МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи

Берговин Алексей Константинович

Анализ различных классов систем обслуживания с приоритетами

1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Ушаков Владимир Георгиевич

Москва — 2024

Оглавление

Введение

Актуальность темы.

Теория массового обслуживания (ТМО) посвящена построению и анализу вероятностных моделей как систем, так и сетей обслуживания. Работами, которые легли в основу данной теории считаются статьи Эрланга[13] и Йоханнсена [20], которые были опубликованы в начале XX века и посвящены построению математической модели станции телефонной связи. На протяжении всего этого времени ТМО непрерывно развивалась, появилось бесчисленное множество фундаментальных трудов [8, 19, 24, 27, 30, 39, 40, 42, 53–56, 58, 63], а области применения ее моделей достаточно быстро перестали ограничиваться только задачами телефонной связи. Приведем некоторые области применения моделей ТМО: коммуникационные и телекоммуникационные сети [12, 44], информационно-вычислительные сети [43], транспортные системы [29], страхование [52].

Образовалось много научных школ, как в России, так и за рубежом. В России значительно развили математическую ТМО работы таких ученых как: Л.Г. Афанасьева, Г.П. Башарин, А.А. Боровков, В.М. Вишневский, Б.В. Гнеденко, А.В. Зорин, И.Н. Коваленко, Г.П. Климов, А.Н. Моисеев, С.П. Моисеева, Е.В. Морозов, А.А. Назаров, Ю.В. Прохоров, Р.В. Разумчик, А.С. Румянцев, В.В. Рыков, А.Ф. Терпугов, В.Г. Ушаков, М.А. Федоткин, А.Я. Хинчин и многие другие. За рубежом известными специалистами в области ТМО являются: М.С. Бартлетт, А.Н. Дудин, Д. Кендалл, Л. Клейнрок, Д. Линди, М. Ньютс, К. Пальм, Л. Такач, Дж.Ф.С. Кингман, Т.Л. Саати и многие другие

Одним из фундаментальных направлений ТМО является построение и анализ моделей систем обслуживания с неравноправными (в неком смысле) заявками, которые приводят к моделям с приоритетами. К классическими приоритетными дисциплинами относят относительный приоритет – при поступлении более приоритетной заявки не происходит прерывания обслуживания менее приоритетной, и абсолютный приоритет – поступление более приоритетной заявки прерывает обслуживание менее приоритетной (прерванная заявка, например, может либо быть утеряна, либо быть обслужена заново, когда это будет возможно). Возникновение неравноправия между заявками обусловлено самыми разными факторами, которые напрямую зависят от прикладной области.

В настоящее время, математические модели теории массового обслуживания активно используются при моделировании телекоммуникационных сетей и вычислительных кластеров (суперкомпьютер или центр хранения и обработки информации). Как известно, трафик (в терминах ТМО – входящий поток) в таких сетях является разнородным, к примеру, в телекоммуникационных сетях могут передаваться текстовые файлы, изображение, аудио- или видеозаписи. В силу чего именно приоритетные модели играют ключевую роль при проектирование и анализе математических моделей реальных систем. В следствии повсеместного распространения упомянутых сетей, возникли специфические особенности их функционирования, рассмотрим некоторые из них подробно.

Первостепенной особенностью телекоммуникационных сетей является коррелированный трафик, то есть интервалы между поступлениями пакетов данных (в терминах ТМО – заявок, требований) являются стохастически зависимыми, это было, например, показано в работах [14, 23]. Появилось множество работ [17, 18, 21, 24, 50, 51, 62], а также целые монографии [9, 44, 45], посвященные анализу таких входящих потоков. Одним из основных подходов к построению таких моделей является использование BMAP-потоков (Batch Markovian Arrival Process), которые, во-первых, содержат в себе, как частные случаи большинство классических потоков, а, во-вторых, позволяют конструировать входящие потоки сложной структуры (например, чтобы учесть все основные зависимости в реальном трафике). Но, к сожалению, нахождение вероятностных характеристик систем с BMAP-потоками осуществляется преимущественно с помощью численных методов. Поэтому, в данной диссертации в качестве модели коррелированного входящего потока будет использоваться модель авторегрессии первого порядка для выбора текущей интенсивности входящего потока, которая, как показано, допускает аналитическое решение в классическом для ТМО виде.

Следующей особенностью телекоммуникационных и вычислительных сетей является то, что они функционируют непрерывно, в том смысле, что сервер (обслуживающее устройство в терминах ТМО) не отключают, в моменты кратковременного отсутствия трафика, тогда возникает вопрос о том, что происходит в сети в момент отсутствия трафика (нет заявок в системе в терминах ТМО). Ответ на этот вопрос зависит от особенностей использования данной сети, возможными решениями являются самодиагностика сети, передача некого второстепенного трафика. Одним из подходов к добавлению этой особенности в математическую модель является понятие профилактики (прогулок, каникул) обслуживающего прибора. Исследованию таких моделей посвящено немало статей и монографий, например, [4, 11, 26–28, 49, 61]. В данной диссертации будет рассматриваться приоритетная модель с профилактиками обслуживающего прибора с самыми общими предположениями на входящий поток и время обслуживания заявок.

Последней, но не по значимости, особенностью, которая будет рассмотрена в данной диссертации является наличие смешанных приоритетов в реальных сетях передачи информации. Прежде всего надо пояснить термин «смешанные приоритеты», так как он не является общепринятым, то исследователи в ТМО под ним могут понимать разные концепции. Вот некоторые из них: между приоритетными классами с близкими приоритетными индексами установлена дисциплина относительного приоритета, а для остальных дисциплина абсолютного приоритета [1]; а в [10] понимается, что при поступлении требования с некоторой заданной вероятностью выбирается дисциплина относительного приоритета, а, соответственно, с дополнительной вероятностью – абсолютного приоритета с обслуживанием заново. В данной же работе под этим термином будет пониматься возможность выбора приоритетной дисциплины между каждой парой классов. Будет рассмотрено две модели: 1) можно устанавливать дисциплины относительного приоритета и абсолютного с обслуживанием заново; 2) выбираем из двух типов абсолютных приоритетов либо с обслуживанием заново, либо с потерей требования. Мотивация к выбору таких моделей продиктована тем, что в реальных сетях, есть «срочные» заявки (служебный трафик), который необходимо передать незамедлительно, то есть совершить в терминах ТМО совершить прерывание обслуживания текущей заявки, поэтому для таких ситуаций требуется использование дисциплины абсолютного приоритета. При этом использование этой дисциплины для всех пар приоритетных классов приводит нас к некорректной с практической точки зрения математической модели, которая будет давать отличающиеся от реальных вероятностные характеристики. Также, возможность выбора вида приоритетной дисциплины для каждой пары приоритетных классов расширяет область применимости моделей ТМО.

Кроме вышеперечисленного, нельзя не отметить, что в последние десятилетия имеет место стремительное распространение сетей связи и передачи информации, а также систем хранения и обработки больших массивов данных, поэтому объем передаваемого и обрабатываемого трафика вырос колоссально. По этой причине, такие системы являются высоконагруженными, что вызывает необходимость проводить дополнительный анализ таких систем, в так называемых условиях критической загрузки. В данной диссертационной работе для системы с коррелированным входящим потоком и для системы со смешанными приоритетами было исследовано поведение длины очереди в условиях критической загрузки. Характеристики системы с профилактиками обслуживающего прибора не исследовались при критической загрузке, в силу того, что в такой ситуации прибор не станет свободным, то есть не будет уходить на профилактики. Под критической загрузкой в данной работе понимается постановка предложенная в [57], когда одновременно время стремится к бесконечности, а загрузка системы к единичной. .

Таким образом, построение математических моделей, учитывающих вышеизложенные аспекты функционирования реальных систем, являются актуальными научными проблемами и представляют интерес как для ученых, так и для прикладных специалистов.

Цель работы. Целями настоящей диссертации являются нахождение соотношений, которым удовлетворяет преобразование Лапласа совместной производящей фукнции количества требований в каждой из рассматриваемых систем в нестационарном режиме, а также нахождение предельных распределений числа требований наименее приоритетного класса в условиях критической загрузки для двух рассматриваемых систем.

Научная новизна. Все результаты полученные в данной диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Найдено совместное распределение количества требований в системе с гиперэкспоненциальным входящим потоком авторегрессионного типа для любой приоритетной дисциплины недопускающей прерывания обслуживания.

2. Найдены предельные распределения количества требований наименее приоритетного класса в системе гиперэкспоненциальным входящим потоком авторегрессионного типа в случае дисциплины относительного приоритета.

3. Найдены интегральные уравнения, которым удовлетворяют преобразования Лапласа совместной производящей функции количества требований в системе $GI|G|1|\infty$ с профилактиками обслуживающего прибора в случае дисциплины относительного приоритета.

4. Найдены совместные распределение количества требований в системе $M_r|G_r|1|\infty$ в случае смешанной приоритетной дисциплины для двух моделей. Модель №1: между каждой парой приоритетных классов можно выбрать одну из двух дисциплин - относительный приоритет или абсолютным с обслуживанием заново прерванного требования. Модель №2: между каждой парой приоритетных классов можно выбрать одну из двух

дисциплин - абсолютный приоритет с потерей или с обслуживанием заново прерванного требования.

5. Найдены предельные распределения количества требований наименее приоритетного класса в системе $M_3|G_3|1|\infty$ для модели №1 описанной выше.

Методы исследования. В диссертации используются методы теории вероятностей, теории случайных процессов, теории дифференциальных и интегральных уравнений, а также математического анализа и линейной алгебры. Основным методом исследования рассматриваемых моделей является метод дополнительных компонент. Для его применения используется переход к производящим функциям и преобразованию Лапласа.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Соотношения, которым удовлетворяет преобразование Лапласа совместной производящей функции количества требований каждого приоритета в нестационарном режиме для приоритетной системы с авторегрессионным гиперэкспоненциальным входящим потоком и произвольным временем обслуживания, произвольной приоритетной дисциплиной недопускающей прерывания обслуживания.

2. Асимптотическое распределение количества требований наименее приоритетного класса в системе с двумя приоритетными классами, авторегрессионным гиперэкспоненциальным входящим потоком и произвольным временем обслуживания в условиях критической загрузки при дисциплине относительного приоритета.

3. Интегральные уравнения, которым удовлетворяет преобразование Лапласа совместной производящей функции количества требований каждого приоритета в нестационарном режиме для приоритетной системы с профилактиками обслуживающего прибора, произвольным входящим потоком

и произвольным временем обслуживания, где установлена дисциплина относительного приоритета.

4. Соотношения, которым удовлетворяет преобразование Лапласа совместной производящей функции количества требований каждого приоритета в нестационарном режиме для системы со смешанными приоритетами, в которой входящие потоки являются пуассоновскими, время обслуживания имеет произвольное распределение и неограниченное число мест для ожидания.

5. Асимптотическое распределение количества требований наименее приоритетного класса в системе с тремя пуассоновскими входящими потоками, произвольным временем обслуживания и смешанной приоритетной дисциплиной в условиях критической загрузки.

Соответствие паспорту научной специальности. В диссертации рассматриваются некоторые модели приоритетных систем обслуживания. Для их анализа применяется аппарат теории массового обслуживания, в силу чего данная диссертация соответствует паспорту специальности 1.1.4 "Теория вероятностей и математическая статистика".

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались автором на следующих конференциях [31–33, 35]:

1. Научная конференция «Тихоновские чтения 2022», МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия, 24–29 октября 2022 г. Тема доклада: Приоритетная система $GI|G|1$ с профилактиками обслуживающего прибора

2. X-я международная молодежная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем». Секция: математическая теория телетрафика и теория массового обслуживания, Томск, Россия, 26-29 мая 2023 г.

Тема доклада: Приоритетная система обслуживания с гиперэкспоненциальным входящим потоком авторегрессионного типа

3. 26th International Conference on Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications, Москва, Россия, 25–29 сентября 2023 г.

   Тема доклада: Приоритетная система обслуживания с профилактиками прибора в общих предположениях на управляющие последовательности

4. Научная конференция «Тихоновские чтения 2023», МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия, 29 октября–3 ноября 2023 г.

   Тема доклада: О двух моделях смешанных приоритетов в системах вида $M|G|1$

5. Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2023). Секция: математическая теория телетрафика и теория массового обслуживания. Томск, Россия, 4–9 декабря 2023 г.

   Тема доклада: Предельное распределение длины очереди в системе с авторегрессионным входящим потоком в условиях критической загрузки

6. Научная конференция «Ломоносовские чтения 2024», МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия, 20 марта – 3 апреля 2024 г.

   Тема доклада: Асимптотическое распределение длины очереди в системе обслуживания со смешанной приоритетной дисциплиной

Также, автор неоднократно докладывал результаты научно-квалификационной работы на семинарах «Аналитические методы в теории массового обслуживания» (руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Владимир Георгиевич Ушаков) и «Теория риска и смежные вопросы» (руководители – доктор физико-математических наук, профессор Виктор Юрьевич Королев, доктор физико-математических наук, профессор Юрий Степанович Хохлов и доктор физико-математических наук, доцент Олег Владимирович Шестаков) кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова.

Основой диссертации являются следующие статьи, входящие в перечень Web of Science, Scopus и RSCI [34, 36–38].

1. Берговин А.К., Ушаков В.Г. Система обслуживания с приоритетной дисциплиной без прерывания обслуживания // Вестн. Моск. уни–та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2018. № 3. С.24—29.

2. Берговин А.К. Приоритетная система с профилактиками обслуживающего прибора // Вестн. Моск. уни–та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2023. № 1. С.14—20.

3. Берговин А.К., Ушаков В.Г. Исследование систем обслуживания со смешанными приоритетами // Информатика и ее применения 2023. Т. 17 Вып. 2. С.57—61.

4. Берговин А.К. Длина очереди в системе с авторегрессионным гиперэкспоненциальным входящим потоком при критической загрузке // Вестн. Моск. уни–та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2023. № 4. С.9—16.

В статьях, написанных в соавторстве, вклад Ушакова В.Г. состоит в постановке задач. Все результаты, представленные в диссертации, получены автором лично.

Также, автор имеет публикации в сборниках трудов конференций:

1. Берговин А. К., Ушаков В. Г. Приоритетная система $GI|G|1$ с профилактиками обслуживающего прибора // Тезисы докладов научной конференции Тихоновские чтения (2022 г., МАКС Пресс, Москва, тезисы). — Москва: ООО МАКС Пресс, 2022. — С. 106–107.

2. Берговин А.К. Приоритетная система обслуживания с гиперэкспоненциальным входящим потоком авторегрессионного типа // Материалы X Международной молодежной научной конференции «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем». Т. 308 из Сер. Серия физико-математическая. — Томский государственный университет Томск: 2023. — С. 110–114.

3. Берговин А. К., Ушаков В. Г. О двух моделях смешанных приоритетов в системах вида $M|G|1$// Тезисы докладов научной конференции Тихоновские чтения (2023 г., МАКС Пресс, Москва, тезисы). — Москва: ООО МАКС Пресс, 2023. — С. 94.

4. Берговин А. К., Ушаков В. Г. Предельное распределение длины очереди в системе с авторегрессионным входящим потоком в условиях критической загрузки // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2023). — Т. 1 из Материалы XXII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова 4–9 декабря 2023 г. — Издательство Томского государственного университета Томск: 2023. — С. 139–144.

5. Берговин А. К., Ушаков В. Г. Приоритетная система обслуживания с профилактиками прибора в общих предположениях на управляющие последовательности // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связи (DCCN-2023). — материалы XXVI Междунар. научн. конфер, 25—29 сент. 2023 г., Москва. — ИПУ РАН Москва: 2023. — С. 56—62.

6. Берговин А. К., Ушаков В. Г. Асимптотическое распределение длины очереди в системе обслуживания со смешанной приоритетной дисциплиной // Тезисы докладов научной конференции Ломоносовские чтения (2024 г., МАКС Пресс, Москва, тезисы). — Москва: ООО МАКС Пресс, 2024. — С. 133–134.

Структура работы. Работа состоит из введения, основной части, состоящей из трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 107 страниц.

В первой главе рассматривается приоритетная система обслуживания, входящий поток которой является пуассоновским со случайной интенсивностью, причем интенсивность для следующего интервала выбирается следующим образом: с заданной вероятностью интенсивность совпадает с интенсивностью на предыдущем интервале между поступлениями требований, либо она выбирается из того же множества интенсивностей заново. Время обслуживания имеет произвольное распределение. В данной системе неограниченное число мест в очереди для ожидания и один обслуживающий прибор. Для данной модели было найдено распределение вектора количества требований в системе в нестационарном режиме в предположении, что приоритетная дисциплина не допускает прерывания обслуживания. Также, в случае дисциплины относительного приоритета для двух приоритетных классов, была получена предельная теорема для распределения количества требований наименее приоритетного класса в условиях критической загрузки системы.

Основная теорема:

а) функции $p(\mathbf{z},s)$ и $p_{ij}(\mathbf{z},x,s), i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,N}$, определяются по формулам:

$$p(\mathbf{z},s)=p_0(s)+\frac{(\mathbf{p},\mathbf{z})-1}{(1-p)(\mathbf{p},\mathbf{z})}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{N}\gamma_i^{(k)}(\mathbf{z},s)\cdot\frac{1-\beta_i(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z})))}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z})))},$$

$$p_{ij}(\mathbf{z},x,s)=(1-B_i(x))\,c_j\sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_i^{(k)}(\mathbf{z},s)}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))}e^{-(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z})))x},$$

где

$$\gamma_i^{(m)}(\mathbf{z},s)=\frac{(1-p)(\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))}\prod_{j=1}^{N}[\mu_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))]\times$$

$$\times\sum_{e=1}^{N}\frac{a_e p_{ie}(\mathbf{z},0,s)}{\mu_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_e(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))},$$

и $\gamma_i^{(m)}(\mathbf{z},s),\ m=\overline{1,N}$ удовлетворяют соотношениям:

$$\sum_{i=1}^{r}\gamma_i^{(m)}(\mathbf{z},s)\frac{z_i-\beta_i(s-\mu_m((\mathbf{p},\mathbf{z})))}{z_i}=$$

$$\frac{(1-p)(\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))}\prod_{k=1}^{N}[\mu_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_k(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))]\sum_{j=1}^{N}\frac{c_ja_jf_j(\mathbf{z},s)}{(\mu_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z})))}.$$

б) $p_{0j}(s)$ определяются следующим образом:

$$p_{0j}(s)=\frac{1}{a_j}\sum_{l=1}^{N}\frac{1}{(1-p)(p,z_l^*)(s-\mu_l^*(s))}\cdot\frac{1}{\prod_{j\neq n}(a_j-a_n)}\times$$
$$\times\frac{1}{\mu_l^*(s)+a_j(1-p(p,z_l^*))}\prod_{l\neq n}\left(\frac{\mu_l^*(s)}{1-p(p,z_l^*)}-\frac{\mu_n^*(s)}{1-p(p,z_n^*)}\right)^{-1}\times$$
$$\times\prod_{k=1}^{N}\frac{(\mu_k^*(s)+a_j(1-p(p,z_k^*))(\mu_l^*(s)+a_k(1-p(p,z_l^*))}{1-p(p,z_k^*)}.$$

Предельная теорема: При $m\to\infty$ существует предел:

$$\lim_{m\to\infty}\mathbb{P}\left(\rho^{\gamma}\cdot L_2\left(\frac{t}{\rho^{\alpha}}\right)<x\right)=$$
$$=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{\frac{v^*}{2t}}wx}e^{-\frac{y^2}{2}}dy,\ \alpha<2,\\[2ex] 1-\dfrac{e^{-wx}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_{-\sqrt{\frac{t}{4v^*}}+wx\sqrt{\frac{v^*}{4t}}}^{+\infty}e^{-y^2}dy-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\sqrt{\frac{t}{4v^*}}+wx\sqrt{\frac{v^*}{4t}}}^{+\infty}e^{-y^2}dy,\ \alpha=2,\\[2ex] 1-e^{-wx},\ \alpha>2,\end{cases}$$

где

$$w=\frac{1-a^*p_1^*\beta_{11}^*}{a^*p_2^*v^*}.$$

Во второй главе рассматривается система массового обслуживания с профилактиками обслуживающего прибора, в которой и входящий поток и время обслуживания имеют произвольное распределение, а приоритетной дисциплиной является относительный приоритет. Система имеет один обслуживающий прибор и бесконечное число мест для ожидания. Были найдены интегральные уравнения, которые позволяют однозначно определить распределение вектора количества требований в системе в нестационарном режиме, было показано, что решение данных интегральных уравнений существует, и оно единственно.

Основная теорема: функции $p_i(\mathbf{z}_i, x, y, s),\ i = \overline{0, r}$, определяются следующими соотношениями:

$$p_i(\mathbf{z}_i, x, y, s) = (1 - A(y)) f_i(\mathbf{z}_i, x, y, s),$$

где $f_i(\mathbf{z}, x, y, s),\ i = \overline{0, r}$, — единственные решения уравнений:

$$f_i(\mathbf{z}_i, x, y, s) = (\mathbf{p}, \mathbf{z}) \int\limits_y^\infty a(u - y) f_i(\mathbf{z}_i, x, u, s) du + d_i(\mathbf{z}_i, x, y, s),\ i = \overline{0, r},$$

для $i = \overline{1, r}$:

$$d_i(\mathbf{z}_i, x, y, s) = (1 - B_i(x)) e^{-sx} \Bigg(h_i(\mathbf{z}_i, y - x, s) - \\ - p_i z_i \int\limits_{y-x}^\infty a(v - y + x) h_i(\mathbf{z}_i, v, s) dv \Bigg) \cdot \mathbb{I}(y \geqslant x),$$

$$d_0(\mathbf{z}, x, y, s) = (1 - C(x)) e^{-sx} \Bigg(h_0(y - x, s) - (\mathbf{p}, \mathbf{z}) \int\limits_{y-x}^\infty a(v - y + x) h_0(v, s) dv \Bigg) \times \\ \times \mathbb{I}(y \geqslant x) + \frac{1 - C(x)}{\alpha_1} (1 - (\mathbf{p}, \mathbf{z})) \int\limits_0^{\min(x,y)} e^{-sv} \frac{f(x - v)}{1 - C(x - v)} dv.$$

В третьей главе была рассмотрена система с несколькими пуассоновскими входящими потоками и произвольным временем обслуживания требований каждого потока. Заявки всех потоков обслуживаются одним прибором.

Количество мест для ожидания заявок каждого типа – неограниченно. Приоритетная дисциплина в рассматриваемой модели -– смешанная, рассматриваются две модели: в первой модели приоритет может быть или относительным, или абсолютным с обслуживанием заново прерванного требования, а во второй приоритет является абсолютным с потерей или обслуживание заново прерванного требования. Также для системы с тремя входящими пуассоновскими потоками, произвольным временем обслуживания каждого потока, в которой между первым и вторым потоком, а также между первым и третьим потоком установлена дисциплина относительного приоритета, а между первым и третьим дисциплина абсолютного приоритета с обслуживанием заново (модель №1) было найдено распределение количества требований наименее приоритетного потока (третьего) в условиях критической загрузки.

Основная теорема (модель №1): функция $p(\mathbf{z}, s)$ определяется по формуле:

$$p(\mathbf{z}, s) = p_0(s) + \sum_{i=1}^{r} \frac{1 - \beta_i\left(s + \sigma - \sum\limits_{j \notin I_i} a_j z_j\right)}{s + \sigma - \sum\limits_{j \notin I_i} a_j z_j} p_i(\mathbf{z}, 0, s),$$

где

$$p_0(s) = \left(s + \sigma - \sum_{j=1}^{r} a_j \pi_{jr}(s)\right)^{-1},$$

а $p_i(\mathbf{z}, 0, s)$ определяются из рекуррентных соотношений:

$$\sum_{i=k+1}^{r} d_i\left(\pi_{1k}(z_{k+1}, \ldots, z_r, s), \ldots, \pi_{kk}(z_{k+1}, \ldots, z_r, s), z_{k+1}, \ldots, z_r, s\right) p_i(\mathbf{z}, 0, s) =$$

$$= 1 - \left(s + \sigma - \sum_{j=1}^{k} a_j \pi_{jk}(z_{k+1}, \ldots, z_r, s) - \sum_{j=k+1}^{r} a_j z_j\right) p_0(s), \;\; k = \overline{1, r-1}.$$

Основная теорема (модель №2): Функция $p(\mathbf{z}, s)$ определяется по формуле:

$$p(\mathbf{z},s)=p_0(s)+\sum_{i=1}^{r}\frac{1-\beta_i\left(s+\sigma-\sum\limits_{j=i}^{r}a_jz_j\right)}{s+\sigma-\sum\limits_{j=i}^{r}a_jz_j}p_i(\mathbf{z},0,s),$$

где

$$p_0(s)=\left(s+\sigma-\sum_{j=1}^{r}a_j\tau_{jr}(s)\right)^{-1},$$

а $p_i(\mathbf{z},0,s)$ определяются из рекуррентных соотношений:

$$\sum_{i=k+1}^{r}c_i\left(\tau_{1k}(z_{k+1},\ldots,z_r,s),\ldots,\tau_{kk}(z_{k+1},\ldots,z_r,s),z_{k+1},\ldots,z_r,s\right)p_i(\mathbf{z},0,s)=$$

$$=1-\left(s+\sigma-\sum_{j=1}^{k}a_j\tau_{jk}(z_{k+1},\ldots,z_r,s)-\sum_{j=k+1}^{r}a_jz_j\right)p_0(s),\ k=\overline{1,r-1}.$$

Предельная теорема: При $m\to\infty$ существует предел:

$$\lim_{m\to\infty}\mathbb{P}\left(\rho^{\gamma}\cdot L_3\left(\frac{t}{\rho^{\alpha}}\right)<x\right)=$$

$$=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\displaystyle\int\limits_{0}^{\sqrt{\frac{v^*}{2t}}w^*x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy,\ \alpha<2,\\[2ex] 1-\dfrac{e^{-w^*x}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_{-\sqrt{\frac{t}{4v^*}}+w^*x\sqrt{\frac{v^*}{4t}}}^{+\infty}e^{-y^2}dy-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_{\sqrt{\frac{t}{4v^*}}+w^*x\sqrt{\frac{v^*}{4t}}}^{+\infty}e^{-y^2}dy,\ \alpha=2,\\[2ex] 1-e^{-w^*x},\ \alpha>2,\end{cases}$$

где

$$w^*=\frac{1-a_1^*\beta_{11}^*-a_2^*\beta_{21}^*}{a_3^*v^*}.$$

В заключении резюмируются полученные результаты и описываются возможные направления для дальнейших исследований

Благодарности Автор диссертации выражает благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Георгиевичу Ушакову и всему коллективу кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Глава 1

Система $ARHM_{n,r}|G|1|\infty$

1.1. Описание системы

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с ожиданием, в которую поступает поток требований следующей структуры. Интервал времени до поступления первого требования z_1 и интервалы между поступлениями $(n-1)$ - го и n-го требований z_n имеют показательное распределение со случайным параметром $a^{(n)},\ n = 1, 2, \ldots$. Значение $a^{(n)}$ выбирается непосредственно перед началом промежутка z_n, причем $\mathbb{P}(a^{(1)} = a_j) = c_j,\ a_i \neq a_j,\ i \neq j,\ c_j > 0,\ j = \overline{1, N},\ \sum\limits_{j=1}^{N} c_j = 1$ и $a^{(n)} = \xi \cdot a^{(n-1)} + (1-\xi) \cdot b^{(n)}$, где $b^{(n)}, n = 1, 2, \ldots$ - последовательность независимых и независящих от последовательности $a^{(n)}, n = 1, 2, \ldots$ одинаково распределенных случайных величин, распределение которых такое же, как у $a^{(1)}$, а случайная величина ξ не зависит от $a^{(n)}$ и $b^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ и имеет распределение Бернулли с вероятностью успеха p.

Описанный входящий поток обладает следующими свойствами:

$$\mathbb{P}(z_n < t) = \sum_{j=1}^{N} c_j (1 - e^{-a_j t})$$

$$\mathbb{P}(z_n < t_1, z_{n+1} < t_2) = (1-p) \sum_{j=1}^{N} c_j (1 - e^{-a_j t_1}) \sum_{k=1}^{N} c_k (1 - e^{-a_k t_2}) + \\ + p \sum_{k=1}^{N} c_k (1 - e^{-a_j t_1})(1 - e^{-a_j t_2})$$

$$\mathbb{E} z_n = \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j}{a_j}, \quad \mathbb{D} z_n = \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j}{a_j^2}, \quad corr(z_n, z_{n+k}) = \frac{p^k}{2} \left(1 - \frac{(\mathbb{E} z_n)^2}{\mathbb{D} z_n} \right)$$

Следовательно, для любых $\mu > 0, \sigma > \mu$ существует рассматриваемый поток даже второго порядка ($N = 2$), у которого математическое ожидание и дисперсия интервалов между поступлениями требований равны μ и σ^2. Коэффициент корреляции двух соседних интервалов равен $\frac{p}{2}\left(1 - \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2\right)$. А это означает, что при построении математических моделей появляется возможность не только «подогнать» первые два момента интервалов между поступлениями реального потока, но и учесть их зависимость.

В частности, при $p = 0$ входящий поток будет гиперэкспоненциальным. При $p = 1$ получается система, в которой в начальный момент времени случайно выбирается значение интенсивности из множества $\{a_1, \ldots, a_N\}$ с вероятностями $c_1, \ldots, c_N$ и в дальнейшем система функционирует как система с пуассоновским входящим потоком с выбранной интенсивностью, такой случай далее рассматриваться не будем.

