными шагами по времени [3]. С этими схемами проведены вычислительные эксперименты и получены хорошие результаты в рассматриваемых классах задач [4]. Применение таких схем оказалось эффективным, а расчёты ускорились в десятки раз.

Решение задач с дроблением представляет собой очень трудоёмкий процесс, который может занимать десятки часов. Для таких вычислений требовалось брать очень маленькие шаги по времени для схем с постоянными шагами, иначе решение утрачивало устойчивость при вычислениях. Адаптивные шаги позволили уменьшить время расчёта с 23 часов до 1 часа 46 минут.

Литература

1. Krapivsky P. L., Redner S., Ben-Naim E. A kinetic view of statistical physics. Cambridge University Press, 2010.
2. Smoluchowski M. Study of a mathematical theory of the coagulation kinetics of colloidal solutions // Z. Phys. Chem. 1917. T. 92. C. 129.
3. Fehlberg E. Classical fourth-and lower order Runge-Kutta formulas with stepsize control and their application to heat transfer problems // Computing. 1970. T. 6. C. 61-71.
4. С. А. Матвеев, В. А. Жилин, А. П. Смирнов Адаптивные шаги по времени для агрегационно-фрагментационной кинетики // Вычислительные методы и программирование 25 (3), 347-356 (2024).

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛЕГКОВЕСНЫХ ЯЗЫКОВЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ДИФфуЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ РЕЧИ

Никонов М.В.¹, Шишкин А.Г.²

- 1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: nikonovmv@my.msu.ru
- 2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: shishkin@cs.msu.ru

Обработка речи в условиях шума является важной задачей [1]. Диффузионные модели [2, 3] успешно применяются для восстановления сигналов, но не учитывают лингвистический контекст. Предлагается интегрировать языковую модель в диффузионный процесс для повышения качества восстановления.

Прямой процесс добавления шума: $q(x_t|x_{t-1}) = \mathcal{N}(x_t; \sqrt{1 - \beta_t}x_{t-1}, \beta_t I)$, где β_t – дисперсия шума. Обратный процесс моделируется как $p_\theta(x_{t-1}|x_t)$, параметризованный нейросетью $\epsilon_\theta(x_t, t)$, предсказывающий добавленный шум.

Цель — максимизировать $x_{t-1}^* = \arg \max_{x_{t-1}} (\log p_\theta(x_{t-1}|x_t) + \lambda \log p_\phi(w|x_{t-1}))$, где $p_\phi(w|x_{t-1})$ – вероятность последовательности w слов по языковой модели с гиперпараметром λ .

Для вычисления градиента языковой модели используется с CTC-потерями [4]. для вычисления p_ϕ и его градиента посредством обратного распространения ошибки. Базовая модель не учитывает языковую информацию и основана только на диффузионном процессе с параметризацией $p_\theta(x_{t-1}|x_t)$.

На каждом шаге t :

Предсказание шума с помощью акустической модели:

$$\epsilon_\theta(x_t, t). \quad (1)$$

Обновление состояния с учетом языковой модели:

$$x_{t-1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_t}} \left(x_t - \frac{\beta_t}{\sqrt{1 - \alpha_t}} \epsilon_\theta(x_t, t) \right) + \lambda \tilde{\beta}_t \nabla_{x_{t-1}} \log p_\phi(w|x_{t-1}),$$

где $\tilde{\beta}_t = \frac{1 - \alpha_{t-1}}{1 - \alpha_t} \beta_t$ (2)

Эксперименты предложенного алгоритма на VoiceBank + DEMAND [1] показали улучшение качества речи. В таблице 1 представлены сравнения с базовой моделью.

Модель	PESQ	STOI	SI-SDR (дБ)
Noisy	1.97	0.78	5.12
Baseline	2.85	0.89	12.34
Proposed	3.21	0.92	14.67

Таблица 1: Сравнение моделей по метрикам качества.

Экспериментальные результаты продемонстрировали значительное повышение качества по метрикам PESQ, STOI и SI-SDR по сравнению с базовой моделью. Улучшение PESQ на 12.6% свидетельствует о существенном повышении восприятия качества звука, что особенно важно для практического применения в системах, ориентированных на взаимодействие с пользователем. Повышение STOI на 3.4% указывает на лучшую разборчивость речи, что делает восстановленные сигналы более понятными для слушателей. Также SI-SDR увеличился на 18.9%, что демонстрирует улучшение в способности модели точно отделять речевые сигналы от шума. Важно подчеркнуть, что предложенное решение использует легковесные языковые модели, что минимизирует вычислительные затраты и делает его применимым для

широкого спектра устройств, включая устройства с ограниченными ресурсами, такие как смартфоны и устройства Интернета вещей (IoT).

Литература

1. Valentini-Botinhao, C., et al. (2017). Noisy speech database for training speech enhancement algorithms and TTS models. University of Edinburgh.
2. Sohl-Dickstein, J., Weiss, E., Maheswaranathan, N., & Ganguli, S. (2015). Deep Unsupervised Learning using Nonequilibrium Thermodynamics. ICML.
3. Ho, J., Jain, A., & Abbeel, P. (2020). Denoising Diffusion Probabilistic Models. NeurIPS.
4. Graves, A., Fern'andez, S., Gomez, F., & Schmidhuber, J. (2006). Connectionist Temporal Classification. ICML.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЯЕМОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗА

Четкин Е.И.¹, Шишкин А.Г.²

- 1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: yegor-100@mail.ru
- 2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: shishkin@cs.msu.ru

В современном мире значение и сфера применения алгоритмов машинного обучения неуклонно растут [1], разрабатываются алгоритмы способные описывать, предсказывать и управлять физическими процессами [2]. Целью данной работы является обзор некоторых подходов, использующих машинное обучение, для решения задач управляемого термоядерного синтеза (УТС). Рассмотрены основные проблемы приложений алгоритмов машинного обучения в области УТС такие, как: малое число данных разрядов, необходимое быстроедействие, подсчет неопределенности предсказаний, интерпретируемость модели.

На сегодняшний момент создано множество алгоритмов для приложений в УТС, однако они основаны на физических кодах [3], что требует больших трудозатрат и высококвалифицированного персонала. Универсальность, простота, вычислительная экономия в процессе итогового применения алгоритмов машинного обучения может способствовать развитию технологий удержания плазмы.

В данной работе уделено внимание как алгоритмам машинного обучения, определяющим равновесные состояния плазмы и их эволюцию (например, аппроксимации уравнений Грэда-Шафранова с помощью нейросетевых методов [4]), так и методам управления плазмой.

В сфере УТС возникает классическая для машинного обучения проблема малого числа обучающих данных из-за сложности получения реальных данных, так как проведение множества разрядов в токамаке крайне затратно. Эта проблема может быть решена за счет использования традиционных численных экспериментов на основе применения классических кодов, таких как EFIT, а с недавнего времени и с помощью генеративных нейронных сетей[5].

Одной из важнейших в сфере УТС является задача управления плазмой. Возможным подходом ее решения является машинное обучение с подкреплением. Например, алгоритм машинного обучения семейства “актер-критик”, используется в токамаке TCV для управления плазмой в сложных пространственных конфигурациях [6].

Задача управления плазмой имеет высокую цену ошибки. В плазме могут возникнуть возмущения, невозможность подавить которые может привести к повреждению дорогостоящего оборудования. Поэтому необходимы исследования возможности учета неопределенности в выходах нейросетевой модели [4].

Недостатком некоторых методов машинного обучения является их слабая интерпретируемость и невозможность явным образом связать весовые коэффициенты с физическими величинами. Однако, существуют архитектуры, разработанные для повышения интерпретируемости, такие как физически-информированные нейронные сети (PINN) [7]. Возможно также применение байесовых методов в задачах УТС [8], но вывод информативного априорного распределения является очень сложной задачей.

Таким образом, на основании проведенного анализа можно сделать вывод, что методы машинного обучения, за счет своей универсальности и быстрогодействия в обученном состоянии, позволяют получить хорошие результаты и имеют перспективы для дальнейшего применения в приложениях УТС.

Литература

1. Carleo G. et al. Machine learning and the physical sciences //Reviews of Modern Physics. – 2019. – Т. 91. – №. 4. – С. 045002.

2. Pavone A. et al. Machine learning and Bayesian inference in nuclear fusion research: an overview //Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2023. – T. 65. – №. 5. – C. 053001.
3. Lao L. L. et al. Reconstruction of current profile parameters and plasma shapes in tokamaks //Nuclear fusion. – 1985. – T. 25. – №. 11. – C. 1611.
4. Joung S. et al. GS-DeepNet: mastering tokamak plasma equilibria with deep neural networks and the Grad–Shafranov equation //Scientific Reports. – 2023. – T. 13. – №. 1. – C. 15799.
5. Dave B. et al. Synthetic data generation using generative adversarial network for tokamak plasma current quench experiments //Contributions to Plasma Physics. – 2023. – T. 63. – №. 5-6. – C. e202200051.
6. Degrave J. et al. Magnetic control of tokamak plasmas through deep reinforcement learning //Nature. – 2022. – T. 602. – №. 7897. – C. 414-419.
7. Rossi R. et al. On the potential of physics-informed neural networks to solve inverse problems in tokamaks //Nuclear Fusion. – 2023. – T. 63. – №. 12. – C. 126059.
8. Kwak S. et al. Bayesian inference of axisymmetric plasma equilibrium //Nuclear Fusion. – 2022. – T. 62. – №. 12. – C. 126069.

СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ В КЛАССИФИКАЦИИ ЭМОЦИОНАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ НА ОСНОВЕ МУЛЬТИМОДАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Бердышев Д.А.¹, Шишкин А.Г.²

- 1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: danilberdyshev@mail.ru
- 2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: shishkin@cs.msu.ru

Классификация эмоциональных состояний является важной и активно развивающейся областью, находящей применение в человеко-машинном взаимодействии, медицине, контроле состояния оператора, маркетинге и других областях. При этом достоверная классификация эмоций является сложной задачей [1], в силу вариативности выражения эмоций между пользователями, искажением данных, сложности признаков эмоционального состояния в данных, различий в выражении эмоций различными группами пользователей.

Целью данной работы являются обзор существующих подходов машинного обучения в классификации эмоциональных состояний на основе мультимодальных данных и выделение наиболее перспективных подходов в этой области.

Подходы к классификации эмоций можно разделить на две больших группы: категориальный подход [2] и многомерный подход [3]. Категориальный подход заключается в выделении базового набора категорий эмоций, на основе сходства таких категорий по выражению в разных культурных группах или сходству биологических процессов в выражении таких эмоций. Многомерный же подход заключается в определении нескольких измерений, достаточных для однозначного определения в них отдельных эмоций. Классическим примером многомерного подхода является модель возбуждения и валентности.

Одним из возможных решений проблем распознавания эмоциональных состояний являются мультимодальные системы на основе алгоритмов машинного обучения, использующие для классификации данные нескольких модальностей [4]. Такие системы позволяют решить проблему искажения данных в отдельной модальности за счёт данных других модальностей. Также мультимодальные системы позволяют улучшить качество распознавания эмоций, в сравнении с подходами использующими одну модальность [5].

Сложностью мультимодального подхода является объединение данных различных модальностей в силу разной временной динамики, уровней шума и других характеристик [6]. Одними из наиболее перспективных архитектур, позволяющих объединять признаки различных модальностей являются: трансформер [7] и модели долгой краткосрочной памяти (LSTM) [8].

Наиболее часто используемыми модальностями являются аудио, видео и текстовые данные, а также периферические физиологические сигналы и данные активности мозга [6]. Вышеприведённые типы данных успешно обрабатываются нейросетевыми алгоритмами по отдельности.

Классификация эмоциональных состояний на основе мультимодальных данных с помощью алгоритмов машинного обучения является перспективной и активно развивающейся областью исследований. Наиболее перспективным для развития представляется подход, основанный на архитектуре трансформер, и позволяющий изменять набор используемых для классификации модальностей данных, не изменяя базового алгоритма.

Литература

1. Poria S., Majumder N., Mihalcea R., Hovy E. Emotion Recognition in Conversation: Research Challenges, Datasets, and Recent Advances//IEEE Access, 2019, Vol. 7, Emotion Recognition in Conversation, P. 100943-100953.
2. Ortony A., Turner T.J. What's basic about basic emotions?//Psychological Review, 1990, Vol.

97, No. 3, P. 315-331.

3. Вундт В. Очерк психологии / В. Вундт / пер. с нем. Г.А. Паперна. – М: Терра, 2015. – 464 с
4. Bhattacharya P., Gupta R.K., Yang Y. Exploring the contextual factors affecting multimodal emotion recognition in videos/arXiv:2004.13274 [cs]. - arXiv, 2021.
5. Zhang H. Expression-EEG Based Collaborative Multimodal Emotion Recognition Using Deep AutoEncoder//IEEE Access, 2020, T. 8, C. 164130-164143.
6. Al Osman H., Falk T.H. Multimodal Affect Recognition: Current Approaches and Challenges//Emotion and Attention Recognition Based on Biological Signals and Images/ ed. S.A. Hosseini. – InTech, 2017. – Multimodal Affect Recognition.
7. Le H.-D., Lee G.-S., Kim S.-H., Kim S., Yang H.-J. Multi-Label Multimodal Emotion Recognition With Transformer-Based Fusion and Emotion-Level Representation Learning//IEEE Access, 2023, T. 11, C. 14742-14751.
8. Tang H., Liu W., Zheng W.-L., Lu B.-L. Multimodal Emotion Recognition Using Deep Neural Networks//Neural Information Processing: Lecture Notes in Computer Science/ eds. D. Liu et al. – Cham: Springer International Publishing, 2017. – Vol. 10637. – P. 811-819.

АНАЛИЗ ВРЕМЕННОЙ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ ТОРОИДАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ПОДВИЖНЫХ ФИЛАМЕНТОВ

Зотов И.В.¹, Дементьев Н.С.¹, Пахнушев А.В.¹

1) МГУ им. М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АНИИ, e-mail: iv-zotov@cs.msu.ru

Работа на современных установках токамак невозможна без системы контроля границы плазменного шнура в процессе разряда. Восстановить форму и границу плазмы можно с помощью решения обратной задачи на основе данных электромагнитной диагностики (ЭМД). С математической точки зрения обратная задача сводится к задаче Коши для двумерного однородного эллиптического уравнения МГД-равновесия плазмы (однородного уравнения Грэда-Шафранова). Для решения данной некорректной математической задачи используются различные методы – метод гармонического разложения по специальным функциям, метод точечных филаментов, метод распределенных филаментов, метод интегральных уравнений.

Целью данной работы является разработка алгоритма и создание программы для восстановления формы и границы плазмы на основе измерений электромагнитной диагностики с учётом конечной проводимости вакуумной камеры. А также тестирование разработанного алгоритма на экспериментальных данных, полученных на токамаке Т-15МД [1].

Для решения данной задачи в докладе представлены результаты восстановления формы и границы плазменного шнура с помощью алгоритма, основанного на методе подвижных филаментов. Метод филаментов основан на модельном представлении плазмы в виде набора токовых колец. Основная трудность этого подхода состоит в правильном выборе расположения филаментов. Метод подвижных токовых колец, использованный в данной работе, не содержит затруднений в выборе их положения.

Разработанный алгоритм решает обратную задачу, т.е. восстанавливают границу плазмы по экспериментальным данным ЭМД [2-3]. Алгоритм был протестирован на экспериментальных данных ЭМД, полученных на установке Т-15МД. Восстановлены несколько последовательных равновесий плазмы для трех выбранных разрядов. Проведено сравнение результатов восстановления границы плазмы с решением прямой задачи равновесия. Показано их хорошее совпадение. Это позволяет сделать вывод о возможном применении разработанного алгоритма и кода на его основе для анализа экспериментальных данных.

Литература

1. Зотов И.В., Андреев В.Ф., Балашов А.Ю., Дементьев Н.С., Квасков В.С., Игонькина Г.Б., Рогозин К.А., Рыжаков Д.В., Соколов М.М., Степин А.В., Сушков А.В., Хайрутдинов Э.Н. Восстановление границы плазмы по экспериментальным измерениям токамака Т-15МД - Сборник тезисов докладов «LI Международная Звенигородская конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу», ICRAF-2024, 18-22 марта 2024г., Звенигород, АО НТЦ "ПлазмаИОФАН", с.135.
2. Зотов И.В. и др. Вопросы атомной науки и техники, Сер. Термоядерный синтез, 2014, вып. 1, с.97-102.
3. Зотов И.В. и др. Вопросы атомной науки и техники, Сер. Термоядерный синтез, 2015, вып. 2, с.51-61.

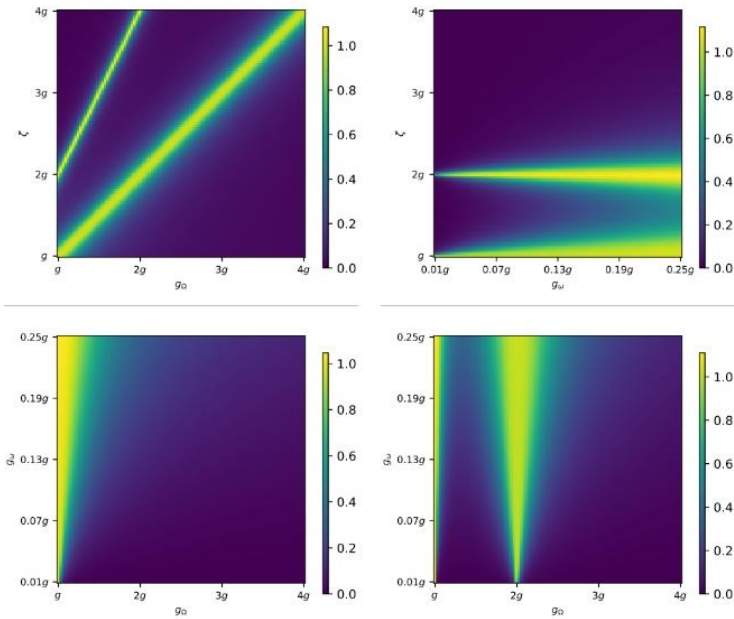
ИССЛЕДОВАНИЕ ЭНТРОПИЙНОЙ ДИНАМИКИ МНОГОКУБИТНОЙ СИСТЕМЫ КЭД

Ожигов Ю.И.^{1,2}, Мяо Хуэйхуэй¹, Кулагин А.В.¹, Кузьминский А.В.¹, Ли Ваньшунь¹, Чэнь Жань¹, Ю Цзянчуань¹

1) МГУ им. М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СКИ, e-mail: hhmiao@cs.msu.ru

2) Физико-технологический институт РАН им. К.А.Валиева, e-mail: ozhigov@cs.msu.ru

Моделируется энтропийная динамика многокубитной системы КЭД [1] и исследуются различные аспекты энтропии. В модифицированной версии модели Тависа-Каммингса-Хаббарда [2] атомы удерживаются в оптических полостях с помощью оптического пинцета и могут перескакивать между различными полостями посредством туннельного эффекта. Взаимодействие атома с полостью приводит к различным электронным переходам и созданию и уничтожению фотонов соответствующих типов. Рассматриваются спин электрона и принцип запрета Паули. В модель также вводятся образование и разрыв ковалентной связи и создание и уничтожение фонона. Система является двухкомпонентной. На рисунке ниже изучается влияние всех видов взаимодействий на энтропию. Результаты показывают, что энтропийную динамику можно контролировать путем выборочного выбора параметров системы.



Литература

1. D.A.M. Abo-Kahla and M. Abdel-Aty, Information entropy of multi-qubit Rabi system, International Journal of Quantum Information 13, 1550042 (2015).
2. H.hui Miao and Y.I. Ozhigov, Using a modified version of the Tavis Cummings–Hubbard model to simulate the formation of neutral hydrogen molecule, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 622, 128851 (2023).

О КОМПЬЮТЕРНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ХИМИЧЕСКИХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

Ожигов Ю.И.^{1,2}, Ю Цзянчуань¹, Чэнь Жэнь¹, Ли Ваньшунь¹, Мяо Хуэйхуэй¹,

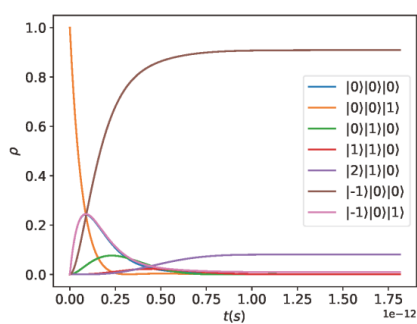
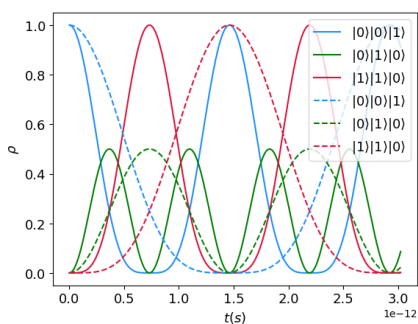
Кулагин А.В.¹, Кузьминский А.В.¹

1) МГУ им. М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СКН, e-mail:

youjianqchuan2021@cs.msu.ru

2) Физико-технологический институт РАН им. К.А.Валиева, e-mail: ozhigov@cs.msu.ru

Важнейшим типом химических превращений является возникновение и распад водородных связей между молекулами, которые ответственны за формирование и распад макромолекул. Мы предлагаем простую чисто квантовую модель, модифицированную на основе модели Джейнса-Каммингса [1], и теоретически изучаем ее различные динамические аспекты. В этой модели образование и разрыв водородных связей сопровождается генерацией и аннигиляцией тепловых фононов в среде и ряд упрощающих предположений о динамике участвующих молекул. Наша модель позволяет получать вероятности каналов реакции с участием водородной связи в зависимости от параметров внешней среды. Приближение RWA (Rotating wave approximation) применяется с учетом условий сильной связи. Как показано на рисунке ниже, первый рисунок изображает периодические колебания одинарной водородной связи в замкнутой системе между двумя наборами внешних параметров окружающей среды. На втором рисунке показана зависимость от времени вероятности образования одинарной водородной связи. Время образования примерно 10^{-12} секунд примерно соответствует результатам измерения динамики водородных связей в масштабе времени с использованием методов сверхбыстрой спектроскопии [2]. В то же время мы также смоделировали вероятность того, что диссипативная эволюция одинарной водородной связи достигнет вероятностной устойчивости после длительной эволюции в различных внешних средах и предоставляем библиотеку для компьютерного моделирования [3-5].



Литература

1. M. Tavis and F. W. Cummings, Exact solution for an n-molecule—radiation-field Hamiltonian, Phys. Rev. 170, 379 (1968).
2. C. Lawrence and J. Skinner, Ultrafast infrared spectroscopy probes hydrogen-bonding dynamics in liquid water, Chemical Physics Letters 369, 472 (2003).
3. Kulagin, A.V. Supercomputer Algorithm for Determining the Dimension of Dark Subspace. Lobachevskii J Math 42, 1521–1531 (2021).
4. <https://github.com/KuzmaLine/QComputations>
5. <https://github.com/KuzmaLine/emulation>

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ
МОДЕЛИ ДИНАМИКИ СОРБЦИИ**

Денисов А.М.¹, Чжу Д.²

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической физики, e-mail:

den@cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической физики, e-mail:

zhudq1002@163.com

Рассматривается начально-краевая задача

$$u_x(x, t) + a_t(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

$$a_t(x, t) = \gamma(t) (\varphi(u(x, t)) - a(x, t)), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$a(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

представляющая математическую модель процесса динамики сорбции. Функция $u(x, t)$ - концентрация вещества в порах сорбента, $a(x, t)$ - концентрация вещества в сорбенте $\mu(t)$ - входная концентрация, $\varphi(s)$ - функция, характеризующая поглощающие свойства сорбента, $\gamma(t)$ - кинетический коэффициент.

Рассматривается коэффициентная обратная задача. Пусть функции $\varphi(s)$, $\mu(t)$ заданы, а $\gamma(t)$ неизвестна. Требуется определить $\gamma(t)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1)-(4)

$$u(l, t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

где $g(t)$ - заданная функция.

Обратная задача (1)-(5) сводится к операторным уравнениям для неизвестной функции $\gamma(t)$. Эти уравнения используются для построения итерационных методов решения обратной задачи. Доказывается сходимость итерационных методов к точному решению обратной задачи. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующие сходимость итерационных методов.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛУГРУПП И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ В НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

Гаврилов О.А.¹, Тихонов И.В.²

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра МФ,
e-mail: oa.gavr@yandex.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра МФ,
e-mail: ivtikh@mail.ru

Спектральная теория полугрупп (см. [1]) находит применение при изучении нелокальных задач вида

$$u'(t) = Au(t), \quad \int_0^T \eta(t)u(t)dt = \varphi. \quad (1)$$

Рассматриваем (1) в банаховом пространстве E с линейным замкнутым оператором A . Используя стандартные обозначения, предполагаем, что

$$A \rightarrow U(t) \in (C_0), \quad \eta \in BV[0, T], \quad \varphi \in D(A).$$

Из соотношений (1) требуется найти функцию $u(t) = U(t)u_0$ при $t \geq 0$ с неизвестным элементом $u_0 \in E$. Согласно [2] нелокальная задача (1) сводится к операторному уравнению $\beta u_0 - Bu_0 = g$, где $\beta = \eta(0)$, $g = -A\varphi$, а оператор $B: E \rightarrow E$ определён формулой

$$B = \eta(T)U(T) - \int_0^T U(t)d\eta(t).$$

При некоторых естественных предположениях (с учётом теории [1]) удаётся описать спектр оператора B . Отсюда выводятся различные следствия о разрешимости нелокальной задачи (1) в терминах весовой функции $\eta(t)$ и ограничений на спектр оператора A . Особенно удобно, что элемент $u_0 \in E$ часто восстанавливается конструктивным образом – при помощи быстро сходящегося метода итераций.

Наши результаты проверены численно на соответствующих примерах для двумерного уравнения теплопроводности.

Литература

1. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ. – 1962.
2. Тихонов И.В. О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения (1998), 34, №6, с. 841–843.

ПРИМЕНЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИ-ИНФОРМИРОВАННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ К ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВОЛНОВОГО ФРОНТА

Романенко Т.Е.¹, Разгулин А.В.², Ларичев А.В.³

1) МГУ, факультет ВМК, кафедра математической физики, e-mail: romanenko@cs.msu.ru

2) МГУ, факультет ВМК, кафедра математической физики, e-mail: razgulin@cs.msu.ru

3) МГУ, физический факультет, кафедра медицинской физики, e-mail: larichev@optics.ru

Восстановление волнового фронта $u(x, y)$ по измерениям его наклонов $g_1(x, y)$, $g_2(x, y)$ вдоль соответствующих направлений x и y является одной из важных задач адаптивной оптики и связано с определением фазы световой волны на основе данных датчика Шака-Гартмана [1]. Наряду с широко используемым в общем случае методом Симпсона [2] и кумулятивными методами [3] эффективным с точки зрения восстановления негладких и разрывных волновых фронтов показало себя семейство методов реконструкции, основанное на применении вариационного подхода в сочетании с проекционным методом с использованием стабилизатора дробной гладкости [4].

