

УДК 517.957

Ю. В. Мухартова, А. А. Панин

О разрушении решения одной неоднородной системы уравнений соболевского типа

Рассмотрена система двух неоднородных нелинейных уравнений соболевского типа шестого порядка со вторым порядком производной по времени. Доказана локальная (по времени) разрешимость задачи. Сформулированы достаточные условия, при которых разрушение решения происходит за конечное время, и дана оценка сверху времени разрушения.

Библиография: 10 наименований.

Ключевые слова: разрушение, нелинейная начально-краевая задача, уравнения соболевского типа.

Введение

В настоящее время наблюдается большой интерес к исследованию возникновения режимов с обострением (blow up) в различных нелинейных эволюционных задачах для уравнений в частных производных. Имеются три четко сформулированных и широко развитых метода исследования возникновения подобных режимов: метод нелинейной емкости С. И. Похожаева и Э. Л. Митидиери [1], энергетический метод Х. А. Левина [2]–[5] и метод автомодельных режимов, основанный на различных признаках сравнения и развитый в работах А. А. Самарского, В. А. Галактионова, С. П. Курдюмова и А. П. Михайлова [6] (см. также [7]).

В настоящей работе мы применим некоторую модификацию метода Х. А. Левина для получения достаточных условий разрушения решения следующей системы уравнений соболевского типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\Delta^2 u + \Delta u) + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\chi_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla u) + \Delta u \\ - \operatorname{div}(\chi_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla u) = h_1(x), \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\Delta^2 v + \Delta v) + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\chi_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla v) + \Delta v \\ - \operatorname{div}(\chi_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla v) = h_2(x). \end{aligned}$$

Полученный нами результат для системы двух уравнений является развитием результата работы М. О. Корпусова [8], где исследовалось одно уравнение рассматриваемого типа с нулевой правой частью.

Структура настоящей работы такова. В § 1 вводим постановку задачи, в § 2 налагаем условия на данные задачи, в § 3, 4 получаем соответственно первое и

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента РФ “Поддержка молодых докторов наук” (грант МД-99.2009.1).

второе энергетические равенства, а также выводим достаточные условия разрушения решения. В § 5 покажем, что класс данных задачи, удовлетворяющих этим достаточным условиям, непуст. В § 6 обосновываем локальную разрешимость задачи, т. е. существование решения на некотором интервале времени. Наконец, в § 7 для облегчения восприятия статьи вынесено одно техническое доказательство.

§ 1. Постановка задачи

Исследуем возникновение режимов с обострением в следующей начально-краевой задаче:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\Delta^2 u + \Delta u) + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla u) + \Delta u \\
 & \quad - \operatorname{div}(\kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla u) = h_1(x), \\
 & \frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\Delta^2 v + \Delta v) + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla v) + \Delta v \\
 & \quad - \operatorname{div}(\kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla v) = h_2(x), \\
 & u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n_x} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n_x} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \\
 & u(x, 0) = u_0(x) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega), \quad v(x, 0) = v_0(x) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega), \\
 & u'(x, 0) = u_1(x) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega), \quad v'(x, 0) = v_1(x) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega),
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где Ω – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{4,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$, а штрих здесь и далее обозначает производную по времени t .

Подобные задачи возникают в теории ионно-звуковых волн в плазме при учете сильной пространственно-временной дисперсии и нелинейной зависимости поляризуемости от напряженности электрического поля (см. [8]).

§ 2. Налагаемые на данные задачи условия и определение сильного обобщенного решения

Прежде всего нам нужно ввести ряд банаховых пространств и их взаимные вложения. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{B} & \equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega) \otimes \mathbb{H}_0^2(\Omega), & \mathbb{B}^* & \equiv \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \otimes \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \\
 \mathbb{F}_1 & \equiv \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega) \otimes \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega), & \mathbb{F}_1^* & \equiv \mathbb{W}^{-1,p_1'}(\Omega) \otimes \mathbb{W}^{-1,p_1'}(\Omega), \\
 \mathbb{F}_2 & \equiv \mathbb{W}_0^{1,p_2}(\Omega) \otimes \mathbb{W}_0^{1,p_2}(\Omega), & \mathbb{F}_2^* & \equiv \mathbb{W}^{-1,p_2'}(\Omega) \otimes \mathbb{W}^{-1,p_2'}(\Omega).
 \end{aligned}$$

Числа p_1 и p_2 будут определены ниже при формулировке условий для функций κ_1, κ_2 . Легко видеть, что $\mathbb{B}^*$ является сильным сопряженным банаховым пространством к банахову пространству $\mathbb{B}$ относительно нормы

$$\|b^*\|_* \equiv \sup_{\|b\| \leq 1} |\langle b^*, b \rangle|,$$

где $\|\cdot\|$ – норма в банаховом пространстве $\mathbb{B}$, которую выберем следующим способом:

$$\|w\| = \left[\int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx \right]^{1/2} \quad \forall w = (u, v) \in \mathbb{B},$$

а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{B}$ и $\mathbb{B}^*$. Кроме того, $\mathbb{F}_i^*$, $i = 1, 2$, являются сильно сопряженными банаховыми пространствами соответственно к банаховым пространствам $\mathbb{F}_i$, $i = 1, 2$, относительно нормы

$$\|f^*\|_{\mathbb{F}_i^*} \equiv \sup_{\|f\|_{\mathbb{F}_i} \leq 1} |\langle f^*, f \rangle_i|,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ – скобки двойственности между $\mathbb{F}_i$ и $\mathbb{F}_i^*$, а $\|\cdot\|_{\mathbb{F}_i}$ – норма в банаховом пространстве $\mathbb{F}_i$, которую мы выберем следующим способом:

$$\|w\|_{\mathbb{F}_i} \equiv \left[\int_{\Omega} |\nabla u|^{p_i} dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^{p_i} dx \right]^{1/p_i} \quad \forall w = (u, v) \in \mathbb{F}_i.$$

Пусть пара функций (h_1, h_2) принадлежит пространству $\mathbb{B}^*$. Теперь введем условия для функций

$$\varkappa_1(x, s), \varkappa_2(x, s): \Omega \otimes \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Каратеодориевой функцией, или функцией Каратеодори, называется функция $f(x, s): \Omega \otimes \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, которая для почти всех $x \in \Omega$ непрерывна по $s \in \mathbb{R}_+$ и для всех $s \in \mathbb{R}_+$ измерима по $x \in \Omega$.

Пусть функция $\varkappa_1(x, s)$ удовлетворяет следующим условиям:

(i)₁ является каратеодориевой;

(ii)₁ для почти всех $x \in \Omega$ удовлетворяет условиям роста

$$|\varkappa_1(x, s)| \leq c_1 + c_2 |s|^{p_1-2}, \quad p_1 \in (2, 4], \quad (2.1)$$

и принадлежит $\mathbb{C}^{(1)}([0, +\infty))$ по переменной s , кроме того, имеет место неравенство

$$|s \varkappa'_{1s}(x, s)| \leq c_1 + c_2 |s|^{p_1-2}, \quad p_1 \in (2, 4], \quad (2.2)$$

и $\varkappa_1(x, s) \geq 0$, $\varkappa'_{1s}(x, s) \geq 0$ для всех $s \in \mathbb{R}_+$ и почти всех $x \in \Omega$;

(iii)₁ оператор

$$\mathbb{B}_1(w) \equiv (\operatorname{div}(\varkappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla u), \operatorname{div}(\varkappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla v))$$

для всех $w \in \mathbb{F}_1$ является локально липшиц-непрерывным:

$$\|\mathbb{B}_1(w_1) - \mathbb{B}_1(w_2)\|_{\mathbb{F}_1^*} \leq \mu_1(R_1) \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{F}_1} \quad (2.3)$$

для всех $w_1, w_2 \in \mathbb{F}_1$, где $R_1 = \max\{\|w_1\|_{\mathbb{F}_1}, \|w_2\|_{\mathbb{F}_1}\}$, а $\mu_1(\cdot)$ – неотрицательная и неубывающая функция своего аргумента, и дифференцируемая по Фреше.

Пусть функция $\varkappa_2(x, s)$ удовлетворяет следующим условиям:

(i)₂ является каратеодориевой;

(ii)₂ для почти всех $x \in \Omega$ удовлетворяет условиям роста

$$|\varkappa_2(x, s)| \leq c_3 + c_4 |s|^{p_2-2}, \quad p_2 \in (2, 6];$$

(iii)₂ существует такое число $\vartheta > 2$, что для всех $u, v \in \mathbb{W}_0^{1,p_2}(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\int_{\Omega} \kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] dx \geq \vartheta \int_{\Omega} \int_0^{\sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}} s \kappa_2(x, s) ds dx;$$

(iv)₂ оператор

$$\mathbb{B}_2(w) \equiv (\operatorname{div}(\kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla u), \operatorname{div}(\kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla v))$$

для всех $w \in \mathbb{F}_2$ является локально липшиц-непрерывным:

$$\|\mathbb{B}_2(w_1) - \mathbb{B}_2(w_2)\|_{\mathbb{F}_2^*} \leq \mu_2(R_2) \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{F}_2} \quad (2.4)$$

для всех $w_1, w_2 \in \mathbb{F}_2$, где $R_2 = \max\{\|w_1\|_{\mathbb{F}_2}, \|w_2\|_{\mathbb{F}_2}\}$, а $\mu_2(\cdot)$ – неотрицательная и неубывающая функция своего аргумента. Величины c_1, c_2, c_3, c_4 – положительные постоянные.

