Математические заметки

Том 91 выпуск 2 февраль 2012

УДК 519.17:5+514.113.4

О разрушении решения одной неоднородной системы уравнений типа С. Л. Соболева

Ю. В. Мухартова, А. А. Панин

Рассматривается модельная система двух неоднородных нелинейных уравнений соболевского типа шестого порядка со вторым порядком производной по времени. Доказана локальная (по времени) разрешимость задачи. Формулируются условия, при которых разрушение решения происходит за конечное время, и дана оценка сверху на время разрушения.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. В настоящее время наблюдается большой интерес к исследованию возникновения режимов с обострением, или “blow up”, для различных нелинейных эволюционных задач для уравнений в частных производных. Имеется три четко сформулированных и широко развитых метода исследования возникновения “blow up”. Первый метод – это метод нелинейной емкости Похожаева и Митидиери [1], второй – это энергетический метод Левина [2]–[5], и, наконец, третий метод – это метод автомодельных режимов, основанный на различных признаках сравнения и развитый в работах Самарского, Галактионова, Курдюмова и Михайлова [6] (см. также [7]). В настоящей работе мы применим некоторую модификацию метода Левина для получения достаточных условий разрушения решения следующей системы уравнений соболевского типа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(-\Delta^2 u+\Delta u)-\operatorname{div}(\varkappa(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2}\,)\nabla u)=h_1(x), \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(-\Delta^2 v+\Delta v)-\operatorname{div}(\varkappa(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2}\,)\nabla v)=h_2(x). \end{cases}$$

Наш результат является развитием результата работы [8], где рассматривалась однородная система аналогичного вида.

2. Постановка задачи. Исследуем возникновение режимов с обострением в следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(-\Delta^2 u+\Delta u)-\operatorname{div}(\varkappa(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2}\,)\nabla u)=h_1(x), \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(-\Delta^2 v+\Delta v)-\operatorname{div}(\varkappa(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2}\,)\nabla v)=h_2(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МД–99.2009.1.

где пара функций (h_1, h_2) принадлежит пространству $\mathbb{B}^*$, определенному ниже. Граничные и начальные условия имеют вид

$$\begin{gathered} u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad v(x,0) = v_0(x), \qquad u'(x,0) = u_1(x), \qquad v'(x,0) = v_1(x). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по времени. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ мы считаем поверхностно односвязной, ограниченной с границей $\partial\Omega$ из класса $\mathbb{C}^{4,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$.

Подобные задачи возникают в теории ионно-звуковых волн в плазме при учете сильной пространственно-временной дисперсии и нелинейной зависимости поляризуемости от напряженности электрического поля (см. [8]).

Для того чтобы дать определение решения задачи (2.1), (2.2), нам понадобится ввести следующие функциональные пространства:

$$\mathbb{B} \equiv \mathbb{H}^2_0(\Omega) \otimes \mathbb{H}^2_0(\Omega), \qquad \mathbb{B}^* \equiv \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \otimes \mathbb{H}^{-2}(\Omega);$$
$$\mathbb{F} \equiv \mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega) \otimes \mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega), \qquad \mathbb{F}^* \equiv \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega) \otimes \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega).$$

Здесь $p \in (2,6]$, $1/p + 1/p' = 1$. В силу условий на область Ω при указанных p имеет место следующая цепочка непрерывных и плотных вложений:

$$\mathbb{B} \overset{\mathrm{ds}}{\subset} \mathbb{F} \overset{\mathrm{ds}}{\subset} \mathbb{F}^* \overset{\mathrm{ds}}{\subset} \mathbb{B}^*.$$

Нормы в этих пространствах выберем следующим образом:

$$\|w\| = \left[\int_\Omega |\Delta u|^2\,dx + \int_\Omega |\Delta v|^2\,dx\right]^{1/2} \qquad \text{для всех} \quad w = (u,v) \in \mathbb{B},$$
$$\|w\|_{\mathbb{F}} = \left[\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + \int_\Omega |\nabla v|^p\,dx\right]^{1/p} \qquad \text{для всех} \quad w = (u,v) \in \mathbb{F},$$