В данном докладе обсуждается метод восстановления волнового фронта, основанный на применении физически-информированных нейронных сетей к задаче минимизации отклонения от заданных наклонов и проводится анализ модификаций физически-информированных нейронных сетей, использующих различные алгоритмы выбора коллокационных точек. Для рассмотренных реализаций проводится сравнение результатов их работы с проекционным методом дробной гладкости на негладких и разрывных спиральных волновых фронтах, для которых в качестве обучающих данных в точках коллокации берутся дискретные значения точных наклонов волнового фронта с добавлением гауссова шума, имитирующего искажения измерений наклонов на сетке.

Работа выполнена при поддержке МНОШ МГУ «Фотонные и квантовые технологии. Цифровая медицина», соглашение № 23-ИИ06-20.

Литература

1. Goncharov A.S., Iroshnikov N.G., Larichev A.V., Nikolaev I.P. The impact of speckle on the measurement of eye aberrations // *Journal of Modern Optics*. 2015. Vol. 62, №21. P. 1775–1780.
2. Bahk S.W. Highly accurate wavefront reconstruction algorithms over broad spatial-frequency bandwidth // *Optics Express*. 2011. V. 19. № 20. P. 18997–19014.
3. Zhariy M., Neubauer A., Rosensteiner M., Ramlau R. Cumulative wavefront reconstructor for the Shack–Hartmann sensor // *Inverse Problems and Imaging*. 2011. V. 5. № 4. P. 893–913.
4. Оценки точности проекционного метода со стабилизатором дробной гладкости в задаче восстановления волнового фронта по его наклонам / А. В. Разгулин, Н. Г. Ирошников, А. В. Ларичев и др. // *Дифференциальные уравнения*. — 2022. — Т. 58, № 7. — С. 995–1008.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ ФЕРМИ–ПАСТА–УЛАМ С НЕОДНОРОДНОЙ РЕШЕТКОЙ

Басев А.В.

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической физики, e-mail:
drbaev@mail.ru

Рассмотрена математическая модель ФПУ с неоднородной решеткой, свойства которой являются медленно меняющимися функциями пространственной переменной. Получено модифицированное уравнение КдВ с переменными коэффициентами, которое описывает распространение волны смещений в неоднородной среде. Рассмотрены различные случаи вхождения коэффициентов в уравнение и поставлены обратные задачи, состоящие в определении коэффициентов по интегралам от решений. Доказаны теоремы существования и единственности решения обратных задач.

АНОМАЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПАРНЫХ ЧАСТИЦ ЩЕЛОЧНЫХ МЕТАЛЛОВ ПРИ НАЛИЧИИ КВАНТОВОГО ЭФФЕКТА

Еремин Ю.А.¹, Лопушенко В.В.²

1) факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: eremin@cs.msu.ru

2) факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова,, e-mail: lopushnk@cs.msu.ru

При взаимодействии света с металлическими плазмонными наноструктурами возникают сильные локализованные электромагнитные поля, причиной которых является локализованный поверхностный плазмонный резонанс (ПР). В частности, в современных устройствах спектроскопии используются металлические структуры, состоящие из элементов с малым зазором между ними, где поле усиливается на несколько порядков. Примером подобной плазмонной структуры могут служить парные частицы (димеры) из благородных металлов, в которых благодаря передовым технологиям удается получать субнанометровые зазоры порядка 1 нм. При уменьшении размеров частиц, состоящих из благородных металлов, в них проявляются квантовые эффекты, такие как объемная нелокальность, затухание Ландау и выход свободных электронов за поверхность частицы [1]. В парных частицах появление квантовых эффектов обусловлено также малыми зазорами между ними.

В последние годы была разработана общая теоретическая методика для нанооптики, использующая так называемые "мезоскопические" граничные условия, которые включают параметры Фейбельмана и представляют собой обобщение классических условий сопряжения полей на границах раздела сред с различными характеристиками, учитывающее возникновение индуцированных поверхностных зарядов и токов. Вместе с "мезоскопическими" граничными условиями используются классические уравнения Максвелла для описания полей внутри структур. Такой подход рассматривается как недостающее звено, связывающее чисто квантовое описание наблюдаемых эффектов с полуклассическими [1].

В данной работе исследовано влияние квантового эффекта на оптические характеристики пары наночастиц с нанометровым зазором. В качестве материалов частиц выбраны золото и натрий. Учет квантового эффекта осуществлялся на основе мезоскопических граничных условий. Моделирование проводилось на основе метода Дискретных источников [2]. С помощью параметра Фейбельмана в золотых частицах учитывался эффект "вдавливания" индуцированных электронов внутрь металла, в то время как в натриевых частицах параметр описывал выход электронов за пределы металлической поверхности. В результате были обнаружены существенные различия в оптических характеристиках двух материалов, особенно при рассмотрении интенсивности поля в нанозазоре между частицами. Установлено, что при учете квантового эффекта интенсивность поля в зазоре между натриевыми частицами оказывается выше, чем в классическом случае, в то время как для золотых частиц при учете квантового эффекта всегда происходит снижение интенсивности.

Литература

1. Mortensen N.A. Mesoscopic electrodynamics at metal surfaces (Review) // Nanophotonics (2021), **10**, №10, p.2563–2616.
2. Eremin Y., Lopushenko V. Study of Field Enhancement in the Subnanometer Gap of Plasmonic Dimers Accounting for the Surface Quantum Effect // Photonics (2023), **10**, №9, 990.

КОМБИНИРОВАННЫЙ ПОДХОД К НАХОЖДЕНИЮ МНОГОЦВЕТНЫХ СОЛИТОНОВ В ЗАДАЧЕ ТРЁХВОЛНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Харитонов Д.М.¹, Трофимов В.А.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра МФ, e-mail:
dmitrykharitonov@yandex.ru

2) Южно-Китайский университет технологий, Гуанчжоу, Китай, e-mail:
trofimov@scut.edu.cn

В работе рассматривается комбинированный подход к нахождению решения солитонного типа в модели взаимодействия трёх волн с кратными частотами в среде с квадратичной нелинейностью. Метод нахождения решений состоит из двух частей.

В первой части исходная система типа Шрёдингера, описывающая взаимодействие волн, сводится к более простой системе нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (далее – модифицированной). Для этого используется метод многомасштабного разложения, ранее применявшийся для нахождения солитонных решений в более простых моделях [1]. Модифицированная система (равно как и исходная) является консервативной: имеют место закон сохранения энергии и Гамильтониан.

Во второй части строится приближённые решения модифицированной системы. Поскольку ищутся решения солитонного типа – профили волн неизменны вдоль координаты распространения. Это позволяет свести систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка, описывающих форму профилей в поперечном сечении. Применяя принципы вариационного исчисления [2], мы переформулировали задачу нахождения решения системы ОДУ как задачу нахождения экстремума функционала. Предположения о виде решений упростило задачу до нахождения экстремума функции нескольких переменных. Решение соответствующей системы алгебраических уравнений завершает процесс построения приближённого решения солитонного типа.

Также был проведён анализ устойчивости полученных решений на основе анализа закона сохранения энергии и Гамильтониана модифицированной системы [3]. Он позволил установить ограничения на параметры модели, при которых существует устойчивое решение солитонного типа, а также определить, какие из полученных решений для заданных параметров являются устойчивыми. Компьютерное моделирование подтвердило проведённое теоретическое исследование, а также показало, что решения солитонного типа являются таковыми не только для модифицированной, но и для исходной системы.

Литература

1. Koutsokostas G. N. et al. Multiscale expansions avector solitons of a two-dimensional nonlocal nonlinear Schrödinger system //Studies in Applied Mathematics. – 2020. – V. 145. – №. 4. – P. 739-764.
2. Polyakov S. V., Stegeman G. I. Existence and properties of quadratic solitons in anisotropic media: Variational approach //Physical Review E. – 2002. – V. 66. – №. 4. – P. 046622.
3. Kuznetsov E. A., Rubenchik A. M., Zakharov V. E. Soliton stability in plasmas and hydrodynamics //Physics Reports. – 1986. – V. 142. – №. 3. – P. 103-165.

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОСТИ С ПЛАВНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ПРОВОДИМОСТИ

Барашков И.С.

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической физики, e-mail: barashkov@cs.msu.ru

В настоящей работе разработан алгоритм решения двумерной обратной задачи магнитотеллурического зондирования Земли для случая Е-поляризации. Он основан на методе интегральных уравнений, подробно рассмотренном в монографии [2]. В обратной задаче по известным измеренным на поверхности Земли при разных частотах значениям импеданса $Z^{measured}$ надо определить распределение проводимости Земли $\sigma(y, z)$ в области неоднородности (Heterogeneity) S_H .

Такая обратная задача является некорректной и рассматривается в монографии [1]. Как указывается в этой монографии, алгоритм её решения основан на минимизации регуляризирующего функционала. Он включает наряду с функционалом невязки ещё и стабилизирующий функционал $\Omega(\sigma)$. Первый из возможных вариантов стабилизирующего функционала построен в предположении, что у нас имеется дополнительная априорная информация для решения обратной задачи в виде гипотезы о строении изучаемого района и распределении проводимости среды при данной гипотезе $\sigma^{(g)}(y, z)$. Тогда стабилизатор обратной задачи можно задать в виде близости решения к гипотетическому решению. В монографии [1] не приводится примера конкретного алгоритма решения такой обратной задачи. В работе [3] такой алгоритм был построен.

Второй из возможных вариантов стабилизирующего функционала рассмотрен в монографии [1] в предположении, что у нас имеется дополнительная априорная информация для решения обратной задачи в виде гипотезы о строении изучаемого района и распределении проводимости неоднородности с плавным изменением $\sigma(y, z)$. Тогда стабилизатор обратной задачи можно задать по формуле:

$$\Omega(\sigma) = \int_{S_H} \left(\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right) ds.$$

В монографии [1] тоже не приводится примера конкретного алгоритма решения обратной задачи, когда фактически мы находим из множества эквивалентных решений некорректной задачи такое решение обратной задачи, которое имеет наиболее плавное изменение проводимости. Настоящая работа посвящена разработке такого алгоритма.

Литература

1. Дмитриев В.И. Обратные задачи геофизики // М.: МАКС Пресс, 2012. — 340 с.
2. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике // М.: МАКС Пресс, 2008. — 316 с.
3. Барашков И.С. Алгоритм решения обратной задачи магнитотеллурического зондирования с использованием метода интегральных уравнений для случая Е-поляризации // В сборнике Прикладная Математика и информатика, серия Труды факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, М.: МАКС Пресс, 2024, том 75, с. 41-51.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ РВМ-МОДЕЛИ ДЛЯ УМЕНЬШЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИСКАЖЕНИЙ.

Косолапов И.А.¹, Шелопут Т.О.², Замарашкин Н.Л.², Желтков Д.А.², Дьяченко Р.Р.³

1) ВТМГБ ф-та ФПМИ МФТИ, e-mail: ikosolapov1@gmail.com

2) ИВМ РАН, e-mail: sheloput@phystech.edu

3) Сколтех, e-mail: dyachenko.rr@yandex.ru

Оптоволоконные системы являются основой глобальных телекоммуникационных сетей. Нелинейное искажение сигнала в оптическом волокне оказывает существенное влияние на качество передачи в современных волоконно-оптических линиях связи (ВОЛС). Следовательно, существует потребность в развитии методов обработки сигналов.

Основным лимитирующим фактором дальности передачи сигнала по ВОЛС являются нелинейные искажения, вызванные дисперсностью среды. Для исследования таких искажений рассматривается квазилинейный режим распространения сигнала, где нелинейности моделируются как малые возмущения в линейном решении (perturbation based model, PBM)

$$y(k) = b \cdot x(k) + \Delta x(k) + \eta, \quad (1)$$

$\Delta x(k)$ - оценка накопленных за время распространения сигнала по волокну нелинейных искажений, вызванных кубической нелинейностью среды и учитывающая взаимодействие триплетов соседствующих во времени сигналов, выраженная формулой

$$\Delta x(k) = \sum_{i=0}^1 \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M C_{m,n}^i x^0(k+m) x^i(k+n) x^{i*}(k+m+n). \quad (2)$$

Часто для нахождения коэффициентов возмущений применяют метод наименьших квадратов, см., например, работу [1]. Утверждается, что такой подход демонстрирует высокую эффективность метода при значительном уменьшении вычислительной сложности по сравнению с вычислением коэффициентов как многомерных интегралов.

В данной работе было проведено исследование факторизованной структуры матрицы коэффициентов возмущений, полученной с помощью ALS алгоритма [2]. В частности, была приведена редукция различных элементов и, как следствие, вычислительной сложности модели, в матрице коэффициентов возмущений с помощью вейвлет-преобразования Хаара [3].

Литература

1. Редюк А.А. [и др.]. Метод компенсации нелинейных искажений сигнала в волоконных системах связи на основе теории возмущений и машинного обучения // Прикладная фотоника. Т. 5(3). С. 265-276.
2. Comon P., Luciani X., De Almeida A.L.F. Tensor decompositions, alternating least squares and other tales // Journal of Chemometrics: A Journal of the Chemometrics Society. 2009. V. 23(7-8). P. 393-405.
3. Умняшкин С. В. Основы теории цифровой обработки сигналов. – М.: Техносфера, 2016.

ОПТИМИЗАЦИЯ НА МНОГООБРАЗИИ ТЕНЗОРНЫХ ПОЕЗДОВ С ОБЩИМИ ФАКТОРАМИ

Моложавенко А.А.¹, Рахуба М.В.²

- 1) *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», ФКН; Московский физико-технический институт, ФПМИ, e-mail: amolojavenko@hse.ru*
- 2) *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», ФКН, e-mail: mrakhuba@hse.ru*

Данная работа посвящена разработке эффективных алгоритмов римановой оптимизации для разложения, представляющего собой тензорный поезд (ТТ) [1, 2] с таккеровским разложением ТТ-ядер. Ключевой особенностью исследования является использование дополнительного условия на равенство некоторых из факторов разложения. Наличие одинаковых факторов ломает полилинейную структуру разложения, а значит делает неприменимым классический подход попеременных наименьших квадратов. Тем не менее, мы показываем, что для такого разложения сохраняется структура гладкого многообразия, что позволяет использовать методы римановой оптимизации. Также, по сравнению с работой [3], рассматривающей таккеровское разложение с общими факторами, использование ТТ-разложения позволяет решить проблему проклятия размерности.

Для предлагаемого разложения получен алгоритм построения квазиоптимального приближения, который также можно использовать в качестве операции ретракции. Также получен явный вид касательного пространства исследуемого многообразия и построен эффективный алгоритм получения компонент проекции на касательное пространство с помощью подхода автоматического дифференцирования. Реализован программный пакет, поддерживающий вычисления алгоритмов римановой оптимизации.

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Литература

1. Oseledets I.V. Tensor-train decomposition //SIAM Journal on Scientific Computing, 2011, pp. 2295–2317.
2. Oseledets I.V., Tyrtshnikov E.E. Breaking the Curse of Dimensionality, Or How to Use SVD in Many Dimensions //SIAM Journal on Scientific Computing, 2009, pp. 3744–3759.
3. Peshekhonov I., Arzhantsev A., Rakhuba M. Training a Tucker Model With Shared Factors: a Riemannian Optimization Approach //International Conference on Artificial Intelligence and Statistics, 2024, pp. 3304–3312.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАЛОРАНГОВЫХ АППРОКСИМАЦИЙ В ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИИ-ИСТОЧНИКА В УРАВНЕНИИ КОАГУЛЯЦИИ-ДРОБЛЕНИЯ

Закс Р.Т.¹, Матвеев С.А.²

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ВТМ, e-mail:

s02210389@gse.cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ВТМ, ИВМ РАН,

e-mail: matseralex@cs.msu.ru

Уравнения коагуляции и дробления вещества широко используются для фундаментальных исследований и инженерных приложений в разнообразных научных и производственных областях. Среди фундаментальных областей использования таких уравнений можно найти задачи астрофизики, роста кристаллических структур, образования ультрадисперсных частиц в атмосфере.

Процессы коагуляции и дробления вещества принято описывать при помощи уравнений типа Смолуховского [1]

$$\begin{aligned} \frac{dc(x,t)}{dt} = & \frac{1}{2} \int_0^x K(x-y,y)c(x-y,t)c(y,t)dy - c(x,t) \int_0^{+\infty} K(x,y)c(y,t)dy + \\ & + \int_x^{+\infty} \Psi(y,x)c(y,t)dy - \frac{c(x,t)}{x} \int_0^x y\Psi(x,y)dy + v(x,t), \end{aligned}$$

где функция $c(x,t) \geq 0$ задает концентрацию частиц массы x на единицу объема в момент времени t . Известные из физики процесса функции $K(x,y) \geq 0$, $\Psi(x,y) \geq 0$, характеризующие частоту слияния и дробления, называются ядрами коагуляции и дробления, соответственно. Функция $v(x,t)$, называемая функцией источника, равна концентрации частиц массы x , прибывших извне в момент времени t .

В данной работе рассмотрена обратная задача по восстановлению функции источника $v(x,t)$ по известной концентрации частиц в моменты времени $t = 0$ и $t = T$.

Метод решения данной задачи был впервые рассмотрен в статье [2]. Данная работа посвящена внедрению в полученный метод решения обратной задачи алгоритмов на основе малоранговых представлений ядер коагуляции и дробления, позволяющая ускорить вычисления в тысячи раз без потери точности исходного алгоритма. Идея использования малоранговых представлений ядер коагуляции ранее успешно применялась в прямых задачах для уравнения Смолуховского [3], однако поскольку структура возникающих линейных операторов в алгоритме решения задачи о восстановлении функции источника близка к структуре исходного оператора Смолуховского, удалось применить описанный подход в рассматриваемом случае.

Литература

1. Алоян А. Е. Динамика и кинетика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере // М.: ИВМ РАН. – 2002
2. Agoshkov V.I., Dubovski P.B. Solution of the reconstruction problem of a source function in the coagulation-fragmentation equation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. V. 17, No 4. P.319-330 (2002).
3. Matveev S. A., Smirnov A. P., Tyrtysnikov E. E. A fast numerical method for the Cauchy problem for the Smoluchowski equation // Journal of Computational Physics. – 2015. – T. 282. – С. 23-32.

ПОСТРОЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ТЕНЗОРОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Бурцев Л.А.¹, Таумурзаев А.К.², Петров С. В.³, Замарашкин Н. Л.⁴

- 1) студент каф. ВТМ ф-та ВМК МГУ, e-mail: s02210338@gse.cs.msu.ru
- 2) студент каф. ВТМ ф-та ВМК МГУ, e-mail: s02210563@gse.cs.msu.ru
- 3) доцент каф. ВТМ ф-та ВМК МГУ и научн. сотр. ИВМ РАН,
- 4) доцент каф. ВТМ ф-та ВМК МГУ и научн. сотр. ИВМ РАН,
e-mail: matseralex@cs.msu.ru

Тензоры и тензорные разложения находят всё большее применение в таких областях как машинное обучение, сжатие данных, обработка сигналов и пр. Вместе с этим растёт необходимость в создании новых методов нахождения подобных разложений.

Так, для решения задачи о восстановлении канала процесс передачи сигнала от базовой станции до приёмника можно описать с помощью комплекснозначного тензора, называемого тензором канала. Также важной является задача фильтрации канала от шума, которую, как показано в статье [2], можно решить с помощью канонического разложения. При этом чем выше размерность тензора, тем лучше работает свойство шумоподавления.

В данной работе предложен быстрый алгоритм нахождения канонического разложения тензоров, по структуре аналогичных тензору канала связи. Он состоит из двух частей, в которых используются особенности структуры тензора: сначала реализуется метод быстрого нахождения канонического разложения тензора с помощью иерархической экстраполяции факторов, затем полученное приближение используется для вычисления канонического разложения тензора с искусственно повышенной размерностью.

Литература

1. Bolei Wang, Mengnan Jian, Feifei Gao, Geoffrey Ye Li, Hai Lin Beam Squint and Channel Estimation for Wideband mmWave Massive MIMO-OFDM Systems, 2019
2. Petrov S. V., Zamarashkin N. L. Theoretical Bounds for Noise Filtration using Low-Rank Tensor Approximation //М.: ИВМ РАН. – 2023

РАЗРЕЖЕННЫЕ МАТРИЧНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Когтенов Д.А.¹, Замарашкин Н.Л.^{1,2}

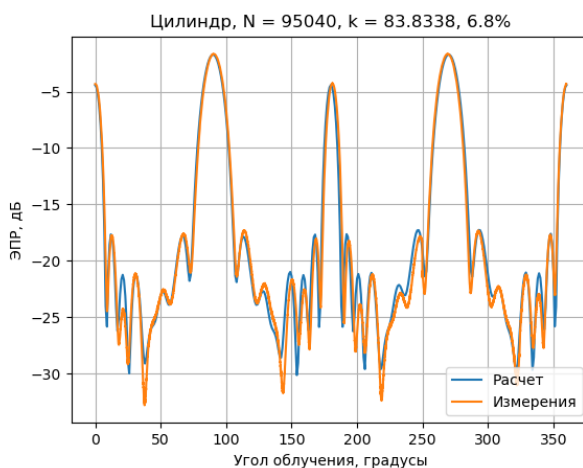
1) Институт вычислительной математики имени Г.И. Марчука РАН, e-mail: kogtenev.da@phystech.edu

2) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ВТМ, e-mail: nikolai.zamarashkin@gmail.com

Существенная проблема, возникающая при численном решении интегральных уравнений, состоит в том, что при их дискретизации возникают линейные системы с плотными матрицами. Эту проблему можно решить с помощью разреженных матричных аппроксимаций, основанных на использовании вейвлетов.

Мы применяем такой подход для решения гиперсингулярных интегральных уравнений. Мы начали с рассмотрения одномерного гиперсингулярного уравнения, разработав новый численный метод его решения, приводящий к системам с разреженными матрицами [1].

Практический интерес представляет решение двумерного интегрального уравнения в задаче рассеяния [2]. Для построения разреженных матричных аппроксимаций мы используем вейвлеты, определенные на поверхности. Такой подход позволяет с хорошей точностью вычислять эффективную площадь рассеяния (ЭПР). На рисунке изображена диаграмма обратного рассеяния при облучении идеально проводящего цилиндра плоской волной с волновым числом $k = 83.8338$. Размер матрицы системы $N = 95040$, доля ненулей в матрице составляет 6.8%.



Литература

1. Когтенов Д.А., Замарашкин Н.Л. Использование вейвлетов Хаара для решения одномерного гиперсингулярного интегрального уравнения // Дифф. Ур. (2024) 60, №9, с.1241–1260.
2. Zakharov E.V. et al. Numerical solution of 3D problems of electromagnetic wave diffraction on a system of ideally conducting surfaces by the method of hypersingular integral equations // Diff. Eq. (2014) 55, №9, p.1240–1251.

**СТАБИЛИЗАЦИЯ ПО АРГУМЕНТУ НЕЛИНЕЙНОСТИ В
СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ
ЗАДАЧЕ**

Волков В.Т.¹, Никитин А.Г.², Никулин Е.И.³

1) МГУ, физический факультет, кафедра математики, e-mail: volkovvt@mail.ru

2) МГУ, физический факультет, кафедра математики, e-mail: singul@rambler.ru

3) МГУ, физический факультет, кафедра математики, e-mail: nikulin@physics.msu.ru

Рассмотрена краевая задача для интегродифференциального уравнения

$$\varepsilon^2 u'' = f\left(u, j\left(\int_0^1 R(u(s))ds, V\right)\right), \quad 0 < x < 1,$$

$$u'(0) = u'(1) = 0,$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, V – положительная постоянная, $R(u)$ – гладкая монотонная положительная функция, $j(\cdot, V)$ – гладкая положительная функция, монотонная по каждому из своих аргументов. В представленной работе обобщены результаты, полученные для конкретной физической модели в статье [1], на более широкий круг задач.

При определенных требованиях на нелинейность уравнения, главными из которых являются существование трех корней уравнения $f(u, j) = 0$ таких, что $\varphi^{(-)}(j) < \varphi^{(0)}(j) < \varphi^{(+)}(j)$, и наличие у уравнения $\int_{\varphi^{(+)}(j)}^{\varphi^{(-)}(j)} f(u, j)du = 0$ корня $j_0 > 0$, имеет место стабилизация значения функции $j\left(\int_0^1 R(u(s))ds, V\right)$ при изменении значения постоянной V . А именно, для некоторого интервала изменения параметра V справедлива оценка

$$j(\varepsilon) = j_0 + O(\varepsilon^m),$$

где m – произвольное натуральное число.

Методом пограничных функций построено равномерное асимптотическое приближение решения задачи с внутренним переходным слоем, проведено обоснование асимптотики.

Литература

1. Е. И. Никулин, В. Т. Волков, А. Г. Никитин On contrast structures in a problem of the baretting effect // Theoretical and Mathematical Physics, 220(1): 1193–1200 (2024)

ДВУМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ В СЛУЧАЕ СЛАБОЙ АДВЕКЦИИ И В СЛУЧАЕ НОРМАЛЬНОЙ АДВЕКЦИИ

Быков А.А.

МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail:
abkovmsu@mail.ru

Дано описание эволюции фронта двумерной контрастной структуры, возникающей как результат решения задачи реакции-адвекции-диффузии (РАД) с малым параметром при старших производных в неоднородной среде. Фронт контрастной структуры (КС) формируется совместным действием дрейфа дисбаланса, кривизны и адвекции. Найдена скорость дрейфа дисбаланса, градиентного дрейфа, дрейфа кривизны. Рассматривается случай сильной адвекции, для которого скорости дрейфа дисбаланса и адвекции имеют один порядок величины. Показано, что дрейф линии внутреннего переходного слоя (ВПС) описывается модифицированным уравнением Гамильтона-Якоби с анизотропной скоростью, которая вычисляется векторным суммированием скорости дрейфа дисбаланса и скорости адвекции. Показано, что в стационарном состоянии линия переходного слоя в нулевом порядке асимптотического разложения может иметь излом, который сглаживается в первом порядке за счет дрейфа кривизны. Уравнение с двумя пространственными координатами будет записано в подвижной системе координат, одно направление параллельно линии ВПС, другое перпендикулярно линии ВПС. В направлении нормали к ВПС получится одномерное по пространству уравнение РАД с дополнительным слагаемым следующего порядка степени малого параметра, включающим производные в направлении линии слоя. Уравнения нулевого приближения нелинейные, математически их можно описать как необходимые условия существования решения нелинейной краевой задачи для нелинейного уравнения второго порядка с граничными условиями, которые описывают поведение решения на бесконечности. Уравнение в вариациях в окрестности уровня насыщения будет линейным второго порядка, его решение есть сумма двух экспоненциальных функций, растущей и убывающей. Условие отсутствия экспоненциально растущей компоненты на правой и левой бесконечностях можно записать в таком же виде, как записываются условия излучения в электродинамике, т.е. в виде условий третьего рода, коэффициенты которых зависят от ФПИ. Спектральным параметром будет в данном случае скорость перемещения (дрейфа) ВПС или координата, в которой располагается неподвижный ВПС. Особенностью нашей модели будет то, что спектральный параметр входит как в уравнение, так и в граничные условия. Последующие приближения будут строиться как решения краевых задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, каждое уравнение будет уравнением в вариациях для нелинейного уравнения нулевого приближения. Так как нас интересуют прежде всего физические приложения, мы ограничимся построением нулевого приближения и обоснованием существования решения, основанным на теории дифференциальных неравенств.

