МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Берговин Алексей Константинович

Анализ различных классов систем обслуживания с приоритетами

1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2024

Диссертация подготовлена на *кафедре математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.*

Научный руководитель: **Ушаков Владимир Георгиевич**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Зорин Андрей Владимирович**
доктор физико-математических наук, доцент,
ННГУ имени Н.И. Лобачевского, заведующий кафедрой теории вероятностей и анализа данных института информационных технологий, математики и механики

Моисеева Светлана Петровна
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики, Институт прикладной математики и компьютерных наук Томского государственного университета

Колчин Андрей Валентинович
кандидат физико-математических наук, доцент,
Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), доцент кафедры «Прикладная математика» факультета управления

Защита диссертации состоится «13» сентября 2024 года. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.*011.3* Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

E-mail (диссертационного совета): mexmat_disser85@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале:
https://dissovet.msu.ru/dissertation/3074

Автореферат разослан «_____» _______________ 2024 г..

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук *Шерстюков В.Б.*

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. При построении математических моделей процессов обслуживания во многих прикладных областях, например, при моделировании трафика в телекоммуникационных сетях, анализе транспортных потоков, потоков страховых случаев, распределении порядка выполнения программ на вычислительном кластере и многих других, используются методы теории массового обслуживания. Одним из важных классов моделей теории массового обслуживания являются модели приоритетного обслуживания. Введение приоритетов позволяет учесть различия в поступающих требованиях (например, различные параметры обслуживания, степень их «важности»), что приводит к математическим моделям, которыми можно описать значительно более широкий класс реальных систем обслуживания.

Развитие теории приоритетных систем обслуживания пришлось на вторую половину XX века. Одними из первых монографий в данном направлении являются [1] и [2], как основной метод исследования в них использовался метод дополнительных компонент с помощью которого исследовался простейший входящий поток. В дальнейшем, в работах [3] и [4] этот метод был усовершенствован для анализа гиперэкспоненциального и эрланговского входящего потоков соответственно.

Параллельно с развитием технологий, в особенности сетевых, возникла необходимость построения математических моделей различных телекоммуникационных сетей, а также анализа их характеристик. Ключевую роль в этом играет теории массового обслуживания, модели которой позволяют учитывать

[1] *Jaiswal N. K.* Priority queues. New York : Academic press, 1968

[2] Приоритетные системы обслуживания / Б. В. Гнеденко [и др.]. Москва : Издательство Московского университета, 1973

[3] *Ушаков В. Г.* Однолинейная система обслуживания с относительным приоритетом // Известия АН СССР. 1978. Т. 1. С. 76–80

[4] *Ушаков В. Г.* Система обслуживания с эрланговским входящим потоком и относительным приоритетом // Теория вероятн. и ее примен. 1977. Т. 22. С. 860–866

различные особенности функционирования сетей такого рода.

В настоящий момент исследования в области теории массового обслуживания ведут много как российский ученых: А.А. Боровков, В.М. Вишневский, А.В. Зорин, Г.П. Климов, А.Н. Моисеев, С.П. Моисеева, Е.В. Морозов, А.А. Назаров, Р.В. Разумчик, А.С. Румянцев, В.В. Рыков, В.Г. Ушаков, М.А. Федоткин, и др, так и зарубежных: А.Н. Дудин, В.И. Клименок, J. R. Artalejo, M. Mandjes, H. Takagi, Yi Zheng и др.

Первой важной особенностью многих телекоммуникационных сетей является наличие зависимых интервалов между поступлениями данных[5], анализ таких потоков возможен, например, с помощью BMAP-потоков (Batch Markovian Arrival Process)[6]. В данной диссертации, данные потоки не будут рассматриваться, вместо них, для учета корреляции интервалов между поступлениями требований, будет рассматриваться подход, при котором интенсивности входящего потока связаны авторегрессионной зависимостью первого порядка. Такой подход позволяет получить аналитические результаты в классическом для теории массового обслуживания виде, что в свою очередь дает возможность аппроксимировать математическое ожидание, дисперсию и корреляцию интервалов между поступлениями требований реальной потока. Исследование аналогичных систем с помощью BMAP-потоков, во многих случаях, приводит к необходимости использования численных методов для нахождения характеристик системы.