Будем считать, что все поступающие требования разбиваются на r приоритетных классов. Поступившее требование направляется в i-й класс с вероятностью $p_i,\ i = \overline{1, r},\ p_i > 0,\ \sum\limits_{i=1}^{r} p_i = 1$ независимо от остальных событий. Наличие разнотипных требований вызывает необходимость при выборе дисциплины обслуживания определять порядок обслуживания как однотипных, так и разнотипных требований. Во-первых, будем предполагать, что требования каждого типа образуют свою очередь. Во-вторых, ни при каких условиях не допускается прерывание уже начатого обслуживания. Порядок, в котором выстраиваются в своей очереди однотипные требования, для изучаемых характеристик системы обслуживания, несущественен. После завершения обслуживания требования выбор следующего производится на основании длин очередей в этот момент и типа требования, обслуживание которого только что закончилось. К таким приоритетным дисциплинам относится большое количество известных дисциплин: относительный приоритет, чередование приоритетов, приоритет самой длинной очереди и т.п. Часть результатов данной главы справедлива для всего класса таких дисципин. Наиболее детально будет рассмотрена система с относительным приоритетом.

Будем предполагать, что в начальный момент времени $t = 0$ система свободна от требований, а длительности обслуживания являются независимыми и одинаково распределенными для требований одного класса случайными величинами с функцией распределения $B_i(x)$ и плотностью $b_i(x)$ для i- го класса $(i = \overline{1, r})$.

1.2. Обозначения. Предварительные результаты.

Введем следующие случайные процессы:

$L_i(t)$ — число требований i-го класса в системе в момент времени t, $i = \overline{1, r}$;

$i(t)$ — номер класса, требование которого обслуживается прибором в момент времени t, при условии наличия требований, если требования в системе отсутствуют, то значение $i(t) = 0$;

$j(t)$ — номер состояния $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$, показывающий распределением с каким параметром $a_j \in \{a_1, \cdots, a_N\}$ является распределение интервалов между поступлениями требований;

$x(t)$— время, прошедшее с начала обслуживания требования, находящегося на приборе в момент времени t, если в этот момент прибор занят обслуживанием, иначе $x(t) = 0$.

В сделанных предположениях случайный процесс $(L_1(t), \cdots, L_r(t), i(t), j(t), x(t))$ является однородным марковским процессом.

Обозначения, используемые далее:

$\mathbf{n} = (n_1, \cdots, n_r)$ — вектор, показывающий количество заявок $i-$го приоритета;

$\mathbf{1}_k = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ — вектор с единицей в k-ой позиции;

$\mathbf{1} = (1, 1, \cdots, 1)$ — единичный вектор соответствующей размерности;

$$(\mathbf{p}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{r} p_i z_i, \quad \mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_r), \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases} .$$

Положим

$$P_{ij}(\mathbf{n},x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{P}(L_l(t)=n_l,\ l=\overline{1,r},\ i(t)=i,\ j(t)=j,\ x(t)<x),\ i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,N},$$

$$P_{0j}(t)=\mathbb{P}(L_l(t)=0,\ l=\overline{1,r},\ j(t)=j),\ j=\overline{1,N},$$

$$p_{ij}(\mathbf{z},x,s)=\int\limits_0^\infty e^{-st}\sum_{n_1=0}^\infty\cdots\sum_{n_r=0}^\infty z_1^{n_1}\cdots z_r^{n_r}P_{ij}(\mathbf{n},x,t)dt,\ i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,N},$$

$$p_{0j}(s)=\int\limits_0^\infty e^{-st}P_{0j}(t)dt,\ j=\overline{1,N},$$

$$\beta_i(s)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}b_i(x)dx,\quad \eta_i(x)=\frac{b_i(x)}{1-B_i(x)},\ i=\overline{1,r}.$$

Лемма 1.1: Уравнение

$$(1-p)z\sum_{m=1}^N\frac{c_m a_m}{\mu+a_m(1-pz)}=1 \tag{1.1}$$

имеет N непрерывных в области $|z|\leqslant 1$ решений $\mu=\mu_k(z),\ k=\overline{1,N}$. Для которых выполняется:

1. только одна из функций $\mu_k(z)=0$ при $z=1$;
2. $Re(\mu_j(z))<0,\ \forall\ j=\overline{1,N},\ |z|<1$;
3. $\mu_i(z)\neq(\mu_j(z)),\ i\neq j$.

Доказательство:

Доказательство данной леммы аналогично доказательству леммы 1 на странице 181 в [53]

Конец доказательства.

Не ограничивая общности, далее считаем, что $\mu_1(1)=0$.

Следствие из леммы 1.1:

$$\mu_1'(1) = \left(\sum_{m=1}^{N} \frac{c_m}{a_m} \right)^{-1},$$

$$\mu_1''(1) = \frac{2a^3}{1-p} \sum_{m=1}^{N} \frac{c_m}{a_m^2} - \frac{2a}{1-p}.$$

Доказательство:

Дифференцируя уравнение (1.1), имеем:

$$\sum_{m=1}^{N} \frac{a_m c_m}{[\mu_1(z) + a_m (1-pz)]^2} \cdot (\mu_1'(z) - a_m p) = \frac{1}{(1-p)z^2},$$

так как, $\mu_1(1) = 0$, то

$$\sum_{m=1}^{N} \frac{a_m c_m}{[a_m (1-p)]^2} \cdot (\mu_1'(1) - a_m p) = \frac{1}{(1-p)},$$

отсюда следует, что

$$\mu_1'(1) = \left(\sum_{m=1}^{N} \frac{c_m}{a_m} \right)^{-1}.$$

Обозначим $a = \left(\sum\limits_{m=1}^{N} \frac{c_m}{a_m} \right)^{-1}$. Дифференцируя уравнение (1.1) дважды, имеем:

$$2 \sum_{m=1}^{N} \frac{a_m c_m}{[\mu_1(z) + a_m (1-pz)]^3} \cdot (\mu_1'(z) - a_m p)^2 - \sum_{m=1}^{N} \frac{a_m c_m}{[\mu_1(z) + a_m (1-pz)]^2} \cdot \mu_1''(z) = \frac{2}{(1-p)z^3},$$

так как, $\mu_1(1) = 0$, то

$$2 \sum_{m=1}^{N} \frac{a_m c_m}{[a_m (1-p)]^3} \cdot (\mu_1'(1) - a_m p)^2 - \sum_{m=1}^{N} \frac{a_m c_m}{[a_m (1-p)]^2} \cdot \mu_1''(1) = \frac{2}{(1-p)}.$$

Проделывая стандартные преобразования, получим следующую цепочку равенств:

$$2 \sum_{m=1}^{N} \frac{c_m}{a_m^2} \cdot (a - a_m p)^2 - \frac{(1-p)}{a} \cdot \mu_1''(1) = 2(1-p)^2,$$

$$2a^2\sum_{m=1}^{N}\frac{c_m}{a_m^2}-4ap\sum_{m=1}^{N}\frac{c_m}{a_m}+2p^2-\frac{(1-p)}{a}\cdot\mu_1^{''}(1)=2(1-p)^2,$$

$$\frac{(1-p)}{a}\cdot\mu_1^{''}(1)=2a^2\sum_{m=1}^{N}\frac{c_m}{a_m^2}-2,$$

из которой получаем выражение для $\mu_1^{''}(1)$, указанное в формулировке следствия.

Конец доказательства.

Лемма 1.2: Для всех $k=\overline{1,N}$ уравнение:

$$(\mathbf{p},\mathbf{z})=\sum_{j=1}^{r}p_j\beta_j(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z})))$$

имеет единственное решение $z_k=\sum\limits_{i=1}^{r}p_iz_{ik}(s):|z_k(s)|<1,k=\overline{2,N},\ \Re s\geqslant 0$, а $z_1(0)=1,|z_k(s)|<1,\Re s>0,i=\overline{1,r}$.

Доказательство:

Доказательство данной леммы аналогично доказательству леммы 2 на странице 184 в [53]

Конец доказательства.

Обозначим

$$\alpha_k(z)=\prod_{j\neq k}(\mu_k(z)-\mu_j(z)),\quad \mu_k^*(s)=\mu_k\left(\sum_{i=1}^{r}p_iz_{ik}(s)\right).$$

1.3. Основная теорема

Рассмотрим возможные переходы системы из одного состояния в другое за время Δ:

$$P_{ij}(\mathbf{n},x+\Delta,t+\Delta) = P_{ij}(\mathbf{n},x,t)(1-(a_j+\eta_i(x))\Delta)+\sum_{k=1}^{r} P_{ij}(\mathbf{n}-\mathbf{1}_k,x,t)a_j\Delta p p_k+$$
$$+\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{N} a_m P_{im}(\mathbf{n}-\mathbf{1}_k,x,t)\Delta p_k(1-p)c_j,\ i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,N}. \quad (1.2)$$

Заметим, что при достаточно малом Δ и $x>0$ в интервале $[t;t+\Delta)$ невозможны изменения состояния исследуемого процесса, вызванные завершением обслуживания. А именно в эти моменты реализуется выбранная дисциплина обслуживания. Таким образом, ни выписанные разностные соотношения, ни полученные из них ниже дифференциальные уравнения не зависят от приоритетной дисциплины в рассматриваемом классе дисциплин. Устремим в (1.2) $\Delta\to 0$, получим прямые уравнения Колмогорова для распределения процесса $(L_1(t),\dots,L_r(t),\ x(t),\ i(t),\ j(t))$ при $x>0$ имеют вид $(i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,N})$:

$$\frac{\partial P_{ij}(\mathbf{n},x,t)}{\partial t}+\frac{\partial P_{ij}(\mathbf{n},x,t)}{\partial x} = -(a_j+\eta_i(x))P_{ij}(\mathbf{n},x,t)+(1-\delta_{n_k,1})\times$$
$$\times\left(p\sum_{k=1}^{r} P_{ij}(\mathbf{n}-\mathbf{1}_k,x,t)a_j p_k+(1-p)\sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{N} a_m P_{im}(\mathbf{n}-\mathbf{1}_k,x,t)p_k c_j\right).$$

Переходя к производящим функциям и преобразованию Лапласа, получим:

$$\frac{\partial p_{ij}(\mathbf{z},x,s)}{\partial x} = -(s+a_j+\eta_i(x)-a_j p\cdot(\mathbf{p},\mathbf{z}))p_{ij}(\mathbf{z},x,s)+(1-p)c_j\cdot(\mathbf{p},\mathbf{z})\sum_{m=1}^{N} a_m p_{im}(\mathbf{z},x,s).$$

Сделав замену, $p_{ij}(\mathbf{z},x,s) = (1-B_i(x))q_{ij}(\mathbf{z},x,s)$, система примет вид, при $j=\overline{1,N}$:

$$\frac{\partial q_{ij}(\mathbf{z},x,s)}{\partial x} = -(s+a_j-a_j p\cdot(\mathbf{p},\mathbf{z}))q_{ij}(\mathbf{z},x,s)+(1-p)c_j\cdot(\mathbf{p},\mathbf{z})\sum_{m=1}^{N} a_m q_{im}(\mathbf{z},x,s) \quad (1.3)$$

Общее решение системы (1.3) имеет вид ($i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,N}$):

$$q_{ij}(\mathbf{z},x,s)=c_j\sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_i^{(k)}(\mathbf{z},s)}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))}e^{-(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z})))x},$$

где $\gamma_i^{(k)}(\mathbf{z},s)$ - функции определяемые из начальных условий, соотношения для которых будут указаны ниже.

Тогда решение исходной системы ($i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,N}$) имеет следующий вид:

$$p_{ij}(\mathbf{z},x,s)=(1-B_i(x))\,c_j\sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_i^{(k)}(\mathbf{z},s)}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))}e^{-(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z})))x}. \quad (1.4)$$

В силу того, что краевые условия на функции $P_{ij}(\mathbf{n},x,t)$ в точке $x=0$ зависят от приоритетной дисциплины, то изначально выпишем их с учетом того, что для всех дисциплин без прерывания обслуживания выполняется, что моментом начала обслуживания очередного требования может являться либо момент окончания обслуживания предыдущего требования, либо момент поступления требования в свободную систему.

Выпишем краевые условия:

$$P_{0j}(t)=P(L(t)=0,j(t)=j),\ p_{0j}(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}P_{0j}(t)dt,\ P_{0j}(0)=c_j, j=\overline{1,N},$$

$$\frac{\partial P_{0j}(t)}{\partial t}=-a_jP_{0j}(t)+\sum_{i=1}^{r}\int_0^{\infty}P_{ij}(1_i,x,t)\eta_i(x)dx,\ j=\overline{1,N},$$

$$\sum_{i=1}^{r}p_{ij}(\mathbf{z},0,s)=\sum_{i=1}^{r}z_i^{-1}\int_0^{\infty}p_{ij}(\mathbf{z},x,s)\eta_i(x)dx+$$
$$+c_j-(s+a_j)p_{0j}(s)+(\mathbf{p},\mathbf{z})pa_jp_{0j}(s)+(1-p)c_j\sum_{k=1}^{N}a_kp_{0k}(s). \quad (1.5)$$

Подставляя (1.4)в (1.5), и, учитывая, что

$$\int_0^\infty p_{ij}(\mathbf{z},x,s)\eta_i(x)dx = c_j\sum_{k=1}^N \frac{\gamma_i^{(k)}(\mathbf{z},s)}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))}\int_0^\infty b_i(x)e^{-(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z})))x}dx =$$

$$= c_j\sum_{k=1}^N \frac{\gamma_i^{(k)}(\mathbf{z},s)}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))}\beta_i(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))).$$

Получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^N \frac{\delta^{(j)}(\mathbf{z},s)}{a_i(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))+\mu_j(\mathbf{z})} = f_i(\mathbf{z},s),\ i=\overline{1,N},$$

где

$$\delta^{(k)}(\mathbf{z},s) = \sum_{i=1}^r \gamma_i^{(k)}(\mathbf{z},s)\frac{z_i-\beta_i(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z})))}{z_i},\ k=\overline{1,N},$$

$$f_j(\mathbf{z},s) = 1-(s+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z})))c_j^{-1}p_{0j}(s)+(\mathbf{p},\mathbf{z})(1-p)\sum_{k=1}^N a_kp_{0k}(s),\ j=\overline{1,N}.$$

Данная система является системой линейных алгебраических уравнений с матрицей Коши и её решение имеет вид:

$$\delta^{(m)}(\mathbf{z},s) = \sum_{j=1}^N \frac{f_j(\mathbf{z},s)}{\alpha_m(\mathbf{z})(\mu_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z})))}\times$$

$$\times\frac{\prod_{k=1}^N[\mu_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_k(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))][\mu_k(z)+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))]}{\prod_{k=1,k\neq j}^N(a_j-a_k)[1-p(\mathbf{p},\mathbf{z})]},\ m=\overline{1,N}. \quad (1.6)$$

Уравнение из леммы 1.1 можно преобразовать к виду:

$$\prod_{i=1}^N(\mu+a_i(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z})))-(1-p)(\mathbf{p},\mathbf{z})\sum_{m=1}^N c_ma_m\prod_{i=1,i\neq m}^N(\mu+a_i(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))) =$$

$$= \prod_{i=1}^N(\mu-\mu_i((\mathbf{p},\mathbf{z}))). \quad (1.7)$$

Подставляя $\mu=-a_m(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))$ в (1.7), получаем:

$$(1-p)(\mathbf{p},\mathbf{z})c_ja_j = \frac{\prod_{k=1}^N(\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z})))}{\prod_{k=1,k\neq j}^N(a_j-a_k)(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z})))}.$$

Подставляя данное выражение в (1.6), получаем для $m = \overline{1,N}$:

$$\delta^{(m)}(\mathbf{z},s) =$$
$$= \frac{(1-p)(\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))}\prod_{k=1}^{N}[\mu_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_k(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))]\sum_{j=1}^{N}\frac{c_ja_jf_j(\mathbf{z},s)}{\mu_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))}. \tag{1.8}$$

Таким образом, имеем следующую систему уравнений для определения функций $\gamma_i^{(m)}(\mathbf{z},s),\ i=\overline{1,r},\ m=\overline{1,N}$:

$$\sum_{i=1}^{r}\gamma_i^{(m)}(\mathbf{z},s)\frac{z_i-\beta_i(s-\mu_m((\mathbf{p},\mathbf{z})))}{z_i} =$$
$$\frac{(1-p)(\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))}\prod_{k=1}^{N}[\mu_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_k(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))]\sum_{j=1}^{N}f_j(\mathbf{z},s)\frac{c_ja_j}{(\mu_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z})))}. \tag{1.9}$$

Так как, ещё требуется найти $p_{0m}(s),\ m=\overline{1,N}$, то для этого в системе (1.9) положим $\mathbf{z}^*=(z_{1m}^*,\cdots,z_{rm}^*), m=\overline{1,N}$, где z_{ij}^* является решением $z_i=\beta_i(s-\mu_j(\mathbf{z}))$. Отсюда,

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{c_ja_jf_j(\mathbf{z}^*,s)}{\mu_m^*(s)+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}^*))}=0, \quad m=\overline{1,N}. \tag{1.10}$$

Учитывая,

$$\sum_{j=1}^{N}f_j(\mathbf{z}^*,s)\frac{c_ja_j}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}^*))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}^*))} =$$
$$=\sum_{j=1}^{N}\left[1-(s+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}^*))c_j^{-1}p_{0j}(s)+(\mathbf{p},\mathbf{z}^*)(1-p)\sum_{k=1}^{N}a_kp_{0k}(s)\right]\times$$
$$\times\frac{c_ja_j}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}^*))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}^*))}=\sum_{j=1}^{N}\frac{c_ja_j}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}^*))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}^*))}+$$

$$+(\mathbf{p},\mathbf{z}^*)(1-p)\sum_{k=1}^{N} a_k p_{0k}(s)\sum_{j=1}^{N}\frac{c_j a_j}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}^*))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}^*))}-$$

$$-\sum_{j=1}^{N}\frac{(s+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}^*))a_j p_{0j}(s)}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}^*))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}^*))}=$$

$$=\frac{1}{(1-p)(\mathbf{p},\mathbf{z}^*)}+(\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}^*))-s)\sum_{j=1}^{N}\frac{a_j p_{0j}(s)}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}^*))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}^*))},$$

получаем систему уравнений для определения функций $p_{0j}(s),\ j=\overline{1,N}$:

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{a_j p_{0j}(s)}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}^*))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}^*))}=\frac{1}{(1-p)(\mathbf{p},\mathbf{z}^*)(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}^*)))}.$$

Данная система также является системой линейных алгебраических уравнений с матрицей Коши, поэтому её решение имеет вид:

$$p_{0j}(s)=\frac{1}{a_j}\sum_{l=1}^{N}\frac{1}{(1-p)(p,z_l^*)(s-\mu_l^*)}\cdot\frac{1}{\prod_{j\neq n}(a_j-a_n)}\cdot\frac{1}{\mu_l^*(s)+a_j(1-p(p,z_l^*))}$$

$$\prod_{l\neq n}\left(\frac{\mu_l^*(s)}{1-p(p,z_l^*)}-\frac{\mu_n^*(s)}{1-p(p,z_n^*)}\right)^{-1}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{N}\frac{(\mu_k^*(s)+a_j(1-p(p,z_k^*))(\mu_l^*(s)+a_k(1-p(p,z_l^*))}{1-p(p,z_k^*)}$$

Таким образом, правая часть системы (1.9) известна. Положив $x=0$ в (1.4), снова получим систему с матрицей Коши для $\gamma_i^{(k)}(\mathbf{z},s)$:

$$\frac{p_{ij}(z,0,s)}{c_j}=\sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_i^{(k)}(\mathbf{z},s)}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))},\ i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,N}, \tag{1.11}$$

ее решение:

$$\gamma_i^{(k)}(\mathbf{z},s)=\frac{(1-p)(\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_k(\mathbf{z})}\prod_{j=1}^{N}[\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))]\sum_{e=1}^{N}\frac{a_e p_{ie}(\mathbf{z},0,s)}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_e(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))}.$$

Перейдем к нахождению преобразований Лапласа производящей функции количества требований в системе:

$$p(\mathbf{z},s)=p_0(s)+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{N}\int_0^\infty p_{ij}(\mathbf{z},x,s)dx,\quad p_0(s)=\sum_{k=1}^{N}p_{0k}(s).$$

Так как

$$\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{c_j}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))}-\frac{c_j}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))}\right]=$$

$$=\frac{p(\mathbf{p},\mathbf{z})-1}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))}\sum_{j=1}^{N}\frac{c_ja_j}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))}=\frac{p(\mathbf{p},\mathbf{z})-1}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))(1-p)(\mathbf{p},\mathbf{z})},$$

то

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{c_j}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))}=\frac{(\mathbf{p},\mathbf{z})-1}{(1-p)(\mathbf{p},\mathbf{z})\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))},$$

тогда $p(\mathbf{z},s)$ имеет вид:

$$p(\mathbf{z},s)=p_0(s)+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{N}c_j\sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_i^{(k)}(\mathbf{z},s)}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))}\cdot\frac{1-\beta_i(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z})))}{s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))}=$$

$$=p_0(s)+\frac{(\mathbf{p},\mathbf{z})-1}{(1-p)(\mathbf{p},\mathbf{z})}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{N}\gamma_i^{(k)}(\mathbf{z},s)\cdot\frac{1-\beta_i(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z})))}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z})))}.$$

Таким образом, была доказана следующая теорема:

Теорема 1.1: а) функции $p(\mathbf{z},s)$ и $p_{ij}(\mathbf{z},x,s),\ i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,N}$ определяются по формулам:

$$p(\mathbf{z},s)=p_0(s)+\frac{(\mathbf{p},\mathbf{z})-1}{(1-p)(\mathbf{p},\mathbf{z})}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{N}\gamma_i^{(k)}(\mathbf{z},s)\cdot\frac{1-\beta_i(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z})))}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z})))},\quad(1.12)$$

$$p_{ij}(\mathbf{z},x,s)=(1-B_i(x))\,c_j\sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_i^{(k)}(\mathbf{z},s)}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))}e^{-(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z})))x},\quad(1.13)$$

где

$$\gamma_i^{(m)}(\mathbf{z},s)=\frac{(1-p)(\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_m(\mathbf{z})}\prod_{j=1}^{N}[\mu_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))]\times$$

$$\times\sum_{e=1}^{N}\frac{a_ep_{ie}(\mathbf{z},0,s)}{\mu_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_e(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))},\quad(1.14)$$

и $\gamma_i^{(m)}(\mathbf{z},s),\ m=\overline{1,N}$ удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{r}\gamma_i^{(m)}(\mathbf{z},s)\frac{z_i-\beta_i(s-\mu_m((\mathbf{p},\mathbf{z})))}{z_i}=$$
$$=\frac{(1-p)(\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_m(\mathbf{z})}\prod_{k=1}^{N}[\mu_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_k(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))]\sum_{j=1}^{N}\frac{c_ja_jf_j(\mathbf{z},s)}{(\mu_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z})))}. \tag{1.15}$$

б) $p_{0j}(s), j=\overline{1,N}$ определяются по формулам:

$$p_{0j}(s)=\frac{1}{a_j}\sum_{l=1}^{N}\frac{1}{(1-p)(p,z_l^*)(s-\mu_l^*(s))}\cdot\frac{1}{\prod_{j\neq n}(a_j-a_n)}\times$$
$$\times\frac{1}{\mu_l^*(s)+a_j(1-p(p,z_l^*))}\prod_{l\neq n}\left(\frac{\mu_l^*(s)}{1-p(p,z_l^*)}-\frac{\mu_n^*(s)}{1-p(p,z_n^*)}\right)^{-1}\times$$
$$\times\prod_{k=1}^{N}\frac{(\mu_k^*(s)+a_j(1-p(p,z_k^*))(\mu_l^*(s)+a_k(1-p(p,z_l^*))}{1-p(p,z_k^*)} \tag{1.16}$$

1.4. Относительный приоритет

Соотношения (1.12) - (1.16) из теоремы 1.1, к сожалению, не определяют однозначно распределение случайного процесса $(L_1(t),\ldots,\ L_r(t),\ x(t),\ i(t),\ j(t))$. Но, если рассматривать конкретную дисциплину, то появляется дополнительная информация, с помощью которой можно однозначно определить $p(\mathbf{z},s)$. Будем далее рассматривать дисциплину относительного приоритета, для нее известно, что $p_{ij}(\mathbf{z},0,s)$ зависят только от $z_k : k\geqslant i$.

Приведем конструктивный способ нахождения $\gamma_i^{(k)}(\mathbf{z},s),\ i=\overline{1,r}$.

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{z}_{ij}^*=(z_{i1}^*,\ldots,z_{ij}^*,z_{j+1},\ldots,z_r),$$

$$\omega^{(m)}(\mathbf{z},s)=\frac{(1-p)(\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))}\prod_{k=1}^{N}[\mu_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_k(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))]\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{N}\frac{c_j a_j f_j(\mathbf{z},s)}{\mu_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))}.$$

Сначала найдем $\gamma_r^{(k)}(\mathbf{z},s)$, для этого в (1.15) подставим $\mathbf{z}_{k,r-1}$, получим:

$$\gamma_r^{(k)}(\mathbf{z}^*_{k,r-1},s)=\frac{z_r}{z_r-\beta_r(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}^*_{k,r-1}))}\omega^{(k)}(\mathbf{z}^*_{k,r-1},s), \tag{1.17}$$

тогда, так как $p_{rj}(\mathbf{z},0,s)=p_{rj}(z_r,0,s)$, то подставляя (1.17) в (1.11) имеем:

$$p_{rj}(z_r,0,s)=c_j\sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_r^{(k)}(\mathbf{z}^*_{k,r-1},s)}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}^*_{k,r-1}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}^*_{k,r-1}))},\ j=\overline{1,N}.$$

Таким образом, определили

$$\gamma_r^{(k)}(\mathbf{z},s)=\frac{(1-p)(\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))}\prod_{j=1}^{N}[\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))]\times$$
$$\times\sum_{e=1}^{N}\frac{a_e p_{re}(z_r,0,s)}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_e(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))}.$$

Действуя аналогичным образом, можно определить все $\gamma_i^{(k)}(\mathbf{z},s), i=\overline{1,r}$. То есть, на шаге с номером $d=\overline{2,r}$ (будем считать, что поиск $\gamma_r^{(k)}(\mathbf{z},s)$ соответствует первому шагу) подставляем в соотношение (1.15) вектор $\mathbf{z}^*_{k,r-d}$, тогда, сможем найти

$$\gamma_{r+1-d}^{(k)}(\mathbf{z}^*_{k,r-d},s)=\frac{z_{r+1-d}}{z_{r+1-d}-\beta_{r+1-d}(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}^*_{k,r-})))}\omega^{(k)}(\mathbf{z}^*_{k,r-d},s)-$$
$$-\sum_{i=0}^{d-2}\gamma_{r-i}^{(k)}(\mathbf{z}^*_{k,r-d},s)\frac{z_{r-i}-\beta_{r-i}(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}^*_{k,r-d})))}{z_{r-i}},$$

откуда найдем

$$p_{r+1-d,j}(z_{r+1-d},\ldots,z_r,0,s)=c_j\sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_{r+1-d}^{(k)}(\mathbf{z}^*_{k,r-d},s)}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}^*_{k,r-d}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}^*_{k,r-d}))},\ j=\overline{1,N}.$$

$$\gamma_{r+1-d}^{(k)}(\mathbf{z},s)=\frac{(1-p)(\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_k(\mathbf{z})}\prod_{j=1}^{N}[\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))]\times$$
$$\times\sum_{e=1}^{N}\frac{a_e p_{r+1-d,e}(z_{r+1-d},\ldots,z_r,0,s)}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_e(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))}.$$

Таким образом, были определены все $\gamma_i^{(k)}(\mathbf{z},s), i=\overline{1,r}$, а, значит, в силу теоремы 1.1 было найдено преобразование Лапласа совместного распределения количества требований в системе в нестационарном режиме в случае дисциплины относительного приоритета.