а под $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ и $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_1$ будем понимать скобки двойственности между $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}^*$ и между $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}^*$ соответственно. В частности, при любых $w \equiv (u,v) \in \mathbb{B}$ и $z \equiv (z_1, z_2) \in \mathbb{B}$ выражение

$$\langle \Delta^2 w, z\rangle, \qquad \text{где} \quad \Delta^2 w \equiv (\Delta^2 u, \Delta^2 v) \in \mathbb{B}^*,$$

понимается в смысле

$$\langle \Delta^2 w, z\rangle \equiv \int_\Omega [\Delta u \Delta z_1 + \Delta v \Delta z_2]\,dx,$$

а при любых $w \equiv (u,v) \in \mathbb{F}$ и $z \equiv (z_1, z_2) \in \mathbb{F}$ выражение

$$\langle \Delta w, z\rangle_1, \qquad \text{где} \quad \Delta w \equiv (\Delta u, \Delta v) \in \mathbb{F}^*,$$

понимается в смысле

$$\langle \Delta w, z\rangle_1 \equiv -\int_\Omega [(\nabla u, \nabla z_1) + (\nabla v, \nabla z_2)]\,dx.$$

Будем предполагать, что относительно функции $\varkappa(x,s)$ выполнены следующие четыре условия:

(i) функция $\varkappa(x,s)$ каратеодориева, т.е. $\varkappa(x,s)\colon \Omega \otimes \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1$, причем для почти всех $x \in \Omega$ функция $\varkappa(x,s)$ непрерывна по $s \in \mathbb{R}^1_+$ и для всех $s \in \mathbb{R}^1_+$ она измерима по $x \in \Omega$;

(ii) функция $\varkappa(x,s)$ удовлетворяет условию роста

$$|\varkappa(x,s)| \leqslant c_1 + c_2|s|^{p-2} \qquad \text{для почти всех} \quad x\in\Omega \qquad \text{при} \quad p\in(2,6];$$

(iii) существует такое $\theta>2$, что для всех $u(x), v(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\int_\Omega \varkappa(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2})[|\nabla u|^2+|\nabla v|^2]\,dx \geqslant \theta\int_\Omega dx\int_0^{\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2}} s\varkappa(x,s)\,ds;$$

(iv) оператор

$$B(w) \equiv -\bigl(\operatorname{div}(\varkappa(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2})\nabla u), \operatorname{div}(\varkappa(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2})\nabla v)\bigr)$$

является локально липшиц-непрерывным как оператор, действующий из $\mathbb{F}$ в $\mathbb{F}^*$:

$$\|B(w_1)-B(w_2)\|_{\mathbb{F}^*} \leqslant \mu(R)\|w_1-w_2\|_{\mathbb{F}},$$

где $R=\max\{\|w_1\|_{\mathbb{F}}, \|w_2\|_{\mathbb{F}}\}$, а функция $\mu(\,\cdot\,)$ является неубывающей.

В этом месте полезно обсудить свойства оператора B. Некоторые полученные здесь оценки будут использованы и ниже. Рассмотрим операторы

$$\begin{aligned} B_1(w) &= -\operatorname{div}(\varkappa(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2})\nabla u),\\ B_2(w) &= -\operatorname{div}(\varkappa(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2})\nabla v). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Нам требуется доказать, что при $p>2$

$$B_1(w), B_2(w)\colon \mathbb{F}\to \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega), \tag{2.4}$$

и тогда

$$B(w)\equiv (B_1(w),B_2(w))\colon \mathbb{F}\to\mathbb{F}^*. \tag{2.5}$$

Действительно, пусть $w=(u,v)\in\mathbb{F}$, тогда $\nabla u, \nabla v\in \mathbb{L}^p(\Omega)\otimes\mathbb{L}^p(\Omega)\otimes\mathbb{L}^p(\Omega)$. Воспользуемся теперь условием (ii) для функции $\varkappa(x,s)\colon \Omega\otimes\mathbb{R}^1_+\to\mathbb{R}^1$. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |\varkappa(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2})\nabla u| &\leqslant c_1|\nabla u| + c_2(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)^{(p-2)/2}|\nabla u|\\ &\leqslant c_1(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)^{1/2} + c_2(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)^{(p-1)/2}\\ &\leqslant \frac{c_1^{(p-1)/(p-2)}(p-2)}{p-1} + \left(c_2+\frac{1}{p-1}\right)(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)^{(p-1)/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали следующие два неравенства:

$$\begin{aligned} |\varkappa(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2})\nabla u| \leqslant \bar c_1 + \bar c_2(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)^{(p-1)/2},\\ |\varkappa(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2})\nabla v| \leqslant \bar c_1 + \bar c_2(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)^{(p-1)/2}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$\bar c_1 = c_1^{(p-1)/(p-2)}\frac{p-2}{p-1}, \qquad \bar c_2 = c_2+\frac{1}{p-1}.$$