Прежде чем сформулировать определение сильного обобщенного решения задачи (1.1), необходимо обсудить свойства операторов

$$\mathbb{B}_1(w) = (\mathbb{B}_{11}(w), \mathbb{B}_{12}(w)), \quad \mathbb{B}_2(w) = (\mathbb{B}_{21}(w), \mathbb{B}_{22}(w)),$$

где

$$\mathbb{B}_{11}(w) = \operatorname{div}(\kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla u), \quad (2.5)$$

$$\mathbb{B}_{12}(w) = \operatorname{div}(\kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla v) \quad (2.6)$$

для всех $w = (u, v) \in \mathbb{F}_1$ и

$$\mathbb{B}_{21}(w) = \operatorname{div}(\kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla u), \quad (2.7)$$

$$\mathbb{B}_{22}(w) = \operatorname{div}(\kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla v) \quad (2.8)$$

для всех $w = (u, v) \in \mathbb{F}_2$. С этой целью напомним

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Оператор $N_f(w) \equiv f(x, w)$, порожденный каратеодориевой функцией $f(x, w)$, называется *оператором Немыцкого*.

Докажем, что при условиях (i)₁, (ii)₁ и (i)₂, (ii)₂ операторы (2.5)–(2.8) действуют соответственно:

$$\mathbb{B}_{11}(w): \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{W}^{-1,p'_1}(\Omega), \quad \mathbb{B}_{12}(w): \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{W}^{-1,p'_1}(\Omega),$$

$$\mathbb{B}_{21}(w): \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{W}^{-1,p'_2}(\Omega), \quad \mathbb{B}_{22}(w): \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{W}^{-1,p'_2}(\Omega),$$

где $p'_1 = p_1/(p_1 - 1)$ и $p'_2 = p_2/(p_2 - 1)$.

Действительно, рассмотрим случай оператора $\mathbb{B}_{11}$, поскольку все остальные операторы рассматриваются аналогично. Пусть $u \in \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega)$ при $p_1 \in (2, 4]$. Тогда

$$\eta_1(u) = \nabla u: \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{p_1}(\Omega).$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$f_1(x, \eta_1, \eta_2) \equiv \kappa_1(x, \sqrt{|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2}) \eta_1.$$

В силу условия (i)₁ функция $\varkappa_1(x, s)$ является каратеодориевой. Поэтому функция $\varkappa_1(x, |\eta|)$, где $|\eta| = \sqrt{|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2}$, также является каратеодориевой,

$$\varkappa_1(x, |\eta|): \Omega \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Следовательно, произведение $\varkappa_1(x, |\eta|)\eta_1$ является каратеодориевой функцией от x и $\eta = (\eta_1, \eta_2)$. Таким образом, функция

$$f_1(x, \eta) \equiv \varkappa_1(x, |\eta|)\eta_1: \Omega \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

является каратеодориевой. Получим оценку роста функции $f_1(x, \eta)$:

$$\begin{aligned} |f_1(x, \eta)| &\leq |\varkappa_1(x, |\eta|)| |\eta_1| \leq c_1 |\eta| + c_2 |\eta|^{p_1-1} \\ &\leq \frac{|\eta|^{p_1-1}}{p_1-1} + \frac{p_1-2}{p_1-1} c_1^{(p_1-1)/(p_1-2)} + c_2 |\eta|^{p_1-1} = \bar{c}_1 + \bar{c}_2 |\eta|^{p_1-1}, \end{aligned}$$

где

$$\bar{c}_1 = \frac{p_1-2}{p_1-1} c_1^{(p_1-1)/(p_1-2)}, \quad \bar{c}_2 = c_2 + \frac{1}{p_1-1}.$$

Следовательно, соответствующий оператор Немыцкого $N_{f_1}(\eta)$ действует следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi = N_{f_1}(\eta): \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \\ \rightarrow \mathbb{L}^{p'_1}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{p'_1}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{p'_1}(\Omega), \end{aligned}$$

и в силу теоремы М. А. Красносельского является непрерывным отображением относительно сильных топологий банаховых пространств

$$\mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{p_1}(\Omega), \quad \mathbb{L}^{p'_1}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{p'_1}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{p'_1}(\Omega).$$

Наконец, оператор $\operatorname{div}(\cdot)$, понимаемый в слабом смысле, действует следующим образом:

$$\operatorname{div}(\cdot): \mathbb{L}^{p'_1}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{p'_1}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{p'_1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}^{-1, p'_1}(\Omega).$$

Итак, мы приходим к выводу, что

$$\mathbb{B}_{11}(w) = \operatorname{div}(\varkappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla u|^2}) \nabla u): \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{W}^{-1, p'_1}(\Omega).$$

Поскольку аналогично можно показать, что

$$\mathbb{B}_{12}(w) = \operatorname{div}(\varkappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla u|^2}) \nabla v): \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{W}^{-1, p'_1}(\Omega),$$

окончательно получаем

$$\mathbb{B}_1(w): \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{F}_1^*.$$

Точно так же можно показать, что

$$\mathbb{B}_2(w): \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2^*.$$

Заметим, что в силу условий (ii)₁ и (ii)₂ выполнены включения $p_1 \in (2, 4]$ и $p_2 \in (2, 6]$, поэтому в силу ограниченности области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и гладкости ее границы $\partial\Omega \in C^{4, \delta}$, где $\delta \in (0, 1]$, а также рефлексивности банахова пространства $\mathbb{B} = \mathbb{H}_0^2(\Omega) \otimes \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ имеют место следующие цепочки плотных и непрерывных вложений:

$$\mathbb{B} \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{F}_1 \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{F}_1^* \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{B}^*, \quad \mathbb{B} \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{F}_2 \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{F}_2^* \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{B}^*.$$

Введем скобки двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ соответственно между банаховыми пространствами $\mathbb{B}$ и $\mathbb{B}^*$, $\mathbb{F}_1$ и $\mathbb{F}_1^*$, $\mathbb{F}_2$ и $\mathbb{F}_2^*$. Кроме того, введем операторы вложения

$$\mathbb{J}_1: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{F}_1, \quad \mathbb{J}_2: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{F}_2.$$

Тогда транспонированные операторы

$$\mathbb{J}_1^t: \mathbb{F}_1^* \rightarrow \mathbb{B}^*, \quad \mathbb{J}_2^t: \mathbb{F}_2^* \rightarrow \mathbb{B}^*,$$

определенные соответственно равенством

$$\langle \mathbb{J}_1^t f_1^*, w \rangle = \langle f_1^*, \mathbb{J}_1 w \rangle_1$$

для всех $f_1^* \in \mathbb{F}_1^*$ и $w \in \mathbb{B}$ и равенством

$$\langle \mathbb{J}_2^t f_2^*, w \rangle = \langle f_2^*, \mathbb{J}_2 w \rangle_2$$

для всех $f_2^* \in \mathbb{F}_2^*$ и $w \in \mathbb{B}$, также являются операторами вложения. Поэтому если отождествить $\mathbb{B}$ с $\mathbb{J}_1 \mathbb{B} \subset \mathbb{F}_1$ и $\mathbb{B}$ с $\mathbb{J}_2 \mathbb{B} \subset \mathbb{F}_2$, то $\mathbb{F}_1^*$ можно отождествить с $\mathbb{J}_1^t \mathbb{F}_1^* \subset \mathbb{B}^*$, а $\mathbb{F}_2^*$ можно отождествить с $\mathbb{J}_2^t \mathbb{F}_2^* \subset \mathbb{B}^*$. При этом мы получим следующие равенства скобок двойственности:

$$\langle f_1^*, w \rangle = \langle f_1^*, w \rangle_1$$

для всех $f_1^* \in \mathbb{F}_1^*$ и $w \in \mathbb{B}$ и

$$\langle f_2^*, w \rangle = \langle f_2^*, w \rangle_2 \quad (2.9)$$

для всех $f_2^* \in \mathbb{F}_2^*$ и $w \in \mathbb{B}$.

Теперь мы можем сформулировать определение сильного обобщенного решения задачи (1.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Функцию $w(x, t) = (u(x, t), v(x, t))$ класса $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{B})$ назовем *сильным обобщенным решением* задачи (1.1), если при некотором $T > 0$ она удовлетворяет равенству

$$\langle D(w), z \rangle = \langle H, z \rangle \quad (2.10)$$

для всех $t \in [0, T]$ и $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}$, где

$$D(w) \equiv (D_1(w), D_2(w)),$$

$$D_1(w) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (-\Delta^2 u + \Delta u) + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} (\kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla u) + \Delta u - \operatorname{div} (\kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla u),$$

$$D_2(w) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (-\Delta^2 v + \Delta v) + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} (\kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla v) + \Delta v - \operatorname{div} (\kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla v),$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{B} = \mathbb{H}_0^2(\Omega) \otimes \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ и $\mathbb{B}^* = \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \otimes \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$, и удовлетворяет начальным условиям $w(x, 0) = (u_0, v_0)$, $w'(x, 0) = (u_1, v_1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Оператор Δ^2 здесь понимается в следующем смысле:

$$\langle \Delta^2 w, z \rangle \equiv \int_{\Omega} (\Delta u \Delta z_1 + \Delta v \Delta z_2) dx \quad (2.11)$$

для всех $w, z \in \mathbb{B}$.

В дальнейшем будем использовать термин “интегрирование по частям” для распределения $\Delta^2 w$ в смысле указанного равенства (2.11).

Введем следующие обозначения:

$$\Phi(t) \equiv \Phi[u, v](t) \equiv \frac{1}{2} \langle \Delta^2 w, w \rangle - \frac{1}{2} \langle \Delta w, w \rangle_1, \quad (2.12)$$

$$J(t) \equiv J[u, v](t) \equiv \langle \Delta^2 w', w' \rangle - \langle \Delta w', w' \rangle_1. \quad (2.13)$$

Напомним, что штрих всюду означает частную производную по времени. Справедлива следующая

ЛЕММА 2.1 [8]. Пусть $w(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{B})$ при некотором $T > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$(\Phi')^2(t) \leq 2\Phi(t)J(t)$$

для всех $t \in [0, T]$.