Приводятся численные результаты, демонстрирующие поведение фронта КС в области (а) с константным полем функции дисбаланса, (б) в градиентной среде с областями максимума скорости дрейфа дисбаланса, (в) которая больше скорости адвекции и (г) меньше скорости адвекции. Продемонстрирована возможность появления островов КС, а также бесконечно протяженных КС с ограниченным и с неограниченным поперечным сечением.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ ПРОФИЛЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПЛОСКОЙ ГАЛАКТИКИ ПО ПОЛЯРИЗАЦИИ СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ

Юшков Е.В., Коновалова Д.А., Соколов Д.Д.

кафедра математики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, e-mail:
yushkov.msu@mail.ru

Идея использования данных поляризации синхротронного излучения релятивистских электронов для реконструкции магнитных астрофизических полей одним из первых была высказана В.Л. Гинзбургом [1]. Она базировалась на двух простых фактах: во-первых, излучение релятивистских электронов, в отличие от тепловых, является линейно поляризованным, во-вторых, линейно поляризованное излучение, проходящее через магнитоактивную область, испытывает на себе фарадеевский поворот плоскости поляризации. Причиной поворота является разница в скорости распространения право и лево поляризованных волн, и даже несмотря на то что эта разница является небольшой, масштабы астрофизических тел настолько велики, что повороты плоскости становятся экспериментально измеряемыми в достаточно широком диапазоне длин волн. При этом основная сложность реконструкции заключается в том, что в отличие от фарадеевского экрана, в котором источник расположен за магнитоактивной областью, в галактиках, туманностях и джетах каждая точка вдоль луча наблюдения может отвечать одновременно и за генерацию поляризованного излучения, и за поворот. Математически эта проблема была решена Берном, который связал поведение степени и угла поляризации с длиной волны излучения для плоской однородной пластины, в первом приближении моделирующей плоскую галактику [2]. Однако формула Берна, оказавшаяся чрезвычайно удобной в практическом плане, предполагает постоянное магнитное поле в однородном слое постоянной толщины. Как первое приближение это изумительно красивый результат, не позволяющий однако судить о распределении магнитного поля внутри слоя, а следовательно о токах и внутренней структуре [3]. В представляемом докладе мы показываем один из способов решения этой проблемы во втором приближении, когда с помощью данных о степени поляризации на определенных длинах волн мы асимптотически восстанавливаем профиль магнитного поля поперек слоя. Реализация этой задачи происходит с помощью введения так называемой фарадеевской глубины и представления функции профиля поля от фарадеевской глубины в виде ряда Фурье. Мы демонстрируем работу метода на модельных данных и обсуждаем основную проблему подхода, связанную с тем, что в своей основе он требует знаний о степени поляризации на специальных длинах волн. Этот существенный момент без сомнения необходимо решить перед применением предлагаемого метода к наблюдательным данным.

Литература

1. Гинзбург В.Л., Сыроватский С.И. Космическое магнитотормозное (синхротронное) излучение // Успехи физических наук. 1965.
2. Burn B.F. On the depolarization of discrete radio sources by Faraday dispersion // Mon. Not R. astr. Soc. 1966.
3. Beck R., Brandenburg A., Moss D., Shukurov A., Sokoloff D. Galactic magnetism: Recent Developments and Perspectives // Annu. Rev. Astron. Astrophys. 1996.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В РЕГУЛЯРНО И СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ И ПАДЕ РЕГУЛЯТОРЫ

Даник Ю.Э.¹

1) *Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, e-mail:*
yuliadanik@gmail.com

Рассматриваются регуляторы типа обратной связи для различных непрерывных и дискретных нелинейных систем управления с малыми параметрами. Строятся асимптотические приближения к решениям специальных матричных уравнений Риккати в окрестности одного или нескольких значений параметра в виде конечной суммы ряда по степеням малых параметров и объединяются в одну символьную конструкцию за счет техники Паде аппроксимаций. Получающееся символьное семейство регуляторов, зависящее от одного или нескольких параметров модели (естественного, искусственного, например, штрафа или нескольких сразу), обладает рядом свойств, в частности, стабилизация траекторий замкнутых систем, субоптимальность, и экстраполяция по значениям параметров. Это достигается за счет особых свойств представления Паде, включающего обратную матрицу, объединения нескольких асимптотик (многоточечные Паде), за счет специального подбора матриц критерия, оптимизации коэффициентов, предварительном использовании экстраполяции Ричардсона по отношению к асимптотикам. Матричные Паде аппроксимации можно классифицировать на однотоочечные/многоточечные, первого/второго или более высоких порядков, диагональные/недиагональные в зависимости от соотношения порядка числителя и знаменателя, Паде по нескольким параметрам. Все многообразие вариантов построения аппроксимации Паде в конкретной задаче подсказывает процедуру построения минимизирующей последовательности, выбора оптимального варианта или их комбинации. Каждый из возможных вариантов асимптотики или Паде может быть представлен нейроном в нейронной сети для построения регулятора. Нейроны группируются по слоям, сначала регулярные асимптотические разложения, затем экстраполированные асимптотики, наконец Паде аппроксимации на их основе и более сложные многоточечные конструкции, охватывающие несколько разных областей изменения параметра. В зависимости от конкретной задачи формируется субоптимальный вариант конструкции Паде. Соответствующие Паде регуляторы были построены для непрерывных и дискретных систем управления, включая слабонелинейные, слабосвязанные, с малым/большим коэффициентом усиления, малым шагом, со штрафом, с несколькими параметрами, различными по своей природе, где показали при этом хорошую эффективность.

Литература

1. Danik Yu. One D-SDRE regulator for weakly nonlinear discrete state dependent coefficients control systems // The 7th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CODIT 2020). – P. 616–621.
2. Danik Yu., Dmitriev M. Symbolic Regulator Sets for a Weakly Nonlinear Discrete Control System with a Small Step // Mathematics. – 2022. – V. 10. – №. 3. – P. 1–14. doi: 10.3390/math10030487
3. Danik Yu.E., Dmitriev M.G. Construction of Parametric Regulators for Nonlinear Control Systems Based on the Pade Approximations of the Matrix Riccati Equation Solution // IFAC-PapersOnLine. –2018. –V. 51. – Issue 32. – P. 815–820.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Макаров Д.А.¹

1) *Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, e-mail: makarov@isa.ru*

В докладе рассматриваются приближенные решения двух сингулярно возмущенных слабо нелинейных задач оптимального управления.

В первой постановке рассматривается задача на полуоси и с двумя малыми параметрами: один параметр определяет разнотемповость движения, а второй – степень нелинейности системы. Решение строится на основе техники SDRE [1] и асимптотического разложения. Управление формируется как сумма линейного композитного регулятора и его нелинейной коррекции, которая позволяет повысить качество управления. Полученные результаты являются обобщением работы [2], где рассматривалась задача с одним параметром.

Во второй постановке рассматривается задача с одним параметром, время управления конечно, а решение формируется на основе так называемой «численной» асимптотики, которая получается с помощью сходящегося итерационного процесса и вспомогательной оптимизации. Преимущество такого рода асимптотики в том, что она может быть построена на основе вычислительного эксперимента для конкретного набора данных, что позволяет избежать конструирования отдельных задач для нахождения членов асимптотического приближения, которые могут быть достаточно громоздкими. Полученные численные асимптотики могут быть использованы для построения соответствующих интерполяционных и экстраполяционных процедур, что демонстрируется на примерах. Эти результаты являются продолжением работ [3-4],

Литература

1. Cimen T. State-dependent Riccati Equation (SDRE) control: A Survey // IFAC Proceedings Volumes. 2008. №. 2, P. 3761–3775
2. Dmitriev M. G., Makarov D. A. The stabilizing composite control in a weakly nonlinear singularly perturbed control system // Proceedings of 21st International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC), Sinaia. 2017. Pp. 589-594, doi: 10.1109/ICSTCC.2017.8107099
3. Dmitriev M., Makarov D. An Iterative Method for Regulator Construction in a Weakly Nonlinear Singularly Perturbed Control Problem // 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). – IEEE, 2022. Pp. 1-4. DOI: 10.1109/STAB54858.2022.9807591
4. Дмитриев М.Г., Макаров Д.А. Алгоритм построения численной асимптотики к решениям одного класса нелинейных сингулярно возмущенных задач управления // сборник научных трудов XIV Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2024), 17-20 июня 2024 г., Москва / Под общ. ред. Д.А. Новикова; Ин-т Проблем упр. им. В.А. Трапезникова Рос. акад. наук. М.: ИПУ РАН, 2024.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ В ЗАДАЧЕ РЕКОНСТРУКЦИИ ПАРАМЕТРОВ АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ И ЭМИССИЙ АНТРОПОГЕННЫХ И ПРИРОДНЫХ ПРИМЕСЕЙ

Давыдова М.А.^{1,2}, Еланский Н.Ф.², Рублев Г.Д.², Шилкин А.В.^{2,3}

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, Физический факультет, кафедра математики,

e-mail: m.davydova@physics.msu.ru

2) ИФА имени А.М. Обухова РАН,

e-mail: n.f.elansky@mail.ru, rublev.gd15@physics.msu.ru

3) Лаборатория № 5 ИЭМ НПО "Тайфун", e-mail: dogget@list.ru

Существующие химико-транспортные модели атмосферы, типа SILAM, COSMO-ART, в целом адекватно описывают процессы переноса и химической трансформации газовых и аэрозольных примесей в атмосфере. Однако при рассмотрении многих сценариев отмечаются значительные расхождения между результатами расчетов и данными наблюдений, обусловленные, во многом, недостаточной точностью входных данных. Выделяются две основные причины таких расхождений – это значительная доля субъективизма в задании эмиссий газовых и аэрозольных примесей антропогенного и природного происхождения [1] и большие неопределенности в описании турбулентной диффузии в атмосферном пограничном слое (АПС) [2].

Нами разработан и строго обоснован эффективный математический метод оценки характеристик атмосферной турбулентности в устойчивом или нейтральном АПС и эмиссий примесей от антропогенных и природных наземных источников. Основу метода составляет устойчивый численный алгоритм решения обратных задач по восстановлению неизвестных параметров сингулярно возмущенных моделей для уравнения диффузии консервативных и химически активных примесей, использующий асимптотические приближения по малому параметру решений прямых задач [3] в сочетании с данными наблюдений на базе известных результатов и методов [4]. Валидация вычислительных методов и анализ достоверности полученных результатов выполнены с использованием уникальных данных многолетних измерений оксида углерода и окислов азота на разных высотных уровнях Московской телевизионной башни в Останкино и на городской сети наземных станций мониторинга состава атмосферы.

Применение нового метода позволяет охватить всю территорию города или целого региона и получить эмиссии практически всех газовых примесей и аэрозолей, необходимые для определения и прогнозирования качества воздуха.

Литература

1. Elansky N. F., Ponomarev N. A., Verevkin Y. M. Air quality and pollutant emissions in the Moscow megacity in 2005–2014 // *Atmospheric Environment* (2018) **175**, no. 2, p. 54–64.
2. Jeričević, A., Kraljević, L., Grisogono, B., Fagerli, H., and Večenaj, Z. Parameterization of vertical diffusion and the atmospheric boundary layer height determination in the EMEP model // *Atmos. Chem. Phys.* (2010) **10**, p. 341–364.
3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений // М.: Высш. шк. – 1990.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач // М.: Наука – 1979.

РЕШЕНИЯ С ПОГРАНИЧНЫМИ СЛОЯМИ В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ДВУМЕРНОЙ ТИХОНОВСКОЙ СИСТЕМЕ С KPZ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Орлов А. О.

*МГУ имени М.В. Ломоносова, Физический факультет, кафедра математики,
email: orlov.andrey@physics.msu.ru*

Изучается сингулярно возмущенная краевая задача для тихоновской системы:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_u(u, v) &:= \varepsilon^2 \Delta u - \varepsilon^2 A(u, x)(\nabla u)^2 - g(u, v, x, \varepsilon) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D, \\ \mathcal{N}_v(u, v) &:= \Delta v - B(v, x)(\nabla v)^2 - f(u, v, x, \varepsilon) = 0.\end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, D – односвязная область на плоскости (x_1, x_2) с гладкой простой границей Γ .

Пусть также для функции $u(x)$ задан один из следующих вариантов граничных условий:

1) условие Дирихле $u(x) = u^0(x), x \in \Gamma$, 2) условие Неймана $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = u^0(x), x \in \Gamma$. Для функции $v(x)$ задано условие Дирихле: $v(x) = v^0(x), x \in \Gamma$.

Особенностями изучаемой задачи являются слагаемые, содержащие квадраты градиента неизвестной функции (так называемые нелинейности типа Кардара–Паризи–Жанга или KPZ нелинейности). Системы с нелинейностями такого типа возникают при моделировании роста свободной поверхности полимеров, а также в нелинейной теории горения.

Для указанных видов граничных условий построена асимптотика решений погранслоного типа, доказаны теоремы существования решений с построенной асимптотикой, а также исследована их устойчивость по Ляпунову. Для доказательства использован асимптотический метод дифференциальных неравенств Нефедова Н. Н., примененный для нового класса задач. Рассмотрены квазимоноотонные источники (g, f) , а также источники без требования квазимоноотонности.

Результаты работы могут быть использованы при разработке эффективных экономичных численных методов решения сингулярно возмущенных систем, а также при рассмотрении вопросов существования внутренних переходных слоев в таких системах.

Работа поддержана грантом РНФ № 23-11-00069.

Литература

1. Нефедов Н. Н., Орлов А. О. Существование и устойчивость решений с внутренним переходным слоем уравнения реакция-диффузия-адвекция с KPZ-нелинейностью // Дифференциальные уравнения (2023) **59**, №8, с. 1007–1021.
2. Нефедов Н. Н., Орлов А. О. Существование и устойчивость стационарных решений с пограничными слоями в системе быстрого и медленного уравнений реакция-диффузия-адвекция с kpz-нелинейностями // ТМФ (2024) **220**, №1, с. 137–153.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ СВЕРХБЫСТРОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОБЪЁМА СГОРЕВШЕЙ БИОМАССЫ В ЛАНДШАФТНЫХ ЛЕСНЫХ ПОЖАРАХ

Аргун Р.Л.¹, Левашова Н.Т.¹, Лукьяненко Д.В.¹

МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail:
argun.rl14@physics.msu.ru, levashovant@physics.msu.ru lukyanenko@physics.msu.ru

Задача по определению объёма сгоревшей биомассы в ландшафтных лесных пожарах по данным наблюдений динамики распространения фронта пожара является важной прикладной задачей, быстрое решение которой позволяет делать различные выводы об опасности таких пожаров и, в частности, о целесообразности их тушения.

Трудность практического решения задач такого типа связана с тем, что такие задачи относятся к классу обратных задач для уравнений в частных производных. Классические методы решения обратных задач такого класса основываются на градиентных методах минимизации целевого функционала, что приводит к необходимости многократного решения прямой и сопряжённой задач (см., например, работу [1]). К тому же рассматриваемый тип задач ставится в двумерном по пространству случае. Это приводит к существенным вычислительным затратам, причём таким, что подразумевается необходимость использования суперкомпьютерных систем для получения решения за разумное в рамках практических потребностей время.

Однако методы асимптотического анализа позволяют свести исходную постановку обратной задачи к редуцированной, вычислительная сложность которой существенно меньше. В частности, будет показано, что для рассматриваемого типа задач исходная постановка обратной задачи для двумерного по пространству уравнения в частных производных параболического типа может быть сведена к достаточно простому для численного решения трансцендентному уравнению (подобный подход описан, например, в работе [2]). В результате задача может быть решена с минимальными вычислительными затратами.

Очевидно, у используемых подходов есть ограничения применимости. На них будет акцентироваться отдельное внимание.

Литература

1. Lukyanenko D.V., Argun R.L., Borzunov A.A., Gorbachev A.V., Shinkarev V.D., Shishlenin M.A., Yagola A.G. On the features of numerical solution of coefficient inverse problems for nonlinear equations of the reaction–diffusion–advection type with data of various types // *Differential Equations* (2023) **59**(12), p. 1734–1757.
2. Lukyanenko D.V., Grigorev V.B., Volkov V.T., Shishlenin M.A. Solving of the coefficient inverse problem for a nonlinear singularly perturbed two-dimensional reaction–diffusion equation with the location of moving front data // *Computers and Mathematics with Applications* (2018) **77**(5), p. 1245–1254.

ДВИЖЕНИЕ ФРОНТА В ЗАДАЧЕ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ В СЛУЧАЕ БАЛАНСА РЕАКЦИИ И ДИФФУЗИИ

Махмудов А. Р.¹, Орлов А. О.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, Физический факультет, кафедра математики,
email: makhmudov.ar21@physics.msu.ru

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, Физический факультет, кафедра математики, e-mail:
orlov.andrey@physics.msu.ru

В работе рассматривается проблема существования решения вида движущегося фронта в сингулярно возмущенной задаче реакция-диффузия:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(D(u, x, \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} - f(u, x, \varepsilon) = 0, & x \in (-1, 1), \quad t \in (0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-1, t, \varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = 0, & t \in [0, T], \quad u(x, 0, \varepsilon) = u_{init}(x, \varepsilon), \quad x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Постановки начально-краевых задач для уравнения реакция-диффузия в случае нелинейной диффузии, допускающие решения с внутренними переходными слоями, могут быть успешно использованы для математического моделирования процессов популяционной динамики, а также в задачах нелинейной теории теплопроводности. При этом особый интерес представляет случай баланса между реакцией и нелинейной диффузией:

$$\int_{\varphi^{(-)}(x)}^{\varphi^{(+)}(x)} f(u, x, 0) D(u, x, 0) du = 0, \quad x \in [-1, 1],$$

$\varphi^{(\pm)}(x)$ – устойчивые корни нелинейности кубического типа.

Для рассматриваемой задачи в работе построена асимптотика решения с внутренним переходным слоем, приведен алгоритм нахождения членов ряда асимптотического приближения для скорости движения фронта. Показано, что скорость дрейфа контрастной структуры нулевого порядка определяется путем анализа асимптотического приближения 1 порядка. Для доказательства теоремы существования и единственности использован асимптотический метод дифференциальных неравенств Нефедова Н. Н.

Полученные результаты могут быть использованы при изучении формирования резких переходных слоев в таких задачах, а также при разработке эффективных численных методов решения сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями.

Работа поддержана грантом РФ 23-11-00069.

Литература

1. Нефедов Н.Н., Никулин Е.И., Орлов А.О. Движение фронта в задаче со слабой адвекцией в случае непрерывного источника и источника модульного типа // Дифференц. ур-ния (2022) **58**, №6, с.–763-776.
2. Нефедов Н.Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции-диффузии-адвекции: теория и применение // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. (2021) **61**, №12, с.–2068-2087.

СЛАБЫЙ ВНУТРЕННИЙ СЛОЙ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ-АДВЕКЦИЯ В СЛУЧАЕ РАЗРЫВА РЕАКЦИИ

Никулин Е.И.¹, Карамышев А.В.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail:
nikulin@physics.msu.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail:
karamyshevav@my.msu.ru

Рассматривается следующая задача:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_\varepsilon u := -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon a(u, x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - f(u, x, t) - \varepsilon f_1(u, x, t) = 0, \quad -1 < x < 1, \quad t \in R, \\ f_1(u, x, t) = \begin{cases} f_1^{(+)}(u, x, t), & u \in I_u, \quad x_p < x \leq 1, \\ f_1^{(-)}(u, x, t), & u \in I_u, \quad -1 \leq x < x_p, \end{cases} \quad t \in R, \\ f(u, x, t) = \begin{cases} f^{(+)}(u, x, t), & u \in I_u, \quad x_p < x \leq 1, \\ f^{(-)}(u, x, t), & u \in I_u, \quad -1 \leq x < x_p, \end{cases} \quad t \in R, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-1, t, \varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in R, \\ u(x, t, \varepsilon) = u(x, t + T, \varepsilon), \quad t \in R, \quad x \in [-1, 1], \end{array} \right.$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Настоящая задача находит применение в дрейфо-диффузионной модели полупроводника при периодическом токе. Неизвестная функция $u(x, t, \varepsilon)$ представляет собой приведенную напряженность электрического поля.

Будем считать выполненными следующие условия:

(Условие 1) Пусть при каждом фиксированном $u \in I_u$ функция $f_1(u, x, t)$ претерпевает разрыв первого рода по переменной x в точке x_p , функция $f(u, x, t)$ непрерывна по переменной x , а ее первая производная по переменной x претерпевает разрыв первого рода в точке x_p .

(Условие 2) Пусть вырожденное уравнение $f(u, x, t) = 0$ имеет в области $x \in [-1, 1]$, $u \in I_u$, $t \in R$, ровно один корень $\varphi(x, t)$, лежащий в области $x \in [-1, 1]$, $u \in I_u$, $t \in R$, удовлетворяющий неравенству: $f_u(\varphi(x, t), x, t) > 0$, $x \in [-1, 1]$, $u \in I_u$, $t \in R$.

В настоящей работе выполнено построение асимптотики, доказательство существования и исследование устойчивости периодического по переменной t решения. Показано, что такое решение как решение соответствующей начально-краевой задачи является асимптотически устойчивым по Ляпунову. Для такого решения указана область устойчивости конечной (не асимптотический малой) ширины и установлено, что решение задачи с периодическими условиями единственно в этой области. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 23-11-00069).

Литература

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах //Фундаментальная и прикладная математика. – 1998. – Т. 4. – №. 3. – С. 799-851.
2. Nefedov N. N., Nikulin E. I., Orlov A. O. Existence of contrast structures in a problem with discontinuous reaction and advection //Russian Journal of Mathematical Physics. – 2022. – Т. 29. – №. 2. – С. 214-224.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ В ДРЕЙФО-ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ ПОЛУПРОВОДНИКА

Никулин Е.И.¹, Карманов Д.А.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail: nikulin@physics.msu.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail: karmanov.da02@gmail.com

Рассматривается следующая задача:

$$\varepsilon^2 \left(-\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \varepsilon^2 a(u, x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - f(u, x, t, \varepsilon) = 0$$
$$x \in (-1, 1), t \in \mathbb{R}$$

с граничными условиями Неймана и условием периодичности:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1, t, \varepsilon) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = 0,$$
$$u(x, t, \varepsilon) = u(x, t + T, \varepsilon), x \in [-1, 1], t \in \mathbb{R}$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр.

Такая задача находит прямое применение в одномерной дрейфо-диффузионной модели полупроводника, который обладает N-образной зависимостью скорости дрейфа от напряженности электрического поля. При условии заданного внешнего переменного тока в окрестности некоторой внутренней точки полупроводника могут сосуществовать два периодическидвигающихся соседствующих обедненных электронами слоя, если в данной точке равновесная концентрация электронов является недостаточно гладкой функцией пространственной координаты. При этом один из слоев является асимптотически устойчивым по Ляпунову (т.е. подвижные слои "притягиваются" в его область притяжения), а второй слой является неустойчивым (подвижные слои "удаляются" от него). Полученный результат можно будет интерпретировать как способ управления такими подвижными периодическими по времени слоями в полупроводниках.

В работе для $u(x, t, \varepsilon)$ была построена формальная асимптотика по малому параметру ε , обладающая внутренним переходным слоем внутри интервала $-1 < x < 1$. Доказательство существования решения поставленной задачи с построенной асимптотикой проводилось на основе асимптотического метода дифференциальных неравенств.

Литература

1. КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ В ЗАДАЧЕ РЕАКЦИЯ-АДВЕКЦИЯ- ДИФфуЗИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ДРЕЙФО-ДИФфуЗИОННОЙ МОДЕЛИ ПОЛУПРОВОДНИКА, В СЛУЧАЕ НЕГЛАДКОЙ РЕАКЦИИ // Никулин Е.И. // в журнале Теоретическая и математическая физика, издательство МИАН (Москва), том 215, № 3, с. 360- 376 DOI
2. Contrast Structures in the Reaction-Diffusion-Advection Problem in the Case of a Weak Reaction Discontinuity // Nefedov N.N., Nikulin E.I., Orlov A.O. // в журнале Russian Journal of Mathematical Physics, издательство Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), том 29, № 1, с. 81-90 DOI

АЛГОРИТМ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АГЕНТОВ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ НА ОСНОВЕ ЛОКАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Шутова К.Ю.¹, Фомичев В.В.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ, e-mail: shutova.k.u@yandex.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ, e-mail: fomichev@cs.msu.ru

Рассматривается задача равномерного распределения агентов в ограниченной области на плоскости. В работах [1, 2] предложены алгоритмы равномерного распределения агентов на отрезке. В данной работе основное внимание уделяется взаимодействиям между агентами на плоскости через силы отталкивания, что позволяет избегать столкновений, а также форме матрицы локальных связей для поддержания локального взаимодействия между соседями. Целью работы является разработка алгоритма, обеспечивающего равномерное размещение агентов в ограниченной двумерной области, использующего взаимодействие с ближайшими соседями и силы отталкивания для предотвращения слипания агентов.

Для проведения численного эксперимента генерируем N агентов, находящихся в области $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Каждый агент i в момент времени t имеет позицию $x_i(t) \in \mathbb{R}^2$, как внутри, так и снаружи Ω . Агенты взаимодействуют с некоторыми фиксированными соседями на основе матрицы A , которая определяет силы притяжения между соответствующими агентами. Кроме того, определены силы отталкивания $f_{\text{repulsion}}$. Цель агентов – разместиться равномерно в области Ω . Обновление положения агентов описывается следующей системой:

$$\begin{cases} x(t+1) = (1-\beta)x(t) + \beta Ax(t) + \gamma f_{x\text{repulsion}}(t) \\ y(t+1) = (1-\beta)y(t) + \beta Ay(t) + \gamma f_{y\text{repulsion}}(t). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T$, $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t))^T$ – вектора текущих позиций агентов, $f_{x\text{repulsion}}(t), f_{y\text{repulsion}}(t)$ – компоненты силы отталкивания, $\beta \in [0, 1]$ – коэффициент, управляющий вкладом матрицы взаимодействий в обновление позиций, $\gamma \in [0, 1]$ – коэффициент, определяющий вклад силы отталкивания.

В ходе работы исследуются и доказываются липшицевость системы (1), которая обеспечивает сходимость к равномерному размещению агентов.

В ходе экспериментов с 9 агентами, изначально определенными в случайном положении на поле, группа постепенно равномерно (т.е. образуя некоторую структуру) занимает всю доступную область, ориентируясь на ближайших соседей по матрице A , а также избегая скопления.

Модель демонстрирует свою применимость для задач, связанных с равномерным распределением объектов в ограниченных областях, таких как задачи навигации и распределения беспилотных систем.

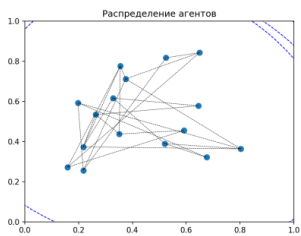


Рис. 1 Начальная конфигурация агентов

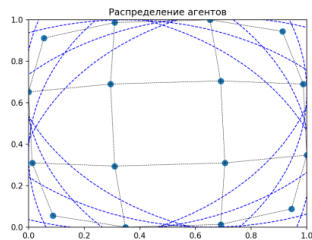


Рис. 2. Конечная конфигурация

Литература

1. Y. I. Kvinto and S. E. Parsegov, "Equidistant arrangement of agents on line: Analysis of the algorithm and its generalization," Automation and Remote Control, vol. 73, no. 11, pp. 1784–1793, 2012.
2. A. V. Proskurnikov and S. E. Parsegov, "Problem of uniform deployment on a line segment for second-order agents," Automation and Remote Control, vol. 77, no. 7, pp. 1248–1258, 2016.