Из неравенств (2.6) вытекает, что

$$\begin{aligned} \varkappa(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2})\nabla u\colon \mathbb{F}\to\mathbb{L}^{p'}(\Omega)\otimes\mathbb{L}^{p'}(\Omega)\otimes\mathbb{L}^{p'}(\Omega),\\ \varkappa(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2})\nabla v\colon \mathbb{F}\to\mathbb{L}^{p'}(\Omega)\otimes\mathbb{L}^{p'}(\Omega)\otimes\mathbb{L}^{p'}(\Omega), \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $p' = p/(p-1)$. Наконец, понятно, что оператор $\operatorname{div}(\,\cdot\,)$, понимаемый в слабом смысле, действует следующим образом:

$$\operatorname{div}\colon \mathbb{L}^{p'}(\Omega)\otimes\mathbb{L}^{p'}(\Omega)\otimes\mathbb{L}^{p'}(\Omega)\to\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega). \tag{2.8}$$

Поэтому из (2.7), (2.8) вытекает, что

$$B_1(w) = -\operatorname{div}(\varkappa(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2}\,)\nabla u)\colon \mathbb{F}\to\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega),$$
$$B_2(w) = -\operatorname{div}(\varkappa(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2}\,)\nabla v)\colon \mathbb{F}\to\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega),$$

а значит, выполнено (2.5) и условие (iv) имеет смысл.

Сформулируем определение сильного обобщенного решения задачи (2.1), (2.2).

Определение. *Сильным обобщенным решением задачи* (2.1), (2.2) назовем функцию $w=(u,v)\in\mathbb{C}^2([0,T];\mathbb{B})$, удовлетворяющую при некотором $T>0$ равенству

$$\langle D(w),z\rangle = \langle H,z\rangle \qquad \text{для всех}\quad t\in[0,T],\quad z=(z_1,z_2)\in\mathbb{B}, \tag{2.9}$$

где $D(w)\equiv(D_1(w),D_2(w))$, $H=(h_1,h_2)$,

$$D_1(w)\equiv\frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\Delta^2u+\Delta u)-\operatorname{div}(\varkappa(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2}\,)\nabla u),$$
$$D_2(w)\equiv\frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\Delta^2v+\Delta v)-\operatorname{div}(\varkappa(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2}\,)\nabla v).$$

В ближайших двух пунктах установим некоторые соотношения, которым должно подчиняться решение задачи. Вопросом разрешимости мы займемся ниже.

3. Первое энергетическое равенство. Пусть $w=(u,v)\in\mathbb{C}^2([0,T];\mathbb{B})$ – сильное обобщенное решение задачи (2.1), (2.2) при некотором $T>0$. Положим в (2.9) $z=w$. После интегрирования по частям получим

$$\int_\Omega \Delta u''\Delta u\,dx+\int_\Omega \Delta v''\Delta v\,dx+\int_\Omega(\nabla u'',\nabla u)\,dx+\int_\Omega(\nabla v'',\nabla v)\,dx$$
$$=\int_\Omega\varkappa(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2}\,)(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)\,dx-\int_\Omega(h_1u+h_2v)\,dx.$$

Введем также функционал $\Phi[w](t)$ по формуле

$$\Phi[w](t)=\frac12\biggl[\int_\Omega(\Delta u)^2\,dx+\int_\Omega(\Delta v)^2\,dx+\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx+\int_\Omega|\nabla v|^2\,dx\biggr]. \tag{3.1}$$

