ЛОГИКА

Научная статья

УДК 162

doi: 10.55959/MSU0201-7385-7-2024-4-56-73

О ПРОБЛЕМЕ СИМУЛЯЦИИ ПАРАНЕПРОТИВОРЕЧИВЫХ И ПАРАПОЛНЫХ ОТРИЦАНИЙ

О.М. Григорьев[1, 2], А.А. Беликов[1, 3]

[1] Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119991, Ленинские горы, МГУ, учебно-научный корпус «Шуваловский», г. Москва, Россия

[2] Институт логики, когнитологии и развития личности, 129110, просп. Мира, 70 А, стр. 2, к. 41, г. Москва, Россия

[3] Санкт-Петербургский государственный университет, 199034, Университетская наб., 7–9, г. Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. В работе исследуется возможность семантического моделирования таких унарных связок, чья двойная итерация была бы способна симулировать свойства других унарных связок: классического, паранепротиворечивого, параполного и парадефинитного отрицаний. В частности, нами предлагается несколько разновидностей формальной семантики, в рамках которой унарная связка типа отрицания ~ удовлетворяет критериям парадефинитного отрицания, а ее двойная итерация, то есть ~~, ведет себя в точности как отрицание в параполной трехзначной логике Клини.

Ключевые слова: отрицание, коннегация, паранепротиворечивость, параполнота, трехзначная логика

Благодарности/Финансирование

Часть исследования, выполненная О.М. Григорьевым, осуществлена в рамках проекта № 23-28-00801, финансируемого Российским научным фондом. Часть исследования, выполненная А.А. Беликовым, осуществлена в рамках проекта № 20-18-00158, финансируемого Российским научным фондом и проводимого в Санкт-Петербургском государственном университете.

LOGIC

Original article

ON THE PROBLEM OF SIMULATION OF PARACONSISTENT AND PARACOMPLETE NEGATIONS

O.M. Grigoriev[1, 2], A.A. Belikov[1, 3]

[1] Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, Moscow, Teaching and Scientific Building "Shuvalovsky", 119991, Russia

[2] Institute for Logic, Cognitive Science and Development of Personality, Moscow, prosp. Mira, 70 A, 2, 41, 129110, Russia

[3] Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Universitetskaya nab., 7–9, 199034, Russia

Abstract. In this paper, we study the possibility of semantic modelling of such unary propositional connectives whose double iteration would be able to simulate the properties of other propositional connectives: classical, paraconsistent, paracomplete and paradefinite negations. In particular, we propose several varieties of formal semantics in which a negation-like connective ~ satisfies the criteria of paradefinite negation, and its double iteration, that is ~~, behaves exactly like the negation of paracompletee three-valued Kleene logic.

Keywords: negation, connegation, paraconsistency, paracompleteness, three-valued logic

Acknowledgments/Financial Support

Grigoriev O.M. is supported by Russian science foundation, project № 23-28-00801. Belikov A.A. is supported by Russian science foundation project № 20-18-00158, carried in Saint-Petersburg State University.

Введение

Попытки комбинировать свойства различных неклассических логик в рамках одной логической теории — это давняя тенденция в философской логике, но она по-прежнему остается популярной. Хорошо известны примеры таких логических теорий, которые являются одновременно и многозначными и модальными [13] или, скажем, конструктивными с точки зрения определения условной связи, но при этом паранепротиворечивыми с точки зрения определения отрицания [12].

Еще более интересным представляется вопрос о том, можно ли средствами языка одной логической теории представлять пропозициональные связки языка другой логической теории. Подобные результаты хорошо известны в модальной и временной логиках. Так, например, можно определять, причем различными способами, алетические модальности (возможность, необходимость) через временные и, таким образом, представить алетические модальные операторы посредством пропозициональных связок языка временной логики. Более того, для многих стандартных систем временной логики удается точно установить тип определяемой их синтаксическими средствами алетической модальности. Для этого внутри системы временной логики выделяется ее подсистема, называемая *модальным фрагментом.* Более детально этот вопрос изложен, например, в монографии [2].

Ряд интересных результатов в этом направлении уже был получен относительно недавно в работах [4; 10; 11; 14]. Там среди прочего изучены свойства такой одноместной пропозициональной связки ~, которая обладает свойствами паранепротиворечивого и параполного отрицания (парадефинитного отрицания), но двойная итерация этой связки, имеющая вид ~~, обладает свойствами отрицания классической логики.

В настоящей работе предпринята попытка обобщить эти результаты и предложить подход к построению формальной семантики, в рамках которой появилась бы возможность определить связку ~ таким образом, чтобы сама она удовлетворяла критерию паранепротиворечивого и параполного отрицания, а ее двойная итерация обладала бы свойствами уже не классического, а паранепротиворечивого или параполного отрицания.