ПЕРЕДВИЖЕНИЕ ГРУППЫ РОБОТОВ В НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СРЕДЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ОБУЧЕНИЯ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ

Бегишев Р.Р.¹, Ильин А.В.²

1) МГУ им.М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ, e-mail: begrusso@gmail.com

2) МГУ им.М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ, e-mail: iline@cs.msu.su

В современном мире всё большую актуальность приобретают задачи робототехники, разрешаемые с использованием искусственного интеллекта. Интересным и активно развивающимся направлением является формирование из нескольких роботов групп, для выполнения комплексных задач, требующих привлечения множества агентов. Представлены качественные результаты по формированию группы, а также побегу этой группы от преследователя [1], и задача передвижения цилиндра несколькими агентами в среде с препятствиями [2].

К рассмотрению была предложена задача формирования группы несколькими роботами и продвижения этой группы к целевой точке в среде с неопределённостью. Область, в которой действует группа, заранее неизвестна и включает в себя как выпуклые, так и не выпуклые препятствия. Математическая модель роботов представлена следующей системой:

$$\begin{cases} x_i(t + \Delta t) = x(t) + v_i \cos \theta_i(t) \\ y_i(t + \Delta t) = y(t) + v_i \sin \theta_i(t) \\ \theta_i(t + \Delta t) = \theta_i(t) + \omega_i, \end{cases}$$

где $i \in \overline{1, N}$, N – количество агентов в группе, v_i – линейная скорость робота, ω_i – угловая скорость.

Предложенное решение включает в себя комбинацию нескольких моделей, полученных при помощи обучения с подкреплением. Первая модель используется для группировки и поддержания близости роботов в группе. Вторая модель используется для движения каждого робота к целевой точке и обхода препятствий, детектируемых сенсорами роботов. Одновременное использование этих моделей на каждом агенте позволяет поддерживать структуру группы, а также её адаптивное передвижение к цели. Независимость моделей на агентах позволяет масштабировать размер группы.

Литература

1. Hüttenrauch, M., Šošić, A., and Neumann, G. (2019). Deep reinforcement learning for swarm systems. J. Mach. Learn. Res. 20, 1–31.
2. Bloom, J., Mukherjee, A., and Pinciroli, C. (2022). A study of reinforcement learning algorithms for aggregates of minimalistic robots. Available at: <https://arxiv.org/abs/2203.15129>.

АЛГОРИТМЫ СВЕРХФИНИТНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Цянй Чэнсыцзинь¹, Фомичев В.В.²

- 1) МГУ им.М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ, e-mail: qiancsj2021@gmail.com
- 2) МГУ им.М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ, e-mail: fomichev@cs.msu.ru

Сверхфинитная стабилизация (Fixed-Time Stability) представляет собой важное понятие в теории управления, которое гарантирует, что система достигает состояния устойчивости за строго фиксированное время, независимо от начальных условий. В отличие от конечной времени стабилизации (Finite-Time Stability), сверхфинитная стабилизация имеет более широкую практическую значимость, так как в реальных задачах начальные состояния системы могут быть неопределёнными и подверженными влиянию внешних возмущений.

Super-Twisting алгоритм (STA) — это метод второго порядка скользящего режима, который обеспечивает приведение траектории системы к скользящей поверхности за конечное время и последующую её стабилизацию в состоянии равновесия.

В данной работе на основе алгоритма Super-Twisting (STA) предложены фиксированного времени наблюдатели вида (1) для одномерных систем и фиксированного времени наблюдатели вида (2) (3) для двумерных систем с возмущениями, получены верхние границы времени сходимости T_{max} системы. С помощью численного моделирования подтвердили, что время сходимости системы не зависит от начальных условий.

$$\dot{x}(t) = -k_1|x|^{\alpha_1} - k_2|x|^{\alpha_2} + \xi(t) - k_3 \operatorname{sgn}(x) \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k_1|x|^{\alpha_1} - k_2|x|^{\alpha_2} + \xi(t) - k_3 \operatorname{sgn}(x) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - k_1|x|^{\alpha_1} - k_2|x|^{\alpha_2} \\ \dot{x}_2 = \xi(t) - k_3 \operatorname{sgn}(x) \end{cases} \quad (3)$$

где $|x|^\alpha = |x|^\alpha \cdot \operatorname{sgn}(x)$

Литература

1. Levant, Arie. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control //International journal of control 58.6 (1993): 1247-1263.
2. Seeber, Richard, and Martin Horn. Necessary and sufficient stability criterion for the super-twisting algorithm //2018 15th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS). IEEE, 2018.
3. Polyakov, Andrey. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems //IEEE transactions on Automatic Control 57.8 (2011): 2106-2110.
4. Moulay, Emmanuel, et al. Robust fixed-time stability: Application to sliding-mode control //IEEE Transactions on Automatic Control 67.2 (2021): 1061-1066.
5. Фомичев В.В., Высоцкий А.О. Критерий устойчивости и точные оценки для алгоритма «супер-скручивания» // Дифференциальные уравнения 59.2 (2023): 252-256

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРОБЛЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Крылов П.А.¹, Фурсов А.С.²

1) МГУ им.М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ, e-mail: pavel@leftsystem.ru

2) МГУ им.М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ, e-mail: fursov@cs.msu.ru

Рассматривается нелинейная аффинная система второго порядка

$$\dot{x} = g(x) + p(x)u, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, g(0) = 0, \quad (1)$$

где $g(x) \in C^2(\Omega)$, $p(x) \in C^1(\Omega)$, при этом аналитические представления функций $g(x)$ и $p(x)$ неизвестны, но известны их значения и первые частные производные в некотором заданном наборе точек $\{x_1, \dots, x_m\}$ из заданной области Ω (причём $x_1 = 0 \in \Omega$). Также считаем, что нам известны оценки вторых частных производных $g(x)$ и градиента $p(x)$ в области Ω . Ставится задача стабилизации нулевого решения данной системы.

Задача. Построить управление $u = u(x)$ такое, что для любого $x_0 \in \Omega$ соответствующее решение $x(t)$ замкнутой системы

$$\dot{x} = g(x) + p(x)u(x) \quad (2)$$

удовлетворяет условиям: $x(t) \in \Omega$ для любого $t > 0$ и $\|x(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Предлагается алгоритм, позволяющий построить кусочно-линейную обратную связь, обеспечивающую асимптотическую устойчивость нулевого решения замкнутой системы в заданной области Ω . Искомая обратная связь будет иметь вид

$$u = k_\sigma x, \quad \sigma: \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}. \quad (3)$$

Переключающий сигнал $\sigma(x)$ определяется разбиением области Ω на m выпуклых многогранников $\{M_1, \dots, M_m\}$, таким образом, что сигнал принимает постоянное значение внутри каждого такого многогранника.

В таком случае построение искомой обратной связи сводится к следующим шагам:

1. Строится стабилизирующая статическая обратная связь для линейного приближения системы (1) в нуле.
2. С помощью квадратичной функции Ляпунова оценивается окрестность нуля Δ , в которой построенный регулятор обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (1).
3. Фиксируется некоторое разбиение области Ω такое, что $M_1 \subset \Delta, x_i \in M_i$.
4. На основе линейных приближений $g(x)$ в точках x_i строится кусочно-линейная аппроксимация системы (1).
5. Методом, описанным в работе [1], для полученной аппроксимации ищется стабилизирующая обратная связь в виде (3).
6. Строится параметрическое расширение аппроксимации, сохраняющее граф дискретных состояний G [2] и условия $M_1 \subset \Delta, x_i \in M_i$.
7. Для каждой аппроксимации оценивается погрешность и грубость.

Система (2) с обратной связью (3) удовлетворяет поставленным условиям, если существует аппроксимация, для которой грубость превышает погрешность.

Литература

1. Фурсов А.С., Крылов П.А. Об устойчивости переключаемой аффинной системы для некоторого класса переключающих сигналов // Дифф. уравнения. 2023. Т. 59, №4. с.554–562.
2. Фурсов А.С., Крылов П.А. О построении графа дискретных состояний переключаемой аффинной системы // Дифф. ур. 2023. Т. 59, №11. с.1541–1549.

ОБ ОДНОЙ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПУЧКАМИ ТРАЕКТОРИЙ

Никольский М.С.

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, e-mail: mni@mi-ras.ru

В n -мерном евклидовом пространстве рассматривается нелинейный управляемый объект с неодноточечным начальным множеством K и множеством достижимости $D(T, u(t))$ в фиксированный момент $T > 0$ при данном допустимом управлении $u(t)$. На $D(T, u(t))$ максимизируется заданная терминальная функция $g(x)$. Эта функция может, например, характеризовать разброс траекторий изучаемого управляемого объекта относительно фиксированного множества (терминального множества) M .

В докладе изучается задача о существовании минимума для указанного максимума на множестве допустимых управлений $u(t)$. Эта задача по постановке относится к числу минимаксных задач управления. В работе были получены достаточные условия общего вида, гарантирующие корректность определения, т.е. существование, такого минимакса. Заметим, что теоремы существования оптимальных и минимаксных управлений важны для математической теории управления. Они являются теоретической основой для дальнейшего использования известных в литературе по оптимальному управлению необходимых условий оптимальности.

Отметим, что различные задачи управления пучками траекторий рассматривались А.Б.Куржанским, Д.А.Овсянниковым и их учениками (см., например, [1], [2]). В работах Д.А.Овсянникова изучались некоторые задачи управления пучками заряженных частиц, важные для проектирования физических ускорителей частиц. В работах А.Б.Куржанского рассматривались различные задачи управления с неполной информацией, которые часто приводят к задачам управления пучками траекторий.

Настоящая работа продолжает исследования работы [3].

Литература

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М. : Наука, 1977.
2. Овсянников Д.А. Математические методы управления пучками. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
3. Никольский М.С., Беляевских Е.А. Теоремы существования оптимального управления для некоторых задач управления пучками траекторий // Вестник С.-Петербург. ун-та. Серия 10. Прикладная матем. Информ. Процессы управл. (2017). Т.13, №1, с. 113 -118.

О СОПРЯЖЕНИИ ОСОБОГО РЕЖИМА ЛОКАЛЬНОГО ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕОСОБЫМ РЕЛЕЙНЫМ УЧАСТКОМ

Хайлов Е.Н.

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления, e-mail: khailov@cs.msu.ru

В докладе на фиксированном отрезке времени $[0, T]$ рассматривается трехмерная нелинейная система $x'(t) = f(x(t)) + u(t)g(x(t))$, $x(0) = x_0$ со скалярным управлением $u(t)$, подчиняющимся ограничениям $0 \leq u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}$. Предполагается, что вектор-функции $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно дифференцируемы. Для такой системы ставится задача минимизации целевой функции $J(u(\cdot)) = \langle p, x(T) \rangle$ на множестве допустимых управлений, состоящем из всевозможных измеримых по Лебегу функций $u(t)$, удовлетворяющих почти всюду указанным ограничениям. Здесь p – заданный вектор, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов. Считается, что в этой задаче существует оптимальное решение, состоящее из оптимального управления $u_*(t)$ и отвечающей ему оптимальной траектории $x_*(t)$. Для анализа такого решения привлекается принцип максимума Понтрягина. Он показывает, что у оптимального управления $u_*(t)$ наряду с неособыми релейными участками, на которых оно принимает значения из $\{u_{\min}; u_{\max}\}$, также могут существовать особые участки с особыми режимами, на которых функция переключений $L(t) = \langle g(x_*(t)), \psi_*(t) \rangle$ обращается тождественно в нуль. Здесь $\psi_*(t)$ – решение сопряженной системы, отвечающее оптимальному решению $(x_*(t), u_*(t))$. Исследование оптимального управления $u_*(t)$ на особом участке связано с последовательным дифференцированием функции $L(t)$ в силу исходной и сопряженной систем. Первая производная $L^{(1)}(t)$ не зависит от управления $u_*(t)$. Вторая производная $L^{(2)}(t)$ записывается формулой $L^{(2)}(t) = \langle [f, [f, g]](x_*(t)), \psi_*(t) \rangle + u_*(t) \langle [g, [f, g]](x_*(t)), \psi_*(t) \rangle$, где $[h, q](x)$ – скобка Ли векторных полей $h(x)$ и $q(x)$. В докладе изучается ситуация, когда выполняется равенство $\langle [g, [f, g]](x_*(t)), \psi_*(t) \rangle = 0$. Тогда вторая производная $L^{(2)}(t)$ тоже не зависит от управления $u_*(t)$ и ее можно дифференцировать. В результате вычисляется третья производная $L^{(3)}(t)$, которая не зависит от управления $u_*(t)$. Наконец, дифференцируя эту производную, отыскивается четвертая производная $L^{(4)}(t)$, которая определяется формулой

$$L^{(4)}(t) = \langle [f, [f, [f, [f, g]]]](x_*(t)), \psi_*(t) \rangle + u_*(t) \langle [g, [f, [f, [f, g]]]](x_*(t)), \psi_*(t) \rangle.$$

Предполагается, что в ней множитель при управлении $u_*(t)$ отрицателен, что подразумевает выполнение необходимого условия оптимальности особого режима. Поскольку множитель при управлении $u_*(t)$ у второй производной $L^{(2)}(t)$ обращается в нуль только на оптимальной тройке $(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t))$, что может быть связано с равенством нулю как самой функции переключений $L(t)$, так и ее первой производной $L^{(1)}(t)$, то речь идет об особом режиме локального второго порядка. При этом, важен вопрос о сопряжении такого особого режима с неособым релейным участком. Для его решения предлагается изучить локальную управляемость вдоль оптимальной траектории $x_*(t)$ на особом участке, а для этого проверить соответствующие достаточные условия. Следует отметить, что такая управляемость осуществляется с помощью релейных функций. Это приводит к анализу конкретных форм сопряжения изучаемого особого режима с неособым релейным участком.

ОБ ОСОБЫХ РЕЖИМАХ В МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Киселёв Ю.Н.¹, Аввакумов С.Н.², Орлов М.В.³, Орлов С.М.⁴

- 1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления,
e-mail: kiselev@cs.msu.su
- 2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления,
e-mail: asn@cs.msu.su
- 3) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления,
e-mail: orlov@cs.msu.su
- 4) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления,
e-mail: sergey.orlov@cs.msu.su

В докладе содержится обзор результатов, полученных авторами при исследовании n -мерных моделей экономического роста, сформулированных в терминах задач оптимального управления с функционалом интегрального типа с дисконтирующим множителем на бесконечном горизонте. Исследуемые модели допускают биологическую интерпретацию как задача распределения ресурсов. Во всех моделях используется классическая многофакторная производственная функция Кобба-Дугласа. Фазовые переменные с учётом коэффициентов амортизации характеризуют уровни развития соответствующих факторов производства. Функционал качества определяет интегральный объём потребления.

Для построения аналитического решения привлекается принцип максимума Понтрягина [1]. Оптимальное решение выходит на магистраль --- стационарный особый режим сбалансированного экономического роста, который в фазовом пространстве можно представить в виде луча, выходящего из начала координат. Оптимальная траектория на начальном участке времени стремится как можно быстрее выйти на магистраль, причём оптимальное управление содержит различные особые участки, затем фазовая траектория, двигаясь по лучу, удаляется от начала координат, что соответствует фазе сбалансированного роста.

Для доказательства оптимальности полученных решений привлекается теорема о достаточных условиях оптимальности в терминах конструкций принципа максимума, описанная в [2].

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкерлидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
2. Киселёв Ю.Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // – Материалы научного семинара «Математические модели в экономике и биологии». М.: МАКС Пресс. – 2003. С. 57–67.

АЛГОРИТМ УСТОЙЧИВОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ РАЗНОТИПНОЙ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ ДЛЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ ЕЁ ПОДСИСТЕМ

Дряженков А.А.¹, Потапов М.М.²

- 1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Оптимального управления,
e-mail: andrja@yandex.ru
- 2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Оптимального управления,
e-mail: mmpotapovrus@gmail.com

В работе рассматривается система операторных уравнений

$$\mathcal{A}u = f, \quad \mathcal{B}u = g \quad (1)$$

с заданными правыми частями $f \in F$, $g \in G$ и линейными ограниченными операторами $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(H \rightarrow G)$, действующими в гильбертовых пространствах H , F и G . Целью работы является численный поиск решения u_* системы (1), имеющего наименьшую норму. Предполагается, что это решение существует.

Также предполагается, что вместо точных данных $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, f , g вычислительно известны лишь некоторые приближения $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$, $\tilde{\mathcal{B}} \in \mathcal{L}(H \rightarrow G)$, $\tilde{f} \in F$, $\tilde{g} \in G$, делающие задачу некорректной. В работе предлагается численный метод поиска приближения к точному нормальному решению u_* , устойчивый к неравномерным возмущениям в операторе $\mathcal{A}$. Особенностью данной работы является разнородность априорной информации относительно приближённых данных: для второго уравнения она предполагается классической [1], в то время как для первого уравнения она берётся аналогичной [2]. Чтобы её сформулировать, рассмотрим функцию Лагранжа

$$L(u, \lambda) = \|u\|_H^2 + \langle \mathcal{A}u - f, \lambda \rangle_F, \quad u \in H, \quad \lambda \in F.$$

Предъявим следующие требования к точным данным задачи:

1. Линейное многообразие $\mathcal{AN}(\mathcal{B})$ является замкнутым в F .
2. Вычислительно известна оценка $r > 0$ нормы некоторой седловой точки (u_*, λ^*) функции $L(u, \lambda)$ на множестве $\{u \in H \mid \mathcal{B}u = g\} \times F$: $\|(u_*, \lambda^*)\|_{H \times F} < r$.

Отметим, что требование 1 является достаточным для существования седловой точки из предположения 2. Также на исходные данные задачи накладываются требования аппроксимации:

3. Для первого уравнения имеют место сходимости

$$\|\tilde{\mathcal{A}}u - \mathcal{A}u\|_F \rightarrow 0, \quad \forall u \in H, \quad \|\tilde{\mathcal{A}}^*v - \mathcal{A}^*v\|_H \rightarrow 0, \quad \forall v \in F, \quad \|\tilde{f} - f\|_F \rightarrow 0.$$

4. Для второго уравнения выполнены классические оценки погрешности

$$\|\tilde{\mathcal{B}} - \mathcal{B}\|_{\mathcal{L}(H \rightarrow G)} \leq h, \quad \|\tilde{g} - g\|_G \leq \sigma,$$

в которых уровни погрешностей h , σ известны и малы: $h, \sigma \rightarrow 0$.

В работе доказано, что при выполнении указанных выше предположений приближения, вырабатываемые методом, сильно сходится в H к точному решению u_* .

Литература

1. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Курс, 2017.
2. Дряженков А.А. О поиске седла функции Лагранжа при наличии априорных ограничений на норму множителя // Ломоносовские чтения. Научная конференция. 04–14 апреля 2023 г. : тезисы докладов. М.: МАКС Пресс, 2023. С. 187–189.

ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ НА ПЕРЕТЯГИВАНИЕ

Жуковский В.И.¹, Жуковская Л.В.²

- 1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Кафедра оптимального управления,
e-mail: zhkvlad@yandex.ru
- 2) ЦЭМИ РАН, Отделение моделирования производственных объектов и комплексов,
Лаборатория микроэкономического анализа и моделирования,
e-mail: zhukovskaylv@mail.ru

Рассматриваемая задача была впервые сформулирована и начато ее исследование ленинградским профессором Л.А. Петросяном в середине прошлого века [1]. Так, в указанной в задаче, к точке M , движущейся согласно векторному дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = u_1(x) + \dots + u_N(x), \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

приложена система сходящихся в точке M сил $\{u_i(x), i \in \mathbb{N} = 1, \dots, N\}$. Именно, каждый игрок $i \in \mathbb{N} = \{1, \dots, N\}$ выбирает свою стратегию $u_i(x)$ с целью возможно приблизить к себе точку M .

Полагается, что при построении решения задачи на перетягивание весьма полезно учитывать условие равновесия систем $\{u_i(x), i \in \mathbb{N}\}$, сводящееся к построению замкнутого силового многоугольника.

Литература

1. Петросян Л.А., Мурзов Н.В. Дифференциальная игра на перетягивание // Вестник Ленинградского университета. Серия I: математика, механика, астрономия (1967), № 1, с. 106–112.

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ DICE С ДВУМЯ АГЕНТАМИ

Орлов С.М.^{1,2}, Ровенская Е.А.^{3,4}

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления,
e-mail: sergey.orlov@cs.msu.ru

2) Austria, Laxenburg, IIASA, ASA

3) Austria, Laxenburg, IIASA, ASA, rovenska@iiasa.ac.at

4) МГУ, ВМК, кафедра оптимального управления

Модель DICE (Dynamic Integrated Climate-Economy) [1], разработанная Уильямом Нордхаусом, представляет собой модель комплексной оценки (integrated assessment model), которая описывает взаимодействие между экономической активностью и изменением климата. Она играет ключевую роль в оценке долгосрочных экономических последствий глобального потепления и разработке стратегии по снижению выбросов парниковых газов. Одним из существенных предположений экономического модуля модели является наличие единого представительного агента (representative agent), а именно домохозяйства, которое обладает капиталом и трудовыми ресурсами. При этом критика однородности домохозяйств в моделях, таких как DICE, часто поднимается в научных статьях, связанных с вопросами справедливости и дифференциации воздействия климатических изменений на различные социальные группы [2].

В данном докладе рассматривается модификация модели DICE, в которой учитывается неоднородность домохозяйств, а именно рассматриваются два агента – рикардские домохозяйства (capital-owning households), которые обладают и капиталом, и трудовыми ресурсами, и домохозяйства, зависящие от зарплат, (wage-dependent households) которые обладают только трудовыми ресурсами.

В работе проводится анализ различных сценариев модели с двумя агентами. Рассматриваются задачи оптимизации для рикардских домохозяйств, задачи оптимального управления для социального планировщика (social planner), учитывающего справедливость распределения потребления между домохозяйствами. Оказывается, что оптимальная стратегия рикардских домохозяйств влечёт к недостаточному уровню уменьшения эмиссий парниковых газов. Изучается вопрос внедрения дополнительных финансовых инструментов в форме трансферов между домохозяйствами и специальных соглашений между ними для достижения удовлетворительных уровней сокращения выбросов парниковых газов.

Исследования проведены при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Литература

1. W. Nordhaus Estimates of the social cost of carbon: concepts and results from the DICE-2013R model and alternative approaches // Journal of the Association of Environmental and Resource Economists, Vol .1, Issue 1/2, 2014, P. 273–312.
2. J. Emmerling, M. Tavoni Representing inequalities in integrated assessment modeling of climate change // One Earth, Vol. 4, Issue 2, 2021, P. 177–180.

ОБ УЧЕТЕ ОГРАНИЧЕНИЙ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ КОСМИЧЕСКИМ АППАРАТОМ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА АКАР

Шатков С.А.

*МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления,
e-mail: ShatkovSA@gmail.com*

В ограниченной круговой задаче трех тел существуют неподвижные точки, называемые точками либрации, в окрестности которых управляемый космический аппарат (КА) может находиться продолжительное время. Для системы «Солнце–Земля» особый интерес представляет точка L1, находящаяся на проходящей через их центры линии. Расположение между космическими телами позволяет рассматривать размещение КА для задач наблюдения как за освещенной стороной планеты, так и за небесным светилом. При практическом применении обычно рассматривают семейства неустойчивых гало-орбит около точки либрации. Движение в окрестности данных орбит обеспечивается маневрами коррекции.

В докладе рассмотрена вращающаяся относительно центра масс система координат, в которой Солнце и Земля неподвижны, а центром отсчета выбрана точка L1. Для описания движения выбрана управляемая динамическая модель движения центра масс КА во вращающейся системе координат под действием притяжения Солнца и Земли, неподвижных в данной системе координат. Помимо гравитационных сил в модели присутствуют силы инерции и Кориолиса. Масса КА пренебрежимо мала и не оказывает влияния на притягиваемые тела. Рассмотрена задача аналитического построения компонент вектора тяги в форме обратной связи от векторов положения и скорости КА, обеспечивающих его асимптотическое движение к целевой траектории и последующее движение вдоль нее. Целевая траектория представляет собой гало-орбиту третьего порядка вокруг точки либрации L1 [1], полученную с помощью метода Линшtedта—Пуанкаре. Для аналитического конструирования соответствующих управлений использован метод АКАР [2]. Построенные управления вектором тяги в форме обратной связи позволяют осуществить перелет при наличии ошибок при выведении КА в космическое пространство.

Важным свойством при решении практических задач является ограниченность вектора управления. Метод АКАР позволяет учитывать ограничения типа неравенства путем введения дополнительных переменных в исходную динамическую модель системы [3]. Аналогичным образом возможен учет ограничений на фазовые координаты.

Проведено моделирование перелета под действием построенных функций управления тягой в системе «Солнце–Земля» при помощи математического пакета Maple. Учитывающие ограничения законы управления могут быть использованы при построении опорной траектории перелета КА с двигателем «малой» тяги.

Литература

1. Richardson D. L. Analytical construction of periodic orbits about the collinear points of the Sun-Earth system // *Celestial Mechanics*. 1980. Vol. 22. P. 241-253.
2. Колесников А. А. Новые нелинейные методы управления полетом. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 196 с.
3. Колесников А. А. Синергетические методы управления сложными системами: теория системного синтеза. М.: Едиториал УРСС, 2019. 240 с.

О ПОСТРОЕНИИ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОСТИ ОДНОГО ОБЪЕКТА

Гончарова М.Н.¹, Самсонов С.П.²

1) Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, факультет математики и информатики, кафедра фундаментальной и прикладной математики, e-mail:

m.gonchar@grsu.by

2) Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра оптимального управления,

samsonov@cs.msu.su

Рассматривается объект, поведение которого описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка, линейной относительно фазовых переменных и линейной относительно переменных управления. Собственные значения матрицы, составленной из коэффициентов при фазовых переменных, имеют действительные собственные значения разных знаков. Допустимым управлением является векторная кусочно-непрерывная функции, принимающая значения из заданной области управления. В качестве области управления рассматривается четырехугольник с вершинами в разных четвертях плоскости, и имеющий начало координат в качестве внутренней точки. На поведение объекта накладывается фазовое ограничение, определяемое полуплоскостью.

Исследуется проблема построения множества управляемости [1] рассматриваемого объекта в некоторую точку, удовлетворяющую фазовому ограничению.

В фазовом пространстве выделено множество конечных состояний, для которых фазовое ограничение не оказывает влияния на построение множества управляемости. При этом длина интервала движения вычисляется в зависимости от координат конечной точки.

Литература

1. Киселев Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. М.: МАКС Пресс, 2007. – 272 с.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ РАЗНОСТИ МНОЖЕСТВ

Кулевский А.В.

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления,
e-mail: kulevskyav@cs.msu.su

Рассматривается комбинация операций линейного преобразования множества и геометрической разности множеств в R^n . Даны обоснование свойства, контрпример и использующий данную комбинацию фрагмент первого прямого метода Понтрягина.

1. Основные понятия и определения, постановка вопроса.