При фиксированной функции w функционал Φ представляет собой функцию аргумента t. Мы используем обозначения $\Phi(t)$ и Φ, подразумевая под w рассматриваемое решение. Из определения (3.1) получаем

$$\Phi''(t)=\frac12\frac{d^2}{dt^2}\biggl[\int_\Omega(\Delta u)^2\,dx+\int_\Omega(\Delta v)^2\,dx+\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx+\int_\Omega|\nabla v|^2\,dx\biggr]$$
$$=\frac{d}{dt}\biggl[\int_\Omega\Delta u\cdot\Delta u'\,dx+\int_\Omega\Delta v\cdot\Delta v'\,dx+\int_\Omega(\nabla u,\nabla u')\,dx+\int_\Omega(\nabla v,\nabla v')\,dx\biggr]$$

$$= \biggl[\int_\Omega (\Delta u')^2\,dx + \int_\Omega \Delta u\cdot\Delta u''\,dx + \int_\Omega (\Delta v')^2 + \int_\Omega \Delta v\cdot\Delta v''\,dx \\ + \int_\Omega |\nabla u'|^2\,dx + \int_\Omega (\nabla u, \nabla u'')\,dx + \int_\Omega |\nabla v'|^2 + \int_\Omega (\nabla v, \nabla v''\,dx)\biggr],$$

откуда при

$$J[w](t) \equiv \langle \Delta^2 w', w'\rangle - \langle \Delta w', w'\rangle_1 \equiv \int_\Omega (\Delta w')^2\,dx + \int_\Omega (\nabla w', \nabla w')\,dx \tag{3.2}$$

имеем *первое энергетическое равенство*

$$\Phi'' - J = \int_\Omega \varkappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}\,)(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,dx - \int_\Omega (h_1 u + h_2 v)\,dx.$$

4. Второе энергетическое равенство. Введем функционал

$$\psi(h) \equiv \int_\Omega \mathscr{F}(x,h)\,dx, \qquad \text{где} \quad \mathscr{F}(x,h) \equiv \int_0^h ds\, s\varkappa(x,s), \quad h = \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}. \tag{4.1}$$

Положим в (2.9) $z = w'$: $\langle D(w), w'\rangle = \langle H, w'\rangle$, тогда

$$\int_\Omega \Delta u''\Delta u'\,dx + \int_\Omega \Delta v''\Delta v'\,dx + \int_\Omega (\nabla u'', \nabla u')\,dx + \int_\Omega (\nabla v'', \nabla v')\,dx \\ = \int_\Omega \varkappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}\,)\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,dx - \int_\Omega (h_1(x)u' + h_2(x)v')\,dx.$$

С учетом (3.2) получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}J(t) = \int_\Omega \varkappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}\,)\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,dx \\ - \frac{d}{dt}\int_\Omega (h_1(x)u + h_2(x)v)\,dx \\ = \int_\Omega \varkappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}\,)\sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}\,dx \\ - \frac{d}{dt}\int_\Omega (h_1(x)u + h_2(x)v)\,dx \\ = \int_\Omega dx\,\frac{\partial}{\partial t}\int_0^h s\varkappa(x,s)\,ds - \frac{d}{dt}\int_\Omega (h_1(x)u + h_2(x)v)\,dx.$$

После интегрирования по времени с учетом (4.1) получаем *второе энергетическое равенство*

$$E(t) \equiv \int_\Omega \mathscr{F}(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}\,)\,dx - \frac{1}{2}J(t) \\ = E(0) + \int_\Omega (h_1(x)u + h_2(x)v)\,dx - \int_\Omega (h_1(x)u_0(x) + h_2(x)v_0(x))\,dx,$$

где

$$E(0) \equiv \int_\Omega \mathscr{F}(x, \sqrt{|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2}\,)\,dx - \frac{1}{2}J(0).$$

5. Локальная разрешимость. Запишем задачу (2.1), (2.2) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2} Aw = B(w) + H(x), \\ w(0) = w_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{B}, \quad w'(0) = w_1 = (u_1, v_1) \in \mathbb{B}, \end{cases}$$

где

$$Aw = (\Delta^2 u - \Delta u, \Delta^2 v - \Delta v),$$
$$B(w) = -\big(\operatorname{div}(\varkappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla u), \operatorname{div}(\varkappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla v)\big),$$
$$H(x) = (h_1(x), h_2(x)).$$

Аналогично тому, как это сделано в работе [8], можно показать, что оператор

$$A\colon \mathbb{B} \equiv \mathbb{H}^2_0(\Omega) \otimes \mathbb{H}^2_0(\Omega) \to \mathbb{B}^* \equiv \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \otimes \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$$

является обратимым, причем обратный ему оператор A^{-1} является липшиц-непрерывным с постоянной Липшица, равной 1.