1.4.1. Система $ARHM_{n,2}|G|1|\infty$

Обозначим $s-\mu_k(p_1z_1+p_2z_2)=\epsilon(z_1,z_2,s)$.
Из теоремы 1.1 получаем следующий вид совместной производящей функции числа требований первого и второго приоритетных классов:

$$p(z_1,z_2,s)=p_0(s)+\frac{p_1z_1+p_2z_2-1}{(1-p)(p_1z_1+p_2z_2)}\cdot\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\mu_k(p_1z_1+p_2z_2)(\epsilon(z_1,z_2,s))}\times$$
$$\times\left[\gamma_1^{(k)}(z_1,z_2,s)[1-\beta_1(\epsilon(z_1,z_2,s))]+\gamma_2^{(k)}(z_1,z_2,s)[1-\beta_2(\epsilon(z_1,z_2,s))]\right].\quad(1.18)$$

Так как, функции $\gamma_i^{(k)}(z_1,z_2,s),\ i=1,2,\ k=\overline{1,N}$ удовлетворяют (1.15), то выражая $\gamma_1^{(k)}(z_1,z_2,s)$ из (1.15), имеем:

$$\gamma_1^{(k)}(z_1,z_2,s)=\frac{z_1}{z_1-\beta_1(\epsilon(z_1,z_2,s))}\times$$
$$\times\left[-\gamma_2^{(k)}(z_1,z_2,s)\frac{z_2-\beta_2(\epsilon(z_1,z_2,s))}{z_2}+\omega^{(k)}(z_1,z_2,s)\right].\quad(1.19)$$

Подставляя (1.19) в (1.18) получим:

$$p(z_1,z_2,s)=p_0(s)+\frac{p_1z_1+p_2z_2-1}{(1-p)(p_1z_1+p_2z_2)}\cdot\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\mu_k(p_1z_1+p_2z_2)(\epsilon(z_1,z_2,s))}\times$$
$$\times\left(\frac{z_1(1-\beta_1(\epsilon(z_1,z_2,s)))}{z_1-\beta_1(\epsilon(z_1,z_2,s))}\omega^{(k)}(z_1,z_2,s)+\gamma_2^{(k)}(z_1,z_2,s)\times\right.$$
$$\left.\times\left[1-\beta_2(\epsilon(z_1,z_2,s))-\frac{z_1(z_2-\beta_2(\epsilon(z_1,z_2,s)))(1-\beta_1(\epsilon(z_1,z_2,s)))}{z_2(z_1-\beta_1(\epsilon(z_1,z_2,s)))}\right]\right).$$

Значит, для однозначного определения $p(z_1, z_2, s)$ остается найти $\gamma_2^{(k)}(z_1, z_2, s)$. Проделаем алгоритм, описанный выше.

$$\gamma_2^{(k)}(z_1, z_2, s) = \frac{(1-p)(p_1 z_1 + p_2 z_2)}{\alpha_k(p_1 z_1 + p_2 z_2)} \prod_{j=1}^{N} [\mu_k(p_1 z_1 + p_2 z_2) + a_j(1 - p(p_1 z_1 + p_2 z_2))] \times$$
$$\times \sum_{e=1}^{N} \frac{a_e p_{2e}(z_2, 0, s)}{\mu_k(p_1 z_1 + p_2 z_2) + a_e(1 - p(p_1 z_1 + p_2 z_2))},$$

$$p_{2e}(z_2, 0, s) = c_e \sum_{h=1}^{N} \frac{\gamma_2^{(h)}(z_{1h}^*, z_2, s)}{\mu_h(p_1 z_{1h}^* + p_2 z_2) + a_e(1 - p(p_1 z_{1h}^* + p_2 z_2)},\ e = \overline{1, N},$$

где z_{1h}^* является решением $z_{1h}^* = \beta_1(s - \mu_h(p_1 z_{1h}^* + p_2 z_2))$, тогда,

$$\gamma_2^{(k)}(z_1, z_2, s) = \frac{(1-p)(p_1 z_1 + p_2 z_2)}{\alpha_k(p_1 z_1 + p_2 z_2)} \prod_{j=1}^{N} [\mu_k(p_1 z_1 + p_2 z_2) + a_j(1 - p(p_1 z_1 + p_2 z_2))] \times$$
$$\times \sum_{e=1}^{N} \frac{c_e a_e}{\mu_k(p_1 z_1 + p_2 z_2) + a_e(1 - p(p_1 z_1 + p_2 z_2))} \times$$
$$\times \sum_{h=1}^{N} \frac{\gamma_2^{(h)}(z_{1h}^*, z_2, s)}{\mu_h(p_1 z_{1h}^* + p_2 z_2) + a_e(1 - p(p_1 z_{1h}^* + p_2 z_2)},$$

где

$$\gamma_2^{(h)}(z_{1h}^*, z_2, s) = \frac{(1-p)(p_1 z_{1h}^* + p_2 z_2) z_2}{\alpha_m(p_1 z_{1h}^* + p_2 z_2)(z_2 - \beta_2(s - \mu_m(p_1 z_{1h}^* + p_2 z_2)))} \times$$
$$\times \prod_{k=1}^{N} [\mu_m(p_1 z_{1h}^* + p_2 z_2) + a_k(1 - p(p_1 z_{1h}^* + p_2 z_2))] \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j a_j f_j(z_{1h}^*, z_2, s)}{\mu_m(p_1 z_{1h}^* + p_2 z_2) + a_j(1 - p(p_1 z_{1h}^* + p_2 z_2))}.$$

Таким образом, найдено преобразование Лапласа производящей функции количества требований второго приоритетного класса в системе, то есть $p(1, z_2, s)$:

$$p(1, z_2, s) = p_0(s) + \frac{p_2(z_2 - 1)}{(1-p)(p_1 + p_2 z_2)} \cdot \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\mu_k(p_1 + p_2 z_2)(s - \mu_k(p_1 + p_2 z_2))} \times$$
$$\times \left(\omega^{(k)}(1, z_2, s) + \gamma_2^{(k)}(1, z_2, s) \frac{1 - z_2}{z_2} \beta_2(s - \mu_k(p_1 + p_2 z_2))\right).$$

1.4.2. Численный пример

Проиллюстрируем необходимость рассмотрения системы с входящим потоком описанной структуры на примере анализа математического ожидания длины очереди в неприоритетной системе $ARHM|G|1|\infty$. Рассмотрим систему с $N = 2$, параметры выберем следующим образом: среднее время интервалов между поступлениями требований равно $\mu = 1$, а дисперсия $\sigma^2 = 4$, $\mathbb{P}(a^{(1)} = a_1) = 0.2$, $\mathbb{P}(a^{(1)} = a_2) = 0.8$, $a_1^{-1} = \mu + \sqrt{\dfrac{(1-c)(\sigma^2-\mu^2}{2c}}$, $a_2^{-1} = \mu - \sqrt{\dfrac{(1-c)(\sigma^2-\mu^2}{2c}}$, $a^{-1} = \dfrac{c}{a_1} + \dfrac{1-c}{a_2}$, загрузку систему будем менять варьируя среднее время обслуживания требований. Рассмотрим поведение средней длины очереди при $p \in \{0; 0,5; 0,95\}$. Будут рассмотрены три вида распределений обслуживания: постоянное, экспоненциально и гиперэкспоненциально распределенное время обслуживания.

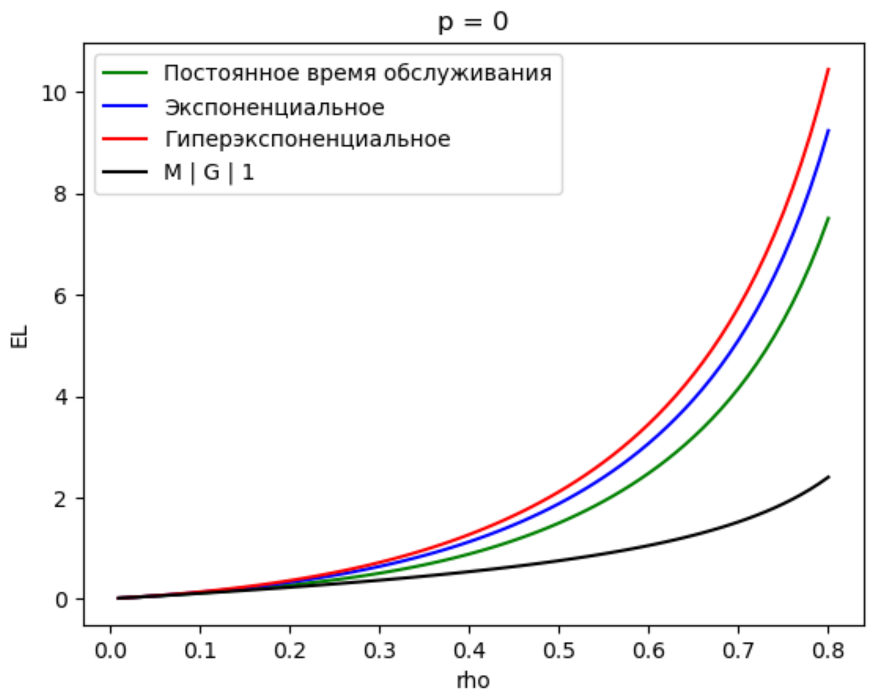

Рис. 1.1. p = 0

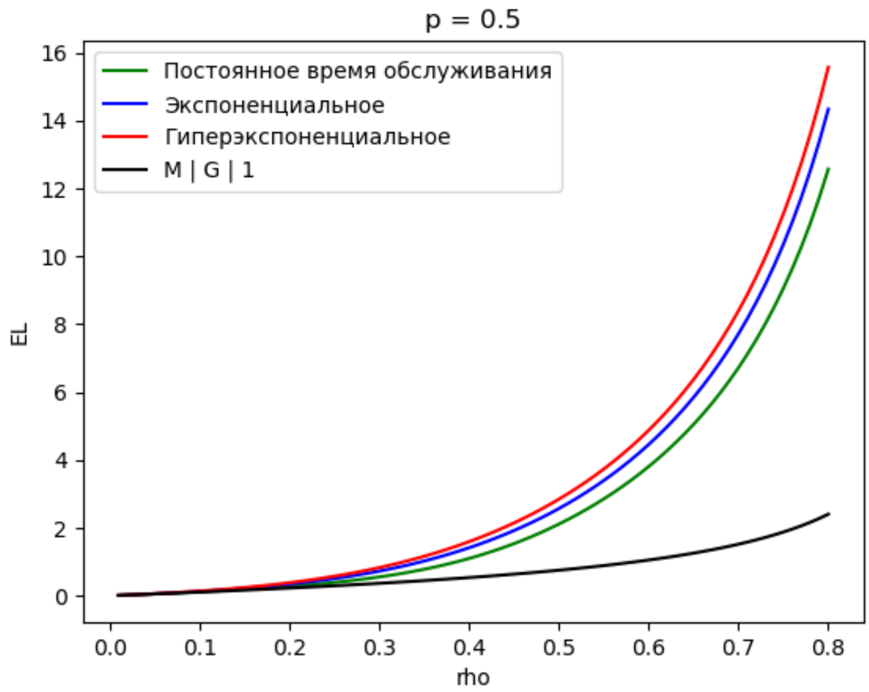

Рис. 1.2. p = 0,5

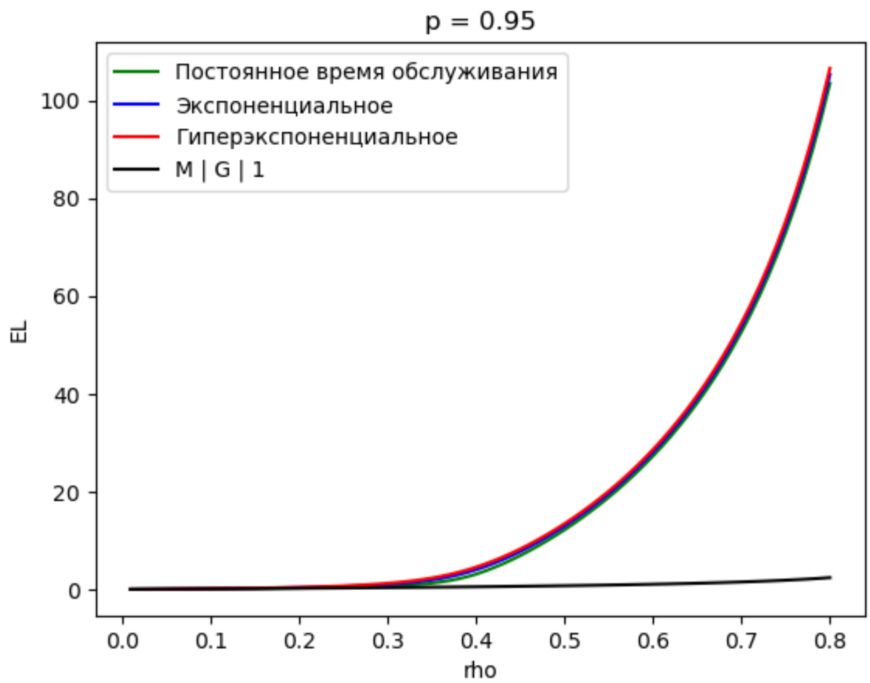

Рис. 1.3. p = 0,95

Из данных графиков видно, что при увеличении загрузки системы увеличивается разность между средним временем в системах с авторегрессионным входящим потоком и в классической системе $M|G|1|\infty$, а, также, при росте p нивелируется выбор распределения времени обслуживания. Таким образом, показано, что игнорирование наличия зависимости между интервалами между поступлениями требований в систему может приводить к излишне оптимистичным оценкам средней длины очереди, что в свою очередь может привести к некорректной вероятностной модели реальной системы обслуживания.

1.5. Предельная теорема

В данном разделе будет рассматривается последовательность систем массового обслуживания (схема серий) описанных ранее в разделе 1.1. Сохраним все ранее введенные обозначения, но добавим к ним индекс m, который отвечает за номер системы в рассматриваемой последовательности. Единственным отличием от системы описанной в разделе 1.1 будет то, что количество приоритетных классов будет два, а не r. Для удобства чтения повторим ранее введенные обозначения с новой дополнительной индексацией.

В систему с номером m поступает пуассоновский поток со случайной интенсивностью $a_m^{(n)} = \alpha_{mn} \cdot a_m^{(n-1)} + (1 - \alpha_{mn}) \cdot b_m^{(n)}$, $m, n \in \mathbb{N}$, где α_{mn} имеет распределение Бернулли с вероятностью успеха p_m; $b_m^{(n)}, m, n \in \mathbb{N}$ – последовательность независимых и не зависящих от последовательности $a_m^{(n)}, m, n \in \mathbb{N}$, одинаково распределенных случайных величин, распределение которых имеет вид $(a_m^{(1)} = a_{mj}) = c_{mj}$, $a_{mi} \neq a_{mj}$, $i \neq j$, $c_{mj} > 0$, $j = \overline{1, N}$. Интенсивность $a_m^{(n)}$ выбирается непосредственно перед началом промежутка до поступления n-го требования.

Все поступающие требования в систему разделяются на два класса, будем считать, что требования первого класса обладают относительным приоритетом над требованиями второго класса.

Пусть,

$B_{mi}(x)$ — функции распределения времени обслуживания i-го приоритетного класса в системе с номером m, $i = 1, 2$;

$b_{mi}(x)$ — плотности распределения времени обслуживания i-го приоритетного класса в системе с номером m, $i = 1, 2$;

$\beta_{mi}(s)$ — преобразование Лапласа-Стильтьеса функции $b_{mi}(x)$, $i = 1, 2$;

β_{mij} — j-ий момент случайной величины с функцией распределения $B_{mi}(x)$, $i = 1, 2$;

$L(t) = (L_1(t), L_2(t))$ — количество заявок в системе в момент времени t.

Известно, что при $\left(\sum\limits_{i=1}^{N} c_j a_j^{-1}\right)^{-1} \cdot (p_1\beta_{11} + p_2\beta_{21}) < 1$ существует невырожденное предельное распределение случайного процесса $L(t)$ при $t \to \infty$. В данной работе будет исследовано поведение $L_2(t)$ в случае, когда одновременно $t \to \infty$ и $\left(\sum\limits_{i=1}^{N} c_{mj} a_{mj}^{-1}\right)^{-1} \cdot (p_{m1}\beta_{m11} + p_{m2}\beta_{m21}) \to 1$ при $m \to \infty$.

Исследование проводится в следующих предположениях:

I) существуют первые два момента длительностей обслуживания требований каждого приоритета, причем

$$\beta_i(s) = 1 - \beta_{i1}s + \frac{\beta_{i2}}{2}s^2 + o_m(s^2), i = 1, 2,$$

где $o_m(s^2)/s^2 \to 0$ при $s \to 0$ равномерно по m

II) для любого натурального m: $a_m(p_1\beta_{m11} + p_2\beta_{m21}) < 1$

III) существуют пределы $\lim c_i = c_i^*$, $\lim a_i = a_i^*$, $\lim \beta_{ij} = \beta_{ij}^*$, $\lim p_j = p_j^*$, $i = \overline{1, N}$, $j = 1, 2$, где $\lim$ обозначает $\lim\limits_{m\to\infty}$.

Основная задача заключается в нахождении следующего предела:

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\rho^{\gamma} \cdot L_2\left(\frac{t}{\rho^{\alpha}}\right) < x\right),$$

где

$$\rho = 1 - a_m(p_{m1}\beta_{m11} + p_{m2}\beta_{m21}), \quad a = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{c_j}{a_j}\right)^{-1}, \quad \gamma = \begin{cases} 0.5\alpha, \ \alpha \leqslant 2, \\ 1, \ \alpha > 2. \end{cases}$$

1.5.1. Вспомогательные разложения

Для доказательства предельной теоремы потребуются некоторые вспомогательные разложения, которые для удобства будущего доказательства сформулируем и докажем в виде отдельных лемм.

Лемма 1.3: Справедливы следующие асимптотические разложения для $z(s\rho^\alpha)$, где $z(s) = p_1 z_1(s) + p_2 z_2(s)$ является решением уравнения
$p_1 z_1 + p_2 z_2 = p_1 \beta_1(s - \mu_1(p_1 z_1 + p_2 z_2)) + p_2 \beta_2(s - \mu_1(p_1 z_1 + p_2 z_2))$

$$z(s\rho^\alpha) - 1 = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{s\rho^\alpha}{a^2 v}} + o(\rho^{\frac{\alpha}{2}}), \ \alpha < 2, \\ \rho \cdot \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4sv}}{av} + o(\rho), \ \alpha = 2, \\ -\dfrac{s\rho^{\alpha-1}}{a} + o(\rho^{\alpha-1}), \ \alpha > 2, \end{cases}$$

где

$$v = \frac{\beta_1 \mu_1''(1) + a^2 \beta_2}{2a}.$$

Доказательство:

$$z(s\rho^\alpha) = 1 - (s\rho^\alpha - \mu_1(z(s\rho^\alpha))) \cdot \beta_1 + (s\rho^\alpha - \mu_1(z(s\rho^\alpha)))^2 \cdot \frac{\beta_2}{2} + o((s\rho^\alpha - \mu_1(z(s\rho^\alpha)))^2)$$

Пусть $x = z(s\rho^\alpha) - 1$, тогда

$$x = -\beta_1 \cdot s\rho^\alpha + \beta_1 \cdot \mu_1(z(s\rho^\alpha)) + [\mu_1^2(z(s\rho^\alpha)) - 2s\rho^\alpha \mu_1(z(s\rho^\alpha))] \cdot \frac{\beta_2}{2} + o(\max(x^2, \rho \cdot x, \rho^\alpha)) \tag{1.20}$$

$$\mu_1(z(s\rho^\alpha)) = \mu_1'(1)x + \frac{\mu_1''(1)}{2}x^2 + o(x^2) \tag{1.21}$$

Подставляя (1.21) в (1.20), и учитывая, что $\mu_1'(1) = a$, имеем:

$$\begin{aligned} x\rho = &-\beta_1 \cdot s\rho^\alpha + \beta_1 \cdot \frac{\mu_1''(1)}{2}x^2 + \\ &+ \left[\left(ax + \frac{\mu_1''(1)}{2}x^2 \right)^2 - 2s\rho^\alpha \left(ax + \frac{\mu_1''(1)}{2}x^2 \right) \right] \cdot \frac{\beta_2}{2} + o(\max(x^2, \rho \cdot x, \rho^\alpha)). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Упрощая (1.22), получаем квадратное уравнение относительно x:

$$x^2 \cdot \frac{1}{2}\left[\beta_1\mu_1^{''}(1) + a^2\beta_2\right] - \rho x - \beta_1 \cdot s\rho^\alpha + o(\max(x^2, \rho \cdot x, \rho^\alpha)) = 0,$$

его корни

$$x = \frac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4s\rho^\alpha v}}{2av},$$

где

$$v = \frac{\beta_1\mu_1^{''}(1) + a^2\beta_2}{2a}.$$

Так как, подходит только корень

$$x = \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 + 4s\rho^\alpha v}}{2av},$$

отсюда получаем утверждение леммы.

Конец доказательства.

Лемма 1.4: Справедливы следующие асимптотические разложения для $\mu_1^*(s\rho^\alpha) = \mu_1(z(s\rho^\alpha))$:

$$\mu_1^*(s\rho^\alpha) = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{s\rho^\alpha}{v}} + o(\rho^{\frac{\alpha}{2}}),\ \alpha < 2 \\ -\rho \cdot \dfrac{2s}{1 + \sqrt{1 + 4sv}} + o(\rho),\ \alpha = 2 \\ -s\rho^{\alpha-1} + o(\rho^{\alpha-1}),\ \alpha > 2 \end{cases}$$

Доказательство:

Из вида $\mu_1(z(s\rho^\alpha)) = \mu_1^{'}(1) \cdot (z(s\rho^\alpha) - 1) + o(z(s\rho^\alpha) - 1)$, и того, что $\mu_1^{'}(1) = a$ получаем утверждение леммы.

Конец доказательства.

Лемма 1.5: Справедливы следующие асимптотические разложения:

$$p_{0j}(s\rho^\alpha) = \begin{cases} \kappa_j \cdot \sqrt{\dfrac{v}{s}} \cdot \rho^{-\frac{\alpha}{2}} + o(\rho^{-\frac{\alpha}{2}}), \alpha < 2, \\ \kappa_j \cdot \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4sv}}{2s} \cdot \rho^{-1} + o(\rho^{-1}), \alpha = 2, \\ \kappa_j \dfrac{\rho^{1-\alpha}}{s} \cdot + o(\rho^{1-\alpha}), \alpha > 2, \end{cases}$$

где

$$\kappa_j = \prod_{n\neq j} \frac{a_n}{a_n - a_j} \cdot \prod_{k=2}^{N} \frac{\mu_k^*(0) + a_j(1 - p(p, z_k^*(0))}{\mu_k^*(0)}.$$

Доказательство:

Так как, только $\mu_1(1) = 0$, а $\mu_j(1) \neq 0$ при $j \neq 1$, то упрощая

$$\rho^\alpha \cdot a_j p_{0j}(s\rho^\alpha) = \frac{\rho^\alpha}{(1-p)(p, z_1^*(s\rho^\alpha))(s\rho^\alpha - \mu_1^*(s\rho^\alpha))} \cdot \frac{1}{\prod\limits_{n\neq j}(a_j - a_n)} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\mu_1^*(s\rho^\alpha) + a_j(1 - p(p, z_1^*(s\rho^\alpha)))} \prod_{n\neq 1} \left(\frac{\mu_1^*(s\rho^\alpha)}{1 - p(p, z_1^*(s\rho^\alpha))} - \frac{\mu_n^*(s\rho^\alpha)}{1 - p(p, z_n^*(s\rho^\alpha))} \right)^{-1} \cdot$$

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{(\mu_k^*(s\rho^\alpha) + a_j(1 - p(p, z_k^*(s\rho^\alpha))))(\mu_1^*(s\rho^\alpha) + a_k(1 - p(p, z_1^*(s\rho^\alpha)))}{1 - p(p, z_k^*(s\rho^\alpha))},$$

получаем:

$$\rho^\alpha \cdot a_j p_{0j}(s\rho^\alpha) = \frac{\rho^\alpha}{(1-p)(s\rho^\alpha - \mu_1^*(s\rho^\alpha))} \cdot \frac{1}{\prod\limits_{n\neq j}(a_j - a_n)} \times$$

$$\times \prod_{n\neq 1} \left(-\frac{\mu_n^*(0)}{1 - p(p, z_n^*(0))} \right)^{-1} \cdot a_1 \cdot \prod_{k=2}^{N} \frac{(\mu_k^*(0) + a_j(1 - p(p, z_k^*(0)))a_k(1-p)}{1 - p(p, z_k^*(0))},$$

преобразовывая, и обозначая

$$\kappa_j = \prod_{n\neq j} \frac{a_n}{a_n - a_j} \cdot \prod_{k=2}^{N} \frac{\mu_k^*(0) + a_j(1 - p(p, z_k^*(0))}{\mu_k^*(0)},$$

имеем

$$\rho^\alpha \cdot p_{0j}(s\rho^\alpha) = \kappa_j \cdot \frac{\rho^\alpha}{s\rho^\alpha - \mu_1^*(s\rho^\alpha)}.$$

Рассматривая необходимые случаи, и, применяя лемму 1.4, имеем:

1) $\alpha < 2$

$$\rho^\alpha \cdot p_{0j}(s\rho^\alpha) = \kappa_j \cdot \frac{\rho^\alpha}{s\rho^\alpha - \mu_1^*(s\rho^\alpha)} = \kappa_j \cdot \frac{\rho^\alpha}{s\rho^\alpha + \sqrt{\frac{s\rho^\alpha}{v}} + o(\rho^{\frac{\alpha}{2}})} = \kappa_j \cdot \sqrt{\frac{v}{s}} \cdot \rho^{\frac{\alpha}{2}} + o(\rho^{\frac{\alpha}{2}}),$$

2) $\alpha = 2$

$$\rho^\alpha \cdot p_{0j}(s\rho^\alpha) = \kappa_j \cdot \frac{\rho^2}{s\rho^2 - \rho\frac{-2s}{1+\sqrt{1+4sv}} + o(\rho)} = \kappa_j \cdot \frac{1 + \sqrt{1+4sv}}{2s} \cdot \rho + o(\rho),$$

3) $\alpha > 2$

$$\rho^\alpha \cdot p_{0j}(s\rho^\alpha) = \kappa_j \cdot \frac{\rho^\alpha}{s\rho^\alpha - \mu_1^*(s\rho^\alpha)} = \kappa_j \cdot \frac{\rho^\alpha}{s\rho^\alpha + s\rho^{\alpha-1} + o(\rho^{\alpha-1})} = \frac{\kappa_j}{s} \cdot \rho + o(\rho),$$

отсюда, получаем утверждение леммы.

Конец доказательства.

Лемма 1.6: Справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$\mu_1(p_1 z_1^* + p_2 e^{-u\rho^\gamma}) = \frac{ap_2 u\rho^\gamma}{ap_1\beta_{11} - 1} + \psi\rho^{2\gamma} + o(\rho^{2\gamma}), \text{ где}$$

$$\psi = \begin{cases} \dfrac{ap_1\beta_{11}}{ap_1\beta_{11}-1}s + \dfrac{ap_2u^2}{2(1-ap_1\beta_{11})} + \dfrac{\mu_1''(1)}{2}\dfrac{p_2^2u^2}{(1-ap_1\beta_{11})^3} + \dfrac{p_1\beta_{12}a^3p_2^2u^2}{2(1-ap_1\beta_{11})^3}, & \alpha \leqslant 2, \\ \dfrac{ap_2u^2}{2(1-ap_1\beta_{11})} + \dfrac{\mu_1''(1)}{2}\dfrac{p_2^2u^2}{(1-ap_1\beta_{11})^3} + \dfrac{p_1\beta_{12}a^3p_2^2u^2}{2(1-ap_1\beta_{11})^3}, & \alpha > 2. \end{cases}$$

Доказательство:

Обозначим $\tau = p_1 z_1^* + p_2 e^{-u\rho^\gamma}$, тогда

$$\tau = p_1\beta_1(s\rho^\alpha - \mu_1(\tau)) + p_2 e^{-u\rho^\gamma} =$$
$$= p_1\left(1 - \beta_{11}(s\rho^\alpha - \mu_1(\tau)) + \frac{\beta_{12}}{2}((s\rho^\alpha - \mu_1(\tau)))^2\right) + p_2\left(1 - u\rho^\gamma + \frac{u^2\rho^{2\gamma}}{2}\right) +$$
$$+ o(\max(((s\rho^\alpha - \mu_1(\tau)))^2, \rho^{2\gamma})). \quad (1.23)$$

Так как

$$\mu_1(\tau) = a(\tau - 1) + \frac{\mu_1''(1)}{2}(\tau-1)^2 + o((\tau-1)^2), \quad (1.24)$$

то подставляя (1.24) в (1.23), получаем:

$$\tau - 1 = p_1\Big(- \beta_{11}(s\rho^\alpha - a(\tau-1) - \frac{\mu_1''(1)}{2}(\tau-1)^2) +$$
$$+ \frac{\beta_{12}}{2}((s\rho^\alpha - a(\tau-1) - \frac{\mu_1''(1)}{2}(\tau-1)^2)^2\Big) + p_2\left(-u\rho^\gamma + \frac{u^2\rho^{2\gamma}}{2}\right) +$$
$$+ o(\max(((s\rho^\alpha - a(\tau-1) - \frac{\mu_1''(1)}{2}(\tau-1)^2))^2, \rho^{2\gamma})).$$

Выделим главную часть порядка ρ^γ

$$\tau - 1 = ap_1\beta_{11}(\tau-1) - p_2u\rho^\gamma + o(\rho^\gamma),$$

$$\tau - 1 = \frac{p_2 u \rho^\gamma}{ap_1\beta_{11} - 1} + o(\rho^\gamma),$$

далее

$$\tau - 1 = \frac{p_2 u \rho^\gamma}{ap_1\beta_{11} - 1} + \psi \cdot \rho^{2\gamma} + +o(\rho^{2\gamma}), \tag{1.25}$$

подставляя (1.25) в (1.23), имеем

$$\frac{p_2 u \rho^\gamma}{ap_1\beta_{11} - 1} + \psi \cdot \rho^{2\gamma} =$$
$$= p_1 \Bigg(-\beta_{11} \Bigg[s\rho^\alpha - a \left(\frac{p_2 u \rho^\gamma}{ap_1\beta_{11} - 1} + \psi \cdot \rho^{2\gamma} \right) - \frac{\mu_1''(1)}{2} \left(\frac{p_2 u \rho^\gamma}{ap_1\beta_{11} - 1} + \psi \cdot \rho^{2\gamma} \right)^2 \Bigg] +$$
$$+ \frac{\beta_{12}}{2} \Bigg[(s\rho^\alpha - a \left(\frac{p_2 u \rho^\gamma}{ap_1\beta_{11} - 1} + \psi \cdot \rho^{2\gamma} \right) - \frac{\mu_1''(1)}{2} \left(\frac{p_2 u \rho^\gamma}{ap_1\beta_{11} - 1} + \psi \cdot \rho^{2\gamma} \right)^2 \Bigg]^2 \Bigg) +$$
$$+ p_2 \left(-u\rho^\gamma + \frac{u^2 \rho^{2\gamma}}{2} \right) + o(\max(\rho^\alpha, \rho^{2\gamma})).$$

Упрощая данное выражение, получаем:

$$\psi = \frac{ap_1\beta_{11}}{ap_1\beta_{11} - 1} s\rho^{\alpha - 2\gamma} + \frac{ap_2 u^2}{2(1 - ap_1\beta_{11})} + \frac{\mu_1''(1)}{2} \frac{p_2^2 u^2}{(1 - ap_1\beta_{11})^3} + \frac{p_1\beta_{12} a^3 p_2^2 u^2}{2(1 - ap_1\beta_{11})^3},$$

отсюда, вытекает утверждение леммы.