В пространстве R^n рассмотрим операции над множествами $X, Y \subset R^n$:

Сумма множеств $X + Y = \{z \in R^n: z = x + y, x \in X, y \in Y\}$,

Умножение множества на число $\lambda X = \{z \in R^n: z = \lambda x, x \in X, \lambda \in R\}$,

Линейное преобразование множества (умножение матрицы на множество)

$NX = \{z \in R^m: z = Nx, x \in X\}$, здесь $N_{m \times n}$ – заданная матрица,

Геометрическая разность множеств $X _ Y = \{z \in R^n: z + Y \subset X\}$.

Свойства первых трёх операций даны в [1], [2], последней – в [3], [4]. Найдем связь между множествами $N(X _ Y)$ и $NX _ NY$.

2. Свойство линейного преобразования геометрической разности множеств.

Для множеств $X, Y \subset R^n$, матрицы $N_{m \times n}$ и числа $\lambda \in R$ доказаны утверждения:

Лемма. Для любых $X, Y \subset R^n$ и любого $\lambda \neq 0$ верно $\lambda(X _ Y) = \lambda X _ \lambda Y$.

Замечание (к лемме). Для $\lambda = 0$ и $X _ Y \neq \emptyset$ утверждение леммы верно: $\{\emptyset\} = \{\emptyset\}$. При $\lambda = 0$ и $X _ Y = \emptyset$ равенство переходит во включение: $\emptyset \subset \{\emptyset\}$.

Теорема. 1) Для любых $X, Y \subset R^n$ и $N_{m \times n}$ справедливо включение $N(X _ Y) \subseteq NX _ NY$. 2) Для любых $X, Y \subset R^n$ и $N_{n \times n}$: $|N| \neq 0$ верно равенство $N(X _ Y) = NX _ NY$.

Замечание (к теореме). Теорема обобщает лемму при $N_{n \times n} = \lambda E_{n \times n}$ и $\lambda \neq 0$ в пункте 2).

Замечание к лемме укладывается в пункт 1) теоремы при $N_{n \times n} = \theta_{n \times n}$.

3. Характерный контрпример отсутствия равенства в свойстве.

Пусть $n = 2$, $m = 1$, $X = \{x \in R^2: |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$, $Y = \{y \in R^2: y_1^2 + y_2^2 \leq 1\}$, $N_{1 \times 2} = (1 \quad 1)$. При неквадратной $N_{1 \times 2}$ с учетом $X _ Y = \{\theta\} \subset R^2$ в теореме верен только пункт 1): $\{\theta\} = N(X _ Y) \subseteq NX _ NY = [-(2 - \sqrt{2}), 2 - \sqrt{2}]$.

4. В первом прямом методе Л.С. Понтрягина.

Метод решения линейных дифференциальных игр преследования-убегания требует непустоты специального множества $\hat{w}(r) = Ne^{rC}P _ Ne^{rC}Q$ при $r \in [0, T]$ для компактов $P, Q \subset R^n$ и матриц $C_{n \times n}$, $N_{m \times n}$, $m < n$, $\text{rg } N_{m \times n} = m$. Матрица $(Ne^{rC})_{m \times n}$ не квадратная, поэтому неверно считать $\hat{w}(r) = Ne^{rC}(P _ Q)$.

Литература

1. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление (линейная теория) //М.: Высш. шк., 2001.
2. Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения //М.: МАКС Пресс, 2007.
3. Кулевский А.В. Об одном свойстве геометрической разности множеств. Современная математика и концепции инновационного математического образования. Труды XI Международной научно-практической конференции //М.: Издательский дом МФО, 2024, с. 76–80.
4. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх //М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ В ДИНАМИКЕ КВАДРОКОПТЕРА

Горьков В.П.¹, Григоренко Н.Л.²

- 1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, лаборатория обратных задач, e-mail: v-p-gorkov@yandex.ru
- 2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления, e-mail: grigor@cs.msu.ru

Задачи управления беспилотными летательными аппаратами рассматриваются в литературе для математических моделей с различными вариантами фазовых переменных и управляющих параметров, для различных классов управлений [1-3]. В докладе излагается вывод модели динамики квадрокоптера с управляющими параметрами - частотами вращения роторов моторов и рассмотрен ряд задач терминального управления. Обсуждаются задачи терминального управления с фиксированной или движущейся целевой точкой, задача выхода части координат фазового вектора на заданную гладкую кривую и последующее движение по этой кривой, задача сближения двух динамических, управляемых систем в классе контруправлений [4-6]. В задаче об управлении движением по заданной траектории в трехмерном пространстве, желательная траектория задается как пересечение двух гладких поверхностей. Приводится алгоритм конструирования управления, решающего такую задачу управления, включающий этап конструирования динамической системы с аттрактором в виде пересечения двух заданных поверхностей [7], этап конструирования управления методом структурного синтеза [8]. Выбор параметров системы с аттрактором в виде пересечения двух поверхностей позволяет осуществить движение фазового вектора по трехмерной траектории в заданном направлении и с заданной скоростью. Приведены результаты численного моделирования.

Литература

1. Белинская Ю.С., Четвериков В.Н. Управление четырехвинтовым вертолетом. DOI: 10.7463/0512.0397373.
2. Канатников А.Н. Моделирование процессов управления вращением твердого тела //Нелинейная динамика и управление. Вып.7, с.335-348. М.: Физматлит,2010.
3. Каплунова Е.П., Точилин П.А. Задача целевого управления квадрокоптером при движении в горизонтальной плоскости с огибанием препятствий. Вестн. Моск. Ун-та. Сер.15. 2021, N 4.
4. Понтрягин Л.С. Линейная дифференциальная игра убегания. Труды МИ АН СССР. Том 112.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М. Наука.1974.
6. Избранные труды Ю.С.Осипова. Из-во МГУ,2009.
7. Игнатьев М.Б. Голономные автоматические системы. Изд-во АН СССР.1963.
8. Колесников А.А. Синергетические методы управления сложными системами. Теория системного синтеза. М.: книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2019.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МОРО-БЕРТСЕКАСА И ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ СУПЕРХЕДЖИРОВАНИЯ

Сафонова Е.С.¹, Смирнов С.Н.²

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра системного анализа,
e-mail: lisa091100@gmail.com

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра системного анализа,
e-mail: s.n.smirnov@gmail.com

В работе [1] предложена математическая модель финансового рынка с дискретным временем и неопределенной детерминистской эволюцией цен, учитывающая торговые ограничения на транзакции. Динамика цен задается на каждом временном шаге при помощи компактозначного отображения, аргументом которого служит предыстория дисконтированных цен, а компакты (значения этого отображения) описывают возможные значения вектора приращений цен. Многозначным отображением с аналогичным аргументом задаются и торговые ограничения.

В рамках этой модели изучается одна из важнейших задач математических финансов — проблема суперхеджирования, на основе гарантированного детерминистского подхода. Определение цены суперхеджирования — целевой функции в соответствующей задаче динамического программирования — приводит к уравнениям Беллмана-Айзекса, имеющим теоретико-игровую интерпретацию. При весьма общих предположениях имеет место игровое равновесие на каждом шаге, что позволяет отделить задачу ценообразования от задачи хеджирования.

Задача ценообразования, при естественных с экономической точки зрения предположениях безарбитражности, сводится к уравнениям Беллмана, а для их решения требуется построение на каждом шаге вогнутой оболочки функций. Полученная таким способом приближенная целевая функция типично будет негладкой, а для решения задачи хеджирования придется находить субградиент. Приближенное решение задачи хеджирования может быть неединственным, но самое неприятное — оно может меняться скачком при малых изменениях данных, что является крайне нежелательным на практике, поскольку модель не учитывает транзакционные издержки, а в реальности они всегда имеются, и вычислительный артефакт может вызвать финансовые потери.

Таким образом, для обеспечения устойчивости расчета и единственности приближенной хеджирующей стратегии необходимо производить некоторую регуляризацию. Для этих целей предлагается использование сглаживающего преобразования Моро-Бертсекаса. В настоящей работе найдены оценки точности аппроксимации при преобразовании Моро-Бертсекаса для функции, удовлетворяющей условию Липшица, что, в сумме с ранее полученными оценками погрешности приближенного решения задачи ценообразования, позволяет оценить совокупную точность решения задачи ценообразования.

Литература

1. Смирнов С.Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: модель рынка, торговые ограничения и уравнения Беллмана-Айзекса // Математическая теория игр и ее приложения (2018) 10, №4, с.59–99.

ГИПОТЕЗА РАМСЕЯ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ ЛИКВИДНОСТИ КАПИТАЛА

Парастаев Г.С.

*МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра системного анализа, e-mail:
parastaew1996@yandex.ru*

Настоящая работа посвящена исследованию гипотезы Рамсея о социальной стратификации для популяции домашних хозяйств в случае, когда ликвидность капитала ограничена. Гипотеза Рамсея [1] утверждает, что богатство в популяции экономических агентов концентрируется у наиболее бережливых агентов, дисконтирующих потребительские расходы с наименьшим коэффициентом дисконтирования. В данной работе поведение домашних хозяйств описывается моделью рационального репрезентативного потребителя рамсеевского типа, в которой изменение капитала агента складывается из получения процента с накопленного капитала, заработной платы и потребительских расходов. Последние, в свою очередь, определяются долей активов, часть которых может быть реализована. Для соответствующей задачи оптимального управления, в которой агент максимизирует дисконтированное потребление указанной структуры, построено решение в форме синтеза, используемое в модели социальной динамики для популяции домашних хозяйств. В соответствии с гипотезой относительного дохода Дж. Дьюзенберри [2] коэффициенты дисконтирования зависят от распределения капитала между агентами. Для популяции домашних хозяйств доказана теорема, обосновывающая справедливость гипотезы Рамсея.

Работа выполнена при поддержке РФФ (грант 24-11-00329).

Литература

1. Ramsey F.P. A Mathematical Theory of Saving //Econ. J. – 1928. – V. 38, № 152, P. 543–559.
2. Duesenberry J.S. Income, Saving and the Theory of Consumer Behavior //Cambridge: Harvard University Press – 1949.

О МОДИФИКАЦИИ ПРОЦЕДУРЫ ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С УПРАВЛЯЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Мельникова А.А.

МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра системного анализа, e-mail:
nastya.a.melnikova@gmail.com

Доклад посвящен задаче гарантированного попадания на целевое множество для линейной системы дифференциальных уравнений с управляющими параметрами и неопределенностью, на которые наложены геометрические поточечные выпуклые ограничения [1], [2], из заданного начального положения. Задача рассматривается на конечном отрезке времени. Среди известных подходов к решению поставленной проблемы можно выделить построение альтернированного интеграла Понтрягина [3], а также нахождение функции цены как обобщенного решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса [4]. Предложен альтернативный метод получения множества разрешимости в общем случае, для которого не требуется овыпукление разности опорных функций множеств, возникающих при построении интеграла Понтрягина. Ранее в работе [5] этот метод был проиллюстрирован на примере частного случая линейной системы дифференциальных уравнений с неопределенностью.

Система задается уравнением

$$\dot{x}(t) = B(t)u(t) + C(t)v(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [t_0, t_1],$$

где управление и помеха $u(t) \in P(t)$, $v(t) \in Q(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — непрерывные матричные коэффициенты, целевое множество M — непустое выпуклое компактное множество в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Для рассматриваемой системы с учетом ограничений конструируется множество разрешимости $\hat{W}[t]$ с заменой множества, определяемого помехой Q на некоторое множество $\hat{Q}$ таким образом, что для вычисления опорной функции возникающей на каждом шаге операции геометрической разности в многозначном интеграле не требуется овыпукление разности опорных функций соответствующих множеств. Доказывается равенство $\hat{W}[t] = W[t]$.

Литература

1. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх II //ДАН СССР (1967) 175, №4, с. 234–248.
2. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования //Математический сборник (1980) 112, №3, с. 307-330.
3. Куржанский А.Б. Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений //Труды МИАН (1999) 224, с. 234–248.
4. Fleming W.H., Soner H.M. Controlled Markov processes and viscosity solutions //Springer-Verlag. New York. – 1993.
5. Мельникова А.А., Точилин П.А. Об одной задаче вычисления множества разрешимости для линейной системы с неопределенностью //Дифференциальные уравнения (2023) 59, №11, с. 1533-1540.

ОБ АЛГОРИТМЕ ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Паршиков М.В.¹, Точилин П.А.²

1) МГУ им. М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра системного анализа, e-mail:
miron232734@gmail.com

2) МГУ им. М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра системного анализа, e-mail:
tochilin@cs.msu.ru

Данная работа посвящена нахождению субоптимального решения задачи управления о переводе объекта с линейной динамикой из точки во множество с заданным интегральным функционалом качества и при наличии ограничений на часть фазовых переменных, а также жёстких поточечных ограничениях на управляющие параметры.

Для вычисления искомого решения предлагается модификация алгоритма, ранее разработанного авторами [1], для задачи с ограничениями по всем компонентам фазового вектора. В нём с помощью методов “быстро растущих случайных деревьев” (RRT*) [2] и эллипсоидального исчисления [3] в фазовом пространстве итеративно строится дерево, в котором вершины (позиции объекта) генерируются случайно, а ветвями являются оптимальные траектории для задачи о переводе объекта из точки в точку.

Для поставленной в данной работе задачи в базовый алгоритм вносятся следующие основные изменения: фазовые переменные разделяются на «ограниченные» и «свободные»; случайные значения придаются только «ограниченным» переменным, а «свободные» уточняются после построения очередной оптимальной траектории, которая в данном случае получается как решение задачи о переводе объекта из точки во множество. Как и в базовом алгоритме, эта локальная задача решается с помощью метода «прицеливания» на эллипсоидальную трубку, построенную из очередной случайной точки с изменениями, касающимися «свободных» переменных.

Такой подход позволил сократить время вычисления субоптимального решения и увеличить его точность и может быть использован для широкого класса кино-динамических задач.

Литература

1. Точилин П.А., Паршиков М.В. Об использовании методов эллипсоидального оценивания в алгоритме поиска субоптимальных путей RRT* // Автоматика и телемеханика, №2, 2024, С.60–80.
2. Karaman S., Frazzoli E. Sampling-based algorithms for optimal motion planning // The international Journal of Robotics Research Princeton Univ, V. 30, I. 7, 2011, p. 846 – 894.
3. Kurzhanski A.B., Varaiya P. On ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part II: internal approximations, box-valued constraints // Optimization Methods and Software, V. 17, 2002, p. 207 – 237.

О ВОПРОСЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ БИЛИНЕЙНОГО АЛГОРИТМА СЛОЖНОСТИ 17 ДЛЯ ПЕРЕМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ РАЗМЕРОВ 5×2 И 2×2

Алексеев В.Б.¹, Назаров А.А.²

- 1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической кибернетики,
e-mail: vbalekseev@rambler.ru
- 2) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической кибернетики,
e-mail: nazarovandry2@mail.ru

Стандартный алгоритм умножения матриц порядка n требует порядка n^3 арифметических операций. В 1969 г. В. Штрассен [1] предложил алгоритм с числом операций $O(n^{\log_2 7})$. К 1986 г. сложность была понижена до $O(n^{2.38})$, после чего значительных улучшений не было. Алгоритм Штрассена основан на найденном им способе умножения матриц порядка 2 с использованием только 7 умножений и без использования коммутативности элементов матриц, что позволяет применять рекурсию.

Минимальное число умножений элементов, которое необходимо выполнить для вычисления произведения матрицы размера $m \times n$ на матрицу размера $n \times p$ без использования коммутативности элементов матриц, называется билинейной сложностью задачи $\langle m, n, p \rangle$. Известно, что эта билинейная сложность не изменяется при любых перестановках m , n и p . Точное значение билинейной сложности задачи $\langle m, n, p \rangle$ известно пока только, если один из параметров равен 1, а также для задач $\langle 2, 2, 2 \rangle$, $\langle 2, 2, 3 \rangle$, $\langle 2, 2, 4 \rangle$ и $\langle 2, 3, 3 \rangle$ [2,3]. Мы исследуем задачу $\langle 2, 2, 5 \rangle$. Известно, что ее билинейная сложность равна 17 или 18 [4]. Пусть M – пространство матриц размера 4×10 , разбитых на 4 блока размера 2×5 , а L – его 10-мерное подпространство, состоящее из всех матриц, в которых левый нижний и правый верхний блоки нулевые, а оставшиеся 2 блока одинаковые. Можно показать, что вопрос о существовании для задачи $\langle 2, 2, 5 \rangle$ билинейного алгоритма сложности 17 равносильен следующему вопросу: существуют ли 17 матриц размера 4×10 ранга 1, линейная оболочка которых содержит L ? Предположим, что матрицы $X_1, \dots, X_{17}$ – решение этой задачи. Пусть их блоки в правом верхнем углу порождают линейное подпространство размерности d в пространстве матриц размера 2×5 . Доказано следующее утверждение.

Теорема. Не существует билинейного алгоритма сложности 17 для задачи $\langle 2, 2, 5 \rangle$, для которого $d \leq 4$ или $d \geq 8$.

Остается исследовать случаи $d = 5, 6, 7$. Случай $d = 5$ исследован частично.

Литература

1. Штрассен В. Алгоритм Гаусса не оптимален //Кибернетический сборник. Т. 7. М.: Мир. – 1970. – С.67-70.
2. Алексеев В.Б., Смирнов А.В. О точной и приближенной билинейных сложностях умножения матриц размеров 4×2 и 2×2 //Современные проблемы математики (2013) 17, с.6–23.
3. Буриченко В.П. О билинейной сложности умножения 3×2 матрицы на 2×3 матрицу //Дискретная математика (2024) 36, вып. 1, с.15–45.
4. Алексеев В.Б. О билинейной сложности умножения матриц размеров 5×2 и 2×2 //Ученые записки Казанского государственного университета. Серия: физ.-матем. науки (2014) 156, кн. 3, с.19–29.

О РАСПОЗНАВАНИИ СВОЙСТВ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ФОРМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА СТЕПЕНЬ СЛАГАЕМЫХ

Бухман А.В.

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра исследования операций, e-mail:
antvbx@gmail.com

В данной работе рассмотрим задачу распознавания свойств булевых функций, заданных полиномами Жегалкина. *Полином Жегалкина* – сумма по модулю два мономов. *Моном* – это либо 1, либо произведение конечного числа различных переменных. В настоящий момент имеется ряд работ связанных с построением эффективных алгоритмов для распознавания некоторых свойств булевых функций по полиномам [1]. В данной работе рассмотрим свойство функции сохранять двухместный предикат, который обращается в единицу на наборах (0,1), (1,0), (1,1). Это свойство связано с классом Поста O^2 . В настоящей работе будет рассмотрен вопрос, как можно получить верхнюю оценку на сложность распознавания данного свойства при условии, что нам дано ограничение на степень. Такого рода ограничения и построение алгоритмов для них рассматривались, например, в работе [2].

Пусть задан полином Жегалкина $P_f(x_1, \dots, x_n)$ функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Введём дополнительные переменные $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$. Проведём замену переменных, положим $x_i = v_i u_i \oplus u_i \oplus 1$, и подставим в полином, тогда после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых мы получим новый полином $P_1(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$, количество слагаемых в котором будет ограничено сверху числом $3^s l$, где s – степень полинома $P_f(x_1, \dots, x_n)$, а l – его длина. Далее рассмотрим выражение:

$$P_1(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n) P_f(x_1, \dots, x_n) \oplus P_1(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n) \oplus P_f(x_1, \dots, x_n) \oplus 1 \quad (1)$$

Утверждение. Если в выражении (1) раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то полученный полином Жегалкина будет равен тождественно 0, тогда и только тогда, когда функция f принадлежит классу O^2 .

Предположим, что s – фиксированная константа. Заметим, что полином, полученный из выражения (1) путём раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых, будет иметь не более, чем $L = 3^s l^2 + 3^s l + l + 1$ слагаемых. Это замечание даёт нам возможность строить эффективные алгоритмы при условии, что даны ограничения на степень полиномов. Проверка на равенство 0 полинома требует $O(l^2)$ действий, где $L = ln$.

Лемма. Пусть задано число s . Для полиномов степени не выше s существует полиномиальный алгоритм для проверки принадлежности функции, заданной таким полиномом, классу O^2 .

Литература

1. Селезнева С.Н. О сложности распознавания полноты множества булевых функций, реализованных полиномами Жегалкина // Дискретная математика. – 1997. – Т. 4, вып. 9. – С. 34–41.
2. Селезнева С.Н. О сложности поиска периодов функций, заданных многочленами над конечным простым полем // Дискретный анализ и исследование операций. – 2022. Т. 29, вып. 1. – С. 56–73.

**О РАЗВИТИИ ИССЛЕДОВАНИЙ В ОБЛАСТИ ОПТИМИЗАЦИИ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ РЫНКОВ**

Васин А.А.

*МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра исследования операций, e-mail:
vasin@cs.msu.su*

В настоящее время во многих странах мира происходит обновление энергетических систем, связанное с внедрением возобновляемых источников (ВИЭ) и накопителей энергии, а также с модификацией энергетических сетей, исходя из изменений структуры мощностей и спроса на энергию. Соответствующие математические модели предлагаются и исследуются в научной литературе (см. [1-3] и др.). Цель данного доклада - представить краткий обзор полученных автором и его сотрудниками результатов ([4-5] и др.) и обсудить перспективные направления развития исследований в данной области.

Нами разработаны математические модели для расчета оптимальных объемов внедрения накопителей разных типов, а также оптимального расширения энергетических сетей, исходя из заданной структуры мощностей и спроса на электроэнергию. Описана и исследована двухуровневая модель рынка. Первый уровень предназначен для анализа краткосрочных задач принятия решений агентами, действующими на рынке. Задачи выбора оптимальных стратегий и расчета конкурентного равновесия рассматриваются для суточного интервала планирования. Выводится система соотношений, позволяющая рассчитать оптимальные стратегии агентов и состояние конкурентного равновесия в зависимости от параметров инфраструктуры рынка. Для расчета оптимальных параметров предлагается модель экономического равновесия второго уровня. Она описывает долгосрочное функционирование рынка. Параметры накопителей и пропускные способности линий передачи энергии выбираются, исходя из максимизации средних значений прибылей соответствующих экономических агентов с учетом затрат на строительство и ожидаемых эксплуатации объектов инфраструктуры. Новые задачи связаны с учетом потерь при хранении энергии в накопителях и динамики цен в течение указанных сроков.

Литература

1. Васьковская Т.А., Клюс Б.А. Проектирование рынка электроэнергии с накопителями энергии //Электричество, 2020, № 12, с. 31-43
2. Nadeem F., Suhail Hussain S. M., Kumar Tiwari P., Kumar Goswami A., Selim Ustun T. Comparative review of energy storage systems, their roles, and impacts on future power systems // IEEE Access. 2018. 7. P. 4555–4585.
3. Shen Y., Hu W., Liu M., Yang F., Kong X. Energy storage optimization method for microgrid considering multi-energy coupling demand response // J. Energy Storage. 2022. 45.
4. Васин А. А., Григорьева О. М., Шендяпин А. С. Новые инструменты и задачи регулирования рынка электроэнергии // Известия РАН. ТиСУ. 2021. Т. 3, с. 85–97.
5. Васин А.А., Григорьева О.М., Серегина И.Ю. Оптимизация параметров накопителей для потребителей на рынке электроэнергии //Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2023, № 1, с. 21-27.

АНАЛИЗ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЯХ

Давидсон М.Р.¹, Павленко Д.Ю.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра исследования операций, e-mail: mikhail.davidson@gmail.com

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра исследования операций, e-mail: d333.pav@gmail.com

О д н о й из основных задач электроэнергетики является задача оптимального потокораспределения в электрических сетях [1]. Задача заключается в определении оптимальных параметров генерации мощности для удовлетворения заданного потребления с учетом топологии сети, физических ограничений генераторов и линий электропередач. Это нелинейная задача большой размерности, поэтому её решение может занимать большое количество времени. Сложность заключается в нелинейной зависимости переменных инъекций мощности от переменных углов и абсолютных величин напряжений в узлах. В данной работе предлагается уменьшить размерность задачи перерасчета оптимума в случае локального изменения ограничений, приближенно выразив эти переменные с помощью теоремы о неявной функции.

Ц е л ь ю исследования является разработка, реализация и анализ применения метода последовательного квадратичного программирования [2] для решения задачи в случае локального изменения потребления мощности. Метод заключается в решении последовательности задач квадратичного программирования, которые являются приближениями исходной нелинейной задачи. Для уменьшения времени вычислений предлагается учет в гесссиане функции Лагранжа, который используется в методе, только ограничения на баланс активной мощности. Тогда, поскольку минимизируемая в исходной задаче функция линейна, целевая функция подзадачи на шаге k имеет вид:

$$f(g^k) + \langle \nabla f(g^k), \Delta g \rangle + \frac{1}{2} \lambda^k \langle \nabla^2 L_P(g^k) \Delta g, \Delta g \rangle \rightarrow \min_{\Delta g}, \quad (1)$$

где f – целевая функция исходной задачи, g^k – полученные на предыдущей итерации значения генерации мощности в узлах, L_P – ограничение баланса активной мощности (P), λ^k – соответствующий этому ограничению множитель Лагранжа, полученный на предыдущей итерации. Ограничениями подзадачи являются линеаризованные в полученной на предыдущем шаге точке ограничения исходной задачи.

В результате данного исследования реализована программа в стандартной среде разработки MATLAB. На этой программе протестирована скорость сходимости алгоритма в зависимости от различного изменения потребления мощности в узлах сети. Также продемонстрирована более быстрая скорость сходимости в сравнении с методом последовательного линейного программирования [3] и показано уменьшение времени работы в сравнении с полным перерасчетом оптимального режима средствами стандартной утилиты из пакета MATPOWER.

Литература

1. Hogan W.W. Contract networks for electric power transmission. //Journal of Regulatory Economics. – 1992. – V.4
2. Nocedal J., Wright S. Numerical Optimization //Springer Science & Business Media. – 2006.
3. Palacios-Gomez F., Lasdon L., Engquist M. Nonlinear Optimization by Successive Linear Programming. //Management Science. INFORMS. – 1982.

СРАВНИТЕЛЬНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ НЬЮТОНОВСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ ПОИСКА ОБОБЩЕННОГО РАВНОВЕСИЯ НЭША

Янь Чжибай

*МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Исследования операций,
email: yanzhibai@cs.msu.ru*

Обобщенная задача о равновесии Нэша (GNEP) [1] представляет собой важный класс равновесных задач, где каждый игрок минимизирует свою целевую функцию с учетом выбора других игроков. Отличительная особенность GNEP заключается в том, что не только целевые функции, но и множества допустимых стратегий игроков зависят от стратегий других игроков, что значительно усложняет задачу по сравнению с классической задачей о равновесии Нэша.

В данной работе рассмотрен глобализованный кусочный метод Левенберга-Марквардта (PWLM), предложенный в [2, 3], применяемый к "min"-переформулировкам систем оптимальности для GNEP. PWLM решает уравнения с кусочно-гладкими отображениями и с дополнительными ограничениями. Для глобализации сходимости используется одномерный поиск. В основе подхода лежит решение совокупности систем Каруша-Куна-Таккера (KKT), дающих условия первого порядка оптимальности для каждого игрока в GNEP.

Для численного сравнения эффективности методов использован тестовый набор из [4]. Метод PWLM был сравнен с существующими альтернативами, включая PWLPN (глобализованный метод LP-Ньютона из [5, 6]) и методы LM-Had и LPN-Had, которые являются глобализованными методами Левенберга-Марквардта и LP-Ньютона, применяемыми к гладкой переформулировке. Эксперименты показали, что робастность метода PWLM несколько ниже, чем у метода LP-Ньютона, но она явно выше, чем у метода LM-Had. При этом по эффективности PWLM значительно превосходит все альтернативные методы.