Следующей особенностью функционирования реальных сетей, как телекоммуникационных, так и вычислительных, является поведение сервера (обслуживающего устройства) при отсутствии требований в сети. В большинстве реальных сетей отсутствие трафика не приводит к простою сервера, обычно,

[5] *Gusella R.* Characterizing the variability of arrival processes with indexes of dispersion // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. 1991. Т. 2. С. 203–211, *Paxson V.*, *Floyd S.* Wide-area Traffic: The failure of Poisson modelling // IEEE/ACM Transactions on Networking. 1995. Т. 3. С. 226–244

[6] *Вишневский В. М.*, *Дудин А. Н.*, *Клименок В. И.* Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. Москва : Рекламно-издательский центр "ТЕХНОСФЕРА", 2018

в такие моменты происходит выполнение неких служебных (второстепенных) задач. Поскольку характеристики, связанные со служебными задачами (их количество, время обслуживания и пр.) не интересуют нас при анализе основной системы, то в соответствующих математических моделях вводится понятие профилактик (прогулок, каникул) прибора[7].

Одной из главных аспектов возникающих при моделировании телекоммуникационных, вычислительных сетей, а также многих других прикладных систем является наличие разнородного трафика (потока требований), что делает некорректным применение неприоритетных моделей теории массового обслуживания. К тому же, классические приоритетные дисциплины, такие как относительный или абсолютный приоритет, которые как правило рассматриваются исследователями, не учитывают реальное взаимодействие между трафиком (потоками) в сети. Поэтому применение моделей с однотипной приоритетной дисциплиной между различными потоками может приводить к некорректным оценкам вероятностных характеристик системы. Отсюда, возникает необходимость рассмотрения смешанных приоритетных дисциплин, данный термин не является общим для всех работ по теории массового обслуживания, например, в работе[8] под ним понимается, что между приоритетными классами с близкими приоритетными индексами установлена дисциплина относительного приоритета, а для остальных дисциплина абсолютного приоритета. В работе [9] понимается, что при поступлении требования разыгрывается случайная величина с распределением Бернулли и на основе результата выбирается либо дисциплина относительного приоритета, либо абсолютного с обслуживанием заново. В данной диссертации под смешанной приоритетной дисциплиной будет понимать-

[7] *Takagi H.* Queueing Analysis: A Foundation of Performance Analysis. Vol. 1: Vacation and Priority Systems. Part 1. Amsterdam : Elsevier Science Publishers B.V., 1991

[8] *Adiri I.*, *Domb I.* A single server queueing system working under mixed priority disciplines // Operations Research. 1982. T. 30. C. 97–115

[9] *Dimitriou I.* A mixed priority retrial queue with negative arrivals, unreliable server and multiple vacations // Applied Mathematical Modelling. 2013. T. 37. C. 1295–1309

ся возможность установить вид приоритетной дисциплины между различными типами требований в момент задания системы. Будут рассмотрены две комбинации: 1) относительный приоритет и абсолютный приоритет с обслуживанием заново; 2) абсолютный приоритет с потерей и абсолютный приоритет с обслуживанием заново.

Бурное развитие технологий передачи данных, а также развитие облачных сервисов, используемых в основном для хранения и обработки больших массивов данных, привело к значительному росту трафика в телекоммуникационных сетях. То есть, подавляющее большинство современных сетей, как телекоммуникационных, так и вычислительных являются высоконагруженными. В следствии чего возникает необходимость анализа математических моделей таких сетей в предположениях о критической загрузке. В данной диссертации для всех рассматриваемых систем, кроме системы с профилактиками будет исследовано поведение длины очереди при критической загрузке. Система с профилактиками обслуживающего прибора не исследовалась в случае критической загрузки, так как в такой ситуации профилактики (то есть, освобождения прибора от требований) были бы невозможны. Под критической загрузкой будет пониматься постановка предложенная в [10], когда одновременно время устремляться к бесконечности, а загрузка к единице.