Конец доказательства.

Лемма 1.7: Справедливы следующие асимптотические разложения:

$$\sum_{j=1}^{N} f_j(z_1^*, e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha) \frac{c_j a_j}{\mu_1(p_1 z_1^* + p_2 e^{-u\rho^\gamma}) + a_j(1 - p(p_1 z_1^* + p_2 e^{-u\rho^\gamma}))} =$$
$$= \frac{1}{1-p} \times \begin{cases} 1 + \dfrac{ap_2 u}{ap_1\beta_{11} - 1} \sqrt{\dfrac{v}{s}} + o(1), \ \alpha < 2, \\ 1 + \dfrac{ap_2 u}{ap_1\beta_{11} - 1} \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4sv}}{2s} + o(1), \ \alpha = 2, \\ 1 + \dfrac{ap_2 u \rho^{2-\alpha}}{ap_1\beta_{11} - 1} \dfrac{1}{s} + o(\rho^{2-\alpha}), \ \alpha > 2. \end{cases}$$

Доказательство:

Используя

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{c_ja_jf_j(z_1,z_2,s)}{\mu_k(p_1z_1+p_2z_2)+a_j(1-p(p_1z_1+p_2z_2))}=$$

$$=\frac{1}{(1-p)(p_1z_1+p_2z_2)}-(\epsilon(z_1,z_2,s))\sum_{j=1}^{N}\frac{a_jp_{0j}(s)}{\mu_k(p_1z_1+p_2z_2)+a_j(1-p(p_1z_1+p_2z_2))},$$

найдем, что

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{c_ja_jf_j(z_1^*,e^{-u\rho^\gamma},s\rho^\alpha)}{\mu_1(p_1z_1^*+p_2e^{-u\rho^\gamma})+a_j(1-p(p_1z_1^*+p_2e^{-u\rho^\gamma}))}=\frac{1}{(1-p)(p_1z_1^*+p_2e^{-u\rho^\gamma})}-$$

$$-(s\rho^\alpha-\mu_1(p_1z_1^*+p_2e^{-u\rho^\gamma}))\sum_{j=1}^{N}\frac{a_jp_{0j}(s)}{\mu_1(p_1z_1^*+p_2e^{-u\rho^\gamma})+a_j(1-p(p_1z_1^*+p_2e^{-u\rho^\gamma}))}=$$

$$=\frac{1}{1-p}-\left(s\rho^\alpha-\frac{ap_2u\rho^\gamma}{ap_1\beta_{11}-1}-\psi\rho^{2\gamma}\right)\sum_{j=1}^{N}\frac{p_{0j}(s)}{1-p}=$$

$$=\frac{1}{1-p}\left[1-\left(s\rho^\alpha-\frac{ap_2u\rho^\gamma}{ap_1\beta_{11}-1}-\psi\rho^{2\gamma}\right)\sum_{j=1}^{N}p_{0j}(s)\right].$$

Используя лемму 1.5 и тот факт, что $\sum\limits_{j=1}^{N}\kappa_j=1$, получаем следующие разложения:

при $\alpha<2$

$$\frac{1}{1-p}\left[1-\left(s\rho^\gamma-\frac{ap_2u}{ap_1\beta_{11}-1}-\psi\rho^\gamma\right)\sqrt{\frac{v}{s}}\right],$$

при $\alpha=2$

$$\frac{1}{1-p}\left[1-\left(s\rho-\frac{ap_2u}{ap_1\beta_{11}-1}-\psi\rho\right)\frac{1+\sqrt{1+4sv}}{2s}\right],$$

при $\alpha>2$

$$\frac{1}{1-p}\left[1-\left(s\rho-\frac{ap_2u\rho^{2-\alpha}}{ap_1\beta_{11}-1}-\psi\rho^{3-\alpha}\right)\frac{1}{s}\right],$$

из них следует утверждение леммы.

Конец доказательства.

Лемма 1.8 Справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$e^{-u\rho^\gamma} - \beta_2(s\rho^\alpha - \mu_1(p_1 z_1^* + p_2 e^{-u\rho^\gamma})) =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\beta_{21}\rho^{2\gamma}}{ap_1\beta_{11}-1} \times \left[-s + \dfrac{a^2p_2^2v}{(ap_1\beta_{11}-1)^2}u^2\right] + o(\rho^{2\gamma}),\ \alpha < 2, \\ \dfrac{\rho^2}{ap_1\beta_{11}-1} \times \left[u - \beta_{21}s + \dfrac{a^2p_2^2\beta_{21}v}{(ap_1\beta_{11}-1)^2}u^2\right] + o(\rho^2),\ \alpha = 2, \\ \dfrac{\rho^2}{ap_1\beta_{11}-1} \times \left[u + \dfrac{a^2p_2^2\beta_{21}v}{(ap_1\beta_{11}-1)^2}u^2\right] + o(\rho^2),\ \alpha > 2. \end{cases}$$

Доказательство:

Указанные соотношения непосредственно вытекают из результатов леммы 1.6 и того, что

$$e^{-u\rho^\gamma} - \beta_2(s\rho^\alpha - \mu_1(p_1 z_1^* + p_2 e^{-u\rho^\gamma})) =$$
$$= 1 - u\rho^\gamma + \frac{u^2\rho^{2\gamma}}{2} - 1 + \beta_{21}\left[s\rho^\alpha - \frac{ap_2u\rho^\gamma}{ap_1\beta_{11}-1} - \psi\rho^{2\gamma}\right] - \frac{\beta_{22}}{2}\left[\frac{ap_2u\rho^\gamma}{ap_1\beta_{11}-1}\right]^2 + o(\rho^{2\gamma}).$$

Конец доказательства.

1.5.2. Основной результат

Вместо нахождения предела: $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\rho^\gamma \cdot L_2\left(\dfrac{t}{\rho^\alpha}\right) < x\right)$ будем искать предел преобразование Лапласа по времени, затем сделаем обратное преобразование и найдем интересующее нас предельное распределение, значит, основной задачей становится поиск: $\lim \rho^\alpha p(1, e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha)$. В параграфе 1.4.1 было найдено преобразование Лапласа производящей функции числа требований второго приоритетного класса, поэтому задача сводится к поиску следующего предела:

$$\lim\left\{\rho^{\alpha}\cdot p_0(s\rho^{\alpha})+\rho^{\alpha}\cdot p_2(e^{-u\rho^{\gamma}}-1)\cdot\frac{1}{\mu_1(p_1+p_2e^{-u\rho^{\gamma}})(s\rho^{\alpha}-\mu_1(p_1+p_2e^{-u\rho^{\gamma}}))}\times\right.$$
$$\times\left[\gamma_2^{(1)}(1,e^{-u\rho^{\gamma}},s\rho^{\alpha})\frac{1-e^{-u\rho^{\gamma}}}{(1-p)e^{-u\rho^{\gamma}}}\beta_2(s\rho^{\alpha}-\mu_1(p_1+p_2e^{-u\rho^{\gamma}}))+\right.$$
$$+\frac{\prod\limits_{m=1}^{N}[\mu_1(p_1+p_2e^{-u\rho^{\gamma}})+a_m(1-p(p_1+p_2e^{-u\rho^{\gamma}}))]}{\alpha_1(p_1+p_2e^{-u\rho^{\gamma}})}\times$$
$$\left.\left.\times\sum_{j=1}^{N}\frac{c_ja_jf_j(1,e^{-u\rho^{\gamma}},s\rho^{\alpha})}{\mu_1(p_1+p_2e^{-u\rho^{\gamma}})+a_j(1-p(p_1+p_2e^{-u\rho^{\gamma}}))}\right]\right\}.$$

Учитывая, что $\lim\rho^{\alpha}p_0(s\rho^{\alpha})\to 0$ из леммы 1.5, $\mu_1(p_1+p_2e^{-u\rho^{\gamma}})=ap_2u\rho^{\gamma}+o(\rho^{\gamma})$. Из леммы 1.1 для определения функций $\mu_k(p_1z_1+p_2z_2),\ k=\overline{1,N}$ можно найти, что

$$\alpha_1(1)=\prod_{m=2}^{N}(-\mu_m(1))=\frac{1}{a(1-p)}\prod_{m=1}^{N}(a_m(1-p)),$$

тогда

$$\lim\frac{\prod\limits_{m=1}^{N}[\mu_1(p_1+p_2e^{-u\rho^{\gamma}})+a_m(1-p(p_1+p_2e^{-u\rho^{\gamma}}))]}{\alpha_1(p_1+p_2e^{-u\rho^{\gamma}})}=\frac{\prod\limits_{m=1}^{N}(a_m(1-p))}{\alpha_1(1)}=a(1-p).$$

Таким образом, задача сводится к поиску следующего предела:

$$\lim\left\{\frac{\rho^{\alpha}}{a^2p_2(1-p)(p_1+p_2e^{-u\rho^{\gamma}})}\gamma_2^{(1)}(1,e^{-u\rho^{\gamma}},s\rho^{\alpha})+\right.$$
$$\left.+\frac{\prod_{m=1}^{N}(a_m(1-p))}{\prod_{m=2}^{N}(-\mu_m(1))}\frac{\rho^{\alpha-\gamma}}{a^2p_2u}\sum_{j=1}^{N}\frac{c_ja_jf_j(1,e^{-u\rho^{\gamma}},s\rho^{\alpha})}{\mu_1(p_1+p_2e^{-u\rho^{\gamma}})+a_j(1-p(p_1+p_2e^{-u\rho^{\gamma}}))}\right\}.$$

Действуя аналогично лемме 1.7, получаем, что

$$\lim\frac{\rho^{\alpha-\gamma}}{a^2p_2u}\sum_{j=1}^{N}\frac{c_ja_jf_j(1,e^{-u\rho^{\gamma}},s\rho^{\alpha})}{\mu_1(p_1+p_2e^{-u\rho^{\gamma}})+a_j(1-p(p_1+p_2e^{-u\rho^{\gamma}}))}=0\ \ \forall\alpha>0.$$

Тогда,

$$\lim \rho^\alpha p(1, e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha) = \lim \frac{\rho^\alpha \gamma_2^{(1)}(1, e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha)}{a^2 p_2 (1-p)(p_1 + p_2 e^{-u\rho^\gamma})} =$$

$$= \lim \frac{\prod_{m=1}^N (a_m(1-p))}{\alpha_1(1)(1-p)a^2 p_2} \sum_{e=1}^N \rho^\alpha p_{2e}(e^{-u\rho^\gamma}, 0, s\rho^\alpha) = \lim \frac{1}{ap_2} \sum_{e=1}^N \rho^\alpha p_{2e}(e^{-u\rho^\gamma}, 0, s\rho^\alpha) =$$

$$= \lim \frac{\rho^\alpha \gamma_2^{(1)}(z_1^*, e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha)}{p_2 a^2 (1-p)}.$$

Из определения функции $\gamma_2^{(1)}(z_1, z_2, s)$ имеем

$$\lim \frac{\rho^\alpha \gamma_2^{(1)}(z_1^*, e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha)}{p_2 a^2 (1-p)} =$$

$$= \lim \frac{(p_1 z_1^* + p_2 e^{-u\rho^\gamma}) e^{-u\rho^\gamma} \rho^\alpha}{p_2 a^2 \alpha_1 (p_1 z_1^* + p_2 e^{-u\rho^\gamma})[e^{-u\rho^\gamma} - \beta_2(s\rho^\alpha - \mu_1(p_1 z_1^* + p_2 e^{-u\rho^\gamma}))]} \times$$

$$\times \prod_{m=1}^N [\mu_1(z_1^*, e^{-u\rho^\gamma}) + a_m(1 - p(p_1 z_1^* + p_2 e^{-u\rho^\gamma}))] \times$$

$$\times \sum_{j=1}^N \frac{c_j a_j f_j(z_1^*, e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha)}{\mu_1(p_1 z_1^* + p_2 e^{-u\rho^\gamma}) + a_j(1 - p(p_1 z_1^* + p_2 e^{-u\rho^\gamma}))} =$$

$$= \lim \frac{(1-p)\rho^\alpha}{p_2 a [e^{-u\rho^\gamma} - \beta_2(s\rho^\alpha - \mu_1(p_1 z_1^* + p_2 e^{-u\rho^\gamma}))]} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^N \frac{c_j a_j f_j(z_1^*, e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha)}{\mu_1(p_1 z_1^* + p_2 e^{-u\rho^\gamma}) + a_j(1 - p(p_1 z_1^* + p_2 e^{-u\rho^\gamma}))}.$$

Отсюда, используя леммы 1.7 и 1.8, получаем, что

$$\lim \rho^\alpha p(1, e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha) = \begin{cases} \left[s \cdot \left(1 + \dfrac{a^* p_2^* u}{1 - a^* p_1^* \beta_{11}^*} \sqrt{\dfrac{v^*}{s}} \right) \right]^{-1}, \ \alpha < 2, \\ \left[s \cdot \left(1 + \dfrac{a^* p_2^* u}{1 - a^* p_1^* \beta_{11}^*} \cdot \dfrac{2v^*}{1 + \sqrt{1 + 4sv^*}} \right) \right]^{-1}, \ \alpha = 2, \\ \left[s \cdot \left(1 + \dfrac{a^* p_2^* v^*}{1 - a^* p_1^* \beta_{11}^*} u \right) \right]^{-1}, \ \alpha > 2. \end{cases}$$

Тогда, обращая преобразования Лапласа, получаем утверждение следующей теоремы.

Теорема 1.2: При $m \to \infty$ существует предел

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\rho^{\gamma} \cdot L_2\left(\frac{t}{\rho^{\alpha}}\right) < x\right) =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int\limits_{0}^{\sqrt{\frac{v^*}{2t}}wx} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \ \alpha < 2, \\ \\ 1 - \frac{e^{-wx}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\sqrt{\frac{t}{4v^*}}+wx\sqrt{\frac{v^*}{4t}}}^{+\infty} e^{-y^2} dy - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\sqrt{\frac{t}{4v^*}}+wx\sqrt{\frac{v^*}{4t}}}^{+\infty} e^{-y^2} dy, \ \alpha = 2, \\ \\ 1 - e^{-wx}, \ \alpha > 2, \end{cases}$$

где

$$w = \frac{1 - a^* p_1^* \beta_{11}^*}{a^* p_2^* v^*}.$$

Следствие 1 из теоремы 1.2: Плотность распределения длины очереди при критической загрузке:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{v^*}{\pi t}} w \cdot exp\left\{-\frac{v^* w^2 x^2}{4t}\right\}, \ \alpha < 2, \\ \\ \frac{we^{-wx}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\sqrt{\frac{t}{4v^*}}+wx\sqrt{\frac{v^*}{4t}}}^{+\infty} e^{-y^2} dy + w\sqrt{\frac{v^*}{4\pi t}} \times \\ \times \left(exp\left\{-wx - \left(-\sqrt{\frac{t}{4v^*}} + wx\sqrt{\frac{v^*}{4t}}\right)^2\right\} + exp\left\{\left(\sqrt{\frac{t}{4v^*}} + wx\sqrt{\frac{v^*}{4t}}\right)^2\right\}\right), \ \alpha = 2, \\ w \cdot exp\{-wx\}, \ \alpha > 2. \end{cases}$$

Следствие 2 из теоремы 1.2: Математическое ожидание длины очереди при критической загрузке:

$$\sqrt{\frac{t}{v^* \pi}} \cdot \frac{2}{w}, \text{ при } \alpha < 2,$$

$$\frac{1}{w}, \text{ при } \alpha > 2.$$

Следствие 3 из теоремы 1.2: Дисперсия длины очереди при критической загрузке:

$$\frac{(2\pi - 4)t}{\pi v^* w^2}, \text{ при } \alpha < 2$$

$$\frac{1}{w^2}, \text{ при } \alpha > 2.$$

Замечание: математическое ожидание и дисперсия в случае $\alpha = 2$ могут быть вычислены с использованием численных методов.

1.5.3. Численный пример

Для визуализации различий между предельными распределениями, полученных для разных α, рассмотрим поведение плотностей, математических ожиданий и дисперсий полученных предельных распределений при различных t. Рассмотрим систему $ARHM_{2,2}|G|1|\infty$ со следующими параметрами $a_1 = 1, a_2 = 2, c_1 = 0.35, c_2 = 0.65, \beta_{11} = 0.5749, \beta_{21} = 0.775, \beta_{12} = 1, \beta_{22} = 1, p = 0.5, p_1 = 0.5, p_2 = 0.5$.

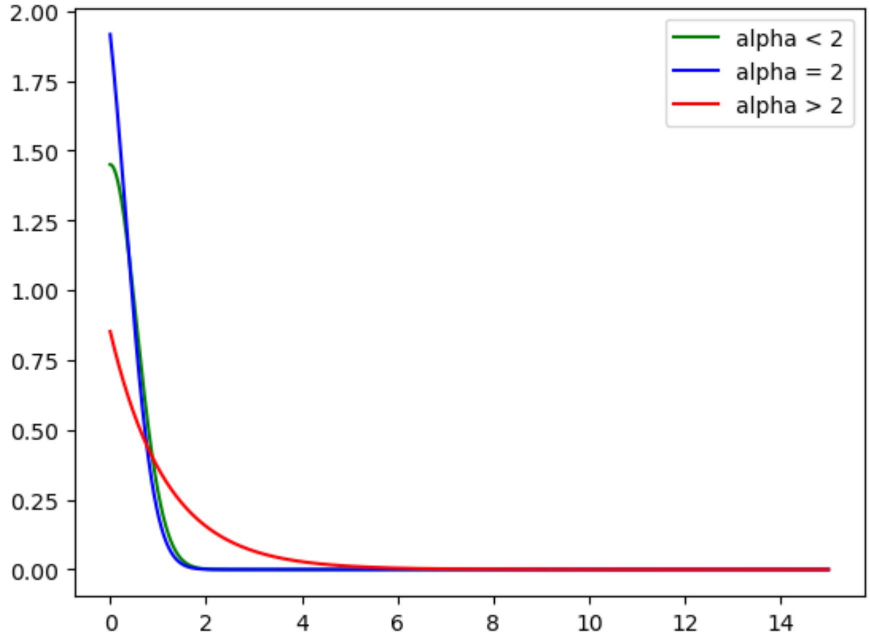

Рис. 1.4. t = 0.1

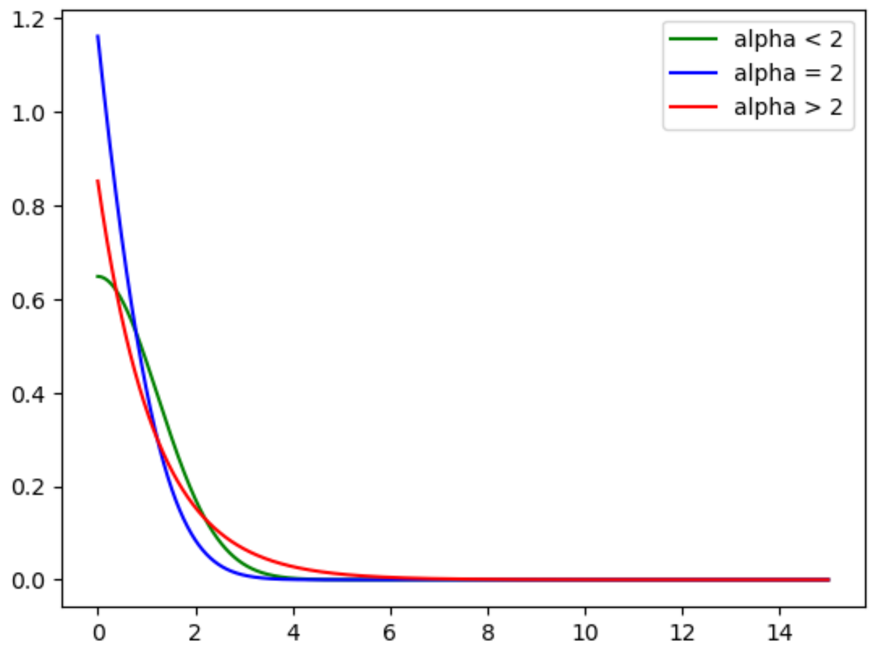

Рис. 1.5. t = 0.5

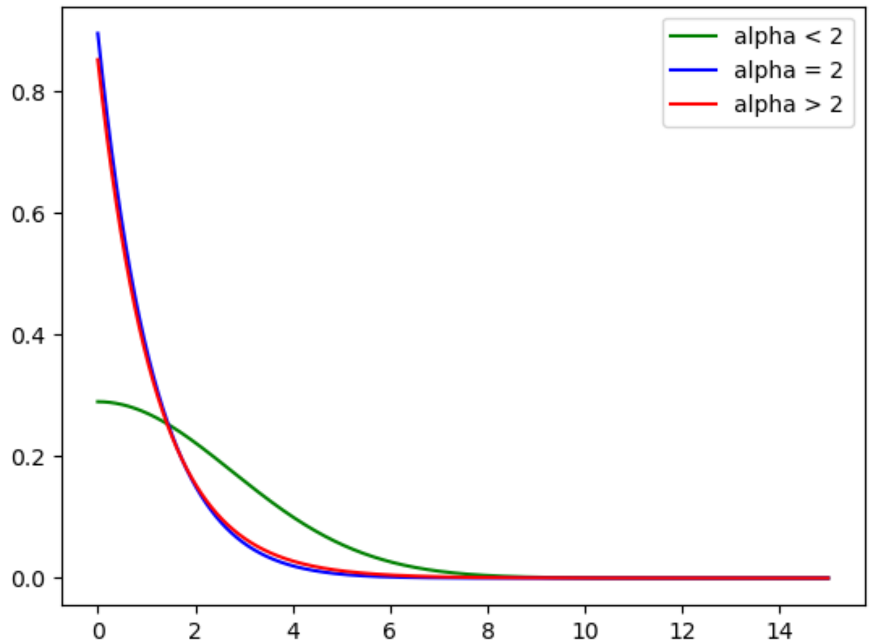

Рис. 1.6. t = 2.5

Из данных графиков видно, что при различных значениях t расположение графиков плотностей предельных распределений относительно друг друга для разных α принципиально меняется, а, значит, при статистическом анализе реального трафика это необходимо учитывать для получения корректных результатов.

Глава 2

Система $GI|G|1|\infty$ с профилактиками обслуживающего прибора

2.1. Описание системы и обозначения

Рассматривается однолинейная система обслуживания, в которую поступает рекуррентный поток требований с функцией распределения интервалов между поступлениями требований $A(x)$. Поступающие требования разделяются на r приоритетных классов, p_i, $\sum\limits_{i=1}^{r} p_i = 1$ – вероятность того, что новое требование будет отправлено в i-ый приоритетный класс, независимо от остальных требований и состояния системы. Длительности обслуживания – независимые в совокупности случайные величины с функцией распределения $B_i(x)$ для требований i-го класса. Если после завершения обслуживания требования система становится свободной, то обслуживающий прибор отправляется на профилактику, которая длится случайное время с функцией распределения $C(x)$. Если за время профилактики поступают требования, то после её завершения прибор начинает их обслуживать, если же требований не поступило, то прибор снова отправляется на профилактику.

Будем предполагать, что функции распределения $A(x), B_i(x)$ и $C(x)$ имеют плотности распределния $a(x), b_i(x)$ и $c(x)$ соответственно.

Обозначим

$$\alpha(s) = \int\limits_0^\infty e^{-su} a(u)du; \qquad \beta_i(s) = \int\limits_0^\infty e^{-su} b_i(u)du; \qquad \gamma(s) = \int\limits_0^\infty e^{-su} c(u)du$$

$$\alpha_1 = \int\limits_0^\infty u \cdot a(u)du$$

Введем следующие случайные процессы:

$\mathbf{L}(t) = (L_1(t), \ldots, L_r(t))$, где $L_i(t)$ - число требований i-го класса в системе в момент времени t;

$i(t) = i, i \in \{0, 1, \dots, r\}$ - либо номер класса $(1 \leqslant i \leqslant r)$, требование которого обслуживается в момент времени t (если $\mathbf{L}(t) \neq \mathbf{0}$), либо $i(t) = 0$, если в данный момент прибор находится на профилактике;

$x(t)$ - время, прошедшее с начала обслуживания до момента t, если $i(t) \neq 0$, если $i(t) = 0$, то время, прошедшее с начала профилактики до момента t;

$y(t)$ - время, прошедшее с момента последнего поступления требования до момента t.

Будем предполагать, что в момент начала наблюдения за системой $(t = 0)$ в ней нет требований, и с начала профилактики прибора прошло случайное время с плотностью $f(x)$, а с последнего поступления требования случайное время с плотностью $g(x) = \frac{1-A(x)}{\alpha_1}$. Также, положим, что требования i-го класса имеют приоритет перед требованиями j-го класса при $i < j$.

Обозначим

$$\phi(s) = \int_0^\infty e^{-su} f(u)du, \quad \psi(s) = \int_0^\infty e^{-su} g(u)du = \frac{1-\alpha(s)}{\alpha_1 \cdot s}.$$

В сделанных предположениях случайный процесс $(\mathbf{L}(t), i(t), x(t), y(t))$ является однородным марковским процессом.

Положим

$$\nu(x) = \frac{a(x)}{1-A(x)}, \qquad \eta_i(x) = \frac{b_i(x)}{1-B_i(x)}, \qquad \mu(x) = \frac{c(x)}{1-C(x)}.$$

$\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r)$, данный вектор может быть нулевым только при $i(t) = 0$, в противном случае существует хотя бы одна положительная компонента.

$$P_i(\mathbf{n}, x, y, t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathbb{P}(\mathbf{L}(t) = \mathbf{n}, x(t) < x, y(t) < y, i(t) = i),$$

$$p_i(\mathbf{z}, x, y, s) = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{n_1=0}^\infty \cdots \sum_{n_r=0}^\infty z_1^{n_1} \dots z_r^{n_r} P_i(\mathbf{n}, x, y, t)dt.$$

2.2. Математическая модель. Построение.