§ 3. Первое энергетическое равенство

Предположим, что при некотором $T > 0$ существует сильное обобщенное решение задачи (1.1), понимаемое в смысле определения 2.3. Возьмем в равенстве (2.10) в качестве функции z решение $w(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{B})$:

$$\langle D(w), w \rangle = \langle H, w \rangle.$$

После интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Delta u'' \Delta u \, dx + \int_{\Omega} \Delta v'' \Delta v \, dx + \int_{\Omega} (\nabla u'', \nabla u) \, dx + \int_{\Omega} (\nabla v'', \nabla v) \, dx \\ & + \int_{\Omega} \left(\nabla u, \frac{\partial}{\partial t} [\kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla u] \right) dx \\ & + \int_{\Omega} \left(\nabla v, \frac{\partial}{\partial t} [\kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla v] \right) dx + \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) \, dx \\ & = \int_{\Omega} \kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Omega} \kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) |\nabla v|^2 \, dx \\ & - \int_{\Omega} (h_1 u + h_2 v) \, dx. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Заметим, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla u'', \nabla u) \, dx &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\nabla u', \nabla u) \, dx - \int_{\Omega} |\nabla u'|^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} |\nabla u'|^2 \, dx, \\ \int_{\Omega} (\Delta u'', \Delta u) \, dx &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\Delta u', \Delta u) \, dx - \int_{\Omega} |\Delta u'|^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 \, dx - \int_{\Omega} |\Delta u'|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Следовательно, сумму четырех первых слагаемых в равенстве (3.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Delta u'' \Delta u \, dx + \int_{\Omega} \Delta v'' \Delta v \, dx + \int_{\Omega} (\nabla u'', \nabla u) \, dx + \int_{\Omega} (\nabla v'', \nabla v) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\int_{\Omega} |\Delta u|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\Delta v|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \right) \\ & \quad - \left(\int_{\Omega} |\Delta u'|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\Delta v'|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u'|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla v'|^2 \, dx \right) = \Phi'' - J. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega} \left(\nabla u, \frac{\partial}{\partial t} [\kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla u] \right) dx \\ & \quad + \int_{\Omega} \left(\nabla v, \frac{\partial}{\partial t} [\kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla v] \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) [(\nabla u', \nabla u) \, dx + (\nabla v', \nabla v)] \, dx \\ & \quad + \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] \kappa'_{1s}(x, s) \Big|_{s=\sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2} \, dx \\ &= I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Равенство (3.1) приобретает вид

$$\begin{aligned} & \Phi'' - J + I_2 + I_3 + \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] \, dx \\ &= \int_{\Omega} \kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] \, dx - \int_{\Omega} (h_1 u + h_2 v) \, dx, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Omega} \kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) [(\nabla u', \nabla u) + (\nabla v', \nabla v)] \, dx, \\ I_3 &= \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] \kappa'_{1s}(x, s) \Big|_{s=\sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2} \kappa'_{1s}(x, s) \Big|_{s=\sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] \, dx \\ &= \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2} \kappa'_{1s}(x, s) \Big|_{s=\sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}} [(\nabla u', \nabla u) + (\nabla v', \nabla v)] \, dx. \end{aligned}$$

Получим оценки сверху интегралов I_2 и I_3 . Рассмотрим интеграл I_2 . Воспользуемся условием (2.1) роста функции $\kappa_1(x, s)$. Имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_{\Omega} |\kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})| [|\nabla u'| |\nabla u| + |\nabla v'| |\nabla v|] \, dx \\ &\leq \|\nabla u'\|_2 \left(\int_{\Omega} |\kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})|^2 |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2} \\ & \quad + \|\nabla v'\|_2 \left(\int_{\Omega} |\kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})|^2 |\nabla v|^2 \, dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u'\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |\kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})|^2 |\nabla u|^2 dx \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla v'\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |\kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})|^2 |\nabla v|^2 dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} J + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} (c_1 + c_2[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2]^{\frac{p_1-2}{2}})^2 [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} J + \frac{c_1^2}{\varepsilon} \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] dx + \frac{c_2^2}{\varepsilon} \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2]^{p_1-1} dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} J + \frac{2c_1^2}{\varepsilon} \Phi + \frac{c_2^2}{\varepsilon} \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2]^{p_1-1} dx,
\end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$. Рассмотрим отдельно последний интеграл:

$$I_4 = \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2]^{p_1-1} dx.$$

Поскольку $p_1 \in (2, 4]$, то $q_1 = p_1 - 1 \in (1, 3]$. Следовательно, имеет место непрерывное вложение

$$\mathbb{B} \subset \mathbb{W}_0^{1,q}(\Omega) \otimes \mathbb{W}_0^{1,q}(\Omega),$$

где $q = 2q_1 = 2(p_1 - 1) \in (2, 6]$. Поэтому найдется такая наилучшая постоянная $c_5 > 0$, что

$$I_4 = \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2]^{p_1-1} dx \leq \{c_5 \|w\|_{\mathbb{B}}\}^{2(p_1-1)}$$

для всех $w \in \mathbb{B}$. Значит, имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq c_5^q \left(\int_{\Omega} [|\Delta u|^2 + |\Delta v|^2] dx \right)^{q/2} \\
&= c_5^q 2^{q/2} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\Delta u|^2 + |\Delta v|^2] dx \right)^{q/2} \leq c_5^q 2^{q/2} \Phi^{q/2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, для интеграла I_2 имеет место оценка

$$|I_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} J + \frac{2c_1^2}{\varepsilon} \Phi + \frac{c_2^2}{\varepsilon} c_5^{2(p_1-1)} 2^{p_1-1} \Phi^{p_1-1}. \quad (3.4)$$

Получим теперь оценку для интеграла I_3 :

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2} |\kappa'_{1s}(x, s)| \Big|_{s=\sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}} [|\nabla u'| |\nabla u| + |\nabla v'| |\nabla v|] dx \\
&\leq \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] |\kappa'_{1s}(x, s)| \Big|_{s=\sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}} [|\nabla u'| + |\nabla v'|] dx \\
&\leq (\|\nabla u'\|_2 + \|\nabla v'\|_2) \left(\int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2]^2 |\kappa'_{1s}(x, s)|^2 \Big|_{s=\sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}} dx \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} (\|\nabla u'\|_2^2 + \|\nabla v'\|_2^2) + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2]^2 |\kappa'_{1s}(x, s)|^2 \Big|_{s=\sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}} dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} J + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |\kappa'_{1s}(x, s)s|^2 \Big|_{s=\sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] dx.
\end{aligned}$$

Используем условие роста (2.2) для функции $s\kappa'_{1s}(x, s)$:

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \frac{\varepsilon}{2} J + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} (c_1 + c_2[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2]^{\frac{p_1-2}{2}})^2 [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} J + \frac{c_1^2}{\varepsilon} \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] dx + \frac{c_2^2}{\varepsilon} \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2]^{p_1-1} dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} J + \frac{2c_1^2}{\varepsilon} \Phi + \frac{c_2^2 c_5^{2(p_1-1)} 2^{p_1-1}}{\varepsilon} \Phi^{p_1-1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Таким образом, из оценок (3.4) и (3.5), а также равенства (3.3) получаем

$$\begin{aligned} \Phi'' - J + \varepsilon J + \frac{4c_1^2}{\varepsilon} \Phi + \frac{c_2^2 c_5^{2(p_1-1)} 2^{p_1}}{\varepsilon} \Phi^{p_1-1} + \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] dx \\ \geq \int_{\Omega} \kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] dx - \int_{\Omega} (h_1 u + h_2 v) dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

§ 4. Второе энергетическое равенство и условия разрушения решения

Предварительно введем следующий функционал:

$$\psi(w) \equiv \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, g) dx; \quad \mathcal{F}(x, g) = \int_0^g s \kappa_2(x, s) ds, \quad (4.1)$$

где

$$g = \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2} \in \mathbb{L}^{p_2}(\Omega)$$

для всех $w = (u, v) \in \mathbb{F}_2$. Справедлива

ЛЕММА 4.1. Пусть функция $\kappa_2(x, s)$ удовлетворяет условиям (i)₂–(ii)₂. Тогда функционал $\psi(h)$, определенный формулой (4.1) и действующий следующим образом:

$$\psi(h): \mathbb{L}^{p_2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

является дифференцируемым по Фреше и его производная Фреше

$$\psi'_f(h): \mathbb{L}^{p_2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^{p_2/(p_2-1)}(\Omega)$$

имеет вид $\psi'_f(h) = N_{s\kappa_2(x, s)}(h)$ для всех $h \in \mathbb{L}^{p_2}(\Omega)$ и почти всех $x \in \Omega$.

Далее нам потребуется цепное правило для производных Фреше (см., например, [9]).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть оператор $\mathbb{F}: \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2$ дифференцируем по Фреше в некоторой точке $w \in \mathbb{B}_1$, а оператор $\mathbb{G}: \mathbb{B}_2 \rightarrow \mathbb{B}_3$ дифференцируем по Фреше в точке $\mathbb{F}(w)$. Тогда их композиция

$$\mathbb{K} = \mathbb{G} \circ \mathbb{F}$$

дифференцируема по Фреше в точке $w \in \mathbb{B}_1$, причем имеет место равенство

$$\mathbb{K}'_f(w) = \mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(w)) \mathbb{F}'_f(w).$$

Теперь для функционала $\psi(w)$, определенного формулой (4.1), с учетом леммы 4.1 и теоремы 4.1 получаем, что для функции $w(x, t) \in \mathbb{C}^1([0, T]; \mathbb{B})$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi(w) &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^{\sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}} s \kappa_2(x, s) ds dx \\ &= \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2} \kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2} dx. \end{aligned}$$

Полученное равенство можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2} \kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \frac{\partial}{\partial t} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] dx \\ &= \int_{\Omega} \kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) [(\nabla u, \nabla u') + (\nabla v, \nabla v')] dx \\ &= -\langle \operatorname{div}(\kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla u), u' \rangle_{\mathbb{W}_0^{1,p_2}(\Omega)} \\ &\quad - \langle \operatorname{div}(\kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla v), v' \rangle_{\mathbb{W}_0^{1,p_2}(\Omega)} \\ &= -\langle \operatorname{div}(\kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla u), u' \rangle_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)} \\ &\quad - \langle \operatorname{div}(\kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla v), v' \rangle_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{W}_0^{1,p_2}(\Omega)}$ – скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p_2}(\Omega)$ и $\mathbb{W}_0^{-1,p'_2}(\Omega)$. Последнее равенство в (4.2) имеет место в силу равенства скобок двойственности (2.9).