Указанные особенности функционирования реальных систем обслуживания показывают, что задачи построения и анализа математических моделей таких систем с помощью приоритетных систем обслуживания являются актуальными научными проблемами.

Цели и задачи диссертационной работы: Целью настоящей диссертации является нахождение распределений, как в явном виде, так и соотношений для их определения, длин очередей в некоторых приоритетных системах обслуживания, в том числе и в условиях критической загрузки системы.

[10] *Прохоров Ю. В.* Переходные явления в процессах массового обслуживания // Литовский математический сборник. 1963. Т. 3. С. 199–206

Для достижения данной цели необходимо решить следующие задачи: построить математические модели рассматриваемых систем, получить соотношения которым удовлетворяет преобразование Лапласа совместной производящей функции количества требований в системе в нестационарном режиме, рассмотреть поведение длины очереди наименее приоритетного класса в системах в условии критической загрузки.

Научная новизна. Все результаты полученные в данной диссертации являются новыми и заключаются в следующем: найдены соотношения, которым удовлетворяет преобразование Лапласа совместной производящей функции количества требований каждого приоритета во всех рассматриваемых в работе системах; для системы с пуассоновским входящим потоком со случайной интенсивностью, а также для системы со смешанной приоритетной дисциплиной найдены распределения количества требований наименее приоритетного класса в условиях критической загрузки.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертационной работы носят теоретический характер и представляют интерес для теории массового обслуживания и ее приложений. Практическая ценность полученных результатов заключается в возможности их использования для анализа широкого класса приоритетных систем обслуживания во многих прикладных областях, упомянутых ранее, в основном на этапе их проектирования, а результаты для систем, функционирующих в условиях критической загрузки, могут быть применены для проведения стресс-тестирования проектируемых систем.

Методология и методы исследования. В диссертации используются методы теории вероятностей, теории случайных процессов, теории дифференциальных и интегральных уравнений, математического анализа, функционального анализа и линейной алгебры. Основным методом исследования рассматриваемых моделей является метод дополнительных компонент.

Соответствие паспорту научной специальности. В диссертации рассматриваются некоторые модели приоритетных систем обслуживания. Для их анализа применяется аппарат теории массового обслуживания, в силу чего данная диссертация соответствует паспорту специальности 1.1.4 "Теория вероятностей и математическая статистика". Область исследования: 12. Теория восстановления и теория массового обслуживания.

Положения, выносимые на защиту:

1. Соотношения, которым удовлетворяет преобразование Лапласа совместной производящей функции количества требований каждого приоритета в нестационарном режиме для системы с пуассоновским входящим потоком со случайной интенсивностью, произвольным временем обслуживания требований каждого приоритетного класса, одним обслуживающим прибором и неограниченным числом мест для ожидания в очереди.

2. Найдено распределение количества требований наименее приоритетного класса в системе с двумя приоритетными классами, между которыми установлена дисциплина относительного приоритета, пуассоновским входящим потоком со случайной интенсивностью, произвольным временем обслуживания, одним обслуживающим прибором, неограниченным числом мест для ожидания в очереди в условиях критической загрузки.

3. Интегральные уравнения, которым удовлетворяет преобразование Лапласа совместной производящей функции количества требований каждого приоритета в нестационарном режиме для системы с профилактиками обслуживающего прибора, произвольным входящим потоком, произвольным временем обслуживания требований каждого приоритетного класса, одним обслуживающим прибором и неограниченным числом мест для ожидания в очереди.

4. Соотношения, которым удовлетворяет преобразование Лапласа совместной производящей функции количества требований каждого приоритета в нестационарном режиме для системы со смешанными приоритетами, в

которой входящие потоки являются пуассоновскими, время обслуживания имеет произвольное распределение, один обслуживающий прибор и неограниченное число мест для ожидания в очереди.