Разновидности отрицаний

Существует множество подходов к формальной экспликации смыслового содержания логических терминов естественного языка. В нашей работе мы преимущественно заинтересованы в анализе именно тех логических терминов, которые используются для образования сложных высказываний. Нас не будут интересовать, например, кванторные слова и подобные термины, которые тоже принято относить к категории логических терминов. Стандартная для современной логики методология изучения логических терминов предполагает построение формальных теорий, где эти термины в результате процедуры абстракции и формализации представлены как некие формальные объекты. Другими словами, каждый интересующий нас логический термин естественного языка мы можем сопоставить с некоторым специально сконструированным объектом в рамках формальной теории, который, по нашей задумке, является формальной моделью логического термина.

К примеру, в русском языке есть союз "если…, то…", и он, как правило, используется говорящими для выражения условной связи. В логике этот союз обычно рассматривается как логический термин, с помощью которого образуются условные высказывания (например, "*если нагреть воду до 100 градусов по Цельсию, то она закипит*"). Самый простой и известный способ его формальной экспликации – взять пропозициональный язык классической логики высказываний и постулировать, что в этом формализованном языке союз "если…, то…" представлен в виде бинарной логической связки, известной как материальная импликация. Такой методологический шаг позволяет перевести выражение естественного языка на язык формальной теории. Это, во-первых, дает возможность изолировать исследуемую проблему от затруднений, связанных с какими-то специфическими характеристиками естественного языка (многозначность, семантическая замкнутость и т.д.), а во-вторых, делает доступным применение точных и строгих методов анализа. Анализируя уже саму материальную импликацию, мы можем получать некоторые результаты о свойствах этого формального объекта и затем, интерпретируя эти результаты, выдвигать те или иные положения о свойствах того эмпирического объекта, который представлен материальной импликацией, то есть о свойствах союза "если…, то …" и условной связи в естественном языке.

Важно заметить, что эта стратегия может быть реализована по крайней мере двумя способами — семантическим и синтаксическим. Логические термины могут быть исследованы средствами как формальной семантики, так и логических исчислений. По мнению Н. Белнапа (см.: [5]), семантический метод исследования логических терминов можно отнести к категории *аналитических методов*, поскольку метод формальной семантики предполагает экспликацию смыслового содержания сложных высказываний, образованных с помощью этих терминов, через анализ смыслового содержания составных частей высказывания. Здесь существенную роль играет известный принцип экстенсиональности, введенный Г. Фреге. В свою очередь синтаксический метод Белнап относит к категории *синтетических методов*, потому что он предполагает экспликацию смыслового содержания логических терминов через анализ того, какую роль соответствующие сложные высказывания могут играть в контексте логического вывода, когда они выполняют функцию посылки или заключения[1].

[1] О трудностях, связанных с таким взглядом на методологию изучения логических терминов см. дискуссию А. Прайора и Н. Белнапа [5; 15].

Наша текущая задача состоит в том, чтобы дать достаточно емкое и удобное для последующей работы определение отрицания. Такое определение было бы удобным ориентиром в исследовании нашей главной проблемы — симуляции отрицания. А чтобы говорить о том, что та или иная логическая связка способна симулировать отрицание, надо иметь четкое представление о том, на какие именно существенные признаки отрицания мы должны ориентироваться. И здесь синтаксический метод кажется нам наиболее эффективным.

Применительно к отрицанию один из таких подходов был предложен в работах Дж.М. Данна [6; 7; 9]. Стоит заметить, что Данн предлагает классификацию, содержащую большое число отрицаний, но в контексте данной работы нас не будет интересовать это множество в его полном объеме. К примеру, не будут изучаться разновидности отрицания, которые слабее отрицания де Моргана и те варианты отрицания, которые с ним несравнимы; таким отрицанием является, например, интуиционистское отрицание. Мы же сконцентрируемся только на отрицании де Моргана и более сильных его расширениях. Поскольку отрицание де Моргана — одно из основных понятий, которое будет использовано нами в статье, ниже мы дадим точное его определение. За более полной информацией, касающейся различных видов отрицания и отношений между ними, читатель может обратиться к работам [6; 7; 9].

Из нашего обсуждения синтаксического метода экспликации смыслового содержания логических терминов вытекает, что существенным является использование некоторого формализованного языка, предназначенного для формального представления (формализации) логических терминов естественного языка. Поскольку нашей целью является получение формальных представлений отрицания, то необходимо использовать язык, в котором присутствует соответствующая отрицанию унарная логическая связка, его формальный аналог. Обозначим эту связку символом “$\neg$”. В принципе для формализации слабых отрицаний наподобие так называемого “субминимального отрицания” (см.: [6]) было бы достаточно выразительных возможностей пропозиционального языка с единственной связкой $\neg$. Однако выше мы уже заметили, что нас интересуют такие отрицания, которые не слабее отрицания де Моргана, а для его формализации равно, как и для формализации его расширений, нам необходим более богатый язык, содержащий, помимо связки $\neg$, две двухместные логические связки — конъюнкцию “&” и дизъюнкцию “$\vee$”. Договоримся также о том, что в алфавите этого пропозиционального языка есть технические символы “)” и “(“, множество всех пропозициональных переменных $\mathcal{P}$ задается счетно-бесконечным множеством символов p, q, r, … , а множество всех формул обозначается через $\mathcal{F}$ и определяется стандартным индуктивным методом. Заглавные латинские буквы A, B, C, … будем использовать как метапеременные для формул из $\mathcal{F}$. Определенный таким образом формализованный язык будем обозначать через $\mathcal{L}$.