Пользуясь обратимостью оператора A, рассмотрим функцию

$$g = Aw$$

и получим задачу, в классе $w \in \mathbb{C}^2([0,T]; \mathbb{B})$ эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 g}{dt^2} = B(A^{-1}g) + H(x), \\ g(0) = g_0 = Aw_0 \in \mathbb{B}^*, \quad g'(0) = g_1 = Aw_1 \in \mathbb{B}^*. \end{cases}$$

В классе $g(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T]; \mathbb{B}^*)$ эта задача эквивалентна интегральному уравнению

$$g(t) = g_0 + \int_0^t ds\, G(g)(s) + \frac{t^2}{2} H(x), \tag{5.1}$$

где

$$G(g)(s) = g_1 + \int_0^s d\xi\, B(A^{-1}g)(\xi).$$

Будем искать решение полученного интегрального уравнения в банаховом пространстве $\mathbb{L}^\infty([0,T]; \mathbb{B}^*)$. С этой целью введем замкнутое ограниченное выпуклое множество

$$V_r \equiv \Big\{ g \in L^\infty([0,T]; \mathbb{B}^*) : |||g||| = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|g\|_*(t) \leqslant r \Big\}$$

при некоторых $r > 0$ и $T > 0$, которые будут определены в дальнейшем.

Рассмотрим операторную задачу

$$g = \mathbb{G}(g), \tag{5.2}$$

где

$$\mathbb{G}(g) \equiv g_0 + \int_0^t ds\, (G(g)(s) + sH(x)).$$

Прежде всего покажем, что $\mathbb{G}\colon V_r \to V_r$ при достаточно большом $r > 0$ и достаточно малом $T > 0$. Для этого оценим норму $B(w)$ в пространстве $\mathbb{B}^*$:

$$
\begin{aligned}
\|B(w)\|_* &\leqslant c_3\|B(w)\|_{F^*} \leqslant c_4\Big\|\operatorname{div}(\varkappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla u)\Big\|_{-1,p'} \\
&\qquad + c_4\Big\|\operatorname{div}(\varkappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla v)\Big\|_{-1,p'} \\
&\leqslant c_5\Big\|\varkappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla u\Big\|_{p'} + c_5\Big\|\varkappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla v\Big\|_{p'} \\
&\leqslant c_6 + c_6\|[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2]^{(p-1)/2}\|_{p'} = c_6 + c_6\left(\int_\Omega [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2]^{p/2}\, dx\right)^{(p-1)/p} \\
&= c_6 + c_6\|w\|_{\mathbb{F}}^{p-1} \leqslant c_6 + c_7\|w\|^{p-1},
\end{aligned}
$$

где мы пользовались, в частности, неравенствами (2.6). Итак, мы получили оценку

$$
\|B(A^{-1}g)\|_* \leqslant c_6 + c_7\|g\|_*^{p-1},
$$

где мы воспользовались липшиц-непрерывностью оператора A^{-1} с постоянной Липшица, равной единице. Но тогда

$$
\begin{aligned}
|||\mathbb{G}(g)||| &\leqslant \|g_0\|_* + \int_0^t \left(\|g_1\|_* + \int_0^s \|B(A^{-1}g)(\xi)\|_*\, d\xi + s\|H(x)\|_*\right) ds \\
&\leqslant \|g_0\|_* + T\|g_1\|_* + \frac{T^2}{2}(c_6 + c_7|||g|||^{p-1} + \|H(x)\|_*).
\end{aligned}
$$

Выберем число $r > 0$ настолько большим, что выполнены неравенства

$$
\|g_0\|_* \leqslant \frac{r}{3}, \qquad \|g_1\|_* \leqslant \frac{r}{3}, \qquad c_7 r^{p-2} \geqslant \frac{2}{3}.
$$