5. Найдено распределение количества требований наименее приоритетного класса в системе с тремя пуассоновскими входящими потоками, между которыми установлена одна из смешанных приоритетных дисциплин, произвольным временем обслуживания, одним обслуживающим прибором и неограниченным числом мест для ожидания в очереди в условиях критической загрузки.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов представленных в диссертационной работе обеспечивается использованием строгих математических методов исследования.
Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. Научная конференция «Тихоновские чтения 2022», МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия, 24–29 октября 2022 г.
   Тема доклада: Приоритетная система $GI|G|1$ с профилактиками обслуживающего прибора

2. X-я международная молодежная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем». Секция: математическая теория телетрафика и теория массового обслуживания, Томск, Россия, 26-29 мая 2023 г.
   Тема доклада: Приоритетная система обслуживания с гиперэкспоненциальным входящим потоком авторегрессионного типа

3. 26th International Conference on Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications, Москва, Россия, 25–29 сентября 2023 г.

Тема доклада: Приоритетная система обслуживания с профилактиками прибора в общих преположениях на управляющие последовательности

4. Научная конференция «Тихоновские чтения 2023», МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия, 29 октября–3 ноября 2023 г.

   Тема доклада: О двух моделях смешанных приоритетов в системах вида $M|G|1$

5. Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2023). Секция: математическая теория телетрафика и теория массового обслуживания. Томск, Россия, 4–9 декабря 2023 г.

   Тема доклада: Предельное распределение длины очереди в системе с авторегрессионным входящим потоком в условиях критической загрузки

6. Научная конференция «Ломоносовские чтения 2024», МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия, 20 марта – 3 апреля 2024 г.

   Тема доклада: Асимптотическое распределение длины очереди в системе обслуживания со смешанной приоритетной дисциплиной

Также, автор неоднократно докладывал результаты диссертационной работы на семинарах «Аналитический методы в теории массового обслуживания» и «Теория риска и смежные вопросы» кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова (2020 – 2024 гг.).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии, насчитывающей 64 наименования. Общий объем диссертации 107 страниц.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе рассматривается приоритетная система обслуживания, входящий поток которой является пуассоновским со случайной интенсивностью, где интенсивность на следующем интервале между поступлениями требований либо с некоторой вероятностью p повторяет предыдущую интенсивность, либо с вероятностью $1-p$ выбирается заново из того же множества интенсивностей, а время обслуживания имеет произвольное распределение. В данной системе неограниченное число мест в очереди и один обслуживающий прибор. Для данной модели было найдено распределение вектора количества требований в системе в нестационарном режиме в достаточно общем предположении на приоритетную дисциплину, а именно, данный результат справедлив для любой дисциплины без прерывания обслуживания.

Основная теорема:

а) функции $p(\mathbf{z},s)$ и $p_{ij}(\mathbf{z},x,s), i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,N}$, определяются по формулам:

$$p(\mathbf{z},s)=p_0(s)+\frac{(\mathbf{p},\mathbf{z})-1}{(1-p)(\mathbf{p},\mathbf{z})}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{N}\gamma_i^{(k)}(\mathbf{z},s)\cdot\frac{1-\beta_i(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z})))}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z})))},$$

$$p_{ij}(\mathbf{z},x,s)=(1-B_i(x))\,c_j\sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_i^{(k)}(\mathbf{z},s)}{\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))}e^{-(s-\mu_k((\mathbf{p},\mathbf{z})))x},$$

где

$$\gamma_i^{(m)}(\mathbf{z},s)=\frac{(1-p)(\mathbf{p},\mathbf{z})}{\alpha_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))}\prod_{j=1}^{N}[\mu_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_j(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))]\times$$

$$\times\sum_{e=1}^{N}\frac{a_e p_{ie}(\mathbf{z},0,s)}{\mu_m((\mathbf{p},\mathbf{z}))+a_e(1-p(\mathbf{p},\mathbf{z}))},$$