Если синтаксический метод исследования отрицания основан на анализе того, какую роль высказывания с внешним отрицанием играют в контексте логического вывода, являясь его посылкой или заключением, то нам также предварительно необходимо иметь и некоторую теорию логического вывода. Для этих целей определим на множестве $\mathcal{F}$ отношение синтаксического следования $\vdash \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$. Содержательно отношение синтаксического следования можно понимать как формальный аналог правильного дедуктивного умозаключения, которое в качестве посылки содержит какое-то высказывание, а в качестве заключения также содержит какое-то высказывание[2]. Предполагается также, что отношение синтаксического следования удовлетворяет всем минимальным требованиям, которые позволяют охарактеризовать его как отношение следования, *по Тарскому* (см.: [16, 1229]). В нашем контексте такими требованиями являются следующие свойства рефлексивности и транзитивности для любых A, B и C из $\mathcal{F}$:

$$A \vdash A, \qquad \text{(ref)}$$

$$\frac{A \vdash B,\ B \vdash C}{A \vdash C}, \qquad \text{(tran)}$$

а также свойство структурности (где s(X) означает функцию подстановки формул из $\mathcal{F}$ вместо формулы X)

$$\frac{A \vdash B}{s(A) \vdash s(B)}, \qquad \text{(str)}$$

Наконец, мы можем изучать проблему классификации различных отрицаний, в том числе дополняя уже существующие[3].

Начнем с обсуждения неформальных свойств отрицания. Одним из таких базовых свойств является то, что отрицание традиционно

---

[2] Заметим, что более традиционный подход к определению отношения логического вывода предполагает, что это отношение между множеством формул и формулой. Существуют также и другие подходы к пониманию структуры отношения логического вывода. Более подробно см. работу Дж.М. Данна и Г. Хардегри [8].

[3] Наиболее широко известна классификация отрицаний, предложенная Дж.М. Данном в работе: [6].

понимается как логическая связка, формирующая противоречие. Другими словами, если мы в контексте рассуждения имеем дело с каким-то высказыванием A, то выражение ¬A обозначает такое высказывание, что оно не может быть совместимо ни по истинности, ни по ложности с изначальным высказыванием A. Таким образом, выражения A и ¬A формируют противоречивую пару.

Пожалуй, самым привычным отрицанием является отрицание в классической логике. Однако хорошо известно, что оно в некотором смысле избыточно. Эта избыточность проявляется в том, что классическая логика содержит дедуктивный принцип, известный под названием "из противоречия следует все что угодно".

$$(A \mathbin{\&} \neg A) \vdash B. \tag{efq}$$

С неформальной точки зрения, этот принцип может быть истолкован так, что классическое отрицание несет в себе избыточную информацию, и поэтому противоречие, формируемое таким отрицанием, является настолько информативным, что его достаточно для обоснования любого высказывания[4].

Общезначимость (efq) в классической логике имеет нежелательные следствия философского характера. Во-первых, наличие этого принципа в классической логике говорит о том, что отношение логического следования не удовлетворяет критерию релевантности, ведь получается, что из любых противоречащих друг другу высказываний можно вывести вообще любое высказывание, которое может быть абсолютно не релевантным по смыслу. Во-вторых, общезначимость (efq) в классической логике делает классическую логику непригодной для развития на ее базе прикладных теорий, которые направлены на анализ потенциально противоречивых баз данных. Действительно, ведь наличие в универсуме рассуждения двух противоречивых высказываний моментально сделает такую теорию тривиальной — в ней можно будет логически обосновать любое высказывание.

Тем не менее эта проблема может быть решена путем ослабления классического отрицания за счет отвержения принципа (efq). Такая стратегия используется в рамках так называемых паранепротиворечивых логик, а само отрицание в таких логиках называют паранепротиворечивым.

Определение 1. Пусть L=<$\mathcal{F}$, ⊢> есть логическая теория, сформулированная в языке $\mathcal{L}$. Тогда связка ¬ называется *паранепротиворе-*

[4] Более подробно об интерпретации этого и других принципов классической логики в терминах информативности см. в работе Е.К. Войшвилло [1].

чивой, если существуют такие формулы A и B из $\mathcal{F}$, что $(A \mathbin{\&} \neg A) \nvdash B$ в L.