Перейдем к выводу второго энергетического равенства. Возьмем теперь в качестве z в равенстве (2.10) первую производную по времени от решения w : $z = w'$. После интегрирования по частям с учетом определения (2.13) функционала J и цепочки равенств (4.2) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\Delta u'' \Delta u' + (\nabla u'', \nabla u')) dx + \int_{\Omega} (\Delta v'' \Delta v' + (\nabla v'', \nabla v')) dx \\ &+ \int_{\Omega} \left(\nabla u', \frac{\partial}{\partial t} [\kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla u] \right) dx \\ &+ \int_{\Omega} \left(\nabla v', \frac{\partial}{\partial t} [\kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla v] \right) dx + \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla u') dx \\ &+ \int_{\Omega} (\nabla v, \nabla v') dx - \int_{\Omega} \kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) [(\nabla u, \nabla u') + (\nabla v, \nabla v')] dx \\ &= - \int_{\Omega} (h_1 u' + h_2 v') dx, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} J + \int_{\Omega} \left(\nabla u', \frac{\partial}{\partial t} [\kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla u] \right) dx \\ &+ \int_{\Omega} \left(\nabla v', \frac{\partial}{\partial t} [\kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla v] \right) dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\langle \operatorname{div}(\kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla u), u' \rangle_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)} \\
&\quad - \langle \operatorname{div}(\kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla v), v' \rangle_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)} - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (h_1 u + h_2 v) dx \\
&= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) dx - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (h_1 u + h_2 v) dx. \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно интеграл I_5 :

$$\begin{aligned}
I_5 &\equiv \int_{\Omega} \left\{ \left(\nabla u', \frac{\partial}{\partial t} [\kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla u] \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\nabla v', \frac{\partial}{\partial t} [\kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla v] \right) \right\} dx \\
&= \int_{\Omega} [|\nabla u'|^2 + |\nabla v'|^2] \kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} [(\nabla u', \nabla u) + (\nabla v', \nabla v)] \kappa'_{1s}(x, s) \Big|_{s=\sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2} dx \\
&= \int_{\Omega} [|\nabla u'|^2 + |\nabla v'|^2] \kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2} \kappa'_{1s}(x, s) \Big|_{s=\sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}} dx \\
&= \int_{\Omega} [|\nabla u'|^2 + |\nabla v'|^2] \kappa_1(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \kappa'_{1s}(x, s) \Big|_{s=\sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}} \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2} \right]^2 dx \geq 0, \tag{4.4}
\end{aligned}$$

где последнее неравенство выполнено в силу условия (ii)₁. Таким образом, из (4.3) и (4.4) получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} J + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] dx \\
&\leq \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) dx - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (h_1 u + h_2 v) dx. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Введем следующее обозначение:

$$\begin{aligned}
E(t) &\equiv \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) dx - \frac{1}{2} J(t) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] dx - \int_{\Omega} (h_1 u + h_2 v) dx.
\end{aligned}$$

Из неравенства (4.5) получаем

$$E(t) \geq E(0). \tag{4.6}$$

Пусть начальные данные удовлетворяют условию

$$E(0) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, \sqrt{|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2}) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\Delta u_1|^2 + |\Delta v_1|^2] dx$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2] dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2] dx \\
& - \int_{\Omega} (h_1 u_0 + h_2 v_0) dx \geq 0.
\end{aligned}$$

Тогда из этого условия и неравенства (4.6) получим

$$E(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.7)$$

После умножения (4.7) на ϑ имеем

$$\begin{aligned}
& \vartheta \int_{\Omega} \int_0^{\sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}} s \kappa_2(x, s) ds dx - \frac{\vartheta}{2} J \\
& - \frac{\vartheta}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] dx - \vartheta \int_{\Omega} (h_1 u + h_2 v) dx \geq 0,
\end{aligned}$$

откуда в силу свойства (iii)₂ для функции $\kappa_2(x, s)$ следует неравенство

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] \kappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) dx \\
& \geq \frac{\vartheta}{2} J + \frac{\vartheta}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] dx + \vartheta \int_{\Omega} (h_1 u + h_2 v) dx.
\end{aligned}$$

Из последнего неравенства и первого энергетического неравенства (3.6) получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
& \Phi'' - J + \varepsilon J + \frac{4c_1^2}{\varepsilon} \Phi + \frac{c_2^2 c_5^{2(p_1-1)} 2^{p_1}}{\varepsilon} \Phi^{p_1-1} \\
& + \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] dx + \int_{\Omega} (h_1 u + h_2 v) dx - \frac{\vartheta}{2} J \\
& - \frac{\vartheta}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] dx - \vartheta \int_{\Omega} (h_1 u + h_2 v) dx \geq 0.
\end{aligned}$$

Поскольку $\vartheta > 2$, из последнего неравенства получаем оценку

$$\left(1 + \frac{\vartheta}{2} - \varepsilon\right) J \leq \Phi'' + \frac{c_6}{\varepsilon} \Phi^{p_1-1} + \frac{c_7}{\varepsilon} \Phi + (1 - \vartheta) \int_{\Omega} (h_1 u + h_2 v) dx, \quad (4.8)$$

где $c_6 = c_2^2 c_5^{2(p_1-1)} 2^{p_1}$ и $c_7 = 4c_1^2$. Оценим последнее слагаемое в (4.8):

$$\int_{\Omega} (h_1 u + h_2 v) dx \leq C_F \sqrt{2} \sqrt{\int_{\Omega} (|h_1|^2 + |h_2|^2) dx} \cdot \Phi^{1/2},$$

где C_F – константа Фридрихса. Следовательно,

$$\begin{aligned}
& (\vartheta - 1) \int_{\Omega} (h_1 u + h_2 v) dx \geq -(\vartheta - 1) \left| \int_{\Omega} (h_1 u + h_2 v) dx \right| \\
& \geq -(\vartheta - 1) C_F \sqrt{2} \sqrt{\int_{\Omega} (|h_1|^2 + |h_2|^2) dx} \cdot \Phi^{1/2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (4.8) приобретает вид

$$\left(1 + \frac{\vartheta}{2} - \varepsilon\right) J - (\vartheta - 1) C_F \sqrt{2} \sqrt{\int_{\Omega} (|h_1|^2 + |h_2|^2) dx} \cdot \Phi^{1/2} \leq \Phi'' + \frac{c_6}{\varepsilon} \Phi^{p_1-1} + \frac{c_7}{\varepsilon} \Phi.$$

Введем обозначение $c_8(h) = (\vartheta - 1) C_F \sqrt{2} \sqrt{\int_{\Omega} (|h_1|^2 + |h_2|^2) dx}$. Поскольку $\vartheta > 2$, то $c_8(h) > 0$. Итак, мы получили оценку

$$\left(1 + \frac{\vartheta}{2} - \varepsilon\right) J \leq \Phi'' + c_8(h) \Phi^{1/2} + \frac{c_6}{\varepsilon} \Phi^{p_1-1} + \frac{c_7}{\varepsilon} \Phi. \quad (4.9)$$

Теперь предположим, что выполнено условие $1 + \frac{\vartheta}{2} - \varepsilon > 2$. Умножив неравенство (4.9) на $\Phi > 0$ и применив лемму 2.1, приходим к обыкновенному дифференциальному неравенству

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\vartheta}{2} - \varepsilon\right) (\Phi')^2 \leq \Phi \Phi'' + c_8(h) \Phi^{3/2} + \frac{c_6}{\varepsilon} \Phi^{p_1} + \frac{c_7}{\varepsilon} \Phi^2,$$

которое можно переписать в виде

$$\Phi \Phi'' - \alpha (\Phi')^2 + \beta \Phi^2 + \gamma \Phi^{p_1} + \delta \Phi^{3/2} \geq 0, \quad (4.10)$$

где $\alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\vartheta}{2} - \varepsilon\right)$, $\beta = \frac{c_7}{\varepsilon}$, $\gamma = \frac{c_6}{\varepsilon}$, $\delta = c_8(h)$.

Введем новую функцию $\Psi = \Phi^{1-\alpha}$ и разделим на $\Phi^{1+\alpha} \geq 0$ обе части неравенства (4.10):

$$\frac{\Phi''}{\Phi^{\alpha}} - \frac{\alpha}{\Phi^{1+\alpha}} (\Phi')^2 + \beta \Phi^{1-\alpha} + \gamma \Phi^{p_1-1-\alpha} + \delta \Phi^{1/2-\alpha} \geq 0.$$

Заметим, что

$$\frac{\Phi''}{\Phi^{\alpha}} - \frac{\alpha}{\Phi^{1+\alpha}} (\Phi')^2 = \frac{d}{dt} \left[\frac{\Phi'}{\Phi^{\alpha}} \right], \quad \frac{d}{dt} \Psi = \frac{d}{dt} \Phi^{1-\alpha} = (1-\alpha) \frac{\Phi'}{\Phi^{\alpha}},$$

откуда получим

$$\frac{1}{1-\alpha} \frac{d^2}{dt^2} \Phi^{1-\alpha} + \beta \Phi^{1-\alpha} + \gamma \Phi^{p_1-1-\alpha} + \delta \Phi^{1/2-\alpha} \geq 0,$$

или

$$\frac{1}{1-\alpha} \frac{d^2}{dt^2} \Psi + \beta \Psi + \gamma \Psi^{\frac{p_1-1-\alpha}{1-\alpha}} + \delta \Psi^{\frac{1/2-\alpha}{1-\alpha}} \geq 0. \quad (4.11)$$

Пусть начальные данные удовлетворяют условиям

$$\Phi'(0) = \int_{\Omega} (\nabla u_1, \nabla u_0) dx + \int_{\Omega} (\nabla v_1, \nabla v_0) dx + \int_{\Omega} \Delta u_1 \Delta u_0 dx + \int_{\Omega} \Delta v_1 \Delta v_0 dx > 0.$$