и $\gamma_i^{(m)}(\mathbf{z}, s),\ m = \overline{1, N}$ удовлетворяют соотношениям:

$$\sum_{i=1}^{r} \gamma_i^{(m)}(\mathbf{z}, s) \frac{z_i - \beta_i(s - \mu_m((\mathbf{p}, \mathbf{z})))}{z_i} =$$

$$\frac{(1-p)(\mathbf{p}, \mathbf{z})}{\alpha_m((\mathbf{p}, \mathbf{z}))} \prod_{k=1}^{N} [\mu_m((\mathbf{p}, \mathbf{z})) + a_k(1 - p(\mathbf{p}, \mathbf{z}))] \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j a_j f_j(\mathbf{z}, s)}{(\mu_m((\mathbf{p}, \mathbf{z})) + a_j(1 - p(\mathbf{p}, \mathbf{z})))}.$$

б) $p_{0j}(s)$ определяются следующим образом:

$$p_{0j}(s) = \frac{1}{a_j} \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{(1-p)(p, z_l^*)(s - \mu_l^*(s))} \cdot \frac{1}{\prod_{j \neq n}(a_j - a_n)} \times$$
$$\times \frac{1}{\mu_l^*(s) + a_j(1 - p(p, z_l^*))} \prod_{l \neq n} \left(\frac{\mu_l^*(s)}{1 - p(p, z_l^*)} - \frac{\mu_n^*(s)}{1 - p(p, z_n^*)} \right)^{-1} \times$$
$$\times \prod_{k=1}^{N} \frac{(\mu_k^*(s) + a_j(1 - p(p, z_k^*))(\mu_l^*(s) + a_k(1 - p(p, z_l^*))}{1 - p(p, z_k^*)}.$$

Также, в данной главе рассмотрена исследуемая система с двумя приоритетными классами и дисциплиной относительного приоритета, для которой была получена предельная теорема для распределения количества требований наименее приоритетного класса в условиях критической загрузки системы.

Предельная теорема: При $m \to \infty$ существует предел:

$$\lim_{m \to \infty} \mathbb{P}\left(\rho^{\gamma} \cdot L_2\left(\frac{t}{\rho^{\alpha}} \right) < x \right) =$$
$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int\limits_{0}^{\sqrt{\frac{v^*}{2t}} wx} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,\ \alpha < 2, \\ 1 - \frac{e^{-wx}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\sqrt{\frac{t}{4v^*}} + wx\sqrt{\frac{v^*}{4t}}}^{+\infty} e^{-y^2} dy - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\sqrt{\frac{t}{4v^*}} + wx\sqrt{\frac{v^*}{4t}}}^{+\infty} e^{-y^2} dy,\ \alpha = 2, \\ 1 - e^{-wx},\ \alpha > 2, \end{cases}$$

где

$$w = \frac{1 - a^* p_1^* \beta_{11}^*}{a^* p_2^* v^*}, \ v^* = \frac{\beta_1^* (\mu_1^{''}(1))^* + (a^*)^2 \beta_2^*}{2a^*}.$$

Во второй главе рассматривается система массового обслуживания с профилактиками обслуживающего прибора, в которой и входящий поток и время обслуживания имеют произвольное распределение, а приоритетной дисциплиной является относительный приоритет. Система имеет один обслуживающий прибор и бесконечное число мест для ожидания. Для данной модели были найдены интегральные уравнения, которые позволяют однозначно определить распределение вектора количества требований в системе в нестационарном режиме, было показано, что решение данных интегральных уравнений существует, и оно единственно. Необходимо отметить, что автором было предложено интегральное преобразование, которое свело систему дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основная теорема: функции $p_i(\mathbf{z}_i, x, y, s), \ i = \overline{0, r}$, определяются следующими соотношениями:

$$p_i(\mathbf{z}_i, x, y, s) = (1 - A(y)) f_i(\mathbf{z}_i, x, y, s),$$

где $f_i(\mathbf{z}, x, y, s), \ i = \overline{0, r}$, — единственные решения уравнений:

$$f_i(\mathbf{z}_i, x, y, s) = (\mathbf{p}, \mathbf{z}) \int\limits_y^\infty a(u - y) f_i(\mathbf{z}_i, x, u, s) du + d_i(\mathbf{z}_i, x, y, s), \ i = \overline{0, r}.$$