Рассмотрим изменение состояний системы в интервале времени $(t, t+\Delta)$:
В случае если обслуживающее устройство находится на профилактике и не было поступлений требований в систему и текущий цикл профилактики не закончился уравнение имеет следующий вид:

$$P_0(\mathbf{n}, x+\Delta, y+\Delta, t+\Delta) = P_0(\mathbf{n}, x, y, t)\cdot[1-(\nu(y)+\mu(x))\Delta]+o(\Delta).$$

Если профилактика началась за время Δ, то она началась в следствии того, что не осталось требований в системе (1 слагаемое), либо до этого была профилактика и это новый цикл (2 слагаемое):

$$\int\limits_0^\Delta P_0(\mathbf{n}, u, y+\Delta, t+\Delta)du =$$

$$= \sum_{i=1}^r \int\limits_0^t P_i((0,\ldots,1,\ldots,0), x, y, t)\eta_i(x)dx\Delta + \int\limits_0^t P_0(\mathbf{0}, x, y, t)\mu(x)dx\Delta + o(\Delta).$$

Если во время профилактики за время Δ поступила заявка, то

$$\int\limits_0^\Delta P_0(\mathbf{n}, x+\Delta, u, t+\Delta)du = \sum_{i=1}^r p_i \int\limits_0^t P_0(\mathbf{n}-\mathbf{1}_i, x, y, t)\nu(y)dy\Delta + o(\Delta).$$

Так как, мы условились считать, что наблюдение за системой начинается в момент профилактики и отсуствия заявок, то $P_0(\mathbf{n}, x, y, 0) = \delta_{\mathbf{n},0} f(x)g(y)$.
В случае если обслуживающее устройство занято обслуживанием заявики i-го приоритетного класса и за время Δ не было закончено обслуживание заявки и не было новых поступлений:

$$P_i(\mathbf{n}, x+\Delta, y+\Delta, t+\Delta) = P_i(\mathbf{n}, x, y, t)[1-(\nu(y)+\eta_i(x))\Delta].$$

Если произошло обслуживание заявки какого-либо приоритетного класса или закончился цикл профилактики (а система оказалась не пустой):

$$\int_0^{\Delta}\sum_{i=1}^{r} P_i(\mathbf{n},u,y+\Delta,t+\Delta)du =$$

$$= \int_0^{t} P_0(\mathbf{n},x,y,t)\mu(x)dx\Delta + \sum_{i=1}^{r}\int_0^{t} P_i(\mathbf{n}+\mathbf{1}_i,x,y,t)\eta_i(x)dx\Delta -$$

$$-\sum_{i=1}^{r}\int_0^{t} P_i((0,\ldots,1,\ldots,0),x,y,t)\eta_i(x)dx\Delta - \int_0^{t} P_0(\mathbf{0},x,y,t)\mu(x)dx\Delta + o(\Delta).$$

Если во время обслуживания заявки i-го приоритетного класса поступило требование какого-либо приоритетного класса в систему:

$$\int_0^{\Delta} P_i(\mathbf{n},x+\Delta,u,t+\Delta)du = \sum_{j=1}^{r}\int_0^{t} P_i(\mathbf{n}-\mathbf{1}_j,x,y,t)p_j\nu(y)dy\Delta + o(\Delta).$$

В силу того, что изначально в системе отсутствуют заявки, то $P_i(\mathbf{n},x,y,0) = 0$. Устремляя $\Delta \to 0$, имеем

$$\frac{\partial P_0(\mathbf{n},x,y,t)}{\partial t} + \frac{\partial P_0(\mathbf{n},x,y,t)}{\partial x} + \frac{\partial P_0(\mathbf{n},x,y,t)}{\partial y} = -(\nu(y)+\mu(x))P_0(\mathbf{n},x,y,t),$$

$$P_0(\mathbf{n},0,y,t) = \sum_{i=1}^{r}\int_0^{t} P_i((0,\ldots,1,\ldots,0),x,y,t)\eta_i(x)dx + \int_0^{t} P_0(\mathbf{0},x,y,t)\mu(x)dx,$$

$$P_0(\mathbf{n},x,0,t) = \sum_{i=1}^{r} p_i\int_0^{t} P_0(\mathbf{n}-\mathbf{1}_i,x,y,t)\nu(y)dy,$$

$$P_0(\mathbf{n},x,y,0) = \delta_{\mathbf{n},0}f(x)g(y),$$

для $i=\overline{1,r}$:

$$\frac{\partial P_i(\mathbf{n},x,y,t)}{\partial t} + \frac{\partial P_i(\mathbf{n},x,y,t)}{\partial x} + \frac{\partial P_i(\mathbf{n},x,y,t)}{\partial y} = -(\nu(y)+\eta_i(x))P_i(\mathbf{n},x,y,t),$$

$$\sum_{i=1}^{r} P_i(\mathbf{n},0,y,t) = \int_0^t P_0(\mathbf{n},x,y,t)\mu(x)dx + \sum_{i=1}^{r}\int_0^t P_i(\mathbf{n}+\mathbf{1}_i,x,y,t)\eta_i(x)dx-$$

$$-\sum_{i=1}^{r}\int_0^t P_i((0,\ldots,1,\ldots,0),x,y,t)\eta_i(x)dx - \int_0^t P_0(\mathbf{0},x,y,t)\mu(x)dx,$$

$$P_i(\mathbf{n},x,0,t) = \sum_{j=1}^{r}\int_0^t P_i(\mathbf{n}-\mathbf{1}_j,x,y,t)p_j\nu(y)dy,$$

$$P_i(\mathbf{n},x,y,0) = 0.$$

Переходя к производящим функциям и преобразованию Лапласа по времени, получим:

$$\frac{\partial p_0(\mathbf{z},x,y,s)}{\partial x} + \frac{\partial p_0(\mathbf{z},x,y,s)}{\partial y} = -(s+\nu(y)+\mu(x))p_0(\mathbf{z},x,y,s) + f(x)g(y), \quad (2.1)$$

$$p_0(\mathbf{z},0,y,s) = \sum_{i=1}^{r}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-st}P_i((0,\ldots,1,\ldots,0),x,y,t)\eta_i(x)dxdt+$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-st}P_0(\mathbf{0},x,y,t)\mu(x)dxdt.$$

Заметим, что из вида соотношения для $p_0(\mathbf{z},0,y,s)$ следует, что оно не зависит от $\mathbf{z}$.

$$p_0(\mathbf{z},x,0,s) = (\mathbf{p},\mathbf{z})\int_0^\infty p_0(\mathbf{z},x,y,s)\nu(y)dy.$$

Для $i=\overline{1,r}$:

$$\frac{\partial p_i(\mathbf{z},x,y,s)}{\partial x} + \frac{\partial p_i(\mathbf{z},x,y,s)}{\partial y} = -(s+\nu(y)+\eta_i(x))p_i(\mathbf{z},x,y,s),$$

$$\sum_{i=1}^{r} p_i(\mathbf{z},0,y,s) = \int_0^\infty p_0(\mathbf{z},x,y,s)\mu(x)dx + \sum_{i=1}^{r}\frac{1}{z_i}\int_0^\infty p_i(\mathbf{z},x,y,s)\eta_i(x)dx-$$

$$-\sum_{i=1}^{r}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-st}P_i((0,\ldots,1,\ldots,0),x,y,t)\eta_i(x)dxdt - \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-st}P_0(\mathbf{0},x,y,t)\mu(x)dxdt,$$

$$p_i(\mathbf{z},x,0,s) = (\mathbf{p,z})\int\limits_0^\infty p_i(\mathbf{z},x,y,s)\nu(y)dy.$$

Рассмотрим следующее интегральное преобразование:

$$q(\mathbf{z},x,w,s) = \int\limits_0^\infty e^{-wy}\frac{1-(\mathbf{p,z})\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du}{1-A(y)}\cdot p(\mathbf{z},x,y,s)dy. \qquad (2.2)$$

Выбор такого интегрального преобразования обусловлен тем, что оно позволяет свести исследуемую систему дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Заметим, что

$$\frac{\partial q(\mathbf{z},x,w,s)}{\partial x} = \int\limits_0^\infty e^{-wy}\frac{1-(\mathbf{p,z})\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du}{1-A(y)}\cdot\frac{\partial p(\mathbf{z},x,y,s)}{\partial x}dy,$$

тогда интегрируя данное выражение по частям, имеем:

$$\int\limits_0^\infty e^{-wy}\frac{1-(\mathbf{p,z})\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du}{1-A(y)}\cdot\frac{\partial p(\mathbf{z},x,y,s)}{\partial y}dy =$$

$$= e^{-wy}\frac{1-(\mathbf{p,z})\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du}{1-A(y)}\cdot p(\mathbf{z},x,y,s)\Bigg|_{y=0}^{\infty} -$$

$$-\int\limits_0^\infty\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-wy}\frac{1-(\mathbf{p,z})\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du}{1-A(y)}\right]\cdot p(\mathbf{z},x,y,s)dy.$$

Учитывая, что

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-wy}\frac{1-(\mathbf{p},\mathbf{z})\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du}{1-A(y)}\right]\cdot p(\mathbf{z},x,y,s)dy =$$

$$= -wq(z,x,w,s) - \int_0^\infty \frac{(\mathbf{p},\mathbf{z})a(y)}{1-A(y)}p(z,x,y,s)dy +$$

$$+ \int_0^\infty \nu(y)e^{-wy}\frac{1-(\mathbf{p},\mathbf{z})\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du}{1-A(y)}\cdot p(\mathbf{z},x,y,s)dy,$$

имеем

$$\int_0^\infty e^{-wy}\frac{1-(\mathbf{p},\mathbf{z})\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du}{1-A(y)}\cdot\frac{\partial p(\mathbf{z},x,y,s)}{\partial y}dy =$$

$$= e^{-wy}\frac{1-(\mathbf{p},\mathbf{z})\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du}{1-A(y)}\cdot p(\mathbf{z},x,y,s)\Bigg|_{y=0}^{\infty} + wq(z,x,w,s) +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{(\mathbf{p},\mathbf{z})a(y)}{1-A(y)}p(z,x,y,s)dy - \int_0^\infty \nu(y)e^{-wy}\frac{1-(\mathbf{p},\mathbf{z})\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du}{1-A(y)}\cdot p(\mathbf{z},x,y,s)dy,$$

также отметим, что

$$e^{-wy}\frac{1-(\mathbf{p},\mathbf{z})\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du}{1-A(y)}\cdot p(\mathbf{z},x,y,s)\Bigg|_{y=0} = p(z,x,0,s),$$

$$e^{-wy}\frac{1-(\mathbf{p},\mathbf{z})\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du}{1-A(y)}\cdot p(\mathbf{z},x,y,s)\Bigg|_{y=\infty} = 0.$$

Тогда, применяя интегральное преобразование (2.2) к уравнению (2.1) получим:

$$\frac{\partial q_0(\mathbf{z},x,y,s)}{\partial x}+\mathbf{(p{,}z)}p_0(\mathbf{z},x,\infty,s)-p_0(\mathbf{z},x,0,s)+\int\limits_0^\infty \mathbf{(p{,}z)}\cdot\nu(y)\cdot p_0(\mathbf{z},x,y,s)dy=$$

$$=-(s+w+\mu(x))q_0(\mathbf{z},x,y,s)+f(x)\cdot\int\limits_0^\infty g(y)e^{-wy}\frac{1-\mathbf{(p{,}z)}\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du}{1-A(y)}dy,$$

учитывая

$$p_0(\mathbf{z},x,0,s)=\mathbf{(p{,}z)}\int\limits_0^\infty p_0(\mathbf{z},x,y,s)\nu(y)dy,$$

имеем

$$\frac{\partial q_0(\mathbf{z},x,y,s)}{\partial x}+\mathbf{(p{,}z)}p_0(\mathbf{z},x,\infty,s)=-(s+w+\mu(x))q_0(\mathbf{z},x,y,s)+$$

$$+f(x)\cdot\int\limits_0^\infty g(y)e^{-wy}\frac{1-\mathbf{(p{,}z)}\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du}{1-A(y)}dy.$$

Используя определение функции $g(y)$, имеем

$$\frac{\partial q_0(\mathbf{z},x,y,s)}{\partial x}=-(s+w+\mu(x))q_0(\mathbf{z},x,y,s)+$$

$$+\frac{f(x)}{\alpha_1}\cdot\int\limits_0^\infty e^{-wy}\left[1-\mathbf{(p{,}z)}\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du\right]dy,$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-wy}\left[1-\mathbf{(p{,}z)}\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du\right]dy=\frac{e^{-wy}}{-w}\left(1-\mathbf{(p{,}z)}\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du\right)\Bigg|_{y=0}^{\infty}-$$

$$-\frac{\mathbf{(p{,}z)}}{w}\int\limits_0^\infty e^{-wy}e^{wy}a(y)dy=\frac{1-\mathbf{(p{,}z)}}{w}$$

Применяя интегральное преобразование (2.2) к

$$p_0(\mathbf{z},0,y,s)=\sum_{i=1}^r\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-st}P_i((0,\ldots,1,\ldots,0),x,y,t)\eta_i(x)dxdt+$$

$$+\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-st}P_0(\mathbf{0},x,y,t)\mu(x)dxdt,$$

получаем

$$q_0(\mathbf{z},0,w,s)=\int\limits_0^\infty e^{-wy}\frac{1-(\mathbf{p},\mathbf{z})\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du}{1-A(y)}\times$$

$$\times\left[\sum_{i=1}^r\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-st}P_i((0,\ldots,1,\ldots,0),x,y,t)\eta_i(x)dxdt+\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-st}P_0(\mathbf{0},x,y,t)\mu(x)dxdt\right]$$

Применяя интегральное преобразование (2.2) к:

$$\frac{\partial p_i(\mathbf{z},x,y,s)}{\partial x}+\frac{\partial p_i(\mathbf{z},x,y,s)}{\partial y}=-(s+\nu(y)+\eta_i(x))p_i(\mathbf{z},x,y,s),\ i=\overline{1,r},$$

получаем

$$\frac{\partial q_i(\mathbf{z},x,w,s)}{\partial x}=-(s+w+\eta_i(x))q_i(\mathbf{z},x,w,s),$$

Применяя интегральное преобразование (2.2) к:

$$\sum_{i=0}^r p_i(\mathbf{z},0,y,s)=\int\limits_0^\infty p_0(\mathbf{z},x,y,s)\mu(x)dx+\sum_{i=1}^r\frac{1}{z_i}\int\limits_0^\infty p_i(\mathbf{z},x,y,s)\eta_i(x)dx,\ i=\overline{0,r},$$

получаем

$$\sum_{i=0}^r q_i(\mathbf{z},0,w,s)=\int\limits_0^\infty q_0(\mathbf{z},x,w,s)\mu(x)dx+\sum_{i=1}^r\frac{1}{z_i}\int\limits_0^\infty q_i(\mathbf{z},x,w,s)\eta_i(x)dx.$$

Таким образом, исследуемая система дифференциальных уравнений в частных производных была сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial q_0(\mathbf{z},x,y,s)}{\partial x}=-(s+w+\mu(x))q_0(\mathbf{z},x,y,s)+f(x)\cdot\frac{1-(\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_1 w}dy,\qquad(2.3)$$

$$\frac{\partial q_i(\mathbf{z},x,w,s)}{\partial x}=-(s+w+\eta_i(x))q_i(\mathbf{z},x,w,s),\ i=\overline{1,r},\qquad(2.4)$$

а также было получено соотношение

$$\sum_{i=0}^r q_i(\mathbf{z},0,w,s)=\int\limits_0^\infty q_0(\mathbf{z},x,w,s)\mu(x)dx+\sum_{i=1}^r\frac{1}{z_i}\int\limits_0^\infty q_i(\mathbf{z},x,w,s)\eta_i(x)dx.$$

2.3. Математическая модель. Решение.

Теорема 2.1 : функции $q_i(\mathbf{z},x,w,s), i=\overline{0,r}$, удовлетворяют соотношениям:

$$q_i(\mathbf{z},x,w,s)=q_i(\mathbf{z},0,w,s)\cdot(1-B_i(x))\cdot e^{-(s+w)x},\quad i=\overline{1,r}, \tag{2.5}$$

$$q_0(\mathbf{z},x,w,s)=\left(q_0(\mathbf{z},0,w,s)+\frac{1-(\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_1\cdot w}\int\limits_0^x f(b)\frac{e^{(s+w)b}}{1-C(b)}db\right)\cdot(1-C(x))\cdot e^{-(s+w)x}, \tag{2.6}$$

$$\sum_{i=0}^r q_i(\mathbf{z},0,w,s)=\int\limits_0^\infty q_0(\mathbf{z},x,w,s)\mu(x)dx+\sum_{i=1}^r\frac{1}{z_i}\int\limits_0^\infty q_i(\mathbf{z},x,w,s)\eta_i(x)dx. \tag{2.7}$$

Доказательство:

Соотношение (2.7) было получено ранее в разделе 2.2. Преобразуем (2.4) для нахождения его решения (2.5).

$$\frac{\partial q_i(\mathbf{z},x,w,s)}{q_i(\mathbf{z},x,w,s)}=-(s+w)\partial x-\eta_i(x)\partial x,\ i=\overline{1,r},$$

используя определение для $\eta_i(x)$, получаем:

$$\int\frac{b_i(x)}{1-B_i(x)}dx=-\ln|1-B_i(x)|+Const,\ i=\overline{1,r}.$$

Тогда решение (2.4) имеет вид

$$\ln|q_i(\mathbf{z},x,w,s)|=-(s+w)x+\ln|1-B_i(x)|+Const(\mathbf{z},w,s),\ i=\overline{1,r},$$

после стандартных преобразований, получаем:

$$q_i(\mathbf{z},x,w,s)=q_i(\mathbf{z},0,w,s)\cdot(1-B_i(x))\cdot e^{-(s+w)x},\quad i=\overline{1,r}.$$

Для решения (2.3) воспользуемся методом вариации постоянных, для этого сначала решим уравнение:

$$\frac{\partial q_0(\mathbf{z},x,y,s)}{\partial x}=-(s+w+\mu(x))q_0(\mathbf{z},x,y,s).$$

Действуя аналогично решению уравнения (2.4), имеем:

$$q_0(\mathbf{z},x,w,s)=U(\mathbf{z},x,w,s)\cdot(1-C(x))\cdot e^{-(s+w)x},$$

где $U(\mathbf{z}, x, w, s)$ - неизвестная функция всех переменных, которая будет найдена далее. Так как,

$$\int_0^\infty e^{-wy}\Big[1 - (\mathbf{p},\mathbf{z}) \int_0^y e^{wu} a(u) du\Big] \cdot p_0(\mathbf{z}, x, y, s) dy = \frac{1 - (\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_1 \cdot w},$$

то подставляя частное решение в исходное уравнение (2.3), получим следующее:

$$\frac{\partial U(\mathbf{z}, x, w, s)}{\partial x} \cdot (1 - C(x)) \cdot e^{-(s+w)x} - U(\mathbf{z}, x, w, s) \cdot c(x) \cdot e^{-(s+w)x} -$$
$$- U(\mathbf{z}, x, w, s) \cdot (1 - C(x)) \cdot (s + w) e^{-(s+w)x} =$$
$$= -\left(s + w + \frac{c(x)}{1 - C(x)}\right) U(\mathbf{z}, x, w, s) \cdot (1 - C(x)) \cdot e^{-(s+w)x} + f(x) \cdot \frac{1 - (\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_1 \cdot w},$$

то есть, получим простейшее дифференциальное уравнение для $U(\mathbf{z}, x, w, s)$:

$$\frac{\partial U(\mathbf{z}, x, w, s)}{\partial x} = f(x) \cdot \frac{1 - (\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_1 \cdot w} \cdot \frac{e^{(s+w)x}}{1 - C(x)},$$

его решением является

$$U(\mathbf{z}, x, w, s) = \frac{1 - (\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_1 \cdot w} \int_0^x f(b) \frac{e^{(s+w)b}}{1 - C(b)} db + Const(z, y, s).$$

Учитывая, что $q_0(\mathbf{z}, 0, w, s) = U(\mathbf{z}, 0, w, s)$, получаем $Const(z, y, s) = q_0(\mathbf{z}, 0, w, s)$, тогда

$$U(\mathbf{z}, x, w, s) = q_0(\mathbf{z}, 0, w, s) + \frac{1 - (\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_1 \cdot w} \int_0^x f(b) \frac{e^{(s+w)b}}{1 - C(b)} db,$$

значит, решение (2.3) имеет вид

$$q_0(\mathbf{z}, x, w, s) = \left(q_0(\mathbf{z}, 0, w, s) + \frac{1 - (\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_1 \cdot w} \int_0^x f(b) \frac{e^{(s+w)b}}{1 - C(b)} db\right) \cdot (1 - C(x)) \cdot e^{-(s+w)x}.$$

Конец доказательства.

2.4. Распределение количества требований, поступивших во время профилактики

Сначала получим интегральные уравнения для определения функций $p_0(y, s)$ и $p_k(\mathbf{z}, 0, y, s), k = \overline{1, r}$. Подставим (2.5) и (2.6) в (2.7)

$$\sum_{i=0}^{r} q_i(\mathbf{z}, 0, w, s) =$$

$$= \int_0^\infty \left(q_0(\mathbf{z}, 0, w, s) + \frac{1 - (\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_1 \cdot w} \int_0^x f(b) \frac{e^{(s+w)b}}{1 - C(b)} db \right) \cdot c(x) \cdot e^{-(s+w)x} dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{z_i} \int_0^\infty q_i(\mathbf{z}, 0, w, s) \cdot b_i(x) \cdot e^{-(s+w)x} dx,$$

учитывая, что

$$\int_0^\infty b_i(x) \cdot e^{-(s+w)x} dx = \beta_i(s + w), \quad \int_0^\infty c(x) \cdot e^{-(s+w)x} dx = \gamma(s + w),$$

имеем

$$\sum_{i=0}^{r} q_i(\mathbf{z}, 0, w, s) = \int_0^\infty \left(\frac{1 - (\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_1 \cdot w} \int_0^x f(b) \frac{e^{(s+w)b}}{1 - C(b)} db \right) \cdot c(x) \cdot e^{-(s+w)x} dx +$$

$$+ q_0(\mathbf{z}, 0, w, s)\gamma(s + w) + \sum_{i=1}^{r} \frac{q_i(\mathbf{z}, 0, w, s)\beta_i(s + w)}{z_i}.$$

Обозначим

$$\chi(s, w) = \int_0^\infty \int_0^x f(b) \frac{e^{(s+w)b}}{1 - C(b)} db \cdot c(x) \cdot e^{-(s+w)x} dx,$$

в введенных обозначениях

$$\sum_{i=0}^{r} q_i(\mathbf{z}, 0, w, s) = \frac{1 - (\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_1 \cdot w} \chi(s, w) + q_0(\mathbf{z}, 0, w, s)\gamma(s+w) + \sum_{i=1}^{r} \frac{q_i(\mathbf{z}, 0, w, s)\beta_i(s + w)}{z_i}.$$

Преобразуя, получаем

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{z_i - \beta_i(s + w)}{z_i} \cdot q_i(\mathbf{z}, 0, w, s) = \frac{1 - (\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_1 \cdot w} \chi(s, w) - (1 - \gamma(s + w))q_0(\mathbf{z}, 0, w, s). \tag{2.8}$$

Ранее отмечалось, что $p_0(\mathbf{z},0,y,s)=p_0(y,s)$ не зависит от $\mathbf{z}$, тогда можно заметить, что правая часть (2.8) линейна по каждой из z_i. Перегруппируем правую часть (2.8) относительно $\mathbf{(p,z)}$ и введем следующие обозначения:

$$\Theta_1=\frac{\chi(s,w)}{\alpha_1\cdot w}-(1-\gamma(s+w))\int\limits_0^\infty\frac{e^{-wy}}{1-A(y)}\cdot p_0(y,s)dy,$$

$$\Theta_2=\frac{\chi(s,w)}{\alpha_1\cdot w}-(1-\gamma(s+w))\int\limits_0^\infty e^{-wy}\frac{\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du}{1-A(y)}\cdot p_0(y,s)dy,$$

$$\epsilon_i(\mathbf{z}_i,w,s)=\int\limits_0^\infty\frac{e^{-wy}}{1-A(y)}p_i(z_i,0,y,s)dy,$$

$$\delta_i(\mathbf{z}_i,w,s)=\int\limits_0^\infty\frac{e^{-wy}}{1-A(y)}\int\limits_0^\infty e^{wu}a(u)du\; p_i(z_i,0,y,s)dy,$$

где $\mathbf{z}_i=(z_i,z_{i+1},\dots,z_r)$, тогда

$$\sum_{i=1}^r\frac{z_i-\beta_i(s+w)}{z_i}\cdot(\epsilon_i(\mathbf{z}_i,w,s)-\mathbf{(p,z)}\delta_i(\mathbf{z}_i,w,s))=\Theta_1-\mathbf{(p,z)}\Theta_2. \tag{2.9}$$

Подставляя в (2.9) $z_i=\beta_i(s+w),\ i=\overline{1,r}$, получаем

$$\Theta_1=(p,\beta(s+w))_r\cdot\Theta_2, \tag{2.10}$$

где $(p,\beta(s+w))_r=\sum\limits_{i=1}^r p_i\beta_i(s+w)$, тогда (2.9) можно переписать в виде:

$$\sum_{i=1}^r\frac{z_i-\beta_i(s+w)}{z_i}\cdot(\epsilon_i(\mathbf{z}_i,w,s)-\mathbf{(p,z)}\delta_i(\mathbf{z}_i,w,s))=(p,\beta(s+w)-z)\Theta_2. \tag{2.11}$$

Подставляя в (2.11) $z_i=\beta_i(s+w),\ i=\overline{1,r-1}$, получаем

$$q_r(\mathbf{z},0,w,s)=(p,\beta(s+w)-\mathbf{z})_1^{r-1}\delta_r(z_r,w,s)-p_rz_r\Theta_2;$$

подставляя в (2.11) $z_i=\beta_i(s+w),\ i=\overline{1,r-2}$, получаем:

$$q_{r-1}(\mathbf{z},0,w,s)=(p,\beta(s+w)-\mathbf{z})_1^{r-2}\delta_{r-1}(z_r,w,s)+ \\ +p_{r-1}z_{r-1}\left(\frac{z_r-\beta_r(s+w)}{z_r}\delta_r(z_r,w,s)-\Theta_2\right).$$

Продолжая данный процесс, то есть последовательно подставляя в (2.11) $z_i = \beta_i(s+w),\ i=\overline{1,r-m},\ m=\overline{1,r-1}$ получаем:

$$q_k(\mathbf{z},0,w,s) = (p,\beta(s+w)-\mathbf{z})_1^{k-1}\delta_k(\mathbf{z}_k,w,s)+ \\ +p_k z_k\left(\sum_{m=k+1}^{r}\frac{z_m-\beta_m(s+w)}{z_m}\delta_m(\mathbf{z}_m,w,s)-\Theta_2\right). \quad (2.12)$$

Обозначим

$$h_0(y,s)=\frac{p_0(y,s)}{1-A(y)},\quad h_k(z,y,s)=\frac{p_k(\mathbf{z},0,y,s)}{1-A(y)},$$

тогда учитывая, что

$$\gamma(s+w)=\int\limits_0^\infty e^{-(s+w)y}c(y)dy,\quad \chi(s,w)=\int\limits_0^\infty e^{-sw}H_1(s,v)dv,$$

а также используя определение (2.2) для $q_k(\mathbf{z},x,w,s)$ и полученное ранее соотношение (2.12), получим интегральное уравнение:

$$\int\limits_0^\infty e^{-wy}h_k(\mathbf{z}_k,y,s)dy-\left((\mathbf{p},\beta(s+w))_1^{k-1}+(\mathbf{p},\mathbf{z})_k^r\right)\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du\cdot h_k(\mathbf{z}_k,y,s)dy = \\ =p_k z_k\Bigg(\sum_{m=k+1}^{r}\frac{z_m-\beta_m(s+w)}{z_m}\int\limits_0^\infty e^{-wy}\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du h_m(\mathbf{z}_m,0,y,s)dy+ \\ +(1-\gamma(s+w))\int\limits_0^\infty e^{-wy}\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du h_0(y,s)dy-\frac{\chi(s,w)}{\alpha_1\cdot w}\Bigg). \quad (2.13)$$

Упростим отдельные слагаемые в (2.13):

$$\int\limits_0^\infty e^{-wy}\int\limits_0^y e^{wu}a(u)h_k(z,y,s)dudy=\int\limits_0^\infty du\int\limits_u^\infty e^{-w(y-u)}a(u)h_k(z,y,s)dy= \\ =\{y_1=y-u\}=\int\limits_0^\infty du\int\limits_0^\infty e^{-wy_1}a(u)h_k(z,y_1+u,s)dy_1= \\ =\int\limits_0^\infty du\int\limits_0^\infty e^{-wy}a(u)h_k(z,y+u,s)dy=\int\limits_0^\infty e^{-wy}\int\limits_0^\infty a(u)h_k(z,y+u,s)dudy, \quad (2.14)$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-wy}\int\limits_0^y e^{wu}a(u)h_0(y,s)dudy=\int\limits_0^\infty du\int\limits_u^\infty e^{-w(y-u)}a(u)h_0(y,s)dy=$$

$$=\{y_1=y-u\}=\int\limits_0^\infty du\int\limits_0^\infty e^{-wy_1}a(u)h_0(y_1+u,s)dy_1=$$

$$=\int\limits_0^\infty du\int\limits_0^\infty e^{-wy}a(u)h_0(y+u,s)dy=\int\limits_0^\infty e^{-wy}\int\limits_0^\infty a(u)h_0(y+u,s)dudy, \quad (2.15)$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-(s+w)y}c(y)dy\cdot\int\limits_0^\infty e^{-wy}\int\limits_0^y e^{wu}a(u)du\cdot h_0(y,s)dy=$$

$$=\int\limits_0^\infty e^{-wy}e^{-sy}c(y)dy\cdot\int\limits_0^\infty e^{-wy}\int\limits_0^\infty a(u)h_0(y+u,s)dudy=$$

$$=\int\limits_0^\infty e^{-wy}\int\limits_0^y e^{-s(y-v)}c(y-v)\int\limits_0^\infty a(u)h_0(y+u,s)dudvdy, \quad (2.16)$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-sw}}{w}H_1(s,v)dv=\left\{\frac{1}{w}=\int\limits_0^\infty e^{-wy}dy\right\}=\int\limits_0^\infty e^{-sw}\int\limits_0^\infty e^{-wy}H_1(s,v)dydv=$$

$$=\int\limits_0^\infty e^{-wy}\int\limits_0^\infty H_1(s,v)dvdy, \quad (2.17)$$

тогда (2.13) принимает вид:

$$\int\limits_0^\infty e^{-wy}\Big(h_k(\mathbf{z}_k,y,s)-\big((\mathbf{p},\beta(s+w))_1^{k-1}+(\mathbf{p},\mathbf{z})_k^r\big)\int\limits_0^\infty a(u)\cdot h_k(\mathbf{z}_k,y+u,s)du\Big)dy=$$

$$=\int\limits_0^\infty e^{-wy}\Big[p_kz_k\Big(\sum_{m=k+1}^r\frac{z_m-\beta_m(s+w)}{z_m}\int\limits_0^\infty e^{wu}a(u)\cdot h_m(\mathbf{z}_m,y+u,s)du+$$

$$+\int\limits_0^\infty a(u)h_0(y+u,s)du-\int\limits_0^y e^{-s(y-v)}c(y-v)\int\limits_0^\infty a(u)h_0(y+u,s)dudv-\frac{1}{\alpha_1}\int\limits_0^\infty H_1(s,v)dv\Big)\Big]d$$