Продолжим наше до некоторой степени неформальное обсуждение классического отрицания. Поскольку в классической логике два противоречащих друг другу высказывания A и ¬A не могут быть совместимыми ни по истинности, ни по ложности, это означает, что всегда, когда одно из них ложно, второе является истинным, и когда одно из них истинно, то второе является ложным. Другими словами, в классической логике для любого высказывания верно, что или оно само является истинным, или его отрицание. Обычно данный принцип формально выражается в виде закона исключенного третьего.

$$B \vee \neg B. \tag{lem}$$

При стандартном определении отношения логического вывода как отношения между множеством формул и формулой (lem) просто является тождественно-истинной формулой, поскольку она является следствием пустого множества формул. Напомним, однако, что в рамках нашего подхода структура отношения ⊢ несколько отличается от традиционного отношения выводимости. Ранее мы определили ⊢ как отношение между формулой и формулой, то есть в качестве релятов этого отношения не может выступать пустое множество формул. В этом контексте (lem) может быть переформулирован в виде другого хорошо известного дедуктивного принципа, который тоже классически общезначим.

$$A \vdash (B \vee \neg B), \tag{veq}$$

Обратим внимание, что (veq) также может быть подвергнут критике, поскольку он тоже не отвечает критерию релевантности логического следования. С содержательной точки зрения, этот принцип обычно интерпретируется как утверждение о том, что логический закон является следствием произвольного высказывания. Однако, как и в случае с (efq), этот принцип может быть отброшен, что приводит нас к так называемым параполным логикам и параполному отрицанию.

Определение 2. Пусть $L = \langle \mathcal{F}, \vdash \rangle$ есть логическая теория, сформулированная в языке $\mathcal{L}$. Тогда связка ¬ называется *параполной*, если существуют такие формулы A и B из $\mathcal{F}$, что $B \nvdash (A \vee \neg A)$ в L.

Итак, очевидно, что отрицание в классической логике не удовлетворяет ни определению 1, ни определению 2. Значит, классическое отрицание не является ни паранепротиворечивым, ни параполным.

При этом надо заметить, что понятия паранепротиворечивости и параполноты не исключают друг друга. Отсюда следует, что возможно и еще более слабое отрицание, которое является как паранепротиворечивым, так и параполным. Одним из наиболее известных таких отрицаний является так называемое отрицание де Моргана. Оно определяется следующими дедуктивными свойствами, для любых A и B из $\mathcal{F}$:

$$(\neg A \,\&\, \neg B) \vdash \neg(A \vee B), \tag{dm1}$$

$$\neg(A \vee B) \vdash (\neg A \,\&\, \neg B), \tag{dm2}$$

$$(\neg A \vee \neg B) \vdash \neg(A \,\&\, B), \tag{dm3}$$

$$\neg(A \,\&\, B) \vdash (\neg A \vee \neg B), \tag{dm4}$$

$$\neg\neg A \vdash A, \tag{dn1}$$

$$A \vdash \neg\neg A. \tag{dn2}$$

Разумеется все эти принципы являются классически общезначимыми — это хорошо известные законы де Моргана и законы снятия и введения двойного отрицания. Таким образом, отрицание де Моргана может быть охарактеризовано как ослабление классического отрицания за счет отбрасывания (efq) и (veq). В этом смысле отрицание де Моргана является как паранепротиворечивым, так и параполным. Для удобства мы также можем охарактеризовать его как парадефинитное отрицание в соответствии с нижеследующим определением.

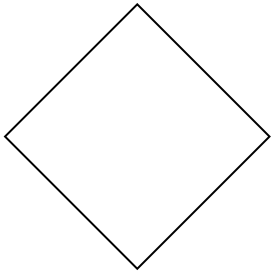
Определение 3. Пусть L=<$\mathcal{F}$, ⊢> есть логическая теория, сформулированная в языке $\mathcal{L}$. Тогда связка ¬ называется *парадефинитной*, если она паранепротиворечивая и параполная[5].

Существуют и более слабые отрицания, которые могут быть получены за счет отбрасывания самих законов де Моргана и законов двойного отрицания, однако, как мы замечали выше, в данной работе они не будут нас интересовать.

Подводя итог данного раздела, отметим, что за счет отбрасывания характеристических принципов классического отрицания (efq) и (veq) можно получить три вида неклассического отрицания. Отношения между ними и классическим отрицанием могут быть представлены в виде следующей диаграммы.

[5] В этом определении используется термин «парадефинитный», введенный авторами статьи [3], однако в указанной работе этот термин понимается в несколько ином смысле.

Классическое отрицание:
отрицание де Моргана + (efq) + (veq)



Параполное отрицание:
отрицание де Моргана + (efq)

Паранепротиворечивое отрицание:
отрицание де Моргана + (veq)

Парадефинитное отрицание:
отрицание де Моргана

Классическая паранепротиворечивая логика

В работе [11] была предложена специфическая логическая система, которую автор назвал *классической паранепротиворечивой логикой*. С одной стороны, отрицание (обозначаемое далее как ~) в этой системе удовлетворяет приведенным выше критериям паранепротиворечивости и параполноты. С другой стороны, двойное отрицание (более точно — итерация связки ~) языка этой системы ведет себя в точности как отрицание в классической логике, то есть удовлетворяет следующим семантическим критериям.

1. $A \,\&\, {\sim}{\sim}A \vDash B$.
2. $B \vDash A \vee {\sim}{\sim}A$.
3. ${\sim}{\sim}A \,\&\, {\sim}{\sim}B \vDash {\sim}{\sim}(A \vee B)$.
4. ${\sim}{\sim}(A \vee B) \vDash {\sim}{\sim}A \,\&\, {\sim}{\sim}B$.
5. ${\sim}{\sim}A \vee {\sim}{\sim}B \vDash {\sim}{\sim}(A \& B)$.
6. ${\sim}{\sim}(A \,\&\, B) \vDash {\sim}{\sim}A \vee {\sim}{\sim}B$.
7. ${\sim}{\sim}{\sim}{\sim}A \vDash A$.
8. $A \vDash {\sim}{\sim}{\sim}{\sim}A$.