Для $i = \overline{1, r}$

$$d_i(\mathbf{z}_i, x, y, s) = (1 - B_i(x)) e^{-sx} \Bigg(h_i(\mathbf{z}_i, y - x, s) - \\ - p_i z_i \int\limits_{y-x}^\infty a(v - y + x) h_i(\mathbf{z}_i, v, s) dv \Bigg) \cdot \mathbb{I}(y \geqslant x),$$

$$d_0(\mathbf{z},x,y,s) = (1-C(x))e^{-sx}\left(h_0(y-x,s) - (\mathbf{p},\mathbf{z})\int\limits_{y-x}^{\infty} a(v-y+x)h_0(v,s)dv\right)\times$$

$$\times\, \mathbb{I}(y \geqslant x) + \frac{1-C(x)}{\alpha_1}(1-(\mathbf{p},\mathbf{z}))\int\limits_{0}^{\min(x,y)} e^{-sv}\frac{f(x-v)}{1-C(x-v)}dv.$$

В третьей главе была рассмотрена система с несколькими пуассоновскими входящими потоками и произвольным временем обслуживания каждого потока. Заявки всех потоков обслуживаются одним прибором. Количество мест для ожидания заявок всех типов неограниченно. Приоритетная дисциплина в рассматриваемой модели – смешанная, рассматриваются две модели: в первой модели приоритет может быть или относительным, или абсолютным с обслуживанием заново прерванного требования, а во второй приоритет является абсолютным с потерей или обслуживание заново прерванного требования.

Основная теорема (модель №1): функция $p(\mathbf{z},s)$ определяется по формуле

$$p(\mathbf{z},s) = p_0(s) + \sum_{i=1}^{r}\frac{1-\beta_i\left(s+\sigma-\sum\limits_{j\notin I_i} a_j z_j\right)}{s+\sigma-\sum\limits_{j\notin I_i} a_j z_j} p_i(\mathbf{z},0,s),$$

где

$$p_0(s) = \left(s+\sigma-\sum_{j=1}^{r} a_j \pi_{jr}(s)\right)^{-1},$$

а $p_i(\mathbf{z},0,s)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$\sum_{i=k+1}^{r} d_i\left(\pi_{1k}(z_{k+1},\ldots,z_r,s),\ldots,\pi_{kk}(z_{k+1},\ldots,z_r,s),z_{k+1},\ldots,z_r,s\right)p_i(\mathbf{z},0,s) =$$

$$= 1-\left(s+\sigma-\sum_{j=1}^{k} a_j\pi_{jk}(z_{k+1},\ldots,z_r,s) - \sum_{j=k+1}^{r} a_j z_j\right)p_0(s),\ \ k=\overline{1,r-1}.$$

Основная теорема (модель №2): Функция $p(\mathbf{z},s)$ определяется по формуле

$$p(\mathbf{z}, s) = p_0(s) + \sum_{i=1}^{r} \frac{1 - \beta_i\left(s + \sigma - \sum\limits_{j=i}^{r} a_j z_j\right)}{s + \sigma - \sum\limits_{j=i}^{r} a_j z_j} p_i(\mathbf{z}, 0, s),$$

где

$$p_0(s) = \left(s + \sigma - \sum_{j=1}^{r} a_j \tau_{jr}(s)\right)^{-1},$$

а $p_i(\mathbf{z}, 0, s)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$\sum_{i=k+1}^{r} c_i\left(\tau_{1k}(z_{k+1}, \ldots, z_r, s), \ldots, \tau_{kk}(z_{k+1}, \ldots, z_r, s), z_{k+1}, \ldots, z_r, s\right) p_i(\mathbf{z}, 0, s) =$$
$$= 1 - \left(s + \sigma - \sum_{j=1}^{k} a_j \tau_{jk}(z_{k+1}, \ldots, z_r, s) - \sum_{j=k+1}^{r} a_j z_j\right) p_0(s), \ k = \overline{1, r-1}.$$