Тогда

$$
|||\mathbb{G}(g)||| \leqslant \frac{r}{3} + T\cdot\frac{r}{3} + \frac{T^2}{2}(c_6 + c_7\cdot r^{p-1} + \|H(x)\|_*),
$$

так как $g \in V_r$, т.е. $|||g||| \leqslant r$. Выберем достаточно малое $T > 0$ такое, что

$$
T^2 < \frac{2}{3}\cdot\frac{r}{c_6 + c_7\cdot r^{p-1} + \|H(x)\|_*} \leqslant 1.
$$

При этом получим

$$
|||\mathbb{G}(g)||| \leqslant r
$$

для всех $g \in V_r$, т.е. $\mathbb{G}\colon V_r \to V_r$. Покажем теперь, что рассматриваемое уравнение (5.2) имеет единственное решение на V_r. Для этого достаточно показать, что $\mathbb{G}$ является сжимающим оператором на V_r:

$$
\mathbb{G}(\widetilde{g}) - \mathbb{G}(\widetilde{\widetilde{g}}) = \int_0^t ds \int_0^s d\xi\, \big(B(A^{-1}\widetilde{g})(\xi) - B(A^{-1}\widetilde{\widetilde{g}})(\xi)\big).
$$

Имеет место следующая цепочка неравенств:

$$
|||\mathbb{G}(\widetilde{g}) - \mathbb{G}(\widetilde{\widetilde{g}})||| \leqslant \frac{T^2}{2}|||B(A^{-1}\widetilde{g}) - B(A^{-1}\widetilde{\widetilde{g}})||| = \frac{T^2}{2}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[O,T]}\|B(A^{-1}\widetilde{g}) - B(A^{-1}\widetilde{\widetilde{g}})\|_*
$$

$$\leqslant \frac{T^2}{2} c_8 \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[O,T]} \|B(A^{-1}\widetilde{g}) - B(A^{-1}\widetilde{\widetilde{g}})\|_{\mathbb{F}^*}$$
$$\leqslant \frac{T^2}{2} c_8 \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[O,T]} \mu(R)\|A^{-1}\widetilde{g} - A^{-1}\widetilde{\widetilde{g}}\|_{\mathbb{F}},$$

где

$$R = \max\bigl\{\|A^{-1}\widetilde{g}\|_{\mathbb{F}}, \|A^{-1}\widetilde{\widetilde{g}}\|_{\mathbb{F}}\bigr\}.$$

Следовательно,

$$|||\mathbb{G}(\widetilde{g}) - \mathbb{G}(\widetilde{\widetilde{g}})||| \leqslant \frac{T^2}{2} c_8 c_9 \mu(c_9 R^*)|||\widetilde{g} - \widetilde{\widetilde{g}}|||,$$

где c_9 – наилучшая постоянная вложения $\mathbb{B} \subset \mathbb{F}$, а

$$R^* \equiv \max\bigl\{|||\widetilde{g}|||, |||\widetilde{\widetilde{g}}|||\bigr\} \leqslant r,$$

так как $\widetilde{g}$ и $\widetilde{\widetilde{g}}$ принадлежат V_r.

Пусть T столь мало, что

$$\frac{T^2}{2} c_8 c_9 \mu(c_9 R^*) < \frac{1}{2}.$$

Тогда оператор $\mathbb{G}$ является сжимающим на V_r, и поэтому рассматриваемое уравнение (5.2) имеет единственное решение

$$g \in \mathbb{L}^\infty([0,T];\mathbb{B}^*)$$

при таких T. Покажем, что решение

$$w(t) = A^{-1}g \in \mathbb{L}^\infty([0,T];\mathbb{B})$$

интегрального уравнения может быть продолжено на такой максимальный интервал $[0,T_0)$, что

$$\text{либо} \quad T_0 = +\infty, \qquad \text{либо} \quad T_0 < +\infty \quad \text{и} \quad \limsup_{t\uparrow T_0} \|g\|_*(t) = +\infty.$$