Достигается этот эффект за счет небольшой модификации стандартной функции оценки пропозициональных переменных. Напомним, что в классическом случае сначала определяется базисный случай, когда множество пропозициональных переменных $\mathcal{P}$ отображается в множество истинностных значений $\{0, 1\}$, а затем оценка расширяется на сложные формулы стандартным образом. Отношение логического следования в классическом случае определяется через сохранение истины, то есть 1. Теперь нужно расширить оценку *в базисном случае* на множество так называемых литералов, состоящее из всех пропозициональных переменных и их отрицаний, а также переопределить условия приписывания истинностных значений для сложных формул. Пусть Lit обозначает далее множество литералов, а v есть указанная функция оценки, то есть v: Lit $\rightarrow$ {0, 1}. Теперь можно легко подобрать такую оценку, что принцип (efq) нарушается на семантическом уровне. Достаточно положить $v(p) = v({\sim}p) = 1$, но $v(q) = 0$. Теперь $v(p \mathbin{\&} {\sim}p) = 1$, но $v(q) = 0$, логическое следование нарушается. Попутно заметим, что принцип (veq) также легко семантически опровергнуть, то есть при некоторой оценке, например, $v(p) = v({\sim}p) = 0$, $v(q) = 1$, получаем опровержение следования. В терминологии, введенной нами ранее, полученная при таком понимании оценки логическая система (автор называет ее **CP**) является скорее не паранепротиворечивой, а *парадефинитной* (paradefinite). Дальнейшие технические детали, связанные с этой логической системой, можно найти в статье [11], для нас же важны два обстоятельства: 1) базисная оценка литералов позволяет избавиться от парадоксальных принципов классического следования и 2) итерация связки ~ представляет (симулирует) отрицание классической логики.

Симуляция отрицаний трехзначных логик

Следующий естественный шаг в рамках данной исследовательской парадигмы предполагает построение таких логических систем, в которых можно представлять отрицания различных неклассических логик, в частности отрицания логических систем, которые квалифицируются как паранепротиворечивые или параполные.

Для начала условимся, что в контексте данной статьи будут рассматриваться только логические теории в пропозициональном языке. Для наших целей достаточно взять язык, обозначим его $\mathcal{L}_1$, алфавит которого содержит счетное множество пропозициональных переменных, связки ~, &, ∨, а также технические символы (и). Определение формулы стандартное. Также удобно отличать наш язык от “обычных” языков трехзначных логик хотя бы в отношении отрицания: знак ~ используется для одноместной связки языка $\mathcal{L}_1$, а ¬ соответствуют отрицаниям из языков иных трехзначных логик. Несколько упрощенно будем считать, что алфавит формализованного языка, в котором формулируются многие (по крайней мере, интересные в контексте данного изложения) трехзначные пропозициональные логики, содержит то же самое множество пропозициональных переменных, связки ¬, &, ∨ и →, а также технические символы (и). Существенной является семантическая интерпретация данных символов. Отсутствие в $\mathcal{L}_1$ связки $\rightarrow$ дает некоторую свободу от ассоциации с конкретной трехзначной логикой.

Произведем небольшую модификацию описанного выше метода и определим теперь оценку для множества литералов Lit как отображение в множество истинностных значений, принятое в трехзначных логиках: {0, ½ ,1}. Очевидно, что таким образом вновь легко получается семантическое опровержение для принципов (efq) и (veq). Однако для получения полноценной семантической конструкции языка нужно также указать и оценку для сложных формул.

Выпишем семантические правила приписывания значений сложным формулам. Оценка для A & B и A v B стандартная, а для сложных формул с внешней связкой ~ имеем следующие определения по случаям.

1. v(~~A) = 1, если v(A) = 0, v(~~A) = 0, если v(A) = 1, v(~~A) = ½ в иных случаях.
2. v(~(A & B)) = 1, если v(~A) = 1 или v(~B) = 1, v(~(A & B)) = 0, если v(~A) = 0 и v(~B) = 0, v(~(A & B)) = ½ в иных случаях.
3. v(~(A ∨ B)) = 1, если v(~A) = 1 и v(~B) = 1, v(~(A ∨ B)) = 0, если v(~A) = 0 или v(~B) = 0, v(~(A ∨ B)) = ½ в иных случаях.