Также, в данной главе рассмотрено поведение длины очереди наименее приоритетного класса при критической загрузке в системе с тремя входящими пуассоновскими потоками, в которой между первым и вторым потоком установлена дисциплина относительного приоритета, между первым и третьим потоком установлена дисциплина абсолютного приоритета с обслуживанием заново, между вторым и третьим потоком установлена дисциплина относительного приоритета. Доказана следующая теорема.

Предельная теорема: При $m \to \infty$ существует предел:

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\rho^{\gamma} \cdot L_3\left(\frac{t}{\rho^{\alpha}}\right) < x\right) =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \cdot \displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{\frac{v^*}{2t}}w^*x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \ \alpha < 2, \\ \\ 1 - \dfrac{e^{-w^*x}}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int\limits_{-\sqrt{\frac{t}{4v^*}}+w^*x\sqrt{\frac{v^*}{4t}}}^{+\infty} e^{-y^2} dy - \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int\limits_{\sqrt{\frac{t}{4v^*}}+w^*x\sqrt{\frac{v^*}{4t}}}^{+\infty} e^{-y^2} dy, \ \alpha = 2, \\ \\ 1 - e^{-w^*x}, \ \alpha > 2, \end{cases}$$

где

$$w^* = \frac{1 - a_1^*\beta_{11}^* - a_2^*\beta_{21}^*}{a_3^* v^*},$$

$$v^* = \left(\frac{a_1^*\beta_{12}^* + a_2^*\beta_{22}^*}{2} + a_3^* \frac{(1 - a_1^*\beta_{11}^*)\beta_3^{'*}(a_1^*)a_1^* + (1 - a_1^*\beta_{11}^*\beta_3^*(a_1^*))(1 - \beta_3^*(a_1^*))}{(a_1^*)^2(\beta_3^*(a_1^*))^2}\right).$$

В заключении резюмируются полученные результаты и описываются возможные направления для дальнейших исследований.

Обзор проведенного исследования. В работе получены следующие результаты:

1. Доказана теорема, указывающая соотношения, которым удовлетворяет преобразование Лапласа производящей функции количества требований каждого приоритета в нестационарном режиме в системе с авторегрессионным гиперэкспоненциальным входящим потоком и произвольным временем обслуживания для приоритетных дисциплин не допускающих прерывания обслуживания.

2. Найдено распределение количества требований наименее приоритетного класса в системе с двумя приоритетными классами, между которыми

установлена дисциплина относительного приоритета, авторегрессионным гиперэкспоненциальным входящим потоком и произвольным временем обслуживания в условиях критической загрузки.

3. Получены интегральные уравнения, которым удовлетворяет преобразование Лапласа производящей функции количества требований каждого приоритета в нестационарном режиме для системы с профилактиками обслуживающего прибора, произвольным входящим потоком и произвольным временем обслуживания.

4. Доказаны теоремы, указывающие соотношения, которым удовлетворяет преобразование Лапласа производящей функции количества требований каждого приоритета в нестационарном режиме для двух моделей систем обслуживания со смешанными приоритетами, в которых входящие потоки являются пуассоновскими, а время обслуживания имеет произвольное распределение.

5. Найдено распределение количества требований третьего потока (наименее приоритетного класса) в системе с тремя пуассоновскими входящими потоками, между которыми установлена дисциплина смешанного приоритета (относительный приоритет для первого и второго потоков, и для второго и третьего потоков; абсолютный приоритет с обслуживанием заново для первого и третьего потоков), в условиях критической загрузки системы.

Рекомендации и перспективы по дальнейшей разработке темы диссертации.

1. Исследовать систему с профилактиками обслуживающего прибора для других приоритетных дисциплин, например, для дисциплины чередования приоритетов.