Литература

1. Facchinei F., Kanzow C. Generalized Nash equilibrium problems // Ann. Oper. Res. 2010. V. 175. P. 177–211.
2. Izmailov A.F., Uskov E.I., Yan Zhibai. The piecewise Levenberg–Marquardt method // Adv. Syst. Sci. Appl. 2024. V. 24. P. 29–39.
3. Izmailov A.F., Uskov E.I., Yan Zhibai. Globalization of convergence of the constrained piecewise Levenberg–Marquardt method // Optim. Meth. Software. 2024. <https://doi.org/10.1080/10556788.2024.2400468>
4. Dreves A., Facchinei F., Kanzow C. Sagratella S. On the solution of the KKT conditions of generalized Nash equilibrium problems // SIAM J. Optim. 2011. V. 21. P. 1082–1108.
5. Facchinei F., Fischer A., Herrich M. An LP-Newton method: Nonsmooth equations, KKT systems, and nonisolated solutions // Math. Program. 2014. V. 146. P. 1–36.
6. Fischer A., Herrich M., Izmailov A. F. Solodov M.V. A globally convergent LP-Newton method // SIAM J. Optim. 2016. V. 26. P. 2012–2033.

ПОСТРОЕНИЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ДЕЛЕЖА ЯДРА ВПОЛНЕ СБАЛАНСИРОВАННОЙ КООПЕРАТИВНОЙ ИГРЫ

Морозов В.В.¹, Романов С.И.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра исследования операций,
e-mail: vmorosov@mail.ru

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра исследования операций,
e-mail: kynuola@mail.ru

Пусть $\Gamma = \langle N, v \rangle$ – кооперативная игра, где $N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков, $v: 2^N \rightarrow R$ – характеристическая функция, принимающая целые значения. Без потери общности будем считать, что $v(i) = 0$, $i \in N$. Игра Γ сбалансирована, если ее ядро $C = \{x \in R^n | x(S) = \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), S \subset N, x(N) = v(N)\}$ не пусто. Игра Γ вполне сбалансирована, если каждая ее подыгра $\Gamma_S = \langle S, v|_S \rangle$, $S \subset N$ сбалансирована. В [1] для некоторых классов вполне сбалансированных игр (трех и четырех лиц, симметрических игр, задача о назначении) указаны способы построения целочисленного дележа из ядра. В докладе будут сформулированы достаточные условия существования указанного дележа, в том числе и в игре пяти лиц.

Пусть x^0 – крайняя точка множества оптимальных решений задачи $x(N) = \sum_{i \in N} x_i \rightarrow \min$ при ограничениях $x(S) \geq v(S)$, $S \subset N$. (1)

Определим вектор $z = (\{x_i^0\}, i = \overline{1, n})$, состоящий из дробных частей компонент вектора x^0 .

Утверждение. Пусть в сбалансированной игре Γ для некоторой коалиции $T \subset N$ справедливы неравенства $t - 1 < z(N) \leq t$, $t = n - |T|$. Помимо этого выполнено одно из следующих двух условий:

1) $z(T) < 1$. При этом если $z_i = 0$, то $i \in T$.

2) $z(T) = 1$ и $x^0(T) \geq v(T) + 1$. При этом $z_i > 0$ для всех $i \in N$.

Тогда ядро игры Γ содержит целочисленный дележ.

Доказательство этого утверждения конструктивно: сначала определяется вектор d : $d_i = -z_i$, $i \in T$, $d_i = 1 - z_i$, $i \notin T$, а затем доказывается, что целочисленный вектор $x^0 + d$ удовлетворяет ограничениям задачи (1) и неравенству $x^0(N) + d(N) \leq v(N)$.

Следствие. Пусть в сбалансированной игре Γ пяти лиц для некоторой трехэлементной коалиции S выполнено неравенство $z(S) < 1$. Тогда ядро игры Γ содержит целочисленный дележ.

Теорема. Любая вполне сбалансированная игра пяти лиц с целыми значениями характеристической функции содержит в ядре целочисленный дележ за исключением случая, когда для некоторой четырехэлементной коалиции T вектор $z = \frac{1}{2} \mathbf{1}_T$.

Отметим, что утверждение теоремы верно, если $x^0(N) < v(N)$.

Пример. Рассмотрим игру Γ пяти лиц, в которой $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$v(N) = v(\{1, 2, 3, 4\}) = 6$, $v(S) = 4$, $|S| = 4$, $S \neq \{1, 2, 3, 4\}$, $v(S) = 3$, $|S| = 3$,

$v(\{i, j\}) = 2$, $i, j \leq 4$, $v(\{i, 5\}) = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Здесь игра Γ вполне сбалансирована и ее ядро состоит из единственного дележа $x^0 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$. Для коалиции $T = \{1, 2, 3, 4\}$ выполнено равенство $z = \frac{1}{2} \mathbf{1}_T$.

Литература

1. Морозов В.В., Романов С.И. Задача об оптимальном назначении как кооперативная игра // Прикладная математика и информатика. Труды факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. М.: МАКС-Пресс (2023) № 74, с. 19–26.

МОДЕЛЬ ЗАЩИТЫ ОБЪЕКТОВ СРЕДСТВАМИ ОБНАРУЖЕНИЯ И ПОРАЖЕНИЯ

Морозов В.В.¹, Галеев Д.О.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИО, e-mail: vmorosov@mail.ru

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИО, e-mail:

denis.galeev.01@mail.ru

Имеется n пунктов возможного прорыва средств нападения через средства защиты. Нападение использует смешанную стратегию $x \in X = \{x \in R_+^n | \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$, состоящую в нанесении удара по i -му пункту с вероятностью x_i . Защита имеет средства поражения в количестве B и средства обнаружения в количестве D , распределяемые по пунктам в соответствии с векторами $y = (y_i, i = \overline{1, n})$ и $z = (z_i, i = \overline{1, n})$, где

$$y \in Y = \{y \in R_+^n | \sum_{i=1}^n y_i = B\}, z \in Z = \{z \in R_+^n | \sum_{i=1}^n z_i = D\}.$$

На i -м пункте удар нападения защита обнаруживает с вероятностью $1 - e^{-\gamma_i z_i}$, $\gamma_i > 0$, а затем предотвращает его с вероятностью $1 - e^{-\alpha_i y_i}$, $\alpha_i > 0$. Нападение прорывается с вероятностью $f_i(y_i, z_i) = 1 - (1 - e^{-\alpha_i y_i})(1 - e^{-\gamma_i z_i})$ и наносит защите ущерб величины $\beta_i > 0$. Оно стремится увеличить средний ущерб $F(x, y, z) = \sum_{i=1}^n x_i \beta_i f_i(y_i, z_i)$. Тем самым определена антагонистическая игра $\Gamma = (X, Y \times Z, F(x, y, z))$.

В [1] игра Γ изучалась без использования защиты средств обнаружения. Рассмотрим метод ее решения. Функция $F(x, y, z)$ линейна по x и выпукла по каждой переменной y и z (но не по совокупности переменных (y, z)). Доказано существование седловой точки (x^0, y^0, z^0) функции F на произведении множеств X и $Y \times Z$. Укажем способ ее построения. Без потери общности предположим, что $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_n$. Минимаксная стратегия защиты (y^0, z^0) находится путем минимизации функции $\max_{1 \leq i \leq n} \beta_i f_i(y_i, z_i)$ на множестве $Y \times Z$. Согласно принципу уравнивания Гермейера найдется число $k \in \{1, \dots, n\}$, для которого $\beta_i f_i(y_i^0, z_i^0) = c > \beta_{k+1} f_{k+1}(0, 0)$, $i = \overline{1, k}$. Отсюда, полагая $u_i = e^{\alpha_i y_i^0}$, $v_i = e^{\gamma_i z_i^0}$, $i = \overline{1, k}$, получим уравнения

$$(\beta_i - c)u_i v_i = \beta_i(u_i - 1)(v_i - 1), i = \overline{1, k}. \quad (1)$$

Стратегию нападения x^0 будем искать в виде $x^0 = (x_1^0, \dots, x_k^0, 0, \dots, 0)$. Стратегия (y^0, z^0) минимизирует $F(x^0, y, z)$ на $Y \times Z$. По лемме Гиббса найдутся числа λ и μ , что

$$x_i^0 \beta_i = \lambda u_i v_i, x_i^0 \beta_i \gamma_i (u_i - 1) = \mu u_i v_i \Rightarrow \gamma_i (u_i - 1) = h \alpha_i (v_i - 1), h = \frac{\mu}{\lambda}, i = \overline{1, k}.$$

Отсюда и из (1) имеем u_i, v_i как функции переменных c и h : $v_i(c, h)$ – больший корень уравнения

$$v_i^2 - \left(\frac{\beta_i}{c} + 1 + \frac{(\beta_i - c)\gamma_i}{ch\alpha_i}\right)v_i + \frac{\beta_i}{c} = 0, u_i(c, h) = 1 + \frac{h\alpha_i}{\gamma_i}(v_i(c, h) - 1).$$

Константы c и h находятся из системы

$$B = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\alpha_i} \ln u_i(c, h), D = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\gamma_i} \ln v_i(c, h). \quad (2)$$

Решение системы (2) единственно.

Пример. Положим $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Пусть $n = 3, B = D = 4, \alpha = (1, 2, 1.5), \beta = (5, 6, 10), \gamma = (2, 1, 1.5)$. Оптимальные стратегии нападения и защиты $x^0 = (0.35, 0.35, 0.3), y^0 = (1.36, 1.07, 1.57), z^0 = (0.93, 1.53, 1.54)$. Значение игры $v = 0.17$.

Литература

1. Данскин Дж. М. Теория максимина // М.: Советское радио – 1970.

МОДЕЛЬ ARIMA-GARCH В ПРОГНОЗИРОВАНИИ БАЗОВОГО АКТИВА НА ОСНОВЕ РЫНОЧНЫХ ЦЕН ОПЦИОНОВ

Арбузов П.А.¹, Голембиовский Д.Ю.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра исследования операций, e-mail: arbuzov.parb@gmail.com

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра исследования операций, e-mail: dgolembiovskiy@yandex.ru

Работа посвящена исследованию возможности прогнозирования цен активов с помощью модели временных рядов ARIMA-GARCH, откалиброванной на рыночных ценах опционных контрактов на эти активы. Рыночные цены опционов отражают ожидания участников торгов о будущей динамике базового актива, что позволяет использовать их для прогнозирования цен этого актива.

В работе рассматривается применение модели временных рядов ARIMA-GARCH – комбинации моделей ARIMA – интегрированной модели авторегрессии и скользящего среднего, которая часто применяется в моделировании многих дискретных случайных процессов; и GARCH – модели обобщенной авторегрессионной условной гетероскедастичности, которая позволяет моделировать эффект кластеризации волатильности, нередко наблюдаемый на финансовых рынках [1].

В работе показано, как откалибровать модель ARIMA-GARCH доходностей базового актива на основе цен опционов в риск-нейтральной вероятностной мере с помощью метода проекции стохастической аппроксимации градиента [2]; как совершить переход от риск-нейтральной меры к физической мере в предположении, что агент имеет степенную функцию полезности. Также в работе представлено проведенное на исторических данных статистическое исследование точности прогнозируемых распределений будущих цен базового актива для различных значений чувствительности агента к риску.

Литература

1. Grachev Oleg Y. Application of Time Series Models (ARIMA, GARCH, and ARMA-GARCH) for Stock Market Forecasting — Honors Capstones — 2017 — 177.
2. Методы стохастического программирования. Ю. М. Юрмольев — 1976 — Издательство «Наука».

О СЕГМЕНТАЦИИ СКАНИРОВАННЫХ 3D-ИЗОБРАЖЕНИЙ ДРЕВЕСНОЙ РАСТИТЕЛЬНОСТИ.

Никольский И.М.

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СКН, e-mail: nikolsky@cs.msu.ru

Работа посвящена сегментации трёхмерных точечных изображений, называемых *облаками точек*. Такие изображения получаются в результате сканирования поверхности предметов, интерьера помещений либо рельефа местности с помощью специальных сканеров, использующих датчики глубины.

Под *сегментацией* понимается разбиение изображения на непересекающиеся семантически законченные части. Задача сегментации часто возникает при обработке растровых изображений, однако прямой перенос соответствующих алгоритмов на облака точек затруднён в связи с тем, что последние не обладают какой-либо структурой.

Сегментация облаков точек используется, в частности, при анализе сканов деревьев. Это позволяет специалистам определять различные характеристики, такие как площадь кроны и высоту ствола.

В данной работе рассматривается сегментация сканированных деревьев путём классификации точек облака, т. е. отнесении каждой точки к классу «крона» либо к классу «ствол» на основе некоторого вектора признаков (features), приписываемых каждой точке. Используется наивный байесовский классификатор в отличие от большинства схожих работ (напр.[1]), где классификация осуществляется с помощью случайного леса.

Исследования проводились на сканах деревьев из коллекции SYSSIFOS ([2], [3]). Обучающая выборка создавалась путём ручного выделения кроны и ствола одного из деревьев. В качестве метрики для оценки качества сегментации использовалась доля верно определённых точек ствола и кроны.

Основным результатом работы является выявление решающего влияния признака «высота» (z-координата точки) на эффективность сегментации.

Литература

1. Lin, W., Fan, W., Liu, H., Xu, Y., Wu, J. Classification of Handheld Laser Scanning Tree Point Cloud Based on Different KNN Algorithms and Random Forest Algorithm // Forests 2021, 12, 292.
2. <http://syssifoss.db>
3. Weiser, H., Schäfer, J., Winiwarter, L., Krašovec, N., Fassnacht, F.E. Höfle, B. Individual tree point clouds and tree measurements from multi-platform laser scanning in German forests // Earth System Science Data. Vol. 14 (7), 2022, pp. 2989-3012.

УПРАВЛЕНИЕ ЗАГРУЗКОЙ ОЧЕРЕДЕЙ МАРШРУТИЗАТОРА ПРИ ПОМОЩИ БАЛАНСИРОВКИ ФЛОУЛЕТОВ НА ОСНОВЕ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Гарькавый И.С.¹, Степанов Е.П.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АСВК, e-mail: garx@asvk.cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АСВК, e-mail: estepanov@lvk.cs.msu.ru

В сетях нового поколения, таких как Network Powered by Computing, проблема минимизации задержки передачи данных является одной из ключевых из-за повышений требований приложений [1]. Одним из подходов к минимизации задержки является обеспечение сбалансированной загрузки очередей на портах сетевых маршрутизаторов. Этого можно достичь при помощи балансировки пакетов одного и того же потока по разным выходным портам маршрутизатора. Задача такой балансировки пакетов по очередям также востребована в магистральных сетях, сетях SD-WAN.

В статье представлена математическая модель функционирования маршрутизатора. Для каждого поступающего в маршрутизатор пакета задано множество допустимых выходных портов для его передачи. Функция управления отображает количество поступивших пакетов на матрицу распределения пакетов по выходным портам. Длина очереди в каждый момент времени определяется при помощи нелинейных разностных уравнений.

В рамках представленной модели поставлена задача оптимального управления загрузкой очередей. Требуется найти функцию управления, минимизирующую вариацию длин очередей на разных выходных портах на рассматриваемом временном интервале. То есть, поступающие в маршрутизатор пакеты должны распределяться по выходным портам маршрутизатора, равномерно заполняя очереди выходных портов. Чтобы предотвратить частое переупорядочивание пакетов на стороне получателя, в задаче рассматривается балансировка флоулетов [3, 4] – сегментов потоков, передача которых по разным маршрутам не приведет к переупорядочиванию пакетов на получателе.

Предложен метод решения поставленной задачи при помощи обучения с подкреплением. Исследованы варианты метода на основе как off-policy [5, 6], так и on-policy [7, 8] алгоритмов обучения с подкреплением. Метод учитывает заполненность очередей, рассчитываемую в каждый момент времени при помощи представленной модели работы маршрутизатора. Проведено сравнение предложенного метода с методами балансировки нагрузки ECMP [2], Let It Flow [3] по критерию вариации загрузки очередей.

Литература

1. Smeliansky R. L. Network powered by computing // 2022 International Scientific and Technical Conference on Modern Computer Network Technologies (MoNeTeC). – Moscow: IEEE, 2022. P. 1—5.
2. ECMP Load Balancing [Электронный ресурс] // URL: https://www.cisco.com/c/en/us/td/docs/ios-xml/ios/mp_l3_vpns/configuration/xs-3s/asr903/mp-l3-vpns-xe-3s-asr903-book/mp-l3-vpns-xe-3s-asr903-book_chapter_0100.pdf (дата обращения: 11.10.2024).
3. Let it Flow: Resilient Asymmetric Load Balancing with Flowlet Switching / Vanini E., Pan R., Alizadeh M., Taheri P., Edsall T. // Proceedings of the 14th USENIX Symposium on Networked Systems Design and Implementation. Boston, MA, USA: NSDI, 2017. P. 407–420.
4. CONGA: distributed congestion-aware load balancing for datacenters / M. Alizadeh, T. Edsall, S. Dharmapurikar, R. Vaidyanathan, K. Chu, A. Fingerhut, V. T. Lam, F. Matus, R.

- Pan, N. Yadav, G. Varghese // Proceedings of the 2014 ACM conference on SIGCOMM. Chicago, Illinois, USA: ACM, 2014. P. 503–514.
5. Haarnoja T. et al. Soft actor-critic: Off-policy maximum entropy deep reinforcement learning with a stochastic actor // International conference on machine learning. – PMLR, 2018. – P. 1861–1870.
 6. Fujimoto S., Hoof H., Meger D. Addressing function approximation error in actor-critic methods // International conference on machine learning. – PMLR, 2018. – P. 1587–1596.
 7. Schulman J. et al. Proximal policy optimization algorithms // arXiv preprint arXiv:1707.06347. – 2017.
 8. Mnih V. et al. Asynchronous methods for deep reinforcement learning // International conference on machine learning. – PMLR, 2016. – P. 1928–1937.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВОЙСТВ СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫХ ЗАДАНИЙ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ СИСТЕМЫ МОНИТОРИНГА

Сетяев А.В.¹, Воеводин В.В.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СКИ, e-mail: alexsetyaev@gmail.com

2) НИВЦ МГУ имени М.В. Ломоносова, Лаборатория анализа суперкомпьютерных систем и приложений, e-mail: vadim@parallel.ru

На современных суперкомпьютерах постоянно выполняется большое количество пользовательских заданий, при этом информация об их свойствах и особенностях как правило недоступна. Хотя подобные знания полезны для администраторов и руководства вычислительных центров, поскольку помогают лучше понимать потребности пользователей и возникающие в их приложениях проблемы, что позволяет повышать эффективность суперкомпьютеров в целом [1]. Один из способов определять полезные свойства суперкомпьютерных заданий основан на анализе различных показателей производительности приложений во время их выполнения, и для сбора этих данных применяется специальное программное обеспечение – система мониторинга.

В данном исследовании были разработаны и реализованы методы для определения различных классов заданий на основе данных от системы мониторинга. Эти методы автоматически анализируют выполняющиеся (или уже выполненные) суперкомпьютерные приложения, что позволяет изучать весь поток суперкомпьютерных заданий и при необходимости оперативно реагировать на выявленные проблемы.

В работе рассматривались 6 классов заданий. Первые три класса позволяют выявлять сбои в работе приложений: 1) задание сначала показывало нормальную активность, однако затем «зависло»; 2) активность задания сразу после запуска была очень низкой, затем поднялась до нормального уровня; 3) сначала задание показывало нормальную активность, затем некоторое время было неактивным, затем его выполнение снова продолжилось в нормальном режиме. Другие три класса позволяют получить дополнительную информацию о поведении нормально работающих приложений: 4) поведение и активность задания в течение всего времени выполнения практически не меняется; 5) при запуске приложение активно читает входные данные из файлов; 6) в конце своей работы приложение активно записывает в файлы полученные результаты.

Методы для первых трех классов были разработаны ранее, однако в этой работе они были существенно доработаны, что позволило заметно повысить точность их работы. Методы для определения других трех классов были созданы с нуля.

Были разработаны программные реализации на языке Python для определения всех указанных классов, которые затем были успешно апробированы на реальных данных с суперкомпьютера Ломоносов-2 [2].

Литература

1. Nikitenko D. A., Shvets P. A., Voevodin V. V. Why do users need to take care of their hpc applications efficiency? // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2020. — Vol. 41, no. 8. — P. 1521–1532. DOI: 10.1134/s1995080220080132
2. Supercomputer lomonosov-2: Large scale, deep monitoring and fine analytics for the user community / V. V. Voevodin, A. S. Antonov, D. A. Nikitenko et al. // Supercomputing Frontiers and Innovations. — 2019. — Vol. 6, no. 2. — P. 4–11. DOI: 10.14529/jsfi190201

СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ К ПОСТРОЕНИЮ СЕТЕВЫХ ПРОЦЕССОРНЫХ

Александров А.В.¹, Волканов Д.Ю.², Волчанинов А.П.³, Никифоров Н.И.⁴

- 1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АСВК,
e-mail: alexandrov.alexeyv@yandex.ru
- 2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АСВК,
e-mail: volkanov@asvk.cs.msu.ru
- 3) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АСВК,
e-mail: mr.volchaninov@yandex.ru
- 4) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АСВК
e-mail: rav263@asvk.cs.msu.ru

Сетевое процессорное устройство (СПУ) (Network processing unit, NPU) — это программируемый процессор специального назначения, необходимый для обработки сетевого трафика (сетевых пакетов). Архитектура СПУ оптимизирована для работы в сетевых устройствах для обеспечения быстрой и стабильной обработки пакетов [1]. Такие процессоры предназначены для извлечения, классификации, модификации и обработки сетевых пакетов. Высокопроизводительные сетевые коммутаторы должны соответствовать целому ряду различных требований. Основными из этих требований являются: поддержка большого количества сетевых протоколов (сценариев использования) и высокая пропускная способность.

Устройства, основанные на современных СПУ [2], способны передавать данные с высокой скоростью: до 52 терабит в секунду. При разработке новых процессорных блоков необходимо определить, на какие компоненты такого типа процессоров следует обратить внимание в первую очередь. Чтобы создать конкурентоспособное устройство, необходимо чётко понимать следующий аспект: каковы основные тенденции и возможные усовершенствования технических решений, которые можно найти в современных СПУ распространённых сетевых вендоров.

В данной работе авторы приводят обзор некоторых новейших устройств ведущих производителей. Критериями в обзоре были следующие параметры устройств: год выпуска, цена (цена сетевого устройства, использующего СПУ), производительность – максимально возможная пропускная способность коммутатора, программируемость процессорного блока, язык программирования и SDK (комплект для разработки программного обеспечения), которые используются для него, тип, доступные конфигурации интерфейсов коммутатора, описание основных архитектурных особенностей, характеристики микросхемы, управляющий процессор на микросхеме, тип интерфейса процессора, используемые методы мониторинга параметров коммутатора, поддерживаемые методы организации очередей, политики QoS, архитектура программного обеспечения коммутатора.

Авторы рассматривают современные устройства, разработанные следующими компаниями: Broadcom, Cisco, Huawei, Marvell и Nvidia. В результате были выделены наиболее перспективные решения, найденные в документации используемых устройств, такие как: использование современных методов мониторинга, применения искусственного интеллекта для обработки сетевого трафика, быстрые методы балансировки нагрузки. Также были найдены ключевые архитектурные решения для СПУ, которые представляют наибольший интерес для дальнейших улучшений, такие как организация памяти для хранения таблиц классификации, добавление нейронных сопроцессоров на конвейеры СПУ [3], использование быстрых интерфейсов доступа к управляющим процессорам общего назначения.

Литература

1. Orphanoudakis T., Perissakis S. Embedded multi-core processing for networking // Multi-Core Embedded Systems. CRC Press, 2018, p. 429 - 494.
2. Shah N., Keutzer K. Network processors: Origin of species // International Symposium on Computer and Information Sciences. CRC Press. 2022, p. 41 - 45.
3. Azzeh J., Abdo M., Zotov I. A parallel pipelined packet switch architecture for mesh-connected multiprocessors with independently routed flits // Jordanian Journal of Computers and Information Technology 05 (08'2019), c. 1. DOI: 10.5455/jjcit.71-1556375171.

ПОДХОДЫ К УСКОРЕНИЮ НЕЙРОСЕТОВОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ НА ПРИМЕРЕ РЕАЛИЗАЦИИ ИНФЕРЕНСА МОДЕЛЕЙ НА УЗЛАХ СУПЕРКОМПЬЮТЕРА «270 ЛЕТ МГУ»

Попова Н.Н.¹, Козинцева А.А.²

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СКИ, e-mail: popova@cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СКИ, e-mail:
angelikakozintseva@mail.ru

Оптимизация инференса – процесса непосредственного применения нейросетевой модели к обработке данных, ранее не использованных для обучения модели, является важной задачей, активно исследуемой в последнее время. В докладе рассматриваются подходы к ускорению инференса на узлах суперкомпьютера «270 лет МГУ». На примере нескольких моделей сверточных нейросетей проводится сравнительный анализ времени выполнения инференса на тестовых данных для различных форматов представления моделей. Проводится анализ масштабируемости моделей в зависимости от числа используемых графических ускорителей. Исследуется зависимость времени вывода от размера пакета (батча) в случае реализации инференса для пакета примеров. Рассматривается возможность применения разработанной библиотеки parLoader[1] для предварительной обработки данных.

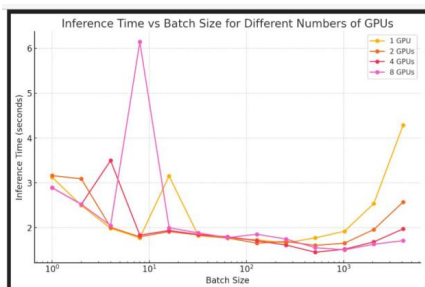


Рис.1. Время выполнения инференса в зависимости от размера пакета

На рисунке 1 приведены графики зависимости времени выполнения инференса в зависимости от числа используемых графических ускорителей для одной из рассматриваемых моделей.

Представляемые результаты будут полезны для выполнения исследований, связанных с проведением многовариантных расчетов, требующих инференса нейросетевых моделей. Работа выполнена на суперкомпьютере «270 лет МГУ».

Литература

1. D. Buryak, V. Vakhrushev, M. Shubin, N. Popova, K. Khamitov, and O. Ivanov. Parallel data preprocessing library for neural network training. In *Parallel Computational Technologies. PCT 2023. Communications in Computer and Information Science*, vol 1868, pages 19–32, New York, 2023. Springer.

ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОГРАММЫ ОБРАБОТКИ СЕТЕВЫХ ПАКЕТОВ НА СТАДИИ КОНВЕЙЕРА СЕТЕВОГО ПРОЦЕССОРНОГО УСТРОЙСТВА

Никифоров Н.И.¹, Волканов Д.Ю.²

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АСВК, e-mail:
rav263@asvk.cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АСВК, e-mail:
volkanov@asvk.cs.msu.ru

Сетевое процессорное устройство (СПУ) — это программируемый процессор, архитектура которого оптимизирована для работы в сетевых устройствах и обеспечения устойчивого режима обработки пакетов [1]. Его основные задачи — выделение заголовков пакетов, осуществление классификации и обработка заголовков. К высокопроизводительным коммутаторам предъявляется множество различных требований, но основные: поддержка большого количества протоколов (сценариев использования), высокая пропускная способность. Современные СПУ позволяют передавать данные вплоть до 52 Тбит/с. Основными этапами обработки сетевых пакетов являются: получение пакета с входного порта, анализ заголовка пакета и сохранение тела пакета в памяти, поиск правил обработки сетевого пакета в таблицах классификации, изменение заголовка сетевого пакета в соответствии с найденными правилами, объединение изменённого заголовка и тела сетевого пакета, отправка пакета на блок управления очередями, отправка пакета на выходной порт в соответствии с найденным правилом. Для решения этих задач обычно используется конвейерная архитектура сетевого процессора [2].

В данной работе рассматривается следующая задача. Дан конвейер, который состоит из входной очереди, N вычислительных блоков, FIFO очереди заголовков сетевых пакетов между каждыми двумя последовательными вычислительными блоками и выходной очереди. Также дана программа на языке ассемблера RISC-V, представляющая собой упорядоченный список инструкций ассемблера. Требуется минимизировать размер памяти, используемый для хранения программ обработки заголовков сетевых пакетов с соблюдением заданных ограничений.

В данной работе приводится обзор математических постановок задач, которые позволяют описать предложенную задачу. Схожие задачи рассматривались в литературе, например в работах [3-5]. Для различных постановок также приводятся известные методы для решения поставленной задачи.

Литература

1. Orphanoudakis T., Perissakis S. Embedded multi-core processing for networking // Multi-Core Embedded Systems. CRC Press, 2018, p. 429 - 494.
2. Беззубцев С.О., Васин В.В., Волканов Д.Ю., Жайлауова Ш.Р., Мирошник В.А., Скобцова Ю.А., Смелянский Р.Л. Об одном подходе к построению сетевого процессорного устройства // Моделирование и анализ информационных систем. — 2019. — Т. 26, № 1. — с. 39—62.
3. Loehr D. Safe, modular packet pipeline programming // Proceedings of the ACM on Programming Languages. - 2022. - Vol. 6, POPL.- P. 1 -28.
4. Beaty, S. J. Instruction scheduling using genetic algorithms: PhD thesis / Beaty Steven John. - Colorado State University, 1991.
5. Ertl M.A., Krall A., Instruction scheduling for complex pipelines// Compiler Construction: 4th International Conference, CC'92 Paderborn, FRG, October 5 - 7, 1992 Proceedings 4. - Springer. 1992. - P. 207 - 218.

РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ ПЕРЕНОСИМОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ КОРРЕКТНОСТИ ДАННЫХ ОТ СИСТЕМЫ МОНИТОРИНГА СУПЕРКОМПЬЮТЕРОВ

Матвеев В.А.¹, Воеводин В.В.²

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Суперкомпьютеров и квантовой информатики, e-mail: maculaali@yandex.ru

2) НИВЦ МГУ имени М.В. Ломоносова, Лаборатория анализа суперкомпьютерных систем и приложений, e-mail: vadim@parallel.ru

Система мониторинга является важным инструментом анализа поведения суперкомпьютерных систем в целом и эффективности выполнения запускаемых на суперкомпьютере программ, в частности. Неотъемлемым свойством систем мониторинга должна быть корректность выдаваемых ими данных, на обеспечение проверки которой и направлено данное исследование.

Актуальность данной работы обуславливается следующими фактами: 1) существует целый ряд причин, почему на практике могут возникать некорректные данные мониторинга; 2) в настоящее время в открытом доступе отсутствуют переносимые и автоматизированные решения по проверке корректности подобных данных, выдаваемых системами мониторинга.

В рамках данной работы были разработаны, реализованы и верифицированы методы тестирования для следующих характеристик работы приложений:

- количество открытых/закрытых файлов;
- число IPC (число выполненных инструкций за такт);
- пике уровня загрузки процессора;
- загрузка памяти графического ускорителя;
- любые доступные PAPI [1] датчики, в т.ч. аппаратные.

Созданное программное решение основано на предложенной ранее системе проверки корректности [2]. Проведённая в данном исследовании работа включала в себя, помимо разработки недостающих тестов, исправление ошибок в уже готовых тестах, написание подробной документации, проведение автоматизации процесса тестирования и существенное повышение переносимости разработанного решения.

При помощи полученного решения была проверена корректность данных от системы мониторинга DiMMon [3] на суперкомпьютере Ломоносов-2. Также была обеспечена и проверена переносимость созданного решения, в том числе на разных аппаратных архитектурах и разных ОС (тестировалась на процессорах Intel, AMD и ARM; на дистрибутивах Linux на базе Debian, Arch и решений от RedHat).

Литература

1. A Portable Programming Interface for Performance Evaluation on Modern Processors //International Journal of High Performance Computing Applications archive. Aug. 2000. Vol. 14, N 3. P. 189–204.
2. Kashin D., Voevodin V. Verifying the Correctness of HPC Performance Monitoring Data //PaCT 2023, 17th International Conference. Vol. 14098. P. 10–13.
3. Dynamically reconfigurable distributed modular monitoring system for supercomputers (dimmon) / K. Stefanov, V. Voevodin, S. Zhumatiy, V. Voevodin //4th International Young Scientist Conference on Computational Science. Procedia Computer Science. Elsevier B.V Netherlands. 2015. Vol. 66. P. 625–634.

СИСТЕМА СБОРА, ХРАНЕНИЯ И ОБРАБОТКИ СЕТЕВОГО ТРАФИКА ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ АЛГОРИТМОВ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ КАЧЕСТВА НАЛОЖЕННЫХ КАНАЛОВ В СЕТЯХ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

Рязанов А.М.¹, Волканов Д.Ю.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АСВК,
e-mail: alryaz@asvk.cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АСВК,
e-mail: volkanov@asvk.cs.msu.ru

В современных условиях критически важным является создание суверенных решений в области алгоритмического обеспечения управления сетями передачи данных (СПД). Известные подходы и продукты, нельзя назвать полностью российскими. Во-первых, они содержат ряд модулей, являющихся либо проприетарным, либо свободно распространяемым зарубежным программным обеспечением. Во-вторых, упомянутые интеллектуальные средства сетевого управления обучаются на основе иностранных репозиториях. Поэтому одной из ключевых задач в области алгоритмического обеспечения управления СПД является формирование обучающих наборов, которые могут быть использованы для решения задач анализа и прогнозирования качества гетерогенных каналов.

Задача расчёта и прогноза всех четырех параметров качества обслуживания (КО) в литературе практически не рассматривается (в качестве исключений можно упомянуть статьи [1] и [2]), поэтому в работе предложены методы расчёта показателей КО (скорость передачи, задержка, джиттер и коэффициент потерь) по данным собранным в ТСТ. Например, коэффициент потерь на промежутке времени считается как доля потерянных пакетов во второй точке ко всем отправленным в первой точке.

В данной работе рассматривается задача подготовки тренировочных данных для обучения алгоритмов прогнозирования оценки КО СПД. В работе предлагается архитектура системы сбора, хранения и обработки сетевого трафика для подготовки тренировочных данных для обучения алгоритмов прогнозирования оценки КО СПД и обосновывается её выбор.

Литература

1. Yang H. et al. A Technical Research towards 5G SLA: System Definition, Sense and Assurance Solution //2021IEEE 21st International Conference on Communication Technology (ICCT). – IEEE, 2021. – p. 462-471
2. Ahmad N., Wahab A., Schormans J. Importance of cross-correlation of QoS metrics in network emulators to evaluate QoE of video streaming applications //2020 11th International Conference on Network of the Future (NoF). - IEEE, 2020. - p. 43-47.

РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ РЕКОНСТРУКЦИИ ТРЕКОВ ЧАСТИЦ ДЛЯ ПРОЕКТА BM@N

Чернов А. М.¹, Ершов Н. М.²

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СКИ, e-mail: dnscookie@gmail.com

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АНИИ, e-mail: ershov@cs.msu.ru

Настоящая работа посвящена исследованию методов решения задачи реконструкции треков заряженных частиц по данным трековых детекторов в проекте BM@N [1]. Каждый детектор в системе представлен плоскостью датчиков, регистрирующих прохождение (так называемые хиты) через них заряженной частицы (рис. 1). Событием называется столкновение пучка с неподвижной мишенью, порождающее некоторое количество новых частиц, которые и регистрируются детекторами. Целью исследования, таким образом, является восстановление треков всех частиц, образованных в текущем событии, по заданному набору хитов.

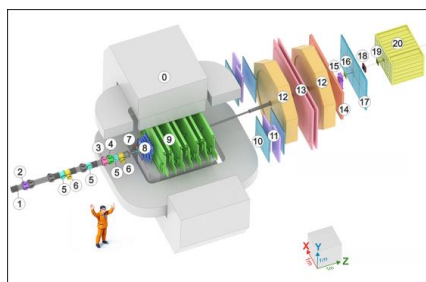


Рис. 1. Схематический вид установки BM@N

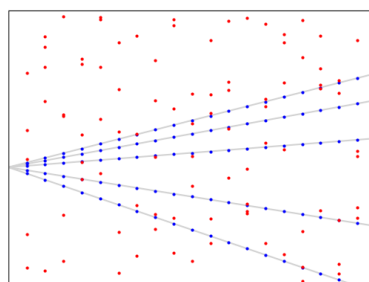


Рис. 2. Модельная задача реконструкции треков

Сложность решаемой задачи обусловлена прежде всего большим объемом первичных данных, регистрируемых детекторами, которые нужно обрабатывать в режиме реального времени. Кроме того, важным фактором в данной задаче является её принципиальная зашумлённость, определяемая особенностью работы детекторов — в системе регистрируется большое число ложных хитов, не соответствующих никаким частицам.

В данной работе на примере модельной двумерной задачи (рис. 2) анализируются и сравниваются два подхода к решению поставленной задачи с использованием 1) преобразования Хафа [2]; 2) самоорганизующихся карт Кохонена [3]. Также рассматриваются вопросы применимости к решению данной задачи методов машинного обучения с использованием графовых нейронных сетей [4].

Литература

1. Afanasiev S. et al, *The BM@N spectrometer at the NICA accelerator complex*, Nucl. Instrum. Methods, section A, 2024, Vol. 1065, Article 169532
2. Duda R.O., Hart P. E., *Use of the Hough Transformation to Detect Lines and Curves in Pictures*, 1972, Comm. ACM, 15, pp. 11–15
3. Kohonen T., *Self-Organized Formation of Topologically Correct Feature Maps*, 1982, Biological Cybernetics, 43 (1), pp. 59–69
4. Wu L. et al, *Graph Neural Networks: Foundations, Frontiers, and Applications*, Springer, Singapore, 2022

МОДЕЛЬ ПРЕДСКАЗАНИЯ ДИАПАЗОНА СОСТОЯНИЙ КАНАЛА, ОСНОВАННАЯ НА МОДЕЛИ АВТОРЕГРЕССИРОВАНИЯ И МОДЕЛИ ВЕКТОРНОГО АВТОРЕГРЕССИРОВАНИЯ

Го Фэнжуй¹, Смелянский Р.Л.², Королев В.Ю.³

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АСВК, e-mail:

quofengrui@lvk.cs.msu.ru

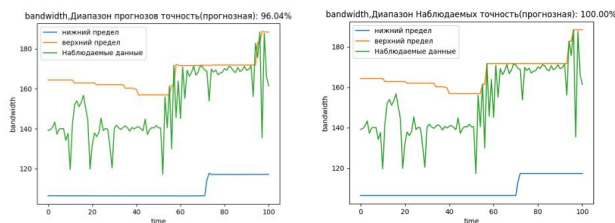
2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АСВК, e-mail: smel@cs.msu.ru

3) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра МС, e-mail: bruce27@yandex.ru

Одним из важнейших показателей эффективности сетей передачи данных (СПД) является качество сервиса (далее QoS - Quality of Service). Этот показатель принято рассматривать как набор из следующих компонентов: пропускная способность (bandwidth), задержку, джиттер и коэффициент потери пакетов [1]. Здесь мы рассмотрим проблему прогнозирования QoS для неоднородных каналов в СПД. Неоднородный канал — это канал передачи данных, состоящий из линий разной физической природы: кабельных, оптических и радиоканалов [2]. Сегодня передача данных являются одной из важнейших технологий, поэтому прогнозирование параметров QoS неоднородных каналов является актуальной задачей.

В данной статье рассматривается новый тип модели, основанной на авторегрессионных и векторных авторегрессионных моделях. Если взять произвольное число X_i в серии случайных величин и использовать n предыдущих чисел (включая X_i) в качестве окна W_i , и после сортировки всех значений в окне W_i по возрастанию составить новое окно W'_i , где X'_1 - минимальное значение, а X'_n - максимальное, то можно взять эти два значения - минимальное и максимальное - в качестве вектора V_i . Таким образом, можно установить, что диапазон X_i находится между X'_1 и X'_n . Таким образом, мы превращаем отдельное значение X_i в пару двумерных векторов, и эта пара двумерных векторов указывает на диапазон возможных значений X_i . С помощью вышеуказанного метода можно превратить одномерный массив в двумерный массив векторов, а затем с помощью модели VAR определить вектор V_{i+1} , что означает предсказание диапазона значений X_{i+1} .

С использованием Wireshark можно вычислить пропускную способность, задержку, джиттер и потерю пакетов в секунду и построить в р е м е н н о й ряд событий отправки, получения и потери пакетов. При прогнозировании пропускной способности с новой методикой достигнута точность 96.04%, что означает, что лишь 3.96% данных вне диапазона.



Литература

1. Newton, P.C., Arockiam, L. A novel prediction technique to improve quality of service (QoS) for heterogeneous data traffic // J. Intell. Manuf. – 2011. – Pp.867-872
2. S. Izadi, M. Ahmadi, A. Rajabzadeh. Network traffic classification using deep learning networks and Bayesian data fusion // J. Netw. Syst. Manag. – 2022. –V.2

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ МЕТОДА ПРОРЕЖИВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ НА ЕГО ЭФФЕКТИВНОСТЬ

Новиков Д.А.¹, Буряк Д.Ю.²

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СКИ, e-mail: dimchanov1121@mail.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СКИ, e-mail: dyb04@yandex.ru

Современные успехи и развитие в сфере глубокого обучения обусловлены не только разработкой значительного количества новых архитектур нейронных сетей и вовлечением в данную область большого числа людей, но и постоянно растущими вычислительными мощностями.

Глубокие нейронные сети имеют десятки, а иногда сотни скрытых слоев и сотни нейронов в каждом из этих слоев. Такие сети имеют огромное количество параметров [1]. Их обучение стало возможным благодаря массовому распространению высокопараллельных вычислительных устройств - GPU, TPU и других. Однако известно, что многие параметры нейронной сети излишни и оказывают незначительное влияние на результат ее работы. Поэтому возникает идея устранения весов и операции из модели нейронной сети, при этом минимизируя потери в качестве. Более того, во многих работах демонстрируется, что при удалении незначительного количества параметров нейронной сети, наблюдается повышение качества на тестовой выборке [2].

Идея [3] исследуемого метода прореживания нейронной сети в процессе обучения [4] состоит в исключении параметров из модели и последующей оценке их влияния на точность работы нейронной сети на каждой эпохе обучения. Данный метод применяется к сверточным слоям нейронной сети, а в качестве задачи, для которой применяются сверточные нейронные сети, рассматривается классификация изображений. Метод прореживания нейронной сети в процессе обучения обладает множеством параметров, изменяющих скорость обучения и итоговое качество нейронной сети. В рамках данной работы проведено подробное исследование влияния данных параметров. Влияние параметров метода прореживания на его эффективность будет оцениваться по количеству исключенных из нейронной сети параметров и по значению итоговой точности модели.

По результатам проведенных на суперкомпьютере «МГУ-270» экспериментов были определены параметры и установлены их значения, при которых исследуемый метод демонстрирует наилучшую эффективность. Использование оптимальных значений параметров позволило сократить на 60% размер сверточной нейронной сети ResNet-18, обучаемой на задаче Cifar100, при снижении точности на 3.09%, и размер VGG16, обучаемой на задаче Cifar10, при снижении точности на 2.79%.

Литература

1. Romero A. DALLE 2, The Promise and Limitations of a Revolutionary AI //Towards Data Science, June 16, 2022.
2. Zhangheng Li, Tianlong Chen, Linyi Li, Bo Li, Zhangyang Wang. Can pruning improve certified robustness of neural networks? //17 Jun 2022 (v2)
3. Jouni P., Okko R., Serdar K. Feature selection methods and their combinations in high-dimensional classification of speaker likability, intelligibility and personality traits. //Computer Speech & Language 29, November 2013
4. Новиков Д.А. Буряк Д.Ю. Исследование эффективности метода прореживания нейронных сетей в процессе обучения. //Russian Supercomputing Days, 2023

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЮ ДАННЫХ

Панкина А.А.¹, Буряк Д.Ю.²

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СКИ, e-mail: s02210505@gse.cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СКИ, e-mail: dyb04@yandex.ru

В настоящее время нейронные сети и другие алгоритмы машинного обучения используются повсеместно для огромного спектра различных задач. С резким ростом размера доступных наборов данных как с точки зрения количества выборок, так и количества признаков в каждой выборке, важной задачей становится уменьшение размерности данных и сохранение числа признаков как можно более низким. Данная задача в машинном обучении называется "Обучение представлению данных".

Целью данной работы является исследование методов обучения представлению данных. В рамках работы был проведен обзор существующих подходов, на основе которого для дальнейших экспериментов был выбран метод извлечения признаков на основе обучения без учителя - VICReg. Цель экспериментов заключалась в том, чтобы проанализировать качество обучения энкодера с помощью метода VICReg. Для этого было решено проверить точность классификации эмбедингов, полученных на выходе из энкодера, а также попробовать применить обученный энкодер к новому набору данных.

Для экспериментов была выбрана задача классификации изображений из набора CIFAR-10. Были рассмотрены две разные архитектуры энкодера: собственная архитектура и архитектура ResNet-18. Для классификации эмбедингов использовался однослойный линейный классификатор. После обучения на базе CIFAR-10 было принято решение применить энкодер к базе Tiny ImageNet.

В результате эксперимента удалось получить энкодер для генерации эмбедингов, который позволяет решать задачу классификации с более высокой точностью. Результаты были подтверждены на базе CIFAR-10. Энкодер, обученный с помощью метода VICReg повысил точность классификации с 68.1% до 86.9%, то есть на 21.5% по сравнению с той же архитектурой, обученной с помощью обучения с учителем.

Полученный энкодер был успешно применен к базе Tiny ImageNet. При этом при дообучении на 10% размеченных данных точность классификации достигла 86.4%.

Литература

1. Bardes Adrien, Ponce Jean, LeCun Yann. VICReg: Variance-Invariance-Covariance Regularization for Self-Supervised Learning. //arXiv preprint arXiv:2105.04906. —2022.

ПЕРЕВОД НАБОРА ДАННЫХ VISUAL GENOME НА РУССКИЙ ЯЗЫК

Ефремова Н.Э.¹, Елисеева М.А.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АЯ, e-mail: nvasil@list.ru

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АЯ, e-mail: mariaeliseeva731@gmail.com

В настоящее время все больше внимания уделяется мультимодальной обработке данных, в том числе совместной обработке изображений и текстов. При этом наибольшую сложность вызывают задачи, в которых должны активно использоваться знания о мире: генерация изображения по текстовому описанию и составление описания изображения, ответы на вопросы по изображению и т.д.

За последние 10 лет для создания мультимодальных нейросетевых моделей были собраны десятки наборов данных. Среди них особо выделяется датасет Visual Genome, в состав которого входит более 108 тыс. изображений и для каждого из них указаны [1]:

- описание отдельных областей изображения в виде текста (мужчина прыгает через желтый гидрант, женщина стоит позади мужчины) и графа, вершинами которого являются:
 - объекты изображения (*мужчина, гидрант, женщина*);
 - их атрибуты (*желтый, стоящая*);
 - взаимосвязи между объектами (*прыгает через, позади*);
- граф сцены, являющийся объединением графов областей изображения;
- пары вопрос-ответ, относящиеся как к отдельным областям, так и изображению в целом; всего 1,7 миллиона пар.

Как показали эксперименты, представление различных ситуаций в виде графов и наличие пар вопрос-ответ позволяют обучить нейросетевую модель более глубокому пониманию изображения [1].

Поскольку для русского языка подобного набора данных пока нет, целью нашей работы стал перевод датасета Visual Genome на русский язык. Перевод происходил с помощью Translate API в Python: сначала осуществлялась попытка перевода с помощью Яндекс переводчика, и если попытка была неудачной, то перевод осуществлялся с помощью Google переводчика. Для перевода в первую очередь были выбраны названия объектов.

Очевидно, что перевод отдельного слова может иметь несколько правильных вариантов (*table* – *стол, таблица, настольный, табличный* и т.д.). Среди переводов, относящихся к разным частям речи, нас интересовали только существительные. В свою очередь из них мы выбирали то слово, значение которого было описано в синсете WordNet, привязанном к названию объекта (отметим, что синсеты привязаны не ко всем объектам). Например, к слову, *table* был привязан синсет, содержащий описание *table – a piece of furniture ... (стол – предмет мебели ...)*, что позволило нам выбрать перевод *стол*, а не *таблица* или *расписание*.

В ходе перевода нами было получено 92111 различных объектов; дополнительно было выявлено 883 изображения без объектов, найдены странные названия объектов.

Литература

1. Krishna R. et. al. Visual genome: Connecting language and vision using crowdsourced dense image annotations // International journal of computer vision, 2017, V.123, pp.32-73.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ СРАВНЕНИЕ ДВУХ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНВАРИАНТА В ГРАФЕ ТУРНИРА

А.А. Вылиток,¹ Лю Бовэнь,² Б.Ф. Мельников³

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АЯ, e-mail:
vylytok@cs.msu.ru

2) Факультет ВМК Университета МГУ-ППИ в Шэньчжэне, e-mail:
1120220081@smbu.edu.cn

3) Факультет ВМК Университета МГУ-ППИ в Шэньчжэне,
e-mail: bormel@smbu.edu.cn

Инвариант графа – это значение или набор значений, характеризующих структуру графа независимо от упорядочения вершин. Примером является индекс Горбани (ABC_{GG}), обладающий улучшенными прогностическими возможностями [1]. В докладе рассматривается особый вид графов – графы турниров [2].

Один из возможных инвариантов для графов турниров был предложен в работе [3]. В графе турнира каждая вершина соответствует участнику и помечена набранными им в турнире очками. По очкам вычисляются баллы участников двумя разными методами. Относительный порядок баллов участников остаётся неизменным при вычислении по двум разным методам (т.е. если баллы двух участников, вычисленные по первому методу, различаются, они остаются различными и сохраняют тот же относительный порядок при вычислении по второму методу).

В докладе также рассматривается вопрос, как изменятся баллы, вычисленные по первому и по второму методу, если модифицировать граф турнира путем изменения направления дуг в нетранзитивных тройках вершин, и как варьируется коэффициент корреляции между этими наборами баллов, вычисленных по первому и по второму методу, что может помочь в поиске эвристик более эффективного вычисления.

Первый метод заключается в распределении баллов вершинам ориентированного графа по убыванию их степени. Второй метод включает извлечение всех возможных подграфов турнира и расчёт баллов для вершин каждого подграфа по первому методу. Затем эти баллы суммируются, и на основе полученных значений снова распределяются баллы вершинам основного графа. Нетранзитивная тройка – это группа из трёх участников А, В и С, где А побеждает В, В побеждает С, а С побеждает А, что в терминах графов означает наличие дуг от А к В, от В к С и от С к А.

Существует четыре способа изменения направления дуг в нетранзитивных тройках: смена направления первой, второй или третьей дуги, или изменение всех трёх дуг одновременно. Изменение направления дуги меняет результаты дуэлей, при этом четвёртый метод сохраняет общее количество побед участников, но может изменить баллы, вычисленные вторым методом. Связь между двумя методами ранжирования оценивается модифицированным коэффициентом корреляции Кендалла.

Разработана программа, с помощью которой перебором проанализировано 10000 турниров и установлено, что потенциальный инвариант сохраняется, так как контрпример не появился. Корреляции с пограничным значением 0.5 в графах с 11, 13, 15 и 17 вершинами, указывают на достижение этого значения при определённых условиях. Корреляции, близкие к 0.57 в турнирах с 12 и 14 участниками, предполагают, что минимальная корреляция для чётных размеров может отличаться и требует дальнейшего изучения.

Литература

1. D. Pacheco, L. de Lima, C.S. Oliveira. On the Graovac-Ghorbani index for bicyclic graphs with no pendent vertices // MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 86 (2021) P. 429-448.

2. L. Beretta, F. M. Nardini, R. Trani, R. Venturini. An Optimal Algorithm for Finding Champions in Tournament Graphs // [Электронный ресурс]. - Электрон. дан. – URL <https://arxiv.org/pdf/2111.13621> (дата обращения: 10.10.2024).
3. B. F. Melnikov, B. Liu. On an Invariant of Tournament Digraphs // J. Appl. Math. Phys. 12 (2024) 2711-2722.

МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ СЛОВООБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ДЕРЕВЬЕВ ПО ГРУППАМ ОДНОКОРЕННЫХ СЛОВ

Большакова Е.И.¹, Мещерякова Ю.Ф.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АЯ,
e-mail: eibolshakova@gmail.com

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АЯ,
e-mail: yuliya.mes@yandex.ru

В ряде задач автоматической обработки текстов (АОТ) необходимы словарные ресурсы, в которых представлены словообразовательные (деривационные) связи слов: словообразовательные цепочки (например: *писать* → *писатель* → *писательница*) и деревья (совокупности слов с общим корнем, упорядоченные отношениями деривации). В частности, словообразовательная информация применяется в системах АОТ для распознавания смысла отсутствующих в словарях новых и редких слов (*репостнуть*, *фейковый*) и окказионализмов (*первопечатник*, *нерукопожатный*), а также для перефразирования текста и исправления словообразовательных ошибок.

В данной работе рассматривается метод автоматического построения словообразовательных деревьев для слов русского языка с целью создания более полного и точного словарного ресурса, чем известный аналог [1]. Входными данными метода являются группы слов одного корня, каждая такая группа представляет собой словообразовательное семейство. Слова разбиты на морфы и имеют разметку корней и аффиксов (приставок, суффиксов, постфиксов, окончаний), например, для слова *поражение*: *по*:*PREF/раж*:*ROOT/ени*:*SUFF/е*:*END*. Разметка берется из датасета RuMorphs-Lemmas [2] (около 90 тыс. слов).

Начальный шаг метода состоит в выборе слова-вершины словообразовательного дерева, имеющего наиболее простую структуру (наименьшее число морфем), с учетом принятых в русском языке приоритетов по частям речи [3] и длине слова. Остальные слова обрабатываемого словообразовательного семейства добавляются в дерево последовательно, по шагам. На каждом шаге сначала для слов, уже размещенных в дереве, подбираются и вставляются в дерево производные от них слова, отличающиеся не более чем на одну морфему (согласно аффиксальному способу словообразования, который является основным в русском языке). Когда это становится невозможным, допускается вставка в дерево слов с отличием в две морфемы. Важно, что в процессе восстановления дерева соблюдаются условия сочетаемости различных аффиксов с частью речи слов, выступающих как производящее и производное.