Поскольку по предположению $w \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{B})$, то $\Phi \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T])$. Это означает, что найдется такой момент времени $t_1 > 0$, что $\Phi'(t) > 0$ для всех $t \in [0, t_1]$. Так как $\Psi' = (1-\alpha) \Phi^{-\alpha} \Phi'$ и $\alpha > 1$, то $\Psi' \leq 0$ для всех $t \in [0, t_1]$. Умножим неравенство (4.11) на Ψ' :

$$\Psi' \Psi'' \geq (\alpha - 1) \beta \Psi' \Psi + (\alpha - 1) \gamma \Psi' \Psi^{\frac{p_1-1-\alpha}{1-\alpha}} + (\alpha - 1) \delta \Psi' \Psi^{\frac{1/2-\alpha}{1-\alpha}},$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\Psi')^2 \geq \frac{\beta(\alpha-1)}{2} \frac{d}{dt} \Psi^2 + \frac{\gamma(\alpha-1)}{\mu} \frac{d}{dt} \Psi^\mu + \frac{\delta(\alpha-1)}{\nu} \frac{d}{dt} \Psi^\nu, \quad (4.12)$$

где

$$\mu = \frac{p_1 - 2\alpha}{1 - \alpha}, \quad \nu = \frac{3/2 - 2\alpha}{1 - \alpha}.$$

Найдем условие для величины ε , при котором μ будет положительным:

$$1 + \frac{\vartheta}{2} - \varepsilon > p_1,$$

откуда получаем, что $\varepsilon \in (0, 1 + \frac{\vartheta}{2} - p_1)$. Таким образом, для величины ϑ из условия (iii)₂ должно выполняться следующее необходимое условие:

$$1 + \frac{\vartheta}{2} - p_1 > 0 \Rightarrow \vartheta > 2(p_1 - 1). \quad (4.13)$$

В следующем параграфе мы покажем, что класс данных задачи, удовлетворяющих этому и другому условиям, выполнение которых гарантирует разрушение решения, не пуст.

Продолжим рассмотрение неравенства (4.12). После интегрирования этого неравенства получаем

$$(\Psi')^2 \geq A^2 + \beta(\alpha-1)\Psi^2 + \frac{2\gamma(\alpha-1)}{\mu}\Psi^\mu + \frac{2\delta(\alpha-1)}{\nu}\Psi^\nu, \quad (4.14)$$

где

$$A^2 = (\Psi'(0))^2 - \beta(\alpha-1)\Psi^2(0) - \frac{2\gamma(\alpha-1)}{\mu}\Psi^\mu(0) - \frac{2\delta(\alpha-1)}{\nu}\Psi^\nu(0).$$

Предположим, что выполняется следующее условие для начальных данных: $A^2 > 0$. С учетом определения функции Ψ это условие можно записать в эквивалентном виде

$$(\alpha-1)^2\Phi_0^{-2\alpha}(\Phi'(0))^2 - \beta(\alpha-1)\Phi_0^{-2\alpha}\Phi_0^2 - \frac{2\gamma(\alpha-1)}{\mu}\Phi_0^{-\alpha\mu}\Phi_0^\mu - \frac{2\delta(\alpha-1)}{\nu}\Phi_0^{-\alpha\nu}\Phi_0^\nu > 0,$$

откуда получаем следующее эквивалентное неравенство:

$$(\Phi'(0))^2 > \frac{\beta}{\alpha-1}\Phi_0^2 + \frac{2\gamma}{\mu(\alpha-1)}\Phi_0^{\mu(1-\alpha)+2\alpha} + \frac{2\delta}{\nu(\alpha-1)}\Phi_0^{\nu(1-\alpha)+2\alpha}.$$

Преобразуем выражения в показателях степеней Φ_0 :

$$\begin{aligned} \mu(1-\alpha) + 2\alpha &= 2\alpha + p_1 - 2\alpha = p_1, & \text{так как } \mu(1-\alpha) &= p_1 - 2\alpha, \\ \nu(1-\alpha) + 2\alpha &= 2\alpha + \frac{3}{2} - 2\alpha = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к следующему неравенству:

$$(\Phi'(0))^2 > \frac{\beta}{\alpha-1}\Phi_0^2 + \frac{2\gamma}{2\alpha-p_1}\Phi_0^{p_1} + \frac{2\delta}{2\alpha-3/2}\Phi_0^{3/2}.$$

Из неравенства (4.14) следует, что $|\Psi'| \geq A > 0$ для всех $t \in [0, t_1]$. В свою очередь, с учетом знака Ψ' это означает, что

$$-\Psi' \geq A > 0 \Rightarrow \Psi' \leq -A < 0 \quad \forall t \in [0, t_1].$$

Поскольку $\Psi' = (1 - \alpha)\Phi^{-\alpha}\Phi'(t)$, то $(1 - \alpha)\Phi^{-\alpha}\Phi'(t) \leq -A$, откуда получаем

$$\Phi' \geq \frac{A}{\alpha - 1}\Phi^\alpha > 0.$$

Это означает, что при начальном условии $\Phi'(0) > 0$ величина $\Phi'(t) > 0$ остается больше нуля при всех $t \in [0, t_1]$, а значит, и на всем интервале $[0, T_0]$ существования решения исходной задачи, откуда, в свою очередь, получаем

$$\Psi' \leq -A < 0 \quad \forall t \in [0, T_0].$$

Интегрируя последнее неравенство, приходим к оценке $\Psi(t) \leq \Psi_0 - At$. Следовательно, функция $\Psi(t)$ за конечное время $T_0 \in [0, T_1]$, где

$$T_1 = \frac{\Psi_0}{A} = \frac{\Phi_0^{1-\alpha}}{A} > 0,$$

обратится в нуль. Поскольку $\Psi = \frac{1}{\Phi^{\alpha-1}}$, то

$$\lim_{t \uparrow T_0} \sup \Phi(t) = +\infty.$$

Остается выбрать параметр $\varepsilon \in (0, (1 + \frac{\vartheta}{2} - p_1))$ оптимальным образом. Выберем ε_0 из указанного интервала таким, чтобы величина

$$Q_0 = Q_0(\varepsilon) \equiv \frac{\beta}{\alpha - 1} + \frac{2\gamma}{2\alpha - p_1}\Phi_0^{p_1-2} + \frac{2\delta}{2\alpha - 3/2}\Phi_0^{-1/2}$$

принимала минимальное значение. Это число является функцией от Φ_0 .

Таким образом, мы показали, что при сформулированных выше условиях сильное обобщенное решение задачи $w(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{B})$ в смысле определения 2.3 не существует глобально во времени. В § 6 мы покажем, что $T_0 = T_0(w_0, w_1) > 0$, т. е. задача локально разрешима во времени в сильном обобщенном смысле для любых $w_0, w_1 \in \mathbb{B}$.

§ 5. Пример данных задачи, гарантирующих разрушение решения

Покажем, что множество функций $\varkappa_1(x, s)$ и $\varkappa_2(x, s)$, а также начальных значений $w_0 = (u_0, v_0)$, $w_1 = (u_1, v_1)$, удовлетворяющих достаточным условиям разрушения решения за конечное время, не пусто.

Возьмем $\varkappa_1(x, s) = s^{p_1-2}$, $p_1 \in (2, 4]$, и $\varkappa_2(x, s) = s^{p_2-2}$, $p_2 \in (2, 6]$. Свойства (i)_m, (ii)_m, $m = 1, 2$, для них, очевидно, выполнены. Проверим выполнение свойства (iii)₂ для функции $\varkappa_2(x, s)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] \varkappa_2(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) dx &= \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2]^{p_2/2} dx \\ &\geq \vartheta \int_{\Omega} \int_0^{\sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}} s s^{p_2-2} ds dx, \end{aligned}$$

если $\vartheta \leq p_2$. Из необходимого дополнительного условия $\vartheta > 2(p_1 - 1)$ (см. (4.13)) имеем

$$p_2 > 2(p_1 - 1).$$

Рассмотрим частный случай. Пусть $p_1 = 3$ и $p_2 = 6$. Тогда операторы

$$\mathbb{B}_i(w) \equiv (\operatorname{div}(\varkappa_i(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla u), \operatorname{div}(\varkappa_i(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \nabla v)),$$

где $i = 1, 2$, являются локально липшиц-непрерывными. Чтобы облегчить восприятие статьи, доказательство этого факта помещено в § 7.

Остается показать, что для выбранных $\varkappa_1(x, s)$ и $\varkappa_2(x, s)$ достаточные условия разрушения решения задачи

$$\begin{aligned} E(0) = & \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, \sqrt{|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2}) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\Delta u_1|^2 + |\Delta v_1|^2] dx \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2] dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2] dx \\ & - \int_{\Omega} [h_1 u_0 + h_2 v_0] dx \geq 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \Phi'(0) = & \int_{\Omega} (\nabla u_1, \nabla u_0) dx + \int_{\Omega} (\nabla v_1, \nabla v_0) dx \\ & + \int_{\Omega} \Delta u_1 \Delta u_0 dx + \int_{\Omega} \Delta v_1 \Delta v_0 dx > 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$(\Phi'(0))^2 > \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi_0^2 + \frac{2\gamma}{2\alpha - p_1} \Phi_0^{p_1} + \frac{2\delta}{2\alpha - 3/2} \Phi_0^{3/2}, \quad (5.3)$$

$$\Phi(0) = \Phi_0 > 0 \quad (5.4)$$

выделяют непустое множество начальных значений $w_0 = (u_0, v_0)$, $w_1 = (u_1, v_1)$.