Действительно, рассмотрим норму

$$\psi(T) \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|g\|_*(t).$$

Введенная норма как функция переменной T является монотонно неубывающей. Следовательно, при $T \uparrow T_0$ функция $\psi(T)$ имеет либо конечный, либо бесконечный предел. Предположим, что она имеет конечный предел при $T \uparrow T_0$. Пусть $T' \in (0,T_0)$. Рассмотрим следующее интегральное уравнение:

$$g(T') = g_0 + \int_0^{T'} ds\,(G(g)(s) + sH(x)),$$

откуда получаем

$$g(T'+t) = g(T') + \int_{T'}^{T'+t} ds\,(G(g)(s) + sH(x)), \qquad t > 0.$$

Введем функцию $q(t) = g(T'+t)$ и сделаем замену переменных $\sigma = s-T'$ в последнем интеграле. Тогда получим уравнение

$$q(t) = g(T') + \int_0^t d\sigma\,(G(g)(\sigma) + (\sigma + T')H(x)). \tag{5.3}$$

Заметим, что

$$\|g\|_*(T') \leqslant C < +\infty, \qquad T' \in (0, T_0), \tag{5.4}$$

а уравнение (5.3) имеет вид (5.1), поэтому найдется такой момент времени $T^* = T^*(T')$, что существует решение уравнения (5.3) на интервале $t \in (0, T^*)$. В силу (5.4) функция $T^* = T^*(T')$ имеет минимум больший нуля, который мы снова обозначим через T^*. Возьмем теперь $T' = T_0 - T^*/2$ и получим, что уравнение (5.3) имеет решение на интервале $t \in (0, T^*)$. Но тогда существует единственное решение задачи

$$g(t_0) = g_0 + \int_0^{t_0} ds\,(G(g)(s) + sH(x)), \qquad t_0 = T' + t, \quad t \in (0, T^*),$$

на интервале $t_0 \in (0, T'+T^*)$. В силу выбора $T' = T_0 - T^*/2$ имеем $t_0 \in (0, T_0+T^*/2)$. Используя указанный алгоритм продолжения по времени, мы приходим к выводу, что $T_0 = +\infty$. Полученное противоречие с предположением, что $T_0 < +\infty$, доказывает предельное равенство

$$\lim_{T\uparrow T_0} \psi(T) = +\infty.$$

Отсюда сразу же получаем, что

$$\lim_{T\uparrow T_0} \sup \|g\|_*(t) = +\infty.$$

Теперь мы можем доказать, что решение $g \in \mathbb{L}^\infty([0,T];\mathbb{B}^*)$ на самом деле класса $g \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{B}^*)$. С этой целью воспользуемся так называемым “бутстрэп”-методом. Прежде всего докажем, что $g \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{B}^*)$. Действительно, заметим, что

$$\|g(t_2) - g(t_1)\|_* \leqslant (|||G(g)||| + T\|H(x)\|_*)|t_2 - t_1| \to 0$$

при $t_1 \to t_2$ для всех $t_1, t_2 \in [0,T]$. Но это означает, что

$$g \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{B}^*).$$

Теперь заметим, что в силу условия (iv) функция

$$B(A^{-1}g)(t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{B}^*).$$

Действительно, имеет место неравенство

$$\|A^{-1}g(t_2) - A^{-1}g(t_1)\| \leqslant \|g(t_2) - g(t_1)\|_* \to 0$$

при $t_1 \to t_2$. Следовательно, $A^{-1}g(t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{B}^*)$. Теперь в силу условия (iv) имеет место неравенство

$$\|B(A^{-1}g)(t_2) - B(A^{-1}g)(t_1)\|_* \leqslant c_{10}(T)\|A^{-1}g(t_2) - A^{-1}g(t_1)\| \to 0$$

при $t_1 \to t_2$ для всех $t_1, t_2 \in [0,T]$. Таким образом,

$$\mathbb{G}(g)(t) = g_0 + g_1 t + \int_0^t ds \int_0^s d\xi\,\gamma(\xi) + \frac{t^2}{2} H(x), \qquad \gamma(\xi) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{B}^*),$$

и, следовательно,

$$\mathbb{G}(g)(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{B}^*).$$

Но это означает, что

$$g(t) = \mathbb{G}(g)(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{B}^*).$$

В силу цепного правила для производных Фреше получаем

$$w(t) = A^{-1}g(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{B}).$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (i)–(iv). *Тогда для любых*

$$w_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{B}, \qquad w_1 = (u_1, v_1) \in \mathbb{B}$$