Из равенства преобразований Лапласа следует равенство оригиналов:

$$h_k(\mathbf{z}_k, y, s) - \left((\mathbf{p}, \beta(s+w))_1^{k-1} + (\mathbf{p}, \mathbf{z})_k^r\right) \int\limits_0^\infty a(u) \cdot h_k(\mathbf{z}_k, y+u, s)du =$$

$$= p_k z_k \Bigg(\sum_{m=k+1}^{r} \frac{z_m - \beta_m(s+w)}{z_m} \int\limits_0^\infty e^{wu} a(u) \cdot h_m(\mathbf{z}_m, y+u, s)du + \int\limits_0^\infty a(u) h_0(y+u, s)du -$$

$$- \int\limits_0^y e^{-s(y-v)} c(y-v) \int\limits_0^\infty a(u) h_0(y+u, s)dudv - \frac{1}{\alpha_1} \int\limits_0^\infty H_1(s, v)dv \Bigg), \quad k = \overline{1, r}. \tag{2.18}$$

Уравнение (2.18) для $h_k(\mathbf{z}_k, y, s), k = \overline{1, r}$ является интегральным уравнением Фредгольма 2 рода, которое имеет единственное решение, в силу того, что

$$\sup_y \left| \left((\mathbf{p}, \beta(s))_1^{k-1} + (\mathbf{p}, \mathbf{z})_k^r\right) \int\limits_y^\infty a(y-u)du \right| = |(\mathbf{p}, \beta(s))_1^{k-1} + (\mathbf{p}, \mathbf{z})_k^r| < 1, \ \forall \, |z_j| < 1.$$

Рассмотрим ранее полученное уравнение:

$$0 = \left[\frac{\chi(s, w)}{\alpha_1 \cdot w} - (1 - \gamma(s+w)) \int\limits_0^\infty \frac{e^{-wy}}{1 - A(y)} \cdot p_0(y, s)dy \right] -$$

$$- (p, \beta(s+w))_r \cdot \left[\frac{\chi(s, w)}{\alpha_1 \cdot w} - (1 - \gamma(s+w)) \int\limits_0^\infty e^{-wy} \frac{\int\limits_0^y e^{wu} a(u)du}{1 - A(y)} \cdot p_0(y, s)dy, \right]$$

перепишем его в удобном для дальнейших преобразований виде:

$$\int\limits_0^\infty e^{-wy} h_0(y, s)dy = \frac{1 - (p, \beta(s+w))_r}{\alpha_1 \cdot w \cdot (1 - \gamma(s+w))} \chi(s, w) +$$

$$+ (p, \beta(s+w))_r \int\limits_0^\infty e^{-wy} \int\limits_0^y e^{wu} a(u)du h_0(y, s)dy.$$

Рассмотрим отдельные выражения:

$$\frac{1-(p,\beta(s+w))_r}{w} = \int\limits_0^\infty e^{-wy}dy \cdot \left[1-\sum_{i=1}^r p_i \int\limits_0^\infty e^{-(s+w)u} b_i(u)du\right] =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-wy}dy - \sum_{i=1}^r p_i \int\limits_0^\infty e^{-wy}dy \cdot \int\limits_0^\infty e^{-(s+w)u} b_i(u)du =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-wy}dy - \sum_{i=1}^r p_i \int\limits_0^\infty e^{-wy}\left[\int\limits_0^\infty e^{-su} b_i(u)du\right]dy =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-wy}\left[1-\sum_{i=1}^r p_i \int\limits_0^\infty e^{-su} b_i(u)du\right]dy, \quad (2.19)$$

$$\frac{\chi(s,w)}{1-\gamma(s+w)} = \chi(s,w) + \chi(s,w)\sum_{k=1}^\infty \gamma^k(s+w) =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-sw} H_1(s,v)dv + \sum_{k=1}^\infty \int\limits_0^\infty e^{-sw} H_1(s,v)dv \cdot \left(\int\limits_0^\infty e^{-su} c(u)du\right)^k =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-sw} H_1(s,v)dv + \sum_{k=1}^\infty \int\limits_0^\infty e^{-sw} H_1(s,v)dv \cdot \int\limits_0^\infty e^{-sv} \int\limits_0^v (e^{-su}c(u))^{*k} dv =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-sw} H_1(s,v)dv + \sum_{k=1}^\infty \int\limits_0^\infty e^{-sw} dy \int\limits_0^v (e^{-su}c(u))^{*k} H_1(s,v-u)du =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-sw}\left[H_1(s,y) + \sum_{k=1}^\infty \int\limits_0^y (e^{-su}c(u))^{*k} H_1(s,y-u)du\right]dy, \quad (2.20)$$

$$(p,\beta(s+w))_r \int\limits_0^\infty e^{-wy} \int\limits_0^y e^{wu} a(u) du h_0(y,s) dy =$$

$$= \sum_{i=1}^r p_i \int\limits_0^\infty e^{-wy} e^{-sy} b_i(y) dy \cdot \int\limits_0^\infty e^{-wy} \int\limits_0^y e^{wu} a(u) du h_0(y,s) dy =$$

$$= \sum_{i=1}^r p_i \int\limits_0^\infty e^{-wy} e^{-sy} b_i(y) dy \cdot \int\limits_0^\infty e^{-wy} \int\limits_0^\infty a(u) h_0(y+u,s) du dy =$$

$$= \sum_{i=1}^r p_i \int\limits_0^\infty e^{-wy} \int\limits_0^d \int\limits_0^\infty a(u) h_0(y+u,s) du \; e^{-s(d-v)} b_i(d-v) dv dy =$$

$$= \sum_{i=1}^r p_i \int\limits_0^\infty e^{-wy} \int\limits_0^\infty h_0(\tau,s) d\tau \int\limits_0^{\min(y,\tau)} e^{-s(y-v)} b_i(y-v) a(\tau-v) dv. \quad (2.21)$$

Отсюда, рассматриваемое уравнение принимает вид:

$$h_0(y,s) - \sum_{i=1}^r p_i \int\limits_0^\infty h_0(\tau,s) d\tau \int\limits_0^{\min(y,\tau)} e^{-s(y-v)} b_i(y-v) a(\tau-v) dv =$$

$$= \frac{1}{\alpha_1} \left[H_1(s,y) + \sum_{k=1}^\infty \int\limits_0^y (e^{-su} c(u))^{*k} H_1(s,y-u) du \right] \cdot \left[1 - \sum_{i=1}^r p_i \int\limits_0^{y-\tau} e^{-su} b_i(u) du \right],$$

то есть, является интегральным уравнением Фредгольма второго рода и имеет единственное решение в силу того, что

$$\sup_y \left| \sum_{i=1}^r p_i \int\limits_0^\infty d\tau \int\limits_0^{\min(y,\tau)} e^{-s(y-v)} b_i(y-v) a(\tau-v) dv \right| = \left| \sum_{i=1}^r p_i \beta_i(s) \right| < 1$$

Таким образом, была доказана следующая теорема:

Теорема 2.2:

а) функции $h_k(\mathbf{z}_k, y, s)$, $k = \overline{1,r}$, являются единственными решениями уравнений:

$$h_k(\mathbf{z}_k, y, s) - \big((\mathbf{p}, \beta(s+w))_1^{k-1} + (\mathbf{p}, \mathbf{z})_k^r\big) \int\limits_0^\infty a(u) \cdot h_k(\mathbf{z}_k, y+u, s)du =$$

$$= p_k z_k \Bigg(\sum_{m=k+1}^{r} \frac{z_m - \beta_m(s+w)}{z_m} \int\limits_0^\infty e^{wu} a(u) \cdot h_m(\mathbf{z}_m, y+u, s)du + \int\limits_0^\infty a(u) h_0(y+u, s)du -$$

$$- \int\limits_0^y e^{-s(y-v)} c(y-v) \int\limits_0^\infty a(u) h_0(y+u, s)dudv - \frac{1}{\alpha_1} \int\limits_0^\infty H_1(s, v)dv \Bigg), \quad k = \overline{1, r}.$$

б) функция $h_0(y, s)$ является единственным решением уравнения:

$$h_0(y, s) - \sum_{i=1}^r p_i \int\limits_0^\infty h_0(\tau, s)d\tau \int\limits_0^{\min(y,\tau)} e^{-s(y-v)} b_i(y-v) a(\tau - v)dv =$$

$$= \frac{1}{\alpha_1} \Bigg(H_1(s, y) + \sum_{k=1}^\infty \int\limits_0^y (e^{-su} c(u))^{*k} H_1(s, y-u)du \Bigg) \cdot \Bigg(1 - \sum_{i=1}^r p_r \int\limits_0^{y-\tau} e^{-su} b_i(u)du \Bigg).$$

2.5. Основной результат

Теорема 2.3: Функции $p_i(\mathbf{z}_i, x, y, s), \ i = \overline{0, r}$, определяются соотношениями:

$$p_i(\mathbf{z}_i, x, y, s) = (1 - A(y)) f_i(\mathbf{z}_i, x, y, s),$$

где $f_i(\mathbf{z}, x, y, s), \ i = \overline{0, r}$, – единственные решения уравнений:

$$f_i(\mathbf{z}_i, x, y, s) = (\mathbf{p}, \mathbf{z}) \int\limits_y^\infty a(u-y) f_i(\mathbf{z}_i, x, u, s)du + d_i(\mathbf{z}_i, x, y, s), \ i = \overline{0, r}.$$

$$d_i(\mathbf{z}_i, x, y, s) = (1 - B_i(x)) e^{-sx} \Bigg(h_i(\mathbf{z}_i, y-x, s) -$$

$$- p_i z_i \int\limits_{y-x}^\infty a(v - y + x) h_i(\mathbf{z}_i, v, s)dv \Bigg) \cdot \mathbb{I}(y \geqslant x), \ i = \overline{1, r},$$

$$d_0(\mathbf{z},x,y,s)=(1-C(x))e^{-sx}\left(h_0(y-x,s)-(\mathbf{p},\mathbf{z})\int\limits_{y-x}^{\infty}a(v-y+x)h_0(v,s)dv\right)\times$$

$$\times\,\mathbb{I}(y\geqslant x)+\frac{1-C(x)}{\alpha_1}(1-(\mathbf{p},\mathbf{z}))\int\limits_0^{\min(x,y)}e^{-sv}\frac{f(x-v)}{1-C(x-v)}dv.$$

Доказательство:

Подставляя в (2.5) вместо $q_i(\mathbf{z},x,w,s)$ (2.2), а вместо $q_i(\mathbf{z},0,w,s)$ (2.12) имеем для $i=\overline{1,r}$:

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-wy}\frac{1-(\mathbf{p},\mathbf{z})\int\limits_0^{y}e^{wu}a(u)du}{1-A(y)}\cdot p_i(\mathbf{z},x,y,s)dy=q_i(\mathbf{z},0,w,s)\cdot(1-B_i(x))\cdot e^{-(s+w)x},$$

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-wy}\frac{1-(\mathbf{p},\mathbf{z})\int\limits_0^{y}e^{wu}a(u)du}{1-A(y)}\cdot p_k(\mathbf{z}_k,x,y,s)dy=(1-B_k(x))\cdot e^{-(s+w)x}\times$$

$$\times\left\{(p,\beta(s+w)-\mathbf{z})_1^{k-1}\int\limits_0^{\infty}e^{-wy}\int\limits_0^{\infty}e^{wu}a(u)du\ h_k(\mathbf{z}_k,0,y,s)dy+\right.$$

$$+\,p_kz_k\left(\sum_{m=k+1}^{r}\frac{z_m-\beta_m(s+w)}{z_m}\int\limits_0^{\infty}e^{-wy}\int\limits_0^{\infty}e^{wu}a(u)du\ h_m(\mathbf{z}_m,0,y,s)dy-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\chi(s,w)}{\alpha_1\cdot w}+(1-\gamma(s+w))\int\limits_0^{\infty}e^{-wy}\int\limits_0^{y}e^{wu}a(u)du\ h_0(y,s)dy\right)\right\},k=\overline{1,r}.$$

Обозначая

$$f_i(\mathbf{z},x,y,s)=\frac{p_i(\mathbf{z},x,y,s)}{1-A(y)},$$

и, используя соотношения (2.14) - (2.17) из доказательства теоремы 2.2, получим:

$$\int\limits_0^\infty e^{-wy}\Big[f_k(\mathbf{z},x,y,s)-\mathbf{(p,z)}\int\limits_y^\infty a(u-y)f_k(\mathbf{z},x,u,s)du\Big]dy=(1-B_k(x))\cdot e^{-(s+w)x}\times$$

$$\times\Big\{(p,\beta(s+w)-\mathbf{z})_1^{k-1}\int\limits_0^\infty e^{-wy}\int\limits_0^\infty a(u)h_k(\mathbf{z}_k,y+u,s)dudy+$$

$$+p_kz_k\Big(\sum_{m=k+1}^{r}\frac{z_m-\beta_m(s+w)}{z_m}\int\limits_0^\infty e^{-wy}\int\limits_0^\infty a(u)h_m(\mathbf{z}_m,y+u,s)dudy+$$

$$+\int\limits_0^\infty e^{-wy}\int\limits_0^\infty a(u)h_0(y+u,s)dudy-$$

$$-\int\limits_0^\infty e^{-wy}\int\limits_0^y e^{-s(y-v)}c(y-v)\int\limits_0^\infty a(u)h_0(y+u,s)dudvdy-$$

$$-\int\limits_0^\infty e^{-wy}\frac{1}{\alpha_1}\int\limits_0^\infty H_1(s,v)dvdy\Big)\Big\},k=\overline{1,r}.$$

Значит, имеем равенство двух преобразований Лапласа:

$$\int\limits_0^\infty e^{-wy}\Big[f_k(\mathbf{z},x,y,s)-\mathbf{(p,z)}\int\limits_y^\infty a(u-y)f_k(\mathbf{z},x,u,s)du\Big]dy=$$

$$=\int\limits_0^\infty e^{-wy}\Big\{(1-B_k(x))\cdot e^{-(s+w)x}\times\Big[(p,\beta(s+w)-\mathbf{z})_1^{k-1}\int\limits_0^\infty a(u)h_k(\mathbf{z}_k,y+u,s)du+$$

$$+p_kz_k\Big(\sum_{m=k+1}^{r}\frac{z_m-\beta_m(s+w)}{z_m}\int\limits_0^\infty a(u)h_m(\mathbf{z}_m,y+u,s)du+$$

$$+\int\limits_0^\infty a(u)h_0(y+u,s)du-\int\limits_0^y e^{-s(y-v)}c(y-v)\int\limits_0^\infty a(u)h_0(y+u,s)dudv-$$

$$-\frac{1}{\alpha_1}\int\limits_0^\infty H_1(s,v)dv\Big)\Big]\Big\}dy,\ k=\overline{1,r}.$$

Из которых следует интегральное уравнение:

$$f_k(\mathbf{z},x,y,s)-\mathbf{(p,z)}\int\limits_y^\infty a(u-y)f_k(\mathbf{z},x,u,s)du=$$

$$=(1-B_k(x))\cdot e^{-(s+w)x}\times\Bigg[(p,\beta(s+w)-\mathbf{z})_1^{k-1}\int\limits_0^\infty a(u)h_k(\mathbf{z}_k,y+u,s)du+$$

$$+p_kz_k\Bigg(\sum_{m=k+1}^{r}\frac{z_m-\beta_m(s+w)}{z_m}\int\limits_0^\infty a(u)h_m(\mathbf{z}_m,y+u,s)du+$$

$$+\int\limits_0^\infty a(u)h_0(y+u,s)du-\int\limits_0^y e^{-s(y-v)}c(y-v)\int\limits_0^\infty a(u)h_0(y+u,s)dudv-$$

$$-\frac{1}{\alpha_1}\int\limits_0^\infty H_1(s,v)dv\Bigg)\Bigg],\ k=\overline{1,r}.$$

Согласно теореме 2.2:

$$h_k(\mathbf{z}_k,y,s)-\mathbf{(p,z)}\int\limits_0^\infty a(u)h_k(\mathbf{z}_k,y+u,s)du=$$

$$=(p,\beta(s+w)-\mathbf{z})_1^{k-1}\int\limits_0^\infty a(u)h_k(\mathbf{z}_k,y+u,s)du+$$

$$+p_kz_k\Bigg(\sum_{m=k+1}^{r}\frac{z_m-\beta_m(s+w)}{z_m}\int\limits_0^\infty a(u)h_m(\mathbf{z}_m,y+u,s)du+$$

$$+\int\limits_0^\infty a(u)h_0(y+u,s)du-\int\limits_0^y e^{-s(y-v)}c(y-v)\int\limits_0^\infty a(u)h_0(y+u,s)dudv-$$

$$-\frac{1}{\alpha_1}\int\limits_0^\infty H_1(s,v)dv\Bigg),k=\overline{1,r},$$

тогда получим следующее интегральное уравнение

$$f_i(\mathbf{z},x,y,s) - (\mathbf{p},\mathbf{z}) \int\limits_y^\infty a(u-y) f_i(\mathbf{z},x,u,s)du =$$

$$= (1 - B_i(x)) \cdot e^{-(s+w)x} \cdot \left(h_i(z,y,s) - (\mathbf{p},\mathbf{z}) \int\limits_0^\infty a(u) h_i(z,y+u,s)du \right) i = \overline{1,r},$$

преобразуя которое, получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$f_i(\mathbf{z},x,y,s) - (\mathbf{p},\mathbf{z}) \int\limits_y^\infty a(u-y) f_i(\mathbf{z},x,u,s)du =$$

$$= (1 - B_i(x)) \cdot e^{-sx} \cdot \left(h_i(z,y-x,s) - (\mathbf{p},\mathbf{z}) \int\limits_{y-x}^\infty a(u-y+x) h_i(z,u,s)du \right) i = \overline{1,r},$$

существование и единственность решение которого гарантируется тем, что

$$\sup_y \left| \sum_{i=1}^r p_i z_i \int\limits_0^\infty a(u-y)du \right| = \left| \sum_{i=1}^r p_i z_i \right| < 1,\ \forall |z_i| < 1.$$

Перейдем к доказательству второй части утверждения теоремы, используя (2.6), и преобразование (2.2) для $q_0(\mathbf{z},x,w,s)$, можно записать:

$$\int\limits_0^\infty e^{-wy} \left[1 - (\mathbf{p},\mathbf{z}) \int\limits_0^y e^{wu} a(u)du \right] \cdot f_0(\mathbf{z},x,y,s)dy =$$

$$= \left(q_0(\mathbf{z},0,w,s) + \frac{1-(\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_1 \cdot w} \int\limits_0^x f(b) \frac{e^{(s+w)b}}{1-C(b)} db \right) \cdot (1 - C(x)) \cdot e^{-(s+w)x}.$$

Действуя аналогично первой части доказательства, имеем:

$$\int\limits_0^\infty e^{-wy} \left[f_0(\mathbf{z},x,y,s) - (\mathbf{p},\mathbf{z}) \int\limits_y^\infty a(u-y) f_0(\mathbf{z},x,u,s)du \right] dy =$$

$$= (1 - C(x)) \cdot e^{-(s+w)x} \times$$

$$\left(\int\limits_0^\infty e^{-wy} \left[1 - (\mathbf{p},\mathbf{z}) \int\limits_0^y e^{wu} a(u)du \right] h_0(y,s)dy + \frac{1-(\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_1 \cdot w} \int\limits_0^x f(b) \frac{e^{(s+w)b}}{1-C(b)} db \right),$$

преобразуя отдельно выражение:

$$
e^{-wx}\int\limits_0^\infty e^{-wy}\left[h_0(y,s)-(\mathbf{p},\mathbf{z})\int\limits_0^y e^{wu}a(u)h_0(y,s)du\right]dy=
$$

$$
=\int\limits_0^\infty e^{-w(y+x)}h_0(y,s)dy-(\mathbf{p},\mathbf{z})e^{-wx}\int\limits_0^\infty e^{-wy}\int\limits_0^y e^{wu}a(u)h_0(y,s)dudy=
$$

$$
=\int\limits_x^\infty e^{-wy}h_0(y-x,s)dy-(\mathbf{p},\mathbf{z})e^{-wx}\int\limits_0^\infty e^{-wy}\int\limits_y^\infty a(u-y)h_0(u,s)dudy=
$$

$$
=\int\limits_x^\infty e^{-wy}\left[h_0(y-x,s)-(\mathbf{p},\mathbf{z})\int\limits_{y-x}^\infty a(u-y+x)h_0(u,s)du\right]dy,
$$

получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$
f_0(\mathbf{z},x,y,s)-(\mathbf{p},\mathbf{z})\int\limits_y^\infty a(u-y)f_0(\mathbf{z},x,u,s)du=
$$

$$
=(1-C(x))e^{-sx}\left(h_0(y-x,s)-(\mathbf{p},\mathbf{z})\int\limits_{y-x}^\infty a(u-y+x)h_0(u,s)du\right)\cdot\mathbb{I}(y\geqslant x)+
$$

$$
+\frac{1-C(x)}{\alpha_1}(1-(\mathbf{p},\mathbf{z}))\int\limits_0^x e^{-sv}\frac{f(x-v)}{1-C(x-v)}dv,
$$

существование и единственность решение которого обеспечивается тем, что

$$
\sup_y\left|\sum_{i=1}^r p_iz_i\int\limits_0^\infty a(u-y)du\right|=\left|\sum_{i=1}^r p_iz_i\right|<1,\ \forall|z_i|<1.
$$

Конец доказательства.

Глава 3

Система $M_r|G_r|1|\infty$ со смешанными приоритетами

3.1. Обозначения и определения

Рассматривается система обслуживания типа $M_r|G_r|1|\infty$, в которую поступают $r \geq 2$ пуассоновских потоков требований с интенсивностями $a_1, \ldots, a_r$. Длительности обслуживания — независимые в совокупности случайные величины с функциями распределения $B_1(x), \ldots, B_r(x)$ и плотностями распределения $b_1(x), \ldots, b_r(x)$. Требования i-го потока (приоритета) имеют приоритет перед требованиями j-го потока при $i < j$. Приоритет может быть или относительным, или абсолютным с обслуживанием заново прерванного требования (модель №1). Приоритет является абсолютным с потерей или обслуживание заново прерванного требования (модель №2).

Для модели №1 положим I_i и J_i — соответственно множества номеров потоков, которые имеют абсолютный приоритет и перед которыми имеют абсолютный приоритет требования i-го ($I_1 = J_r = \emptyset$).

Для модели №2 положим K_i и M_i — соответственно множества номеров потоков, которые имеют абсолютный приоритет с потерей и перед имеют абсолютный приоритет с потерей требования i-го.

Пусть

$L_i(t)$ — число требований i-го потока в системе в момент времени t,

$i(t)$ — номер потока, требование из которого обслуживается в момент времени t, $x(t)$ — время, прошедшее с начала его обслуживания.

Если в момент t система свободна, то $i(t)$ и $x(t)$ можно доопределить произвольным образом, например положить $i(t) = x(t) = 0$.

Введем обозначения $Ł(t) = (L_1(t), \dots, L_r(t))$,

$$\beta_i(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} dB(x),\ \beta_{ij} = \int\limits_0^\infty x^j dB_i(x),\ \eta_i(x) = \frac{b_i(x)}{1 - B_i(x)},$$

$$\sigma_k = a_1 + \ldots + a_k,\ k = 1, \dots, r,\ \sigma_0 = 0,\ \sigma = \sigma_r,\ \mathbf{0} = (0, \dots, 0),$$

$$\mathbf{1}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \text{где 1 стоит на } i\text{-м месте},$$

$$P(\mathbf{n}, t) = (Ł(t) = \mathbf{n}),\ p(\mathbf{z}, s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} \sum_{n_1=0}^\infty \ldots \sum_{n_r=0}^\infty z_1^{n_1} \cdots z_r^{n_r} P(\mathbf{n}, t) dt,$$

$$P_i(\mathbf{n}, x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{P}(Ł(t) = \mathbf{n}, i(t) = i, x(t) < x),\ \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r),$$

$$p_i(\mathbf{z}, x, s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} \sum_{n_1=0}^\infty \ldots \sum_{n_r=0}^\infty z_1^{n_1} \cdots z_r^{n_r} P_i(\mathbf{n}, x, t) dt,\ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r).$$

Будем предполагать, что в начальный момент времени ($t = 0$) система свободна от требований.

3.2. Распределение длины очереди. Модель №1.

Лемма 3.1 При каждом $k = \overline{1, r}$ система уравнений

$$d_i(\mathbf{z}, s) = 0,\ i = \overline{1, k},$$

имеет единственное решение $z_i = \pi_{ik}(z_{k+1}, \dots, z_r, s)$, аналитическое в области $|z_{k+1}| < 1, \dots, |z_r| < 1$, $\Re s > 0$, в которой $|\pi_{ik}(z_{k+1}, \dots, z_r, s)| < 1,\ i = \overline{1, k}$, $k = \overline{1, r}$, где

$$d_i(\mathbf{z}, s) = 1 - z_i^{-1} \beta_i \left(s + \sigma - \sum_{j \notin I_i} a_j z_j \right) - \sum_{j \in I_i} a_j z_j \cdot \frac{1 - \beta_i \left(s + \sigma - \sum\limits_{j \notin I_i} a_j z_j \right)}{s + \sigma - \sum\limits_{j \notin I_i} a_j z_j}.$$

Доказательство:

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3 на стр.122 в [53].

Конец доказательства.

Теорема 3.1: Функция $p(\mathbf{z}, s)$ определяется по формуле

$$p(\mathbf{z}, s) = p_0(s) + \sum_{i=1}^{r} \frac{1 - \beta_i\left(s + \sigma - \sum\limits_{j \notin I_i} a_j z_j\right)}{s + \sigma - \sum\limits_{j \notin I_i} a_j z_j} p_i(\mathbf{z}, 0, s), \tag{3.1}$$

где

$$p_0(s) = \left(s + \sigma - \sum_{j=1}^{r} a_j \pi_{jr}(s)\right)^{-1}, \tag{3.2}$$

а $p_i(\mathbf{z}, 0, s)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$\sum_{i=k+1}^{r} d_i\left(\pi_{1k}(z_{k+1}, \ldots, z_r, s), \ldots, \pi_{kk}(z_{k+1}, \ldots, z_r, s), z_{k+1}, \ldots, z_r, s\right) p_i(\mathbf{z}, 0, s) =$$
$$= 1 - \left(s + \sigma - \sum_{j=1}^{k} a_j \pi_{jk}(z_{k+1}, \ldots, z_r, s) - \sum_{j=k+1}^{r} a_j z_j\right) p_0(s), \ k = \overline{0, r-1}. \tag{3.3}$$

Доказательство:

В случае, если во время обслуживания требования i-го приоритета поступила заявка:

$$P_i(\mathbf{n}, x + \Delta, t + \Delta) = P_i(\mathbf{n}, x, y, t) \cdot [1 - (\sigma + \mu_i(x))\Delta] +$$
$$+ \sum_{j \notin I_i,\ j \neq i} (1 - \delta_{n_j,0}) a_j P_i(\mathbf{n} - \mathbf{1}_j, x, t)\Delta + (1 - \delta_{n_i,1})\, a_i P_i(\mathbf{n} - \mathbf{1}_i, x, t)\Delta + o(\Delta),$$

тогда устремляя $\Delta \to 0$, имеем

$$\frac{\partial P_i(\mathbf{n}, x, t)}{\partial t} + \frac{\partial P_i(\mathbf{n}, x, t)}{\partial x} = -(\sigma + \eta_i(x)) P_i(\mathbf{n}, x, t) +$$
$$+ \sum_{j \notin I_i,\ j \neq i} \left(1 - \delta_{n_j,0}\right) a_j P_i(\mathbf{n} - \mathbf{1}_j, x, t) + (1 - \delta_{n_i,1})\, a_i P_i(\mathbf{n} - \mathbf{1}_i, x, t). \tag{3.4}$$

Для вероятности свободного состояния $P_0(t)$ за время Δ либо могло не поступить заявок и система по прежнему остается пустой, либо обслужить единственную имеющуюся заявку (какого-либо класса), то есть

$$P_0(t+\Delta) = (1-\sigma\Delta)P_0(t) + \sum_{j=1}^{r} \int\limits_0^\infty P_j(\mathbf{1}_j, x, t)\eta_j(x)\,dx\Delta + o(\Delta),$$

тогда устремляя $\Delta \to 0$, имеем

$$\frac{\partial P_0(t)}{\partial t} = -\sigma\, P_0(t) + \sum_{j=1}^{r} \int\limits_0^\infty P_j(\mathbf{1}_j, x, t)\eta_j(x)\,dx. \tag{3.5}$$

Переходя в (3.4) и (3.5) к производящим функциям и преобразованиям Лапласа по t, получаем:

$$\frac{\partial p_i(\mathbf{z}, x, s)}{\partial x} = -(s+\sigma+\eta_i(x))p_i(\mathbf{z}, x, s) + \sum_{j\notin I_i} a_j z_j\, p_i(\mathbf{z}, x, s), \tag{3.6}$$

$$(s+\sigma)p_0(s) - 1 = \int\limits_0^\infty e^{-st} \sum_{j=1}^{r} \int\limits_0^\infty P_j(\mathbf{1}_j, x, t)\eta_j(x)\,dx\,dt. \tag{3.7}$$

Найдем теперь краевые условия в точке $x = 0$. Если $n_i = 0$ или есть заявки более приоритетных классов ($n_1 + \ldots + n_{i-1} \neq 0$), то $P_i(\mathbf{n}, 0, t) = 0$. В остальных случаях справедливы равенства ($i = \overline{1, r}$):

$$\begin{aligned} P_i(\mathbf{n}, 0, t) = &\sum_{j=1,\, j\notin J_i}^{r} \int\limits_0^\infty P_j(\mathbf{n}+\mathbf{1}_j, x, t)\eta_j(x)dx + \\ &+ \delta_{n_i,1} \sum_{j\in J_i} \int\limits_0^\infty P_j(\mathbf{n}-\mathbf{1}_i, x, t)dx\, a_i + \delta_{n_i,1} \prod_{j\neq i} \delta_{n_j,0}\, a_i P_0(t). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Переходя в (3.8) к производящим функциям и преобразованиям Лапласа по времени, а также учитывая (3.7), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r} p_i(\mathbf{z}, 0, s) = &\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{z_i} \int\limits_0^\infty p_i(\mathbf{z}, x, s)\eta_i(x)dx + \\ &+ \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j\in I_i} a_j z_j\right) \int\limits_0^\infty p_i(\mathbf{z}, x, s)dx + 1 - \left(s+\sigma - \sum_{j=1}^{r} a_j z_j\right) p_0(s). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Решение системы уравнений (3.6) имеет вид

$$p_i(\mathbf{z}, x, s) = (1 - B_i(x))e^{-\left(s+\sigma-\sum\limits_{j\notin I_i} a_j z_j\right)x} p_i(\mathbf{z}, 0, s), i = \overline{1, r},$$

подставляя его в (3.9), и учитывая

$$\int\limits_0^\infty p_i(\mathbf{z}, x, s)\eta_i(x)dx = \beta_i\left(s + \sigma - \sum_{j=1}^r a_j z_j\right) \cdot p_i(\mathbf{z}, 0, s),$$

$$\int\limits_0^\infty p_i(\mathbf{z}, x, s)dx = \frac{1 - \beta_i\left(s + \sigma - \sum\limits_{j=1}^r a_j z_j\right)}{s + \sigma - \sum\limits_{j=1}^r a_j z_j} \cdot p_i(\mathbf{z}, 0, s),$$

получаем

$$\sum_{i=1}^r d_i(\mathbf{z}, s)p_i(\mathbf{z}, 0, s) = 1 - \left(s + \sigma - \sum_{j=1}^r a_j z_j\right) p_0(s). \tag{3.10}$$

Из равенства

$$p(\mathbf{z}, s) = p_0(s) + \sum_{i=1}^r \int\limits_0^\infty p_i(\mathbf{z}, x, s)dx$$

получаем (3.1).