2. Исследовать систему со смешанными приоритетами с входящим потоком более сложной структуры, например, эрланговским или гиперэкспоненциальным.

Благодарности

Автор диссертации выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Георгиевичу Ушакову, а также всему коллективу кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Публикации по теме диссертации

Основой диссертации являются следующие статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ.011.3 по специальности 1.1.4 – «теория вероятностей и математическая статистика» и входящие в перечень Web of Science, Scopus и RSCI.

1. Берговин А.К., Ушаков В.Г. Система обслуживания с приоритетной дисциплиной без прерывания обслуживания // Вестн. Моск. уни–та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2018. № 3. С.24—29 / 0.38 п. л. (RSCI, РИНЦ, IF РИНЦ = 0.184)
   Ушакову В.Г. принадлежит постановка задачи. Все результаты получены автором диссертации.

2. Берговин А.К. Приоритетная система с профилактиками обслуживающего прибора // Вестн. Моск. уни–та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2023. № 1. С.14—20 / 0.44 п. л. (RSCI, ВАК, РИНЦ, IF РИНЦ = 0.184)

3. Берговин А.К., Ушаков В.Г. Исследование систем обслуживания со смешанными приоритетами // Информатика и ее применения 2023. Т. 17 Вып. 2. С.57—61 / 0.31 п.л. (Scopus, РИНЦ, IF Scopus = 0.229).
   Ушакову В.Г. принадлежит постановка задачи. Все результаты получены автором диссертации.

4. Берговин А.К. Длина очереди в системе с авторегрессионным гиперэкспоненциальным входящим потоком при критической загрузке // Вестн.

Моск. уни–та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2023. № 4. С.9—16 / 0.5 п. л. (Scopus, RSCI, ВАК, РИНЦ, IF РИНЦ = 0.184)

Публикации в сборниках трудов конференций:

1. Берговин А. К., Ушаков В. Г. Приоритетная система $GI|G|1$ с профилактиками обслуживающего прибора // Тезисы докладов научной конференции Тихоновские чтения (2022 г., МАКС Пресс, Москва, тезисы). — Москва: ООО МАКС Пресс, 2022. — С. 106–107.

2. Берговин А.К. Приоритетная система обслуживания с гиперэкспоненциальным входящим потоком авторегрессионного типа // Материалы X Международной молодежной научной конференции "Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем". Т. 308 из Сер. Серия физико-математическая. — Томский государственный университет Томск: 2023. — С. 110–114.

3. Берговин А. К., Ушаков В. Г. О двух моделях смешанных приоритетов в системах вида $M|G|1$// Тезисы докладов научной конференции Тихоновские чтения (2023 г., МАКС Пресс, Москва, тезисы). — Москва: ООО МАКС Пресс, 2023. — С. 94.

4. Берговин А. К., Ушаков В. Г. Предельное распределение длины очереди в системе с авторегрессионным входящим потоком в условиях критической загрузки // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2023). — Т. 1 из Материалы XXII Международной конференции имени А. Ф. Терпугова 4–9 декабря 2023 г. — Издательство Томского государственного университета Томск: 2023. — С. 139–144.

5. Берговин А. К., Ушаков В. Г. Приоритетная система обслуживания с профилактиками прибора в общих предположениях на управляющие последовательности // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные

сети: управление, вычисление, связи (DCCN-2023). — материалы XXVI Междунар. научн. конфер, 25—29 сент. 2023 г., Москва. — ИПУ РАН Москва: 2023. — С. 56—62.

6. Берговин А. К., Ушаков В. Г. Асимптотическое распределение длины очереди в системе обслуживания со смешанной приоритетной дисциплиной // Тезисы докладов научной конференции Ломоносовские чтения (2024 г., МАКС Пресс, Москва, тезисы). — Москва: ООО МАКС Пресс, 2024. — С. 133–134.

Берговин Алексей Константинович

Анализ различных классов систем обслуживания с приоритетами

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать XX.XX.2024. Формат 60×90 $1/16$. Тираж XXX экз. Заказ XXX.