Оценка метода производится путем ручной проверки корректности нескольких десятков построенных деревьев, в сравнении с аналогичными деревьями из [3]. Выявлено, что корректность восстановленного дерева (все слова исходного семейства включены в словообразовательные цепочки и распределены в дерево), зависит от полноты представления в этом семействе всех слов языка, производных от корня.

Литература

1. Kyjanek L., et al. Constructing a Lexical Resource of Russian Derivational Morphology // Proceedings of the 13th LREC Conference, 2022, p. 2788-2797.
2. NLP Datasets [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. – URL: <https://github.com/cmc-msu-ai/NLPDatasets/>
3. Тихонов А.Н. Словообразовательный словарь русского языка: В 2 т. Ок. 145 000 слов. – М.: Русский язык, 1990.

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ

Гулак М.А.¹, Панфёров А.А.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра алгоритмических языков,
e-mail: gulakma@my.msu.ru

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра алгоритмических языков,
e-mail: panfaa@cs.msu.ru

Операторные матрицы представляют собой матрицы, элементы которых принадлежат кольцу операторов, например, дифференциальных, разностных, q -разностных или операторов сдвига. Такие матрицы получаются из матричного представления соответствующих систем линейных уравнений.

Для операторных матриц известны различные нормальные формы, преобразовывая к которым можно получить «упрощённый» вид матрицы с сохранением её свойств. Одной из таких форм является приведённая по строкам форма [1]. Она может быть использована для проверки полноты ранга системы уравнений, вычисления самого ранга, проверки унимодулярности (обратимости) матрицы, а также построения обратной операторной матрицы. В работе [1] (см. также [2]) приводится описание алгоритма Row-Reduction, который позволяет преобразовать произвольную операторную матрицу к приведённому по строкам виду.

Предлагается ещё один алгоритм приведения операторных матриц по строкам, основанный на алгоритме преобразования полиномиальных матриц к слабой форме Попова [3]. Преимущество такого подхода заключается в повышении скорости работы, что было подтверждено экспериментально.

Литература

1. Beckermann B., Cheng H. and Labahn G. Fraction-free row reduction of matrices Ore polynomials. // Journal of Symbolic Computation. 2006. Vol. 41. № 5. P. 513-543.
2. Barkatou M. A., El Bacha C., Labahn G., and Pflügel E. On simultaneous row and column reduction of higher-order linear differential systems. // Journal of Symbolic Computation. 2013. Vol. 49. № 1. P. 45-64.
3. Mulders, T., Storjohann, A. On lattice reduction for polynomial matrices. // Journal of Symbolic Computation. 2003. Vol. 25. P. 377–401.

ПРОГРАММНЫЙ МОДУЛЬ ЛЕКСИЧЕСКОЙ НОРМАЛИЗАЦИИ ТЕКСТОВ НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ

Ефремова Н.Э.¹, Коляскина И.С.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АЯ, e-mail: nvasil@list.ru

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АЯ, e-mail:

ira.koliaskina@gmail.com

Задача лексической нормализации заключается в преобразовании текста на естественном языке к лексической норме. Под лексической нормой обычно подразумевают отсутствие в тексте орфографических ошибок и опечаток, аббревиатур и других сокращений, сленга, просторечий, архаизмов, жаргонизмов и прочих аномальных элементов. Например, сейчас лексической нормой предложения «*Чем употчевать гостей будешь?*» является предложение «*Чем угощать гостей будешь?*». Лексическая нормализация необходима для уменьшения лексической и орфографической вариации текста, что облегчает его последующую обработку, анализ и понимание.

Для русского языка задача лексической нормализации исследована недостаточно, в открытом доступе отсутствуют программы, осуществляющие ее, поэтому целью данной работы стало создание программного модуля лексической нормализации текстов на русском языке. Для этого нами были проанализированы современные методы нормализации и по результатам их анализа было решено провести дообучение нейросетевой модели ByT5-small [1]. Модель имеет архитектуру Transformer, адаптированную для обработки байтовых последовательностей, и изначально была обучена на большом корпусе неразмеченных многоязычных данных mC4 [2]; на вход модели подается последовательность байтов UTF-8 без предварительной обработки.

Для дообучения модели ByT5-small и ее последующего использования был написан программный модуль на языке Python 3. Дообучение происходило на сформированном нами наборе русскоязычных данных из социальной сети Twitter. Процесс разметки набора состоял из двух этапов: первый этап осуществлялся автоматически с использованием ChatGPT (большой генеративной языковой модели, разработанной OpenAI), второй этап включал ручную корректировку полученных результатов. Таким образом был собран набор из 1115 предложений, содержащих более 10800 слов.

После дообучения модели было проведено экспериментальное исследование ее работы и вычислены значения метрик accuracy, precision, recall, f1-мера и ERR. Полученные результаты сравнивались с результатами работы Yandex Speller (инструмента Yandex, позволяющего находить и исправлять орфографические ошибки) и модели ChatGPT. Сравнение показало, что качество работы нашего программного модуля существенно превосходит качество работы Yandex Speller и ChatGPT, что говорит о перспективности его использования для решения задачи лексической нормализации на русском языке.

Литература

1. Xue L. et al. ByT5: Towards a token-free future with pre-trained byte-to-byte models //Transactions of the Association for Computational Linguistics. – 2022. – Т. 10. – С. 291-306.
2. Roberts A. et al. Exploring the limits of transfer learning with a unified text-to-text transformer //Google, Tech. Rep. – 2019.

СВОЙСТВА ГРУППОИДА И ПОЛУГРУППЫ КОНЕЧНОГО АВТОМАТА PRI

Вылиток А.А.¹, Мельников Б.Ф.², Мэн Линцянь³,

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АЯ, e-mail: vylitok@cs.msu.ru

2) Факультет ВМК Университета МГУ-ППИ в Шэньчжэне, e-mail:

bormel@smbu.edu.cn

3) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АЯ, e-mail:

kostya45e@mail.ru

Проверка эквивалентности бесконечных цепочек, заданных итерацией конечного множества слов ограниченной длины, является актуальной задачей, и для поиска эффективного решения может быть полезен конечный автомат PRI, представленный в работе [1]. Применение теории полугрупп в исследовании автомата PRI рассмотрено в [2], и еще один частный случай изложен в [3].

В данном докладе представлены свойства полученных группоидов и полугрупп различных вариантов конечного автомата PRI. В автоматах PRI для отношения покрытия двух языков выявлены важные параметры для создания вариантов автомата PRI, такие как порядок языков и вид множества состояний. Рассматриваются группоиды и полугруппы автомата PRI с разными порядками языков и с разными видами множества состояний, и описываются свойства для полугрупп, полученных на основе группоида: ряды степеней элемента полугруппы, идемпотенты, подполугруппы, а также бинарное отношение, определенное для сочетания двух состояний.

Приводятся оценки сложности алгоритмов, используемых при построении группоида и проверке свойств полугруппы. Устанавливается достаточное условие существования полугруппы для заданного языка. Для изучения больших примеров создана программная система, пополняемая новыми возможностями для изучения полугруппы автомата PRI. Важнейшим направлением дальнейшей работы является установление критерия существования полугруппы в терминах заданных языков.

Литература

1. Мельников Б.Ф. Варианты конечных автоматов, соответствующих бесконечным итерационным деревьям морфизмов. Часть I // International Journal of Open Information Technologies. – 2021. Vol.9. No.7. P.5-13.
2. Мэн Линцянь, Мельников Б.Ф., Вылиток А.А. Построение и исследование полугруппы конечного автомата PRI // Тезисы докладов научной конференции «Тихоновские чтения» – 2023, Москва, ООО «МАКС Пресс». С. 105–105.
3. Мэн Л., Мельников Б.Ф. О группоиде первичного автомата PRI, определяемом для одного конечного языка // International Journal of Open Information Technologies. – 2023. Vol.11. No.9. P.1-12.

СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ И МЕТОДЫ ОЦЕНКИ БИОЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЛЕКАРСТВЕННЫХ СРЕДСТВ

Захарова Т.В.¹, Панов П.В.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Кафедра математической статистики,
e-mail: tvzaharova@mail.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Кафедра математической статистики
e-mail: mazeinmind@yandex.ru

В работе рассматривается задача проверки лекарственных препаратов на биоэквивалентность. Исследования биоэквивалентности лежат в основе воспроизведения лекарственных препаратов, подтвердивших свою эффективность и безопасность. Основным методом проверки гипотезы биоэквивалентности является процедура двух односторонних тестов Шуирманна. Два односторонних теста по отдельности контролируют ошибку первого рода для каждой границы доверительного интервала, и в совокупности контроль осуществляется на уровне, равном α .

Этот метод используется в течение многих лет и подтвердил свою пригодность для доказательства эквивалентной биодоступности. Но в случаях, когда данные неполны, т.е. когда есть пропущенные значения или выборка малого объема стандартный анализ может стать несостоятельным или менее эффективным. Пропуски могут повлиять на оценку средних значений и дисперсий параметров, что критично для метода Шуирманна, который является чувствительным к неверным предположениям модели. И ошибка первого рода уже не контролируется. Авторами предлагается в дополнение к традиционным методам исследовать распределения анализируемых данных и учитывать расхождение между двумя вероятностными распределениями фармакокинетических параметров лекарственных препаратов.

В работе показано использование меры Кульбака-Лейблера (KL-дивергенции) для сравнения распределений данных в контексте биоэквивалентности. Если KL-дивергенция между распределениями мала, можно предположить, что препараты имеют схожие профили. Эта мера не требует предположений о форме распределений (нормальность и т.д.), что является преимуществом, когда данные не соответствуют стандартным предположениям, и может быть использована при проверке малых и, зачастую, неоднородных выборок.

Литература

1. Schuirmann D.J. A comparison of the Two One-Sided Tests procedure and the power approach for assessing the equivalence of average bioavailability // J. Pharmacokinetics and Biopharmaceutics. 1987. 15, P. 657–680.
2. Драницына М. А., Захарова Т. В., Панов П. В. Проверка гипотез биоэквивалентности лекарственных препаратов // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2023. — № 4. — С. 33–40.

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Захарова Т.В.¹, Савушкин Е.В.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ТВуМС, e-mail:

Tvzaharova@gse.cs.msu.ru

2) АКЦ ФИАН им. Лебедева, e-mail: Evsavush@yandex.ru

Тема определения условий существования и единственности сильных решений стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) является одной из центральных в теории СДУ и имеет много значимых наработок. Основным результатом является классическая теорема Ито¹, позже обобщенная Ватанабе², Звонкиным³ и Веретенниковым⁴. Также активно развиваются направления, в которых исследуется существование и единственность решений для более сложных условий и процессов, например, для дробного броуновского движения, для процессов Леви, для СДУ на искривленных многообразиях, для СДУ в бесконечномерных пространствах.

Сильное решение стохастического дифференциального уравнения — это решение, которое строится на заданном вероятностном пространстве и фиксированном броуновском процессе. Не всегда удается гарантировать существование сильного решения СДУ. Цель данной работы расширить класс задач, для которых существует единственное сильное решение СДУ:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, 0 < t < T. \quad (1)$$

В исследовании был использован классический метод последовательных приближений, мартингалное неравенство Новикова⁵ и различные оценки типа Йенсена для вогнутых функций.

В работе сформулирована следующая теорема. Пусть функции b и σ удовлетворяют условиям: $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L|x - y|$; $x, y \in R, t \in [0, T]$, $|b(t, x)|^p + |\sigma(t, x)|^p \leq c(1 + |x|^p)$, $x \in R, c > 0, t \in [0, T], 1 < p < 2$. Пусть величина Z является $\mathfrak{F}_0$ -измеримой, причем $EZ^p < \infty, 1 < p < 2$. Тогда существует и единственно сильное решение СДУ (1) с начальным условием $X_0 = Z$, такое что $X_t \in L_p(\Omega)$ для любого $t \in [0, T]$ и при $1 < p < 2$ функция EX_t^p ограничена и непрерывна на $[0, T]$.

Сначала доказывается, что последовательные приближения являются прогрессивно измеримыми, принадлежат классу L_p и образуют фундаментальную последовательность в L_p , далее показывается, что они сходятся к решению, которое само является прогрессивно измеримым, принадлежит классу L_p , а также является непрерывным и единственным.

Литература

1. Булинский А.В. Ширяев А.Н. Теория случайных процессов //М: Физматлит. 2005. с.261-265.
2. Yamada T. Watanabe S. On the Uniqueness of Solutions of Stochastic Differential Equations //J. Math. Kyoto Univ. – 1971 – V.11. p.155-167.
3. Звонкин А.К. Преобразование фазового пространства диффузионного процесса, уничтожающее снос // Матем. сб. – 1974 – т.93 (135). №1. с.129–149.
4. Веретенников А.Ю. О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений //Теория вероятн. и ее примен. – 1979 – т.24. №2. с.348–360.
5. Novikov A.A. On Moment Inequalities for Stochastic Integrals//Theory of Probability and Its Applications – 1971 – V.16 (3). p.538–541.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СВОЙСТВА КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ БИОЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Захарова Т.В.¹, Клименко В.К.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Математической статистики,
e-mail: tvzaharova@mail.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Математической статистики,
e-mail: klimenkoprak@mail.ru

Проверка гипотезы биоэквивалентности — это важный этап в процессе выхода нового лекарственного препарата (тестового), основанного на том же активном веществе, что и уже существующий (референтный), на рынок. Гипотеза биоэквивалентности заключается в том, что средние значения логарифмов фармакокинетических переменных, ассоциированных с тестовым и референтным препаратами, достаточно близки (не обязательно равны).

Учитывая малые размеры выборки в клинических испытаниях, задача чувствительна к потере данных. В работе доказано утверждение о том, что использование определённых методов импутации приводит к росту вероятности ошибки первого рода, которая отражает риск потребителя, за пределы номинального уровня α . Также даётся оценка, показывающая, что новая вероятность ошибки первого рода ограничена значением $\alpha + \alpha'$, где размер добавки α' зависит от степени пропуска данных.

Для решения проблемы роста размера критерия при наличии пропуска данных предлагается метод построения критерия для ситуации с неполными данными, основанном на критерии для полных данных, именованный методом интервальных оцениваний. Метод заключается в построении семейства множеств, параметризованных непропущенными наблюдениями, которые с высокой вероятностью покрывают истинное значение статистики критерия на полных данных (множества покрытия), и выборе решения о принятии или отвержении гипотезы биоэквивалентности, основываясь на взаимном отношении наблюдаемого множества покрытия и критической области оригинального критерия (не пересекаются, пересекаются частично, одно содержит другое). Сформулированы и доказаны неравенства для размера и мощности нового критерия, требуемые для корректировки параметров и поддержания уровня критерия под номинальным уровнем α .

Литература

1. Roger L. Berger, Jason C. Hsu. Bioequivalence Trials, Intersection-Union Tests and Equivalence Confidence Sets //Statistical Science 1996. Vol. 11, No. 4. pp. 283-319.
2. Margarita A. Dranitsyna, Victor K. Klimenko, Pavel V. Panov, and Tatyana V. Zakharova. Assessing the bioequivalence of two different drugs with the same active ingredient //BIOKYBERNETIKA. 2024. Mathematics for Theory and Control in the Human and in Society, p. 643-652. (в печати).
3. Т.В. Захарова, А.А. Тархов. Оценка уровня значимости критерия Шуирманна для проверки гипотезы биоэквивалентности при наличии пропущенных данных //Информатика и её применения. 2019. Т.12. Вып. 3.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОГО РИСКА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДОВ МНОЖЕСТВЕННОЙ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ В УСЛОВИЯХ ЗАВИСИМОСТИ НАБЛЮДЕНИЙ

Воронцов М.О.^{1,2}, Шестаков О.В.^{1,2,3}

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической статистики, e-mail: m.vtsov@mail.ru, oshestakov@cs.msu.ru

2) Московский центр фундаментальной и прикладной математики

3) Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук

В ряде современных прикладных проблем (задачи обработки изображений, анализ аудиопотоков, задачи анализа надежности сложных систем и пр.) требуется обрабатывать большие массивы зашумленных данных. Часто массив зашумленных данных можно представить в виде вектора $x = \mu + z$, где μ – неизвестный вектор истинных данных, а z – вектор шума (в докладе его компоненты имеют распределение $N(0, \sigma^2)$). Популярна ситуация, когда большинство элементов вектора μ незначимы (μ_i близко или равно нулю для большинства индексов i) – массив данных в таком случае называется разреженным. Соответственно, возникает задача выявления значимых элементов массива, заключающаяся в построении оценки $\hat{\mu}$ вектора μ , у которой большинство компонент равны нулю. Данная задача в рассматриваемой модели эквивалентна задаче множественной проверки гипотез.

В работе [1] для решения задачи множественной проверки гипотез был предложен метод (алгоритм Бенжамини-Хохберга), основанный на идее контроля ожидаемой доли ложных отклонений (false discovery rate, FDR) гипотез. В работе [2] в предположении о разреженности вектора данных и независимости его компонент для данного метода было проведено исследование асимптотики среднеквадратичного риска $R = \mathbb{E} \|\hat{\mu}_F - \mu\|^2$ построенной оценки. В то же время в ряде приложений (например, исследования геофизических процессов и анализ помех в телекоммуникационных каналах) вектор данных может иметь зависимые компоненты.

В настоящем докладе приводятся результаты исследования асимптотики среднеквадратичного риска R и его оценки $\hat{R}$ при использовании FDR-метода решения задачи выявления значимых признаков в случае, когда вектор μ принадлежит одному из классов разреженности L_0 или L_p , а вектор z имеет слабо зависимые компоненты.

Литература

1. Benjamini Y., Hochberg Y. Controlling the false discovery rate: a practical and powerful approach to multiple testing //Journal of the Royal Statistical Society Series (1995) 57. № 1. P. 289–300.
2. Abramovich F., Benjamini Y., Donoho D., Johnstone I. Adapting to Unknown Sparsity by controlling the False Discovery Rate //The Annals of Statistics (2006) 34. № 2. P. 584–653.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СООБЩЕНИЙ ПРИ ДЕКОДИРОВАНИИ КОДОВ С НИЗКОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ПРОВЕРОК НА ЧЕТНОСТЬ

Наволоцкий А.А.¹, Шевцова И.Г.², Берговин А.К.³

- 1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической статистики, аспирант, e-mail: alexey@navolotsky.com
- 2) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической статистики, профессор, e-mail: ishevtsova@cs.msu.ru
- 3) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической статистики, ассистент, e-mail: alexey.bergovin@gmail.com

Цель данной работы — разработка метода более точного определения порога шума для кодов с низкой плотностью проверок на четность (LDPC). Основная идея заключается в уточнении вида распределений сообщений в процессе работы декодера. В классическом подходе распределения аппроксимируются нормальными законами, однако это приближение может быть недостаточно точным.

Для достижения поставленной цели проведены симуляции Монте-Карло, позволяющие получить реальные распределения сообщений в *variable* и *check* узлах графа Таннера. Анализ показал, что эти распределения существенно отличаются от нормального и зависят от конкретных условий и этапов процесса декодирования. В разных случаях наблюдаются распределения различной формы, требующие индивидуального подхода к аппроксимации.

В ходе исследования были предложены модельные распределения свернутого нормального (*folded normal*) для узлов *variable* и модифицированного усеченного нормального (*truncated normal*) для узлов *check*, предложены и применены способы подбора их параметров. Для других случаев эффективным оказалось применение преобразования Лапласа. Это позволило получить аппроксимации, более точно описывающие реальные распределения сообщений в узлах графа Таннера без дополнительных модельных предположений.

Полученные результаты способствуют повышению точности определения порога шума для LDPC-кодов, что непосредственно влияет на улучшение их корректирующей способности в системах передачи данных. Исследованы аналитические свойства полученных распределений, что открывает возможности для дальнейшей оптимизации алгоритмов декодирования.

Литература

1. Shevtsova I.G. Approximating densities in the message passing algorithm for decoding LDPC – 2024

НЕЙРОСЕТЕВЫЕ АНАЛОГИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ МАРКОВА В ЗАДАЧАХ СЕГМЕНТАЦИИ ОБЪЕКТОВ НА СПУТНИКОВЫХ СНИМКАХ

Достовалова А.М.¹, Горшенин А.К.²

1) ФИЦ ИУ РАН, ВМК МГУ, кафедра математической статистики, e-mail:

adostovalova@frccsc.ru

2) ФИЦ ИУ РАН, ВМК МГУ, кафедра математической статистики, e-mail:

agorshenin@frccsc.ru

Одной из важнейших прикладных задач спутникового мониторинга Земной поверхности является обнаружение на снимках малоразмерных объектов заданного типа. Для решения такой задачи эффективно применение современных нейросетевых алгоритмов (нейронных сетей, НС), например, для обнаружения и сегментации объектов [1]. Однако если объем доступных данных для обучения сети недостаточен, точность таких алгоритмов может быть низкой, особенно в ситуации несбалансированности разделяемых классов, состоящих из объектов и фона.

Алгоритмы, использующие представления изображений в виде случайных полей Маркова, в том числе квадродеревья, известны своей эффективностью в комбинации с результатами НС для сегментации снимков [2]. Однако существующие алгоритмы представляют собой композицию методов, а не единую обучаемую нейросетевую архитектуру, что не позволяет в полной мере использовать обобщающую способность глубоких НС для обработки вероятностных представлений данных.

Для устранения указанного недостатка предложен нейросетевой аналог модели квадродерева. Система связей между его элементами в разработанной архитектуре реализована с помощью последовательности графово-сверточных слоев [3], использующих матрицу смежности квадродерева. Также используется дополнительный слой обрезки ветвей для усиления сходства между элементами однородных областей снимка в разных пространственных разрешениях и уменьшения влияния на результат шумов и искажений.

Разработанная архитектура протестирована в задаче повышения точности сегментирования малоразмерных объектов на открытых радиолокационных изображениях (данные Sentinel-1 и HRSID). Предварительно обученная архитектура U-Net использована для предобработки снимков и формирования набор признаков из исходных увеличенных в два раза изображений для передачи их в качестве входных данных графово-сверточной сети. Результаты обработки тестовых изображений продемонстрировали повышение точности сегментирования малых объектов в сравнении с результатами базовой U-Net: значение метрики F_1 увеличено на 3,59 %.

Литература

1. Sun Z., Geng H., Lu Z., Scherer R., Woźniak M. Review of Road Segmentation for SAR Images // Remote Sensing (2021) **13**, № 5, Art no 1011.
2. Pastorino M., Moser G., Serpico S.B., Zerubia J. Semantic Segmentation of Remote-Sensing Images Through Fully Convolutional Neural Networks and Hierarchical Probabilistic Graphical Models // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing (2022) **60**, P. 1–16.
3. Zhang S., Tong H., Xu J. et al. Graph Convolutional Networks: a Comprehensive Review // Comput. Soc. Netw. (2019) **6**, № 11, P. 94–104.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СОВМЕСТНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОДЫ, ПОТОКОВ ТЕПЛА И АТМОСФЕРНОГО ДАВЛЕНИЯ В СЕВЕРНОЙ АТЛАНТИКЕ

Осипова А.А.¹, Горшенин А.К.², Беляев К.П.³

1) ФИЦ ИУ РАН, ВМК МГУ, кафедра математической статистики, e-mail:

osipova.anastasiya.2020@gmail.com

2) ФИЦ ИУ РАН, ВМК МГУ, кафедра математической статистики, e-mail:

agorshenin@frccsc.ru

3) ИО РАН, ВМК МГУ, кафедра математической статистики, e-mail: kosbel55@gmail.com

В работе впервые предложено использование разложения Карунена-Лозва [1] на собственные вектора для совместного статистического анализа суммарного потока тепла между океаном и атмосферой, температуры поверхности океана и атмосферного давления в задаче моделирования указанных процессов в пространстве и времени на основе стохастического дифференциального уравнения Ито [2]:

$$dX = a(t, X)dt + b(t, X)dW(t). \quad (1)$$

Здесь $X = (X_1, X_2)$ – случайный процесс, значения которого в фиксированный момент времени t имеют смысл вектора значений пар (не обязательно различных) из набора трех величин: суммы явного и скрытого потоков тепла, температуры поверхности океана и атмосферного давления в рассматриваемой географической точке, $a(t, X)$ и $b(t, X)$ – случайные коэффициенты сноса и диффузии, зависящие от времени и значений рассматриваемой тройки, $W(t)$ – винеровский процесс, не зависящий от процесса X .

Используя представление модели (1) в дискретной форме, можно записать разложение приращений данных величин на собственные вектора и собственные значения в виде:

$$X(t + \Delta t) = X(t) + a(t, X)\Delta t + \sum_{i=1}^N \lambda_i e_i \eta_i, \quad (2)$$

где $\eta_i = (e_i, W(t + \Delta t) - W(t))$ – случайная величина, представляющая собой скалярное произведение векторов e_i и $W(t + \Delta t) - W(t)$, являющаяся гауссовой случайной величиной с нулевым средним и дисперсией, равной Δt , $e_1, \dots, e_N$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ – наборы собственных векторов и соответствующим им собственным значениям.

В результате анализа полученных значений доминирующих собственных векторов и их отображения на рассматриваемую географическую область были выделены паттерны формирования и эволюции во времени волн теплового взаимодействия, области захвата тепла и области взаимодействия различных уровней давления.

Литература

1. Iemma, U., Diez, M., Morino, L., 2006. An extended Karhunen-Loeve decomposition for modal identification of inhomogeneous structures // Journal of Vibration and Acoustics – 2006. – Vol. 128. – P. 357–365.
2. Gorshenin A.K., Osipova A.A., Belyaev K.P. Stochastic analysis of air–sea heat fluxes variability in the North Atlantic in 1979–2022 based on reanalysis data // Computers & Geosciences. – 2023. – Vol. 181. – N. 105461.

ОБ ОДНОМ МНОГОМЕРНОМ АНАЛОГЕ ЛОГИСТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Хохлов Ю.С.

*МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической статистики,
e-mail: yskhokhlov@yandex.ru*

Одномерное логистическое распределение очень популярно во многих прикладных статистических исследованиях в силу своих хороших аналитических свойств, которые позволяют получать ответы в явном виде для интересующих нас вопросов. Это сближает его с одномерным гауссовским распределением. Хотелось бы и в многомерном случае найти аналог логистического распределения. В работах различных авторов было предложено несколько различных вариантов определения такого многомерного логистического распределения.

В нашем докладе будет дан некоторый обзор имеющихся моделей. Но в основном мы сосредоточимся на модели, предложенной в работе (Malik and Abraham. 1973). Будет предложено некоторое обобщение модели и исследованы ее свойства. В частности, доказано, что любой подвектор имеет распределение такого же типа и исследованы свойства регрессионной модели, основанной на таком распределении. Показано, что эти свойства очень похожи на свойства регрессионной модели с гауссовским распределением.

Это исследование было проведено в соответствии с научной программой Московского центра фундаментальной и прикладной математики и факультета вычислительной математики и кибернетики Московского университета.

Литература

1. H.J. Malik and B. Abraham. Multivariate Logistic Distributions. //The Annals of Statistics. 1973, Vol.1, No. 3, 588-590.
2. L.A. Stefanski. A normal scale mixture representation of the logistic distribution. //Statistics & Probability Letters 11(1990), 69-70.
3. N. Balakrishnan. Handbook of logistic distribution. // Boca Raton: CRC Press – 1992.