Подставляя $z_i = \pi_{ik}(z_{k+1}, \ldots, z_r, s)$, $i = \overline{1, r}$ в (3.10), получим (3.2). Так как $P_i(\mathbf{n}, 0, t) = 0$ при $n_1 + \ldots + n_{i-1} \neq 0$, то $p_i(\mathbf{z}, 0, s)$ не зависит от $z_1, \ldots, z_{i-1}$. Тогда, чтобы определить $p_i(\mathbf{z}, 0, s)$ для всех $i = \overline{1, r}$ будем m раз подставлять $z_i = \pi_{ik}(z_{k+1}, \ldots, z_r, s)$, $i = \overline{1, r - m}$, $m = \overline{1, r - 1}$ в (3.10). Таким образом, при первой подстановке удастся определить $p_r(\mathbf{z}, 0, s)$, а, значит, и $p_r(\mathbf{z}, x, s)$, при каждой следующей подстановке будем находить ещё одно $p_{r+1-m}(\mathbf{z}, 0, s)$. Следовательно, полностью найдена $p(\mathbf{z}, s)$.

Конец доказательства.

3.3. Распределение длины очереди. Модель №2.

Лемма 3.2 При каждом $k = \overline{1, r}$ система уравнений

$$c_i(\mathbf{z}, s) = 0,\ i = \overline{1, k},$$

имеет единственное решение $z_i = \tau_{ik}(z_{k+1}, \dots, z_r, s)$, аналитическое в области $|z_{k+1}| < 1, \dots, |z_r| < 1$, $\Re s > 0$, в которой $|\tau_{ik}(z_{k+1}, \dots, z_r, s)| < 1,\ i = \overline{1, k}$, $k = \overline{1, r}$, где

$$c_i(\mathbf{z}, s) = 1 - z_i^{-1}\beta_i \left(s + \sigma - \sum_{j=i}^{r} a_j z_j\right) -$$
$$- \left(\sum_{j \in K_i} a_j z_j z_i^{-1} + \sum_{j=1, j \notin K_i}^{i-1} a_j z_j\right) \cdot \frac{1 - \beta_i \left(s + \sigma - \sum\limits_{j=i}^{r} a_j z_j\right)}{s + \sigma - \sum\limits_{j=i}^{r} a_j z_j}.$$

Доказательство:

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3 на стр.122 в [53].

Конец доказательства.

Теорема 3.2: Функция $p(\mathbf{z}, s)$ определяется по формуле

$$p(\mathbf{z}, s) = p_0(s) + \sum_{i=1}^{r} \frac{1 - \beta_i \left(s + \sigma - \sum\limits_{j=i}^{r} a_j z_j\right)}{s + \sigma - \sum\limits_{j=i}^{r} a_j z_j} p_i(\mathbf{z}, 0, s), \tag{3.11}$$

где

$$p_0(s) = \left(s + \sigma - \sum_{j=1}^{r} a_j \tau_{jr}(s)\right)^{-1}, \tag{3.12}$$

а $p_i(\mathbf{z},0,s)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$\sum_{i=k+1}^{r} c_i\left(\tau_{1k}(z_{k+1},\ldots,z_r,s),\ldots,\tau_{kk}(z_{k+1},\ldots,z_r,s),z_{k+1},\ldots,z_r,s\right)p_i(\mathbf{z},0,s) =$$
$$= 1-\left(s+\sigma-\sum_{j=1}^{k}a_j\tau_{jk}(z_{k+1},\ldots,z_r,s)-\sum_{j=k+1}^{r}a_jz_j\right)p_0(s),\ k=\overline{0,r-1}. \tag{3.13}$$

Доказательство:

В случае, если во время обслуживания требования i-го приоритетного класса поступила заявка:

$$P_i(\mathbf{n},x+\Delta,t+\Delta) = P_i(\mathbf{n},x,y,t)\cdot(1-(\sigma+\mu_i(x))\Delta)+$$
$$+\sum_{j=i+1}^{r}(1-\delta_{n_j,0})a_jP_i(\mathbf{n}-\mathbf{1}_j,x,t)\Delta+(1-\delta_{n_i,1})\,a_iP_i(\mathbf{n}-\mathbf{1}_i,x,t)\Delta+o(\Delta),$$

тогда устремляя $\Delta\to 0$, имеем

$$\frac{\partial P_i(\mathbf{n},x,t)}{\partial t}+\frac{\partial P_i(\mathbf{n},x,t)}{\partial x} = -(\sigma+\eta_i(x))P_i(\mathbf{n},x,t)+$$
$$+\sum_{j=i+1}^{r}\left(1-\delta_{n_j,0}\right)a_jP_i(\mathbf{n}-\mathbf{1}_j,x,t)+(1-\delta_{n_i,1})\,a_iP_i(\mathbf{n}-\mathbf{1}_i,x,t). \tag{3.14}$$

Для вероятности свободного состояния $P_0(t)$ за время Δ либо могло не поступить заявок и система по прежнему остается пустой, либо обслужить единственную имеющуюся заявку (какого-либо класса), то есть

$$P_0(t+\Delta) = (1-\sigma\Delta)P_0(t)+\sum_{j=1}^{r}\int\limits_0^\infty P_j(\mathbf{1}_j,x,t)\eta_j(x)\,dx\Delta+o(\Delta),$$

тогда устремляя $\Delta\to 0$, имеем

$$\frac{\partial P_0(t)}{\partial t} = -\sigma\,P_0(t)+\sum_{j=1}^{r}\int\limits_0^\infty P_j(\mathbf{1}_j,x,t)\eta_j(x)\,dx. \tag{3.15}$$

Переходя в (3.14) и (3.15) к производящим функциям и преобразованиям Лапласа по t, получаем:

$$\frac{\partial p_i(\mathbf{z},x,s)}{\partial x} = -\left(s+\sigma+\eta_i(x)-\sum_{j=i}^{r} a_j z_j\right) p_i(\mathbf{z},x,s), \tag{3.16}$$

$$(s+\sigma)p_0(s)-1 = \int\limits_0^\infty e^{-st}\sum_{j=1}^{r}\int\limits_0^\infty P_j(\mathbf{1}_j,x,t)\eta_j(x)\,dx\,dt. \tag{3.17}$$

Решение системы уравнений (3.16) имеет вид

$$p_i(\mathbf{z},x,s) = (1-B_i(x))e^{-\left(s+\sigma-\sum\limits_{j=i}^{r} a_j z_j\right)x} p_i(\mathbf{z},0,s),\ i=\overline{1,r}. \tag{3.18}$$

Найдем теперь краевые условия в точке $x=0$. Если $n_i=0$ или есть заявки более приоритетных классов ($n_1+\ldots+n_{i-1}\neq 0$), то $P_i(\mathbf{n},0,t)=0$. В остальных случаях справедливы равенства ($i=\overline{1,r}$):

$$P_i(\mathbf{n},0,t) = \sum_{j=1}^{i}\int\limits_0^\infty P_j(\mathbf{n}+\mathbf{1}_j,x,t)\eta_j(x)dx + \delta_{n_i,1}\prod_{j\neq i}\delta_{n_j,0}a_i P_0(t)+$$
$$+\delta_{n_i,1}a_i\left(\sum_{j=i+1,j\in M_i}^{r}\int\limits_0^\infty P_j(\mathbf{n}+\mathbf{1}_j-\mathbf{1}_i,x,t)dx + \sum_{j=i+1,j\notin M_i}^{r}\int\limits_0^\infty P_j(\mathbf{n}-\mathbf{1}_i,x,t)dx\right). \tag{3.19}$$

Переходя в (3.19) к производящим функциям и преобразованиям Лапласа по времени, а также учитывая (3.17), имеем

$$\sum_{i=1}^{r} p_i(\mathbf{z},0,s) = \sum_{i=1}^{r}\frac{1}{z_i}\int\limits_0^\infty p_i(\mathbf{z},x,s)\eta_i(x)dx+$$
$$+\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1,j\notin K_i}^{i-1} a_j z_j + \sum_{j\in K_i} a_j z_j z_i^{-1}\right)\int\limits_0^\infty p_i(\mathbf{z},x,s)dx + 1 - \left(s+\sigma-\sum_{j=i}^{r} a_j z_j\right)p_0(s). \tag{3.20}$$

Подставляя (3.18) в (3.20), и, учитывая

$$\int\limits_0^\infty p_i(\mathbf{z},x,s)\eta_i(x)dx = \beta_i\left(s+\sigma-\sum_{j=i}^{r} a_j z_j\right)\cdot p_i(\mathbf{z},0,s),$$

$$\int\limits_0^\infty p_i(\mathbf{z},x,s)dx = \frac{1-\beta_i\left(s+\sigma-\sum\limits_{j=i}^r a_j z_j\right)}{s+\sigma-\sum\limits_{j=i}^r a_j z_j}\cdot p_i(\mathbf{z},0,s),$$

имеем

$$\sum_{i=1}^r c_i(\mathbf{z},s)p_i(\mathbf{z},0,s) = 1-\left(s+\sigma-\sum_{j=i}^r a_j z_j\right)p_0(s). \qquad (3.21)$$

Из равенства

$$p(\mathbf{z},s) = p_0(s)+\sum_{i=1}^r \int\limits_0^\infty p_i(\mathbf{z},x,s)dx$$

получаем (3.11).

Подставляя $z_i = \tau_{ik}(z_{k+1},\ldots,z_r,s)$, $i=\overline{1,r}$ в (3.21), получим (3.12). Так как $P_i(\mathbf{n},0,t)=0$ при $n_1+\ldots+n_{i-1}\neq 0$, то $p_i(\mathbf{z},0,s)$ не зависит от $z_1,\ldots,z_{i-1}$. Тогда, чтобы определить $p_i(\mathbf{z},0,s)$ для всех $i=\overline{1,r}$ будем m раз подставлять $z_i=\tau_{ik}(z_{k+1},\ldots,z_r,s)$, $i=\overline{1,r-m}$, $m=\overline{1,r-1}$ в (3.21). Таким образом, при первой подстановке удастся определить $p_r(\mathbf{z},0,s)$, а, значит, и $p_r(\mathbf{z},x,s)$, при каждой следующей подстановке будем находить ещё одно $p_{r+1-m}(\mathbf{z},0,s)$. Следовательно, полностью найдена $p(\mathbf{z},s)$.

Конец доказательства.

3.4. Предельная теорема для системы $M_3|G_3|1|\infty$

3.4.1. Описание системы

Рассматривается последовательность систем массового обслуживания (схема серий) с неограниченным числом мест для ожидания. Опишем систему с номером m: в нее поступает три пуассоновских входящих потока с интенсивностями $a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, a_3^{(m)}$ соответственно. Длительности обслуживания — независимые в совокупности случайные величины с функциями распределения $B_1^{(m)}(x)$, $B_2^{(m)}(x)$, $B_3^{(m)}(x)$ и плотностями распределения $b_1^{(m)}(x), b_2^{(m)}(x)$, $b_3^{(m)}(x)$ соответственно.

Между требованиями первого и второго потоков, как и между требованиями второго и третьего потоков, действует дисциплина относительного приоритета, а требования первого потока имеют абсолютный приоритет с обслуживанием заново над требованиями третьего потока, то есть частный случай модели №1.
$\beta_i^{(m)}(s)$ — преобразование Лапласа-Стильтьеса функции $b_{mi}(x)$, $i = 1,2,3$;
$\beta_{ij}^{(m)}$ — j-й момент случайной величины с функцией распределения $B_{mi}(x)$, $i = 1,2,3$;
$L_3(t)$ — число требований третьего потока в системе в момент времени t.
Будем исследовать распределение длины очереди третьего потока (наименее приоритетный класс) в случае, когда одновременно $t \to \infty$ и $\rho \to 0$, где

$$\rho = 1 - a_1^{(m)}\beta_{11}^{(m)} - a_2^{(m)}\beta_{21}^{(m)} - \frac{a_3^{(m)}}{a_1^{(m)}} \cdot \frac{1 - \beta_3^{(m)}(a_1^{(m)})}{\beta_3^{(m)}(a_1^{(m)})}.$$

Исследование проводится в следующих предположениях:
I) существуют первые два момента длительностей обслуживания требований каждого приоритета, причем

$$\beta_i^{(m)}(s) = 1 - \beta_{i1}^{(m)}s + \frac{\beta_{i2}^{(m)}}{2}s^2 + o_m(s^2),\ i = 1,2,3;$$

где $o_m(s^2)/s^2 \to 0$ при $s \to 0$ равномерно по m
II) для любого натурального m:

$$\rho_1^{(m)} = a_1^{(m)}\beta_{11}^{(m)} + a_2^{(m)}\beta_{21}^{(m)} + \frac{a_3^{(m)}}{a_1^{(m)}} \cdot \frac{1 - \beta_3^{(m)}(a_1^{(m)})}{\beta_3^{(m)}(a_1^{(m)})} < 1,\ \lim_{m\to\infty} \rho_1^{(m)} = 1;$$

III) существуют пределы $\lim\limits_{m\to\infty} a_i^{(m)} = a_i^*$,
$\lim\limits_{m\to\infty} \beta_{ij}^{(m)} = \beta_{ij}^*,\ i = 1,2,\ j = 1,2,\ \lim\limits_{m\to\infty} \beta_3^{(m)}(s) = \beta_3^*(s)$.

Для предельных значений функций от $a_i^{(m)}, \beta_{ij}^{(m)}, \beta_3^{(m)}(s)$,будем использовать те же обозначения, что и для допредельных, но с дополнительным верхним индексом $*$.

В дальнейшем для сокращения записи будем опускать индекс m (номер в серии). Знак lim будет означать $\lim\limits_{m\to\infty}$.

$$p(z_3, s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} z^{L_3(t)} dt.$$

Из результатов раздела 3.2 можно получить, что:

$$p(z_3, s) = \frac{1}{s + a_3 - a_3 z_3} \left[1 + \frac{1 - z_3}{z_3} \beta_3(s + a_1 + a_3 - a_3 z_3) \cdot p_3(z_3, 0, s)\right],$$

где $p_3(z_3, 0, s)$ определяется из соотношения:

$$d_3(\pi_{12}(z_3, s), \pi_{22}(z_3, s), z_3, s) p_3(z_3, 0, s) =$$
$$= 1 - (s + \sigma - a_1\pi_{12}(z_3, s) - a_2\pi_{22}(z_3, s) - a_3 z_3)\, p_0(s),$$

$$d_3(z_1, z_2, z_3, s) = 1 - z_3^{-1}\beta_3\left(s + \sigma - a_2 z_2 - a_3 z_3\right) - a_1 z_1 \cdot \frac{1 - \beta_3\left(s + \sigma - a_2 z_2 - a_3 z_3\right)}{s + \sigma - a_2 z_2 - a_3 z_3},$$
$$\sigma = a_1 + a_2 + a_3, \quad p_0(s) = \left(s + \sigma - a_1\pi_{13}(s) - a_2\pi_{23}(s) - a_3\pi_{33}(s)\right)^{-1}.$$

Решениями $d_3(z_1, z_2, z_3, s) = 0$ являются
$\pi_1(s) = \pi_{13}(s), \pi_2(s) = \pi_{23}(s), \pi_3(s) = \pi_{33}(s)$.
Также, из раздела 3.2 получаем систему для $\pi_j(s), j = 1, 2, 3$:

$$\pi_1(s) = \beta_1\left(s + \sigma - a_1\pi_1(s) - a_2\pi_2(s) - a_3\pi_3(s)\right), \tag{3.22}$$

$$\pi_2(s) = \beta_2\left(s + \sigma - a_1\pi_1(s) - a_2\pi_2(s) - a_3\pi_3(s)\right), \tag{3.23}$$

$$\pi_3(s) = \beta_3\left(s + \sigma - a_2\pi_2(s) - a_3\pi_3(s)\right) +$$
$$+ a_1\pi_1(s)\pi_3(s) \cdot \frac{1 - \beta_3\left(s + \sigma - a_2\pi_2(s) - a_3\pi_3(s)\right)}{s + \sigma - a_2\pi_2(s) - a_3\pi_3(s)}. \tag{3.24}$$

Обозначим,

$$u_1(s) = a_1(\pi_1(s) - 1) + a_2(\pi_2(s) - 1) + a_3(\pi_3(s) - 1) = a_1\pi_1(s) + a_2\pi_2(s) + a_3\pi_3(s) - \sigma,$$

$$u_2(s) = a_2(\pi_2(s) - 1) + a_3(\pi_3(s) - 1).$$

Основная цель — найти

$$\lim \mathbb{P}\left(\rho^{\gamma} L\left(\frac{t}{\rho^{\alpha}}\right) < x\right)$$

при любом $\alpha > 0$.

Так как

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-st}\left(\exp\left(-u\rho^{\gamma} L\left(\frac{t}{\rho^{\alpha}}\right)\right)\right) dt = \rho^{\alpha} p(e^{-u\rho^{\gamma}}, s\rho^{\alpha}),$$

то достаточно найти

$$\lim \rho^{\alpha} p(e^{-u\rho^{\gamma}}, s\rho^{\alpha})$$

и воспользоваться теоремами непрерывности для преобразований Лапласа (см. [...]).

Имеем

$$\lim \rho^{\alpha} p(e^{-u\rho^{\gamma}}, s\rho^{\alpha}) = \lim \frac{\rho^{\alpha}}{s\rho^{\alpha} + a_3(1 - e^{-u\rho^{\gamma}})} \times \\ \times \left[1 + \frac{1 - e^{-u\rho^{\gamma}}}{e^{-u\rho^{\gamma}}} \beta_3(s\rho^{\alpha} + a_1 + a_3(1 - e^{-u\rho^{\gamma}})) \cdot p_3(e^{-u\rho^{\gamma}}, 0, s\rho^{\alpha})\right].$$

Определим γ следующим образом:

$$\gamma = \begin{cases} 0,5\alpha, \alpha \leqslant 2, \\ 1, \alpha > 2. \end{cases}$$

3.4.2. Вспомогательные разложения

Преобразовывая (3.24), получим:

$$\pi_3(s) - 1 = -\frac{(s - u_1(s))(1 - \beta_3\left(s + a_1 - u_2(s)\right))}{s - u_1(s) + (a_1 + u_1(s) - u_2(s))\beta_3\left(s + a_1 - u_2(s)\right)}. \tag{3.25}$$

Складывая (3.22), (3.23) и (3.25), имеем

$$u_1(s) = a_1\beta_1\left(s - u_1(s)\right) - a_1 + a_2\beta_2\left(s - u_1(s)\right) - a_2 - \\ - a_3\frac{(s - u_1(s))(1 - \beta_3\left(s + a_1 - u_2(s)\right))}{s - u_1(s) + (a_1 + u_1(s) - u_2(s))\beta_3\left(s + a_1 - u_2(s)\right)}. \tag{3.26}$$

Пусть,

$$u_1(s) = c_1(s) \cdot \rho^{\gamma} + c_2(s) \cdot \rho^{2\gamma} + o(\rho^{2\gamma}),$$

$$u_2(s) = d_1(s) \cdot \rho^{\gamma} + d_2(s) \cdot \rho^{2\gamma} + o(\rho^{2\gamma}).$$

Для лаконичности доказательства предельной теоремы, найдем разложения требуемых нам функций и сформулируем их в виде отдельных лемм.

Лемма 3.3:

$$c_1(s)\rho^{\gamma} = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{s}{v}}\rho^{\frac{\alpha}{2}} + o(\rho^{\frac{\alpha}{2}}), \alpha < 2, \\ \dfrac{1-\sqrt{1+4vs}}{2v} \cdot \rho + o(\rho), \alpha = 2, \\ -s\rho^{\alpha-1}, \alpha > 2. \end{cases}$$

Доказательство:

Рассматривая уравнение (3.26), и, подставляя $s\rho^{\alpha}$ вместо s, получаем:

$$u_1 = a_1\beta_1 \left(s\rho^{\alpha} - u_1\right) - a_1 + a_2\beta_2 \left(s\rho^{\alpha} - u_1\right) - a_2-$$
$$-a_3(s\rho^{\alpha} - c_1(s)\cdot\rho^{\gamma} - c_2(s)\cdot\rho^{2\gamma}) \times \frac{1-\beta_3\left(s+a_1-u_2\right)}{s-u_1+(a_1+u_1-u_2)\beta_3\left(s+a_1-u_2\right)} + o(\rho^{2\gamma}). \tag{3.27}$$

Значит, разложение выражения

$$\frac{1-\beta_3\left(s+a_1-u_2\right)}{s-u_1+(a_1+u_1-u_2)\beta_3\left(s+a_1-u_2\right)}$$

требуется провести до порядка ρ^{γ}, тогда

$$\frac{1-\beta_3\left(s+a_1-u_2\right)}{s-u_1+(a_1+u_1-u_2)\beta_3\left(s+a_1-u_2\right)} =$$
$$= \frac{1-\beta_3\left(a_1-d_1(s)\rho^{\gamma}\right)}{-c_1(s)(\rho^{\gamma})+(a_1+(c_1(s)-d_1(s))\rho^{\gamma})\beta_3\left(a_1-d_1(s)\rho^{\gamma}\right)}.$$

Далее для краткости $c_1 = c_1(s), d_1 = d_1(s), x = \rho^{\gamma}$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1-\beta_3(a_1-d_1x)}{-c_1x+(a_1+(c_1-d_1)x)\beta_3(a_1-d_1x)},$$

так как, требуется найти разложение только до порядка ρ^γ, то

$$f(x) = f(0) + f^{'}(0)x + o(x),$$

$$f(0) = \frac{1-\beta_3(a_1)}{a_1\beta_3(a_1)},\ \ f'(0) = c_1\Theta,$$

где

$$\Theta = \frac{(1-a_1\beta_{11})\beta_3'(a_1)a_1 + (1-a_1\beta_{11}\beta_3(a_1))(1-\beta_3(a_1))}{a_1^2\beta_3^2(a_1)}$$

Подставляя полученный результат в (3.27), имеем

$$u_1(s)\left(1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21} - \frac{a_3(1-\beta_3(a_1))}{a_1\beta_3(a_1)}\right) = -(a_1\beta_{11} + a_2\beta_{21})s\rho^\alpha +$$
$$+\frac{a_1\beta_{12}}{2}\left(s\rho^\alpha - c_1\cdot\rho^\gamma - c_2\cdot\rho^{2\gamma}\right)^2 + \frac{a_2\beta_{22}}{2}\left(s\rho^\alpha - c_1\cdot\rho^\gamma - c_2\cdot\rho^{2\gamma}\right)^2 -$$
$$- a_3(s\rho^\alpha - c_1\cdot\rho^\gamma - c_2\cdot\rho^{2\gamma})c_1\Theta\rho^\gamma + o(\rho^{2\gamma}).$$

Так как, $1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21} - \frac{a_3(1-\beta_3(a_1))}{a_1\beta_3(a_1)} = \rho$, то уравнение принимает вид:

$$c_1\rho^{\gamma+1} = -\left[a_1\beta_{11} + a_2\beta_{21} + \frac{a_3(1-\beta_3(a_1))}{a_1\beta_3(a_1)}\right]s\rho^\alpha + \frac{a_1\beta_{12} + a_2\beta_{22}}{2}c_1^2\cdot\rho^{2\gamma} -$$
$$- a_3(s\rho^\alpha - c_1\cdot\rho^\gamma - c_2\cdot\rho^{2\gamma}) \times c_1\Theta\rho^\gamma + o(\rho^{2\gamma}).$$

Преобразовывая его, получим квадратное уравнение относительно $c_1\rho^\gamma$

$$\left(\frac{a_1\beta_{12} + a_2\beta_{22}}{2} + a_3\Theta\right)(c_1\rho^\gamma)^2 - \rho\cdot c_1\rho^\gamma - s\rho^\alpha + o(max(s\rho^\alpha, c_1\rho^{\gamma+1})) = 0$$

Обозначая

$$v = \left(\frac{a_1\beta_{12} + a_2\beta_{22}}{2} + a_3\Theta\right),$$

имеем

$$v(c_1\rho^\gamma)^2 - \rho\cdot c_1\rho^\gamma - s\rho^\alpha + o(max(s\rho^\alpha, c_1\rho^{\gamma+1})) = 0.$$

Значит,

$$c_1\rho^\gamma = \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 + 4vs\rho^\alpha}}{2v},$$

Отсюда, следуют указанные в формулировке леммы разложения.

Конец доказательства.

Таким образом найден главный член разложения $u_1(s)$.Перейдем к нахождению разложений функций $z_1(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha)$ и $z_2(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha)$. Так как, $z_1(z_3, s)$ и $z_2(z_3, s)$ являются решениями системы уравнений:

$$z_1 = \beta_1 \left(s + \sigma - a_1 z_1 - a_2 z_2 - a_3 z_3\right),$$

$$z_2 = \beta_2 \left(s + \sigma - a_1 z_1 - a_2 z_2 - a_3 z_3\right),$$

то будем рассматривать функцию

$$\phi(z_3, s) = a_1(z_1(z_3, s) - 1) + a_2(z_2(z_3, s) - 1).$$

Лемма 3.4: Справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$\phi(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha) = -\frac{a_3 u\rho^\gamma(a_1\beta_{11} + a_2\beta_{21})}{1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21}} + \psi \cdot \rho^{2\gamma} + o(max(\rho^{2\gamma}, \rho^\alpha)),$$

где

$$\psi = -\frac{a_1\beta_{11} + a_2\beta_{21}}{1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21}} s\rho^{\alpha-2\gamma} + \frac{a_1\beta_{11} + a_2\beta_{21}}{1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21}} \frac{a_3 u^2}{2} + \\ + \frac{a_1\beta_{12} + a_2\beta_{22}}{2} \frac{a_3^2 u^2}{(1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21})^3}.$$

Доказательство:

Учитывая, что

$$a_3(1 - e^{-u\rho^\gamma}) = a_3\left(1 - 1 + u\rho^\gamma - \frac{u^2\rho^{2\gamma}}{2}\right) + o(\rho^{2\gamma}) = a_3 u\rho^\gamma - \frac{a_3 u^2 \rho^{2\gamma}}{2} + o(\rho^{2\gamma}),$$

и

$$\phi(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha) = a_1\beta_1\left(s - \phi(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha) + a_3 - a_3 z_3\right) - a_1 + \\ + a_2\beta_2\left(s - \phi(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha) + a_3 - a_3 z_3\right) - a_2.$$

Выделим главную часть порядка ρ^γ, получим

$$\phi(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha) = -\frac{a_3 u\rho^\gamma(a_1\beta_{11} + a_2\beta_{21})}{1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21}} + o(\rho^\gamma).$$

Далее найдем коэффициент в разложении при $\rho^{2\gamma}$. Пусть

$$\phi(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha) = -\frac{a_3 u\rho^\gamma(a_1\beta_{11} + a_2\beta_{21})}{1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21}} + \psi\cdot\rho^{2\gamma} + o(\rho^{2\gamma}).$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&-\frac{a_3 u\rho^\gamma(a_1\beta_{11} + a_2\beta_{21})}{1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21}} + \psi\cdot\rho^{2\gamma} = \\
&\quad = a_1\beta_1\left(s\rho^\alpha - -\frac{a_3 u\rho^\gamma(a_1\beta_{11} + a_2\beta_{21})}{1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21}} - \psi\cdot\rho^{2\gamma} + a_3 - a_3 z_3\right) - a_1 + \\
&\qquad + a_2\beta_2\left(s\rho^\alpha + \frac{a_3 u\rho^\gamma(a_1\beta_{11} + a_2\beta_{21})}{1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21}} - \psi\cdot\rho^{2\gamma} + a_3 - a_3 z_3\right) - a_2.
\end{aligned}$$

Выполняя стандартные преобразования, а также, учитывая необходимые нам порядки малости, получаем:

$$\begin{aligned}
\psi = &-\frac{a_1\beta_{11} + a_2\beta_{21}}{1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21}} s\rho^{\alpha-2\gamma} + \frac{a_1\beta_{11} + a_2\beta_{21}}{1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21}}\frac{a_3 u^2}{2} + \\
&+ \frac{a_1\beta_{12} + a_2\beta_{22}}{2}\frac{a_3^2 u^2}{(1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21})^3}.
\end{aligned}$$

Конец доказательства.