Пусть $q_3 \in (2q_1, q_2)$, где $q_i = p_i - 2$, и $u_0, v_0 \in \mathbb{C}_0^\infty \subset \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ – какие-нибудь фиксированные функции (вложение имеет место за счет условий гладкости границы $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{4,\delta}$ при $\delta \in (0, 1]$), для которых $\|\Delta u_0\|_2 > 0$ и $\|\Delta v_0\|_2 > 0$. Пусть $u_1(x)$ и $v_1(x)$ – классические решения класса $\mathbb{C}^{(4+\mu)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0^{(2)}(\overline{\Omega})$ задачи

$$\begin{aligned} \Delta^2 g(x) - \Delta g(x) &= f(x) \in \mathbb{C}^\mu(\overline{\Omega}), \quad \mu = \mu(q_3) \in (0, 1], \\ g|_{\partial\Omega} &= \frac{\partial g}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где для нахождения функции $u_1(x)$ положим $f(x) = (|u_0|^{q_3/2} u_0)(x) \in \mathbb{C}^\mu(\overline{\Omega})$, а для функции $v_1(x)$ положим $f(x) = (|v_0|^{q_3/2} v_0)(x) \in \mathbb{C}^\mu(\overline{\Omega})$. Тогда условие (5.2) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi'(0) &= \int_{\Omega} [\Delta^2 u_1 - \Delta u_1] u_0 dx + \int_{\Omega} [\Delta^2 v_1 - \Delta v_1] v_0 dx \\ &= \int_{\Omega} [|u_0|^{q_3/2+2} + |v_0|^{q_3/2+2}] dx > 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

т.е. это условие, очевидно, выполнено.

Проверим условие (5.3). Подставив (5.6) в (5.3), получим

$$\left(\int_{\Omega} [|u_0|^{q_3/2+2} + |v_0|^{q_3/2+2}] dx \right)^2 > \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi_0^2 + \frac{2\gamma}{2\alpha - p_1} \Phi_0^{p_1} + \frac{2\delta}{2\alpha - 3/2} \Phi_0^{3/2}.$$

Возьмем теперь вместо $u_0(x)$ выражение $ru_0(x)$, где $r > 0$, и вместо $v_0(x)$ выражение $rv_0(x)$. При этом получим неравенство

$$r^{4+q_3} \left(\int_{\Omega} [|u_0|^{q_3/2+2} + |v_0|^{q_3/2+2}] dx \right)^2 \\ > r^4 \frac{\beta}{\alpha-1} \Phi_0^2 + r^{4+2q_1} \frac{2\gamma}{2\alpha-p_1} \Phi_0^{p_1} + r^3 \frac{2\delta}{2\alpha-3/2} \Phi_0^{3/2},$$

где $q_1 = p_1 - 2$. Поскольку по определению $q_3 > 2q_1$, при достаточно большом r неравенство будет выполнено.

Проверим условие (5.1), переписав его в виде

$$\int_{\Omega} \mathcal{F}(x, \sqrt{|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2}) dx \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\Delta u_1|^2 + |\Delta v_1|^2] dx \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2] dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2] dx + \int_{\Omega} [h_1 u_0 + h_2 v_0] dx.$$

Поскольку $\varkappa_2(x, s) = s^{q_2}$, где $s = \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}$ и $q_2 = p_2 - 2$, после интегрирования получим

$$\int_{\Omega} \mathcal{F}(x, \sqrt{|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2}) dx = \int_{\Omega} \int_0^{\sqrt{|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2}} s \varkappa_2(x, s) ds dx \\ = \int_{\Omega} \int_0^{\sqrt{|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2}} s^{q_2+1} ds dx = \frac{1}{q_2+2} \int_{\Omega} [|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2]^{(q_2+2)/2} dx.$$

Итак, надо показать, что выполнено следующее неравенство:

$$\frac{1}{q_2+2} \int_{\Omega} [|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2]^{(q_2+2)/2} dx \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\Delta u_1|^2 + |\Delta v_1|^2] dx \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2] dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2] dx + \int_{\Omega} [h_1 u_0 + h_2 v_0] dx. \quad (5.7)$$

С этой целью введем функцию Грина $K(x, y)$ линейной неоднородной задачи (5.5), которая в силу результатов работы [10] существует. Соответствующий оператор Грина $\mathbb{K}$ действует из $\mathbb{C}^{\mu}(\bar{\Omega})$ в $\mathbb{C}^{4+\mu}(\bar{\Omega})$. С помощью функции Грина можно выразить u_1 и v_1 , являющиеся решениями задачи (5.5) с соответствующей правой частью, следующим образом:

$$u_1(x) = \int_{\Omega} K(x, y) (|u_0|^{q_3/2} u_0)(y) dy, \\ v_1(x) = \int_{\Omega} K(x, y) (|v_0|^{q_3/2} v_0)(y) dy.$$

Подставим функции u_1 и v_1 в неравенство (5.7) и одновременно сделаем замену $u_0 \rightarrow ru_0$ и $v_0 \rightarrow rv_0$. Получим

$$\frac{r^{q_2+2}}{q_2+2} \int_{\Omega} [|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2]^{(q_2+2)/2} dx \geq \frac{r^{q_3+2}}{2} \int_{\Omega} \left[\left| \int_{\Omega} \Delta_x K(x, y) (|u_0|^{q_3/2} u_0)(y) dy \right|^2 \right. \\ \left. + \left| \int_{\Omega} \Delta_x K(x, y) (|v_0|^{q_3/2} v_0)(y) dy \right|^2 \right] dx$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{r^{q_3+2}}{2} \int_{\Omega} \left[\left| \int_{\Omega} \nabla_x K(x, y) (|u_0|^{q_3/2} u_0)(y) dy \right|^2 \right. \\
& + \left. \left| \int_{\Omega} \nabla_x K(x, y) (|v_0|^{q_3/2} v_0)(y) dy \right|^2 \right] dx \\
& + \frac{r^2}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2] dx + r \int_{\Omega} [h_1 u_0 + h_2 v_0] dx.
\end{aligned}$$

Это неравенство, очевидно, будет выполнено при достаточно большом $r > 0$, поскольку $q_3 < q_2$. Таким образом, рассматриваемые условия для функций $\varkappa_1, \varkappa_2$, а также для начальных условий u_0 и v_0 являются совместными.

§ 6. Локальная разрешимость

Задачу (1.1) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2} \mathbb{A}w + \frac{d}{dt} \mathbb{B}_1(w) + \mathbb{L}w = \mathbb{B}_2(w) + H, \\
& w(0) = w_0, \quad w'(0) = w_1, \quad w_0(x), w_1(x) \in \mathbb{B},
\end{aligned} \tag{6.1}$$

где

$$\mathbb{A}w = (\Delta^2 u - \Delta u, \Delta^2 v - \Delta v), \quad \mathbb{L}w \equiv (-\Delta u, -\Delta v),$$

$H \equiv (h_1, h_2)$, а операторы $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ введены ранее.

В [8, гл. 4, § 2] было доказано, что оператор

$$\mathbb{A}: \mathbb{B} \equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega) \otimes \mathbb{H}_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{B}^* \equiv \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \otimes \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$$

является обратимым, причем обратный оператор $\mathbb{A}^{-1}$ является липшиц-непрерывным с постоянной Липшица, равной 1.

Если применить результаты, полученные в [8] для введенного там оператора $\mathbb{B}$, к операторам $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$, то можно получить оценки вида

$$\|\mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1}g)\|_* \leq c_{11} + c_{13}\|g\|_*^{p_1-1} \quad \forall g \in \mathbb{B}^*, \tag{6.2}$$

$$\|\mathbb{B}_2(\mathbb{A}^{-1}g)\|_* \leq c_{14} + c_{15}\|g\|_*^{p_2-1} \quad \forall g \in \mathbb{B}^*. \tag{6.3}$$

Перепишем задачу (6.1) в виде интегрального уравнения относительно функции $g \equiv \mathbb{A}w$, что возможно в силу непрерывной обратимости оператора $\mathbb{A}$ и дифференцируемости по Фреше оператора $\mathbb{B}_1$:

$$\begin{aligned}
g(t) &= g_0 + [g_1 + \mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1}g_0)]t \\
&+ \int_0^t \left\{ \mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1}g(s)) + \int_0^s (-\mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}g(\sigma) + \mathbb{B}_2(\mathbb{A}^{-1}g(\sigma))) d\sigma \right\} ds + \frac{t^2}{2}H,
\end{aligned} \tag{6.4}$$

где $g_0 = \mathbb{A}w_0$, $g_1 = \mathbb{A}w_1$. Обозначим правую часть интегрального уравнения (6.4) через $\mathbb{H}(g)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(g)(t) &\equiv g_0 + [g_1 + \mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1}g_0)]t \\
&+ \int_0^t \left\{ \mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1}g(s)) + \int_0^s (-\mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}g(\sigma) + \mathbb{B}_2(\mathbb{A}^{-1}g(\sigma))) d\sigma \right\} ds + \frac{t^2}{2}H,
\end{aligned}$$

и рассмотрим операторное уравнение

$$g = \mathbb{H}(g). \quad (6.5)$$

Покажем, что оно имеет единственное решение класса $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{B}^*)$ при достаточно малом $T > 0$. Для этого введем полное метрическое пространство

$$V_r \equiv \left\{ g(t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{B}^*), \|g\| \equiv \sup_{t \in [0, T]} \|g(t)\|_* \leq r \right\}.$$

Покажем также, что при надлежащем выборе $r > 0$ и $T > 0$ отображение $g \mapsto \mathbb{H}(g)$, во-первых, не будет выводить за пределы V_r , во-вторых, будет в нем сжимающим.

1) При $g \in V_r$ для $\|\mathbb{H}(g)\|$ верна оценка

$$\begin{aligned} \|\mathbb{H}(g)\| &\leq \|g_0\|_* + T[\|g_1\|_* + c_{11} + c_{13}\|w_0\|_*^{p_1-1}] \\ &\quad + T[c_{11} + c_{13}r^{p_1-1}] + T^2[c_{16} + c_{14} + c_{15}r^{p_2-1}] \\ &= \|g_0\|_* + T[\|g_1\|_* + 2c_{11} + c_{13}\|w_0\|_*^{p_1-1} + c_{13}r^{p_1-1}] \\ &\quad + T^2[c_{16} + c_{14} + c_{15}r^{p_2-1}], \end{aligned}$$

что следует из определения $\|\mathbb{H}(g)\|$ и оценок (6.2), (6.3). Выберем сначала r столь большим, чтобы имело место неравенство $\|g_0\|_* \leq \frac{r}{2}$, а затем $T > 0$ столь малым, чтобы сумма всех остальных слагаемых в правой части также не превосходила $\frac{r}{2}$. Тем самым мы достигли выполнения первого условия.