Особенность такой оценки сложных формул в том, что здесь явным образом указывается на то, как ведет себя итерация связки ~, то есть ~~. Можно убедиться в том, что, в зависимости от выбора множества выделенных значений, ~~ симулирует поведение отрицания той или иной трехзначной логики (среди которых, например, логики Лукасевича, Клини, Приста и ряд других). Одна лишь оценка формул еще не дает саму логическую теорию. Для этого нужно договориться о том, какое подмножество множества {0, ½ ,1} нужно считать содержащим аналоги классической истины, а также дать определения логического закона и отношения логического следования. Хорошо известно, что в некоторых трехзначных логиках, таких как логики Клини, логика Лукасевича, выделенным значением считается 1, а вот, например, в логике парадоксов Приста выделенные значения — это 1 и ½ . Таким образом, при первом подходе законом логической теории является формула, принимающая значение 1 при любом задании функции оценки, а Γ ⊨ A (из множества формул Γ логически следует формула A), если v(A) = 1 всякий раз, когда каждая формула из Γ принимает значение 1.

Для иллюстрации основных идей настоящего исследования выберем первый из указанных подходов к выбору множества выделенных значений, второй же оставим за рамками данной статьи.

Итак, если принять описанную выше трехзначную функцию оценки литералов, а в качестве множества выделенных значений выбрать синглетон {1}, то можно далее получать неклассические логические теории, в которых имеется связка ~ со своими специфическими свойствами, в то время как ее итерация ~~ представляет собой отрицания *параполных* трехзначных логик, таких как сильная логика Клини.

Стоит отметить один нюанс, связанный с оценкой префиксированных связкой ~ сложных формул. Для случаев ~(A & B) и ~(A ∨ B) можно принять в качестве альтернативы следующие правила оценки, которые в некотором смысле являются дуальными по отношению к приведенным выше (отличие в метаязыковых связках **и**, **или**).

1. v(~(A & B)) = 1, если v(~A) = 1 **и** v(~B) = 1, v(~(A & B)) = 0, если v(~A) = 0 **или** v(~B) = 0, v(~(A & B)) = ½ в иных случаях.
2. v(~(A ∨ B)) = 1, если v(~A) = 1 **или** v(~B) = 1, v(~(A ∨ B)) = 0, если v(~A) = 0 **и** v(~B) = 0, v(~(A ∨ B)) = ½ в иных случаях.

Результатом будет такая логическая логическая теория, в которой перестанут быть истинными некоторые утверждения о следовании, которые корректны в классическом случае. Например, записанные в виде утверждений о следовании аналоги законов Де Моргана: ~(A ∨ B) ⊨ ~A & ~B и ~A ∨ ~B ⊨ ~(A & B). Действительно, для того чтобы получить v(~(A ∨ B)) = 1, достаточно положить v(~A) = 1, но этого недостаточно для v(~A & ~B) = 1. Аналогично и во втором случае. Интересно, что в новой логической теории истинными станут и такие утверждения о следовании, которые не являются корректными в классическом случае. К таким утверждениям относятся, например, ~A ∨ ~B ⊨ ~(A ∨ B) и ~(A & B) ⊨ ~A & ~B. Таким образом, связка ~ при данной оценке теряет часть характеристических свойств классического отрицания, приобретая при этом некоторые специфические свойства операции *коннегации*, изученной в работе [4] и как разновидность *циклического отрицания* в статье [10]. Заметим, однако, что в нашем случае связка ~ все же отличается от коннегации в силу того, что итерация коннегации симулирует классическое отрицание, а итерация нашей связки ~ — нет. При выписанных в предыдущем абзаце определениях она дает, по крайней мере, параполноту содержащей ее логики.

Дальнейшее изучение логических теорий, получаемых при описанных семантических подходах к их построению, предполагает поиск адекватных формализаций. Оказалось, что получить формализацию в виде стандартного секвенциального исчисления в рассматриваемом случае не так уж сложно. Для этого достаточно взять уже существующее исчисление подходящей трехзначной логики и произвести его небольшую модификацию. Схематически опишем способ построения такого исчисления для нашего случая, когда множество выделенных значений есть {1}, а итерация связки ~ симулирует отрицание трехзначных логик Лукасевича, Клини и подобных им. При этом оценка сложных формул дана так, как в самом первом варианте. Для начала нужно выбрать подходящее секвенциальное исчисление, относительно которого уже доказана теорема об адекватности, например секвенциальную формализацию $\mathcal{G}$K3 сильной логики Клини K3 из работы [17], и преобразовать его в искомое исчисление. Наиболее важным для данного преобразования необходимо произвести следующие простые действия: 1) переписать все правила для отрицания исчисления $\mathcal{G}$K3, заменяя в них связку отрицания ¬ на ~; 2) продублировать все правила для отрицания, заменяя ~ на ~~. Затем правило введения отрицания (~⇒) нужно отбросить. Все иные правила остаются без изменений, за исключением правил для связки →, поскольку ее нет в языке $\mathcal{L}_1$. Эти правила также отбрасываются. Доказательство адекватности для нового исчисления, а также обоснование ряда его метатеоретических свойств получаются за счет синтаксического и семантического *погружения* нового исчисления в исходное, в данном случае роль исходного выполняет исчисление $\mathcal{G}$K3. Для определенности назовем новое полученное исчисление $\mathcal{G}$K3P (то есть исчисление генценовского типа, формализующее семантически заданную теорию K3P). В силу громоздкости исчисления, мы не будем приводить здесь получаемые правила, а вот погружающая операция определяется довольно просто. Обозначим ее как Φ. Предварительно потребуется несколько расширить алфавит логики Клини K3 таким образом, что для каждой пропозициональной переменной p в него добавляется ее копия p*. Теперь зададим Φ следующими равенствами.