Следствие из леммы 3.4: Асимптотическое разложение для

$$a_2(z_2(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha) - 1)$$

имеет вид

$$a_2(z_2(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha) - 1) = -\frac{a_3 u\rho^\gamma a_2\beta_{21}}{1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21}} + \psi_2\cdot\rho^{2\gamma} + o(\rho^{2\gamma}),$$

где

$$\begin{aligned}
\psi_2 = &-\frac{a_2\beta_{21}}{1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21}} s\rho^{\alpha-2\gamma} + \frac{a_2\beta_{21}}{1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21}}\frac{a_3 u^2}{2} + \\
&+ \left[\frac{a_1\beta_{12} + a_2\beta_{22}}{2}\cdot\frac{a_2\beta_{21}}{1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21}} + \frac{a_2\beta_{22}}{2}\right]\frac{a_3^2 u^2}{(1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21})^2}.
\end{aligned}$$

Лемма 3.5: Справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$d_3(\pi_1(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha), \pi_2(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha), e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha) =$$
$$= \beta_3(a_1) \times \begin{cases} \dfrac{s\rho^\alpha}{a_3} - \dfrac{va_3u^2\rho^{2\gamma}}{(1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21})^2} + o(\rho^{2\gamma}),\ \alpha < 2, \\ \dfrac{s\rho^2}{a_3} - \dfrac{u\rho^2}{1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21}} - \dfrac{va_3u^2\rho^2}{(1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21})^2} + o(\rho^2),\ \alpha = 2, \\ -\dfrac{u\rho^2}{1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21}} - \dfrac{va_3u^2\rho^2}{(1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21})^2} + o(\rho^2),\ \alpha > 2. \end{cases}$$

Доказательство:

Из (3.3) получаем, что для рассматриваемой системы

$$d_3(\mathbf{z}, s) = 1 - z_3^{-1}\beta_3\left(s + \sigma - a_2z_2 - a_3z_3\right) - a_1z_1 \cdot \frac{1 - \beta_3\left(s + \sigma - a_2z_2 - a_3z_3\right)}{s + \sigma - a_2z_2 - a_3z_3}.$$

Данное выражение можно преобразовать к виду:

$$d_3(\mathbf{z}, s) = \beta_3\left(s + \sigma - a_2z_2 - a_3z_3\right) \times$$
$$\times \left(1 - z_3^{-1} + \frac{(1 - \beta_3\left(s + \sigma - a_2z_2 - a_3z_3\right))(s + \sigma - a_1z_1 - a_2z_2 - a_3z_3)}{(s + \sigma - a_2z_2 - a_3z_3)\beta_3\left(s + \sigma - a_2z_2 - a_3z_3\right)}\right).$$

Обозначим $\epsilon(z_3, s) = s + \sigma - a_2z_2 - a_3z_3$, тогда в введенных обозначениях:

$$d_3(\pi_1(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha), \pi_2(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha), e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha) =$$
$$= 1 - e^{u\rho^\gamma} + \frac{1 - \beta_3\left(\epsilon(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha)\right)}{\epsilon(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha)\beta_3\left(\epsilon(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha)\right)} \times$$
$$\times \left(s\rho^\alpha + \sigma - a_1z_1(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha) - a_2z_2(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha) - a_3e^{-u\rho^\gamma}\right).$$

Рассмотрим функцию

$$h(x) = \frac{1 - \beta_3(a_1 + x)}{(a_1 + x)\beta_3(a_1 + x)}, x = \epsilon(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha) - a_1,$$

и найдём её разложение (до нужного порядка), то есть

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + o(x),$$

$$h(0) = \frac{1 - \beta_3(a_1)}{a_1\beta_3(a_1)},\ h'(0) = -\frac{\beta_3'(a_1)}{a_1\beta_3^2(a_1)} - \frac{1 - \beta_3(a_1)}{a_1^2\beta_3(a_1)}.$$

Таким образом,

$$\frac{1-\beta_3\left(\epsilon(e^{-u\rho^\gamma},s\rho^\alpha)\right)}{\epsilon(e^{-u\rho^\gamma},s\rho^\alpha)\beta_3\left(\epsilon(e^{-u\rho^\gamma},s\rho^\alpha)\right)}=\frac{1-\beta_3(a_1)}{a_1\beta_3(a_1)}-$$
$$-\left(\frac{\beta_3'(a_1)}{a_1\beta_3^2(a_1)}+\frac{1-\beta_3(a_1)}{a_1^2\beta_3(a_1)}\right)[s\rho^\alpha+a_2-a_2z_2(e^{-u\rho^\gamma},s\rho^\alpha)+a_3-a_3e^{-u\rho^\gamma}]+o(max(s\rho^\alpha,\rho^{2\gamma})),$$

учитывая, что

$$s\rho^\alpha-\phi(e^{-u\rho^\gamma},s\rho^\alpha)+a_3-a_3e^{-u\rho^\gamma}=$$
$$=s\rho^\alpha+\frac{a_3u\rho^\gamma}{1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21}}-\left(\psi+\frac{a_3u^2}{2}\right)\rho^{2\gamma}+o(max(s\rho^\alpha,\rho^{2\gamma})),$$

и

$$s\rho^\alpha+a_2-a_2z_2(e^{-u\rho^\gamma},s\rho^\alpha)+a_3-a_3e^{-u\rho^\gamma}=$$
$$=s\rho^\alpha+\frac{a_3u\rho^\gamma(1-a_1\beta_{11})}{1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21}}-\left(\psi_2+\frac{a_3u^2}{2}\right)\rho^{2\gamma}+o(max(s\rho^\alpha,\rho^{2\gamma})).$$

Используя указанные разложения, можно провести следующие преобразования:

$$\frac{d_3(\pi_1(e^{-u\rho^\gamma},s\rho^\alpha),\pi_2(e^{-u\rho^\gamma},s\rho^\alpha),e^{-u\rho^\gamma},s\rho^\alpha)}{\beta_3(a_1)}=$$
$$=1-\left(1+u\rho^\gamma+\frac{u^2\rho^{2\gamma}}{2}\right)+$$
$$+\left\{\frac{1-\beta_3(a_1)}{a_1\beta_3(a_1)}-\left(\frac{\beta_3'(a_1)}{a_1\beta_3^2(a_1)}+\frac{1-\beta_3(a_1)}{a_1^2\beta_3(a_1)}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left[s\rho^\alpha+\frac{a_3u\rho^\gamma(1-a_1\beta_{11})}{1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21}}-\left(\psi_2+\frac{a_3u^2}{2}\right)\rho^{2\gamma}\right]\right\}\times$$
$$\times\left\{s\rho^\alpha+\frac{a_3u\rho^\gamma}{1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21}}-\left(\psi+\frac{a_3u^2}{2}\right)\rho^{2\gamma}\right\}+o(max(s\rho^\alpha,\rho^{2\gamma}))=$$
$$=-u\rho^\gamma-\frac{u^2\rho^{2\gamma}}{2}+\frac{1-\beta_3(a_1)}{a_1\beta_3(a_1)}\left\{s\rho^\alpha+\frac{a_3u\rho^\gamma}{1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21}}-\left(\psi+\frac{a_3u^2}{2}\right)\rho^{2\gamma}\right\}-$$
$$-\left(\frac{\beta_3'(a_1)}{a_1\beta_3^2(a_1)}+\frac{1-\beta_3(a_1)}{a_1^2\beta_3(a_1)}\right)\frac{a_3u\rho^\gamma}{1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21}}\frac{a_3u\rho^\gamma(1-a_1\beta_{11})}{1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21}}+o(max(s\rho^\alpha,\rho^{2\gamma}))=$$
$$=\frac{1-\beta_3(a_1)}{a_1\beta_3(a_1)}\cdot s\rho^\alpha-u\rho^\gamma\left(1-\frac{a_3}{1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21}}\frac{1-\beta_3(a_1)}{a_1\beta_3(a_1)}\right)-$$

$$-\frac{u^2\rho^{2\gamma}}{2}-\frac{1-\beta_3(a_1)}{a_1\beta_3(a_1)}\left(\psi+\frac{a_3u^2}{2}\right)\rho^{2\gamma}-$$
$$-\left(\frac{\beta_3'(a_1)}{a_1\beta_3^2(a_1)}+\frac{1-\beta_3(a_1)}{a_1^2\beta_3(a_1)}\right)\frac{a_3^2u^2\rho^{2\gamma}(1-a_1\beta_{11})}{(1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21})^2}+o(max(s\rho^\alpha,\rho^{2\gamma}))=$$
$$=\frac{1-\beta_3(a_1)}{a_1\beta_3(a_1)}\cdot s\rho^\alpha-\frac{u\rho^{\gamma+1}}{1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21}}-$$
$$-\rho^{2\gamma}\cdot\left\{\frac{u^2}{2}+\frac{1-\beta_3(a_1)}{a_1\beta_3(a_1)}\left(\psi+\frac{a_3u^2}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\beta_3'(a_1)}{a_1\beta_3^2(a_1)}+\frac{1-\beta_3(a_1)}{a_1^2\beta_3(a_1)}\right)\frac{a_3^2u^2(1-a_1\beta_{11})}{(1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21})^2}\right\}+o(max(s\rho^\alpha,\rho^{2\gamma})).$$

В силу того, что

$$\left(\frac{\beta_3'(a_1)}{a_1\beta_3^2(a_1)}+\frac{1-\beta_3(a_1)}{a_1^2\beta_3(a_1)}\right)\cdot(1-a_1\beta_{11})-\Theta=\left(\frac{1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21}}{a_3}\right)^2,$$

имеем

$$d_3(\pi_1(e^{-u\rho^\gamma},s\rho^\alpha),\pi_2(e^{-u\rho^\gamma},s\rho^\alpha),e^{-u\rho^\gamma},s\rho^\alpha)=$$
$$=\beta_3(a_1)\left[\frac{s\rho^\alpha}{a_3}-\frac{u\rho^{\gamma+1}}{1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21}}-\frac{va_3u^2\rho^{2\gamma}}{(1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21})^2}\right]+o(max(\rho^{2\gamma},\rho^\alpha)).$$

Откуда, и следует утверждение леммы.

Конец доказательства.

3.4.3. Основной результат

Доказательство: Преобразуем искомый предел:

$$\lim\rho^\alpha p(e^{-u\rho^\gamma},s\rho^\alpha)=\lim\frac{\rho^\alpha}{s\rho^\alpha+a_3(1-e^{-u\rho^\gamma})}\times$$
$$\times\left[1+\frac{1-e^{-u\rho^\gamma}}{e^{-u\rho^\gamma}}\beta_3(s\rho^\alpha+a_1+a_3(1-e^{-u\rho^\gamma}))\cdot p_3(e^{-u\rho^\gamma},0,s\rho^\alpha)\right]=$$
$$=\lim\rho^\alpha\frac{\beta_3(a_1)}{a_3}p_3(e^{-u\rho^\gamma},0,s\rho^\alpha),$$

где $p_3(e^{-u\rho^\gamma},0,s\rho^\alpha)$ можно определить из следующего соотношения:

$$d_3(\pi_1(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha), \pi_2(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha), e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha)) \cdot p_3(e^{-u\rho^\gamma}, 0, s\rho^\alpha) =$$
$$= \frac{a_1[\pi_1(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha) - \pi_1(s\rho^\alpha)] + a_2[\pi_2(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha) - \pi_2(s\rho^\alpha)] + a_3[e^{-u\rho^\gamma} - \pi_3(s\rho^\alpha)]}{s\rho^\alpha + a_1 - a_1\pi_1(s\rho^\alpha) + a_2 - a_2\pi_2(s\rho^\alpha) + a_3 - a_3\pi_3(s\rho^\alpha)}.$$

Правую часть данного соотношения можно переписать через ранее введенные функции следующим образом:

$$\frac{s\rho^\alpha + \phi(e^{-u\rho^\gamma}, s\rho^\alpha) + a_3(e^{-u\rho^\gamma} - 1) - u_1(s\rho^\alpha)}{s\rho^\alpha - u_1(s\rho^\alpha)}.$$

С учетом полученных разложений в разделе 3.4.2, данная дробь имеет следующий вид:

$$\left(\sqrt{\frac{s}{v}} - \frac{a_3 u}{1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21}}\right) \times \left(\sqrt{\frac{s}{v}}\right)^{-1} + o(1), \quad \alpha < 2,$$
$$\left(\frac{a_3 u}{1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21}} + \frac{1 - \sqrt{1+4vs}}{2v}\right) \times \left(\frac{1 - \sqrt{1+4vs}}{2v}\right)^{-1} + o(1), \quad \alpha = 2,$$
$$-\frac{a_3 u}{1 - a_1\beta_{11} - a_2\beta_{21}} \times \frac{1}{s\rho^{\alpha-2}} + o(\rho^{2-\alpha}), \quad \alpha > 2.$$

Используя данные разложения, лемму 3.5 и, выполняя стандартные преобразования, находим интересующий нас предел:

$$\lim \rho^\alpha \frac{\beta_3(a_1)}{a_3} p_3(e^{-u\rho^\gamma}, 0, s\rho^\alpha) =$$
$$= \begin{cases} \left[s\left(1 + \dfrac{a_3^* u}{1 - a_1^*\beta_{11}^* - a_2^*\beta_{21}^*}\sqrt{\dfrac{v^*}{s}}\right)\right]^{-1}, & \alpha < 2, \\ \left[s\left(1 + \dfrac{2v^*}{1 + \sqrt{1+4v^* s}} \dfrac{a_3^* u}{1 - a_1^*\beta_{11}^* - a_2^*\beta_{21}^*}\right)\right]^{-1}, & \alpha = 2, \\ \left[s \cdot \left(1 + \dfrac{v^* a_3^* u}{1 - a_1^*\beta_{11}^* - a_2^*\beta_{21}^*}\right)\right]^{-1}, & \alpha > 2. \end{cases}$$

Тогда, обращая преобразования Лапласа, получаем утверждение следующей теоремы.

Конец доказательства.

Теорема 3.3: При $m \to \infty$ существует предел

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\rho^{\gamma} \cdot L_3\left(\frac{t}{\rho^{\alpha}}\right) < x\right) =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int\limits_0^{\sqrt{\frac{v^*}{2t}}w^*x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \ \alpha < 2, \\ \\ 1 - \frac{e^{-w^*x}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\sqrt{\frac{t}{4v^*}}+w^*x\sqrt{\frac{v^*}{4t}}}^{+\infty} e^{-y^2} dy - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\sqrt{\frac{t}{4v^*}}+w^*x\sqrt{\frac{v^*}{4t}}}^{+\infty} e^{-y^2} dy, \ \alpha = 2, \\ \\ 1 - e^{-w^*x}, \ \alpha > 2, \end{cases}$$

где

$$w^* = \frac{1 - a_1^*\beta_{11}^* - a_2^*\beta_{21}^*}{a_3^* v^*}.$$

Так как, структура предельного распределения полученного в теореме 3.3 совпадает со структурой в теореме 1.2, то можно выписать аналогичные следствия:

Следствие 1 из теоремы 3.3: Плотность распределения длины очереди при критической загрузке:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{v^*}{\pi t}} w \cdot exp\left\{-\frac{v^* w^2 x^2}{4t}\right\}, \ \alpha < 2, \\ \\ \frac{w e^{-wx}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\sqrt{\frac{t}{4v^*}}+wx\sqrt{\frac{v^*}{4t}}}^{+\infty} e^{-y^2} dy + w\sqrt{\frac{v^*}{4\pi t}} \times \\ \times \left(exp\left\{-wx - \left(-\sqrt{\frac{t}{4v^*}} + wx\sqrt{\frac{v^*}{4t}}\right)^2\right\} + exp\left\{\left(\sqrt{\frac{t}{4v^*}} + wx\sqrt{\frac{v^*}{4t}}\right)^2\right\}\right), \ \alpha = 2, \\ w \cdot exp\{-wx\}, \ \alpha > 2. \end{cases}$$

Следствие 2 из теоремы 3.3: Математическое ожидание длины очереди при критической загрузке:

$$\sqrt{\frac{t}{v^*\pi}} \cdot \frac{2}{w}, \text{ при } \alpha < 2,$$

$$\frac{1}{w}, \text{ при } \alpha > 2.$$

Следствие 3 из теоремы 3.3: Дисперсия длины очереди при критической загрузке:

$$\frac{(2\pi - 4)t}{\pi v^* w^2}, \text{ при } \alpha < 2$$

$$\frac{1}{w^2}, \text{ при } \alpha > 2.$$

Замечание: математическое ожидание и дисперсия в случае $\alpha = 2$ могут быть вычислены с использованием численных методов.

Заключение

1. Обзор проведенного исследования. В работе получены следующие результаты:

1. Соотношения, которым удовлетворяет преобразование Лапласа производящей функции количества требований каждого приоритета в нестационарном режиме для системы с авторегрессионным гиперэкспоненциальным входящим потоком и произвольным временем обслуживания для приоритетных дисциплин не допускающих прерывания обслуживания.

2. Распределение количества требований наименее приоритетного класса в системе с двумя приоритетными классами, между которыми установлена дисциплина относительного приоритета, авторегрессионным гиперэкспоненциальным входящим потоком и произвольным временем обслуживания в условиях критической загрузки.

3. Интегральные уравнения, которым удовлетворяет преобразование Лапласа производящей функции количества требований каждого приоритета в нестационарном режиме для системы с профилактиками обслуживающего прибора, произвольным входящим потоком и произвольным временем обслуживания.

4. Соотношения, которым удовлетворяет преобразование Лапласа производящей функции количества требований каждого приоритета в нестационарном режиме для системы со смешанными приоритетами, в которой входящие потоки являются пуассоновскими, а время обслуживания имеет произвольное распределение.

5. Распределение количества требований третьего потока (наименее приоритетного класса) в системе с тремя пуассоновскими входящими потоками,

между которыми установлена дисциплина смешанного приоритета (относительный приоритет для первого и второго потоков, и для второго и третьего потоков; абсолютный приоритет с обслуживанием заново для первого и третьего потоков), в условиях критической загрузки системы.

2. Рекомендации и перспективы по дальнейшей разработке темы диссертации.

1. Исследовать систему с профилактиками обслуживающего прибора для других приоритетных дисциплин, например, для дисциплины чередования приоритетов.

2. Исследовать систему со смешанными приоритетами, но с входящий поток более сложной структуры, например, эрланговский или гиперэкспоненциальный.

Список литературы

1. *Adiri I.*, *Domb I.* A single server queueing system working under mixed priority disciplines // Operations Research. — 1982. — Т. 30. — С. 97–115.
2. *Adiri I.*, *Domb I.* Mixing of non-preemptive and preemptive repeat priority disciplines // Operations Research. — 1984. — Т. 18. — С. 86–97.
3. *Asmussen S.* Applied Probability and Queues. — Springer-Verlag, 2003.
4. *Chatterjee U.*, *Mukherjee S.* GI/M/1 queue with server vacation // Journal of the Operations Research Society. — 1990. — Т. 41. — С. 83–87.
5. *Cho Y.*, *Un C.* Analysis of the M/G/1 queue under a combined preemptive / nonpreemptive priority discipline // IEEE Trans. Commun. — 1993. — Т. 41. — С. 132–141.
6. *Cohen J.* The Single Server Queue. — North-Holland : Elsevier, 1982.
7. *Cohen J.*, *Boxma O.* Boundary value problems in queueing system analysis. — Amsterdam : Elsevier, 2000.
8. *Conway R.*, *Maxwell W.*, *Miller L.* Theory of Scheduling. — Addison-Wesley: Reading, 1967.
9. *Daigle J. N.* Queueing Theory with Applications to Packet Telecommunication. — Springer, 2005.
10. *Dimitriou I.* A mixed priority retrial queue with negative arrivals, unreliable server and multiple vacations // Applied Mathematical Modelling. — 2013. — Т. 37. — С. 1295–1309.
11. *Doshi B. T.* Queueing systems with vacations – a survey // Queuing Systems. — 1986. — Т. 1. — С. 29–66.
12. *Dshalalow J.* Frontiers in queueing : models and applications in science and engineering. — Boca Raton : CRC Press, 1996.

13. *Erlang A. K.* Sandsynlighedsregning og Telefonsamtaler // Nyt tidsskrift for matematik. — 1909. — Т. 20. — С. 33–39.

14. *Gusella R.* Characterizing the variability of arrival processes with indexes of dispersion // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. — 1991. — Т. 2. — С. 203–211.

15. *Harrison J.* A limit theorem for priority queues in heavy traffic // Journal of Applied Probability. — 1973. — Т. 10, № 4. — С. 907–912.

16. *Harrison J.* The heavy traffic approximation for single server queues in series // Journal of Applied Probability. — 1973. — Т. 10, № 3. — С. 613–629.

17. *Hwang G. U.*, *Choi B. D.*, *Kim J. K.* The waiting time analysis of a discrete-time queue with arrivals as an autoregressive process of order 1 // Journal of applied probability. — 2002. — Т. 3. — С. 619–629.

18. *Hwang G. U.*, *Sohraby K.* On the exact analysis of a discrete-time queueing system with autoregressive inputs // Queueing systems. — 2003. — Т. 43. — С. 29–41.

19. *Jaiswal N. K.* Priority queues. — New York : Academic press, 1968.

20. *Johannsen F. W.* Waiting times and number of calls // P.O. Electr. Eng. — 1907.

21. *Kamoun F.* The discrete-time queue with autoregressive inputs revisited // Queueing systems. — 2006. — Т. 54. — С. 185–192.

22. *Kingman J. F. C.* On queues in heavy traffic // Roy. Statist. Soc. — 1962. — Т. 24. — С. 383–392.

23. *Paxson V.*, *Floyd S.* Wide-area Traffic: The failure of Poisson modelling // IEEE/ACM Transactions on Networking. — 1995. — Т. 3. — С. 226–244.

24. Queueing Models for the Analysis of Communication Systems / H. Brunell [и др.] // TOP. — 2014. — Т. 22, № 2. — С. 421–448.

25. *Robert P.* Stochastic Networks and Queues. — Springer-Verlag, 2003.

26. *Servi L.*, *Finn S.* M/M/1 queue with working vacations (M/M/1/WV) // Perform. Evaluation. — 2002. — Т. 50. — С. 41–52.

27. *Takagi H.* Queueing Analysis: A Foundation of Performance Analysis. Vol. 1: Vacation and Priority Systems. Part 1. — Amsterdam : Elsevier Science Publishers B.V., 1991.

28. *Tian N.*, *Zhang Z. G.* Vacation Queueing Models–Theory and Applications. — Springer, 2006.

29. *Афанасьева Л. Г.*, *Булинская Е. В.* Математические модели транспортных систем, основанные на теории очередей // Труды Московского физико-технического института. — 2010. — Т. 2. — С. 6–21.

30. *Башарин Г. П.*, *Бочаров П.*, *Коган Я.* Анализ очередей в вычислительных сетях. — Москва : Наука, 1989.

31. *Берговин А. К.*, *Ушаков В. Г.* О двух моделях смешанных приоритетов в системах вида $M|G|1$ // Тихоновские чтения. — 2023. — С. 94.

32. *Берговин А. К.*, *Ушаков В. Г.* Предельное распределение длины очереди в системе с авторегрессионным входящим потоком в условиях критической загрузки // Материалы XXII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова 4-–9 декабря 2023 г. — 2023. — С. 139–144.

33. *Берговин А. К.*, *Ушаков В. Г.* Приоритетная система $GI|G|1$ с профилактиками обслуживающего прибора // Тихоновские чтения. — 2022. — С. 106–107.

34. *Берговин А. К.* Длина очереди в системе с авторегрессионным гиперэкспоненциальным входящим поток при критической загрузке // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2023. — № 4. — С. 9–16.

35. *Берговин А. К.* Приоритетная система обслуживания с гиперэкспоненциальным входящим потоком авторегрессионного типа // X-я международная молодежная научная конференция "Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем". — 2023. — С. 110–114.

36. *Берговин А. К.* Приоритетная система с профилактиками обслуживающего прибора // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2023. — № 1. — С. 14–20.

37. *Берговин А. К.*, *Ушаков В. Г.* Исследование систем обслуживания со смешанными приоритетами // Информатика и ее применения. — 2023. — Т. 17, № 2. — С. 57–61.

38. *Берговин А. К.*, *Ушаков В. Г.* Система обслуживания с приоритетной дисциплиной без прерывания обслуживания // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2018. — № 3. — С. 24–28.

39. *Боровков А. А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания. — Москва : Наука, 1979.

40. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. — Москва : Наука, 1972.

41. *Боровков А. А.* Эргодичность и устойчивость случайных процессов. — Москва : Эдиториал УРСС, 1999.

42. *Бочаров П. П.*, *Печинкин А. В.* Теория массового обслуживания. — Москва : Издательство Рос. ун–та дружбы народов, 1995.

43. *Бронштейн О. И.*, *Духовный И. М.* Модели приоритетного обслуживания в информационно-вычислительных системах. — Москва : Наука, 1976.

44. *Вишневский В. М.*, *Дудин А. Н.*, *Клименок В. И.* Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. — Москва : Рекламно-издательский центр "ТЕХНОСФЕРА", 2018.

45. *Гарайшина И. Р.*, *Моисеева С. П.*, *Назаров А. А.* Методы исследования коррелированых потоков и специальных систем массового обслуживания. — Томск : Изд-во науч.-техн. лит., 2010.

46. *Даниелян Э. А.* К асимптотике периода занятости и времени ожидания приоритетных систем $M_r|G_r|1|\infty$ при критической загрузке // Изв. АН Арм. ССР. Математика. — 1975. — Т. 10. — С. 272–287.

47. *Даниелян Э. А.*, *Земляной Н. С.* К асимптотике длины очереди систем $M_r|G_r|1|\infty$ в условиях критической загрузки // ДАН Арм. ССР. — 1978. — Т. 66. — С. 193–196.

48. *Зорин А. В.*, *Кочеганов В. М.* Достаточное условие существования стационарного режима очередей первичных требований в тандеме систем массового обслуживания // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. — 2018. — Т. 2. — С. 49–74.

49. *Кондранин Е. С.*, *Ушаков В. Г.* Система обслуживания с относительным приоритетом и профилактиками прибора // Информатика и ее применения. — 2018. — Т. 4. — С. 33–38.

50. *Леонтьев Н. Д.*, *Ушаков В. Г.* Анализ системы обслуживания с входящим потоком авторегрессионного типа // Информатика и её применения. — 2014. — Т. 3. — С. 39–44.

51. *Леонтьев Н. Д.*, *Ушаков В. Г.* Анализ системы обслуживания с входящим потоком авторегрессионного типа и относительным приоритетом // Информатика и её применения. — 2016. — Т. 3. — С. 15–22.

52. *Маталыцкий М. А.*, *Русилко Т. В.* Математический анализ стохастических моделей обработки исков в страховых компаниях. — Гродно : ГрГУ, 2007.

53. *Матвеев В. Ф.*, *Ушаков В. Г.* Системы массового обслуживания. — Москва : Издательство Московского Университета, 1984.

54. *Назаров А. А.*, *Моисеева С. П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. — Томск : Изд-во науч.-техн. лит., 2006.

55. *Назаров А. А.*, *Терпугов А. Ф.* Теория массового обслуживания. — Томск : Изд-во науч.-техн. лит., 2004.

56. Приоритетные системы обслуживания / Б. В. Гнеденко [и др.]. — Москва : Издательство Московского университета, 1973.

57. *Прохоров Ю. В.* Переходные явления в процессах массового обслуживания // Литовский математический сборник. — 1963. — Т. 3. — С. 199–206.

58. *Саати Т.* Элементы теории массового обслуживания и её приложения. — Москва : Советское радио, 1971.

59. *Ушаков А. В.* Анализ системы обслуживания с гиперэкспоненциальным входящим потоком в условиях критической загрузки // Информатика и ее применения. — 2012. — Т. 3. — С. 114–118.

60. *Ушаков А. В.*, *Ушаков В. Г.* Предельное распределение времени ожидания при критической загрузке в системе с относительным приоритетом // Вестн. Моск. уни–та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2012. — Т. 4. — С. 11–16.

61. *Ушаков В. Г.* Система обслуживания с гиперэкспоненциальным входящим потоком и профилактиками прибора // Информатика и ее применения. — 2016. — Т. 2. — С. 92–97.

62. *Ушаков В. Г.*, *Ушаков Н. Г.* Одноканальная система обслуживания с зависимыми интервалами времени между поступлениями требований // Информатика и её применения. — 2017. — Т. 2. — С. 112–116.

63. *Федоткин М. А.* Модели в теории вероятностей. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2012.

64. *Федоткин М. А.* Процессы обслуживания и управляющие системы // Математические вопросы кибернетики. — 1996. — Т. 6. — С. 51–70.