2) Теперь обеспечим сжимаемость отображения $\mathbb{H}$. Проведем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{H}(g_1) - \mathbb{H}(g_2)\| &\leq T\|\mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1}g_1) - \mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1}g_2)\| \\ &\quad + T^2\|\mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}g_1 - \mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}g_2\| + T^2\|\mathbb{B}_2(\mathbb{A}^{-1}g_1) - \mathbb{B}_2(\mathbb{A}^{-1}g_2)\| \\ &\leq T \sup_{t \in [0, T]} \mu_1(R_1)\|\mathbb{A}^{-1}g_1 - \mathbb{A}^{-1}g_2\|_{1, p_1} + T^2 c_{17} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbb{A}^{-1}g_1 - \mathbb{A}^{-1}g_2\| \\ &\quad + T^2 \sup_{t \in [0, T]} \mu_2(R_2)\|\mathbb{A}^{-1}g_1 - \mathbb{A}^{-1}g_2\|_{1, p_2}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где мы использовали ограниченность оператора L при действии из $\mathbb{B}$ в $\mathbb{B}^*$ и положили

$$R_1 = \max\{\|\mathbb{A}^{-1}g_1\|_{1, p_1}, \|\mathbb{A}^{-1}g_2\|_{1, p_1}\}, \quad R_2 = \max\{\|\mathbb{A}^{-1}g_1\|_{1, p_2}, \|\mathbb{A}^{-1}g_2\|_{1, p_2}\},$$

а величина $\|\cdot\|_{1, p}$ – норма в банаховом пространстве $\mathbb{W}_0^{1, p}(\Omega)$ при $p > 2$. Теперь воспользуемся непрерывным вложением

$$\mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1, p}(\Omega), \quad N = 3, \quad p = (2, 6].$$

Аналогичное непрерывное вложение, следовательно, имеет место для пространств $\mathbb{B}$ и $\mathbb{F}_i$, $i = 1, 2$, поэтому можно продолжить оценку (6.6) и получить неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathbb{H}(g_1) - \mathbb{H}(g_2)\| &\leq c_{17}c_{18}T\mu_1(c_{18}R)\|g_1 - g_2\| \\ &\quad + c_{17}T^2\|g_1 - g_2\| + c_{19}c_{17}T^2\mu_2(c_{19}R)\|g_1 - g_2\|, \end{aligned}$$

где мы воспользовались липшиц-непрерывностью оператора $\mathbb{A}^{-1}$ с постоянной Липшица, равной 1, $R = \max\{\|v_1\|, \|v_2\|\}$, c_{18} – наилучшая постоянная вложения $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega)$:

$$\|w\|_{1,p_1} \leq c_{18}\|w\| \quad \forall w \in \mathbb{H}_0^2(\Omega),$$

c_{19} – наилучшая постоянная вложения $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p_2}(\Omega)$:

$$\|w\|_{1,p_2} \leq c_{19}\|w\| \quad \forall w \in \mathbb{H}_0^2(\Omega).$$

Заметим, что поскольку $g_1, g_2 \in \mathbb{V}_r$, то $R \leq r$. Пусть

$$c_{18}c_{17}T\mu_1(c_{18}r) + c_{17}T^2 + c_{17}c_{19}T^2\mu_2(c_{19}r) \leq \frac{1}{2},$$

этого можно достичь выбором достаточно малого $T > 0$ (возможно, величину T , выбранную в п. 1), придется еще уменьшить, что, разумеется, не нарушит результат из п. 1)). Получим неравенство

$$\|\mathbb{H}(g_1) - \mathbb{H}(g_2)\| \leq \frac{1}{2}\|g_1 - g_2\|.$$

Следовательно, из теоремы о сжимающем отображении вытекает, что операторное уравнение (6.5) имеет единственное решение $g(t)$ класса $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{B}^*)$.

Для дальнейшего рассуждения будет удобно переписать интегральное уравнение (6.4) в виде следующей начальной задачи для интегро-дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} g'(t) &= g_1 + \mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1}g_0) + \mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1}g(t)) + \int_0^t [-\mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}g(s) + \mathbb{B}_2(\mathbb{A}^{-1}g(s))] ds + tH, \\ g(0) &= g_0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Из уравнения в (6.7), в частности, сразу следует, что решение $g(t)$ из $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{B}^*)$ на самом деле принадлежит классу $\mathbb{C}^1([0, T]; \mathbb{B}^*)$. Действительно, при $g(t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{B}^*)$ правая часть в силу свойств операторов $\mathbb{L}$, $\mathbb{A}^{-1}$, $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ непрерывна по t , следовательно, это же верно и для левой части.

Докажем теперь, что решение $g(t)$ интегрального уравнения (6.4) может быть продолжено на такой максимальный интервал $[0, T_0)$, что либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и (в последнем случае)

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|g(t)\|_* = +\infty. \quad (6.8)$$

Действительно, существование решения уравнения (6.4) на некотором промежутке мы только что доказали. Если решение существует на всем луче $[0, +\infty)$, то доказательство очевидно. Если решение нельзя продолжить далее некоторого T_0 и предельное соотношение (6.8) выполнено, то утверждение также доказано. Осталось рассмотреть лишь случай, когда решение существует лишь на $[0, T_0)$, но $\limsup_{t \uparrow T_0} \|g(t)\|_* < +\infty$. В этом случае $\sup_{t \in [0, T_0)} \|g(t)\|_* = C < +\infty$, и, применяя к правой части уравнения (6.7) оценки, аналогичные использованным выше в доказательстве локальной разрешимости, получаем в силу этого уравнения, что $\sup_{t \in [0, T_0)} \|g'(t)\|_* < +\infty$. Однако тогда функция $g(t)$ липшиц-непрерывна на $[0, T_0)$, а следовательно, может быть

непрерывно продолжена на $[0, T_0]$. (Именно поэтому мы не стали специально выделять случай, когда решение существует на отрезке $[0, T_0]$.) Вновь используя уравнение (6.7), делаем вывод о том, что $g(t) \in \mathbb{C}^1([0, T_0]; \mathbb{B}^*)$. Тогда можно рассмотреть задачу, аналогичную (6.4), где вместо 0 надо положить T_0 , а вместо g_0 и g_1 — соответственно $g(T_0)$ и $g'(T_0)$. По ранее доказанному решение этой задачи существует на некотором отрезке ненулевой длины, что позволяет продолжить решение исходной задачи за точку T_0 . Мы пришли к противоречию, которое показывает, что единственный возможный случай непродолжимости решения может быть связан только с ростом нормы (6.8). Далее, на промежутке своего существования решение $g \equiv \mathbb{A}w$ будет дважды непрерывно дифференцируемым, что следует из записи уравнения в форме (6.1) с учетом уже установленной дифференцируемости первого порядка, дифференцируемости оператора $\mathbb{B}_1$ по условию и цепного правила для производных Фреше. Осталось лишь заметить, что в силу равенства $w(t) = \mathbb{A}^{-1}g(t)$ функция $w(t)$ также дважды дифференцируема всюду, где она существует.

В работе [8] получено двустороннее неравенство

$$\sqrt{2}\Phi^{1/2}[w](t) \leq \|\mathbb{A}w\|_*(t) \leq c_{12}\Phi^{1/2}[w](t).$$

Таким образом, выражение (6.8) эквивалентно выражению

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \Phi[w](t) = +\infty,$$

где функционал $\Phi[w](t)$ определен формулой (2.12).

Полученный в настоящем параграфе результат позволяет сформулировать теорему о разрешимости задачи (1.1).

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть выполнены условия $(i)_1$ – $(iii)_1$, $(i)_2$, $(ii)_2$, $(iv)_2$, сформулированные в § 2. Тогда сильное обобщенное решение задачи (1.1), понимаемое в смысле определения 2.3, существует для всех $0 < T < T_0$, где либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \Phi[w](t) = +\infty;$$

здесь функционал $\Phi[w](t)$ определен формулой (2.12).

Из результатов, полученных в § 5, и теоремы 6.1 заключаем, что верна

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть выполнены условия $(i)_1$ – $(iii)_1$, $(i)_2$ – $(iv)_2$, сформулированные в § 2. Пусть, далее, выполнены следующие достаточные условия:

$$\begin{aligned} \Phi(0) &> 0, \quad \Phi'(0) > 0, \quad \vartheta > 2(p_1 - 1), \\ E(0) &\equiv \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, \sqrt{|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2}) \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\Delta u_1|^2 + |\Delta v_1|^2] \, dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2] \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2] \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} (h_1 u_0 + h_2 v_0) \, dx \geq 0, \\ (\Phi'(0))^2 &> \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi_0^2 + \frac{2\gamma}{2\alpha - p_1} \Phi_0^{p_1} + \frac{2\delta}{2\alpha - 3/2} \Phi_0^{3/2}, \end{aligned}$$

где функционал $\Phi(t)$ определен формулой (2.12) и $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – константы. Тогда время существования T_0 сильного обобщенного решения ограничено сверху и положительно:

$$T_0 \in (0, T_1], \quad T_1 = \frac{\Phi_0^{1-\alpha}}{A},$$

и имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\vartheta}{2} - \varepsilon_0 \right), \quad \beta = \frac{c_7}{\varepsilon_0}, \quad \gamma = \frac{c_6}{\varepsilon_0}, \quad \gamma = c_8(h),$$

$a \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Phi_0) \in (0, 1 + \frac{\vartheta}{2} - p_1)$ есть такое значение ε , при котором величина

$$Q_0 = Q_0(\varepsilon) \equiv \frac{\beta}{\alpha - 1} + \frac{2\gamma}{2\alpha - p_1} \Phi_0^{p_1-2} + \frac{2\delta}{2\alpha - 3/2} \Phi_0^{-1/2}$$

принимает минимальное значение.