1. Φ(p) = p.
2. Φ(~p) = p*.
3. Φ(A & B) = Φ(A) & Φ(B).
4. Φ(A ∨ B) = Φ(A) ∨ Φ(B).
5. Φ(~(A & B)) = Φ(~A) ∨ Φ(~B).
6. Φ(~(A ∨ B)) = Φ(~A) & Φ(~B).

Далее можно показать справедливость следующих утверждений.

Утверждение 1

Для всякой формулы A языка $\mathcal{L}_1$ верно, что для всякой оценки формул v можно построить оценку v* такую, что v(A) = 1, если и только если v*(Φ(A)) = 1. Для всякой формулы A языка $\mathcal{L}_1$ верно, что для всякой оценки формул v можно построить оценку v* такую, что v(Φ(A)) = 1, если и только если v*(A) = 1.

Утверждение 2

1. $\Gamma \vDash_{K3P} A$, если и только если $\Phi(\Gamma) \vDash_{K3} \Phi(A)$.
2. $\vDash_{K3P} \Gamma \Rightarrow \Delta$, если и только если $\vDash_{K3} \Phi(\Gamma) \Rightarrow \Phi(\Delta)$.
3. $\vdash_{K3P} \Gamma \Rightarrow \Delta$, если и только если $\vdash_{K3} \Phi(\Gamma) \Rightarrow \Phi(\Delta)$.

Утверждение 1 необходимо, чтобы доказать справедливость эквиваленции п. 1 о следовании из утверждения 2. По сути дела, утверждение 2, п. 1 есть не что иное, как семантическое погружение логики K3P в сильную логику Клини K3. Далее отсюда вытекает истинность того, что утверждается в п. 2. Что касается п. 3, то он доказывается индукцией по высоте дерева вывода секвенции. Примеры подобных доказательств можно посмотреть в работе [11]. Заметим, что п. 3 утверждения 2 есть в свою очередь формулировка синтаксического погружения $\mathcal{G}$K3P в $\mathcal{G}$K3.

Теперь, пользуясь утверждением 2 нетрудно показать адекватность исчисления $\mathcal{G}$K3P. Остановимся на решении вопроса о семантической полноте. Пусть верно, что $\vDash_{K3P} \Gamma \Rightarrow \Delta$. Тогда $\vDash_{K3} \Phi(\Gamma) \Rightarrow \Phi(\Delta)$, согласно утверждению 2, п. 2. Используя уже имеющуюся в нашем распоряжении теорему об адекватности секвенциального исчисления $\mathcal{G}$K3, получаем, что $\vdash_{K3} \Phi(\Gamma) \Rightarrow \Phi(\Delta)$. Осталось применить п. 3 утверждения 2, чтобы получить требуемый результат: $\vdash_{\mathcal{G}K3P} \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Заключение

Помимо рассмотренного случая, когда в качестве выделенного значения в множестве {0, ½, 1} выбирается 1, за рамками данной статьи остался выбор множества выделенных {½, 1}. В таком случае можно получить симуляцию отрицания паранепротиворечивых трехзначных логик, например логики парадоксов Приста. Помимо этого, можно получить ряд новых логических теорий, если использовать иные правила оценки для формул вида A & B и A ∨ B, как это происходит, скажем, в слабой логике Клини.