§ 7. Доказательство липшиц-непрерывности операторов $\mathbb{B}_i$

Докажем, что операторы $\mathbb{B}_i$, $i = 1, 2$, являются локально липшиц-непрерывными в смысле, указанном в § 2, при соответственно $p_1 = 3$, $p_2 = 6$, $\kappa_1(x, s) = s$, $\kappa_2(x, s) = s^4$. Чтобы не перегружать формулы, индексы 1 и 2 в обозначениях пространств $\mathbb{F}_i$ и показателей p_i в дальнейшем тексте параграфа выписывать не будем. Кроме того, через C будем обозначать (различные) константы, не зависящие от оцениваемых функций, но, возможно, зависящие от области Ω и показателей p . Значение этих констант несущественно.

Обозначим $s_j \equiv \sqrt{|\nabla u_j|^2 + |\nabla v_j|^2}$, $j = 1, 2$, $p' = p/(p-1)$. Имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|B(w_1) - B(w_2)\|_{F^*} &\leq C \|\operatorname{div}(\kappa(x, s_1) \nabla u_1) - \operatorname{div}(\kappa(x, s_2) \nabla u_2)\|_{\mathbb{W}^{-1, p'}} \\ &\quad + C \|\operatorname{div}(\kappa(x, s_1) \nabla v_1) - \operatorname{div}(\kappa(x, s_2) \nabla v_2)\|_{\mathbb{W}^{-1, p'}} \\ &\leq C \|\kappa(x, s_1) \nabla u_1 - \kappa(x, s_2) \nabla u_2\|_{p'} \\ &\quad + C \|\kappa(x, s_1) \nabla v_1 - \kappa(x, s_2) \nabla v_2\|_{p'}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Ниже для обоих случаев оценим первое слагаемое. Второе оценивается аналогично. При $p = 3$ имеем $\kappa(x, s) = s$, откуда

$$\begin{aligned} &|\sqrt{|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2} \nabla u_1 - \sqrt{|\nabla u_2|^2 + |\nabla v_2|^2} \nabla u_2| \\ &= |\sqrt{|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2} (\nabla u_1 - \nabla u_2) \\ &\quad + \nabla u_2 (\sqrt{|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2} - \sqrt{|\nabla u_2|^2 + |\nabla v_2|^2})| \\ &\leq \sqrt{|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2} |\nabla u_1 - \nabla u_2| + |\nabla u_2| \sqrt{|\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 + |\nabla v_1 - \nabla v_2|^2} \\ &\leq \sqrt{|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2} \sqrt{|\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 + |\nabla v_1 - \nabla v_2|^2} \\ &\quad + \sqrt{|\nabla u_2|^2 + |\nabla v_2|^2} \sqrt{|\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 + |\nabla v_1 - \nabla v_2|^2}, \end{aligned}$$

где для оценки слагаемого в третьей строке мы использовали неравенство $\|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$. Оценка функции, стоящей под знаком нормы во втором

слагаемом в правой части (7.1), приводит к аналогичному результату. Заметим также, что в силу неравенства треугольника для оценки нормы любой суммы достаточно оценить нормы слагаемых. Этим соображением мы будем пользоваться и в дальнейшем без дополнительного комментария. Тогда, оценивая первое слагаемое в правой части последнего неравенства при $p = 3$, $p' = 3/2$, имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \sqrt{|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2} \sqrt{|\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 + |\nabla v_1 - \nabla v_2|^2} \right\|_{p'} \\ &= \left(\int_{\Omega} (\sqrt{|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2})^{3/2} (\sqrt{|\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 + |\nabla v_1 - \nabla v_2|^2})^{3/2} dx \right)^{2/3} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} (\sqrt{|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2})^3 dx \right)^{1/3} \left(\int_{\Omega} (\sqrt{|\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 + |\nabla v_1 - \nabla v_2|^2})^3 dx \right)^{1/3}. \end{aligned}$$

В последнем произведении первый множитель оценивается сверху величиной $C\|w_1\|_{\mathbb{F}}$, а второй множитель – величиной $C\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{F}}$ (см. определения норм в пространствах $\mathbb{F}_i$ в § 2). (Мы воспользовались тем, что все конечномерные векторные нормы эквивалентны.) Итак, оценка вида (2.3) получена, причем $\mu(R) = CR$.

Теперь рассмотрим случай $p = 6$, $p' = 6/5$, $\kappa(x, s) = s^4$. Тогда оценка (7.1) остается без изменений, а выражение под знаком нормы в первом слагаемом в правой части (7.1) оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left| (\sqrt{|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2})^q \nabla u_1 - (\sqrt{|\nabla u_2|^2 + |\nabla v_2|^2})^q \nabla u_2 \right| \\ &= \left| (\sqrt{|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2})^q (\nabla u_1 - \nabla u_2) \right. \\ &\quad \left. + \nabla u_2 ((\sqrt{|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2})^q - (\sqrt{|\nabla u_2|^2 + |\nabla v_2|^2})^q) \right| \\ &\leq (\sqrt{|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2})^q |\nabla u_1 - \nabla u_2| \\ &\quad + \left| (\sqrt{|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2})^q - (\sqrt{|\nabla u_2|^2 + |\nabla v_2|^2})^q \right| |\nabla u_2|, \end{aligned}$$

где для удобства записи введено обозначение $q = p - 2 = 4$.

Оценим отдельно $\mathbb{L}^{p'}$ -нормы первого и второго слагаемых в правой части последнего выражения. Для первого слагаемого имеем

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} ((\sqrt{|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2})^{p-2} |\nabla u_1 - \nabla u_2|)^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} (\sqrt{|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2})^p dx \right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_1 - \nabla u_2|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C\|w_1\|_{\mathbb{F}}^{p-2} \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{F}}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Оценка второго слагаемого производится следующим образом:

$$\begin{aligned} & |(|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2)^2 - (|\nabla u_2|^2 + |\nabla v_2|^2)^2| |\nabla u_2| \\ &= (|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2 + |\nabla u_2|^2 + |\nabla v_2|^2) \\ &\quad \times (|\nabla u_1|^2 - |\nabla u_2|^2 + |\nabla v_1|^2 - |\nabla v_2|^2) |\nabla u_2| \\ &= (|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2 + |\nabla u_2|^2 + |\nabla v_2|^2) \\ &\quad \times ((\nabla u_1 - \nabla u_2)(\nabla u_1 + \nabla u_2) + (\nabla v_1 - \nabla v_2)(\nabla v_1 + \nabla v_2)) |\nabla u_2| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2 + |\nabla u_2|^2 + |\nabla v_2|^2) \\
&\quad \times (|\nabla u_1 - \nabla u_2|(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|) + |\nabla v_1 - \nabla v_2|(|\nabla v_1| + |\nabla v_2|))|\nabla u_2| \\
&= |\nabla u_1 - \nabla u_2|(|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2 + |\nabla u_2|^2 + |\nabla v_2|^2)(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)|\nabla u_2| \\
&\quad + |\nabla v_1 - \nabla v_2|(|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2 + |\nabla u_2|^2 + |\nabla v_2|^2)(|\nabla v_1| + |\nabla v_2|)|\nabla u_2|.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Заметим, что после раскрытия скобок первое слагаемое выражения (7.3) примет вид суммы функций вида

$$|\nabla u_1 - \nabla u_2| |\nabla u_i|^\alpha |\nabla v_j|^\beta,$$

где $i, j = 1, 2$, $\alpha + \beta = 4$. Оценивая каждое из выражений вида $|\nabla u_i|^\alpha |\nabla v_j|^\beta$ с помощью неравенства Юнга, получаем

$$|\nabla u_i|^\alpha |\nabla v_j|^\beta \leq C(|\nabla u_i|^4 + |\nabla v_j|^4),$$

что позволяет оценить правую часть (7.3) сверху величиной $C\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{R}} \times \max(\|w_1\|_{\mathbb{R}}^4, \|w_2\|_{\mathbb{R}}^4)$. Вместе с (7.2) это и доказывает требуемое утверждение (см. (2.4)), причем $\mu(R) = CR^4$.

Список литературы

1. Э.Л. Митидиери, С.И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383; англ. пер.: E. Mitidieri, S.I. Pohozaev, “A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234** (2001), 1–362.
2. H. A. Levine, “Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + \mathcal{F}(u)$ ”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **51**:5 (1973), 371–386.
3. H. A. Levine, “Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$ ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **192** (1974), 1–21.
4. В.К. Калантаров, О.А. Ладыженская, “О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 10, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **69**, Наука, Л., 1977, 77–102; англ. пер.: V. K. Kalantarov, O. A. Ladyzhenskaya, “The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types”, *J. Soviet Math.*, **10**:1 (1978), 53–70.
5. А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.
6. А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987; англ. пер.: A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, A. P. Mikhailov, *Blow-up in quasilinear parabolic equations*, de Gruyter Exp. Math., **19**, de Gruyter, Berlin, 1995.
7. В.А. Галактионов, С.И. Похожаев, “Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:10 (2008), 1819–1846; англ. пер.: V. A. Galaktionov, S. I. Pohozaev, “Third-order nonlinear dispersive equations: Shocks, rarefaction, and blowup waves”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **48**:10 (2008), 1784–1810.

8. М. О. Корпусов, *Разрушение в неклассических волновых уравнениях*, УРСС, М., 2010.
9. L. Gasiński, N. S. Papageorgiou, *Nonlinear analysis*, Ser. Math. Anal. Appl., **9**, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2005.
10. Н. В. Крылов, *Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гёльдера*, Научная книга, Новосибирск, 1998; пер. с англ.: N. V. Krylov, *Lectures on elliptic and parabolic equations in Hölder spaces*, Grad. Stud. Math., **12**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

Ю. В. МУХАРТОВА (YU. V. MUKHARTOVA)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
физический факультет
E-mail: muhartova@yandex.ru

Поступило в редакцию
08.12.2010

А. А. ПАНИН (A. A. PANIN)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
физический факультет
E-mail: a-panin@yandex.ru