Еще один интересный аспект связан с разверткой оценки Lit →{0, ½, 1} по аналогии с тем, как это было сделано для Lit →{0, 1} в работах [4; 14; 10], где была предложена альтернативная форма представления всей семантической конструкции в виде четырехэлементной решетки с циклической одноместной операцией и стандартной функцией оценки пропозициональных переменных. В случае оценки Lit →{0, ½, 1} потребуется уже девятиэлементная решетка с тремя внутренними циклами унарной операции.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. *Войшвилло Е.К.* Философско-методологические аспекты релевантной логики. М.: Издательство Московского университета. 1988. 140 с.
2. *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М.: Эдиториал УРСС. 2002. 264 с.
3. *Arieli O.*, *Avron A.* Four-valued paradefinite logics // Studia Logica. 2017. Vol. 105. P. 1087–1122.
4. *Belikov A.*, *Grigoriev O.*, *Zaitsev D.* On connegation // Relevance logics and other tools for reasoning: Essays in honor of J. Michael Dunn. United States. 2022. Vol. 46 of tributes. P. 73–88.
5. *Belnap N.* Tonk, plonk and plink // Analysis. 1962. Vol. 22, N 6. P. 130–134.
6. *Dunn J.M.* Star and perp: Two treatments of negation // Philosophical Perspectives. 1993. Vol. 7. P. 331–357.
7. *Dunn J.M.* A Comparative study of various model-theoretic treatments of negation: A history of formal negation // Gabbay D.M., Wansing H. (eds). What is negation? // Applied Logic Series. 1999. Vol. 13. P. 23–51.
8. *Dunn J.M.*, *Hardegree G.* Algebraic methods in philosophical logic. Oxford: Oxford University Press, 2001. 488 p.
9. *Dunn J.M.*, *Zhou C.* Negation in the context of Gaggle Theory // Studia Logica. 2005. Vol. 80. P. 235–264.
10. *Grigoriev O.*, *Zaitsev D.* Basic four-valued systems of cyclic negations // Bulletin of the Section of Logic. 2022. Vol. 51 (4). 507–533.
11. *Kamide N.* Paraconsistent double negations as classical and intuitionistic negations // Studia Logica. 2017. Vol. 105. P. 1167–1191.
12. *Kamide N.*, *Wansing H.* Proof theory of N 4-related paraconsistent logics. L.: College Publications. 2015. 401 p.
13. *Odintsov S.*, *Wansing H.* Modal logics with Belnapian truth-values // Journal of Applied Non-classical Logics. 2010. Vol. 20 (3). P. 279–304.
14. *Omori H.*, *Wansing H.* On contra-classical variants of Nelson logic N 4 and its classical extension // Review of Symbolic Logic. 2018. Vol. 11 (4). P. 805–820.
15. *Prior A.* The runabout inference-ticket // Analysis. 1960. Vol. 21, N 2. P. 38–39.
16. *Shramko Y.* First-degree entailment and binary consequence systems // Journal of Applied Logics – IfCoLoG Journal of Logics and their Applications. 2020. Vol. 7. P. 1221–1240.
17. *Szmuc D.E.* An epistemic interpretation of paraconsistent weak Kleene logic // Logic and Logical Philosophy. 2019. Vol. 28, N 2. P. 277–330.

REFERENCES

1. Voishvillo E.K. Philosophical-methodological aspects of relevant logic. Moscow: Moscow University Publishing. 1988. 140 p. (In Russ.)

2. Smirnov V.A. Logical methods of analysis of scientific knowledge. Moscow: Editorial URSS. 2002. 264 p. (In Russ.)

3. Arieli O., Avron A. Four-valued paradefinite logics. *Studia Logica*. 2017. Vol. 105. P. 1087–1122.

4. Belikov A., Grigoriev O., Zaitsev D. On connegation. *In*: Relevance logics and other tools for reasoning: Essays in honor of J. Michael Dunn. United States. 2022. Vol. 46 of tributes. P. 73–88.

5. Belnap N. Tonk, plonk and plink. *Analysis*. 1962. Vol. 22, N 6. P. 130–134.

6. Dunn J.M. Star and perp: Two treatments of negation. *Philosophical Perspectives*. 1993. Vol. 7. P. 331–357.

7. Dunn J.M. A comparative study of various model-theoretic treatments of negation: A history of formal negation. *In*: Gabbay D.M., Wansing H. (eds). What is negation? *Applied Logic Series*. 1999. Vol. 13. P. 23–51.

8. Dunn J.M., Hardegree G. Algebraic methods in philosophical logic. Oxford: Oxford University Press, 2001. 488 p.

9. Dunn J.M., Zhou C. Negation in the context of Gaggle Theory. *Studia Logica*. 2005. Vol. 80. P. 235–264.

10. Grigoriev O., Zaitsev D. Basic four-valued systems of cyclic negations. *Bulletin of the Section of Logic*. 2022. Vol. 51 (4). 507–533.

11. Kamide N. Paraconsistent double negations as classical and intuitionistic negations. *Studia Logica.* 2017. Vol. 105. P. 1167–1191.

12. Kamide N., Wansing H. Proof theory of N 4-related paraconsistent logics. L.: College Publications. 2015. 401 p.

13. Odintsov S., Wansing H. Modal logics with Belnapian truth-values. *Journal of Applied Non-classical Logics*. 2010. Vol. 20 (3). P. 279–304.

14. Omori H., Wansing H. On contra-classical variants of Nelson logic N 4 and its classical extension. *Review of Symbolic Logic*. 2018. Vol. 11 (4). P. 805–820.

15. Prior A. The runabout inference-ticket. *Analysis*. 1960. Vol. 21, N 2. P. 38–39.

16. Shramko Y. First-degree entailment and binary consequence systems. J*ournal of Applied Logics — IfCoLoG Journal of Logics and their Applications*. 2020. Vol. 7. P. 1221–1240.

17. Szmuc D.E. An epistemic interpretation of paraconsistent weak Kleene logic. *Logic and Logical Philosophy*. 2019. Vol. 28, N 2. P. 277–330.

Информация об авторах:

Григорьев Олег Михайлович — кандидат философских наук, доцент кафедры логики философского факультета МГУ имени М.В. Ломоносова; старший научный сотрудник, АНО «Институт логики, когнитологии и развития личности», тел.: +7 (495) 939 18 46; grig@philos.msu.ru

Беликов Александр Александрович — старший преподаватель кафедры логики философского факультета МГУ имени М.В. Ломоносова; старший научный сотрудник философского факультета Санкт-Петербургского государственного университета, тел.: +7 (495) 939 18 46; belikov@philos.msu.ru