найдется такое $T_0 = T_0(w_0, w_1) > 0$, *что для любого* $T < T_0$ *существует единственное сильное обобщенное решение задачи* (2.1), (2.2) *класса* $w(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{B})$, *понимаемое в смысле определения в п.* 3, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$, *и в последнем случае имеет место предельное равенство*

$$\limsup_{t\uparrow T_0} \|Aw\|_*(t) = +\infty, \qquad Aw = (\Delta^2 u - \Delta u, \Delta^2 v - \Delta v). \tag{5.5}$$

6. Разрушение решения. Потребуем теперь, чтобы выполнялось условие

$$E(0) - \int_\Omega (h_1(x)u_0(x) + h_2(x)v_0(x))\,dx \geqslant 0.$$

В этом случае

$$\int_\Omega \mathscr{F}(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}\,)\,dx \geqslant \frac{1}{2}\,J(t) + \int_\Omega (h_1(x)u + h_2(x)v)\,dx.$$

В силу условия (iii) существует такое число $\theta > 2$, что для любых $u, v \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ верно неравенство

$$\int_\Omega \varkappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}\,)(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,dx \geqslant \theta \int_\Omega dx \int_0^{\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2}} s\varkappa(x,s)\,ds,$$

или

$$\theta \int_\Omega \mathscr{F}(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}\,) \leqslant \int_\Omega \varkappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}\,)(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,dx,$$

откуда получаем

$$\frac{\theta}{2}\,J(t) + \theta \int_\Omega (h_1(x)u + h_2(x)v)\,dx \leqslant \int_\Omega \varkappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}\,)(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,dx.$$

Заметим, что выражение в правой части в силу первого энергетического равенства равно $\Phi'' - J + \int_\Omega (h_1 u + h_2 v)\,dx$, т.е. мы получаем неравенство

$$\Phi'' - \left(1 + \frac{\theta}{2}\right) J \geqslant (\theta - 1) \int_\Omega (h_1 u + h_2 v)\,dx.$$

В силу неравенства $(\Phi'(t))^2 \leqslant 2\Phi(t)J(t)$ (см. [8; лемма 1]) после умножения на $J(t)$ отсюда следует неравенство

$$\Phi\Phi'' - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\theta}{2}\right) \cdot (\Phi')^2 \geqslant \Phi(\theta - 1) \int_\Omega (h_1 u + h_2 v)\, dx.$$

Заметив, что по определению $\Phi(t) \geqslant 0$, и положив $\alpha \equiv (1+\theta/2)/2$, приходим к неравенству

$$\frac{\Phi''}{\Phi^\alpha} - \alpha\frac{(\Phi)^2}{\Phi^{\alpha+1}} \geqslant \frac{\theta - 1}{\Phi^\alpha} \cdot \int_\Omega (h_1 u + h_2 v)\, dx. \tag{6.1}$$

Рассмотрим правую часть только что полученного неравенства и заметим, что

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega (h_1 u + h_2 v)\, dx\right| &\leqslant \left[\int_\Omega |h_1|^2\, dx \cdot \int_\Omega |u|^2\, dx\right]^{1/2} + \left[\int_\Omega |h_2|^2\, dx \cdot \int_\Omega |v|^2\, dx\right]^{1/2} \\
&\leqslant \left[\int_\Omega |h_1|^2\, dx \cdot 2C_F^2(\Omega) \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2\, dx\right]^{1/2} \\
&\quad + \left[\int_\Omega |h_2|^2\, dx \cdot 2C_F^2(\Omega) \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla v|^2\, dx\right]^{1/2} \\
&\leqslant C_F\sqrt{2}\sqrt{\int_\Omega |h_1|^2\, dx + \int_\Omega |h_2|^2\, dx}\, \Phi^{1/2},
\end{aligned}$$

где $C_F(\Omega)$ – константа в неравенстве Фридрихса.

Таким образом,

$$\int_\Omega (h_1 u + h_2 v)\, dx \geqslant -C_F\sqrt{2}\sqrt{\int_\Omega |h_1|^2\, dx + \int_\Omega |h_2|^2\, dx}\, \Phi^{1/2}$$

и неравенство (6.1) приводит к

$$\frac{\Phi''}{\Phi^\alpha} - \alpha\frac{(\Phi')^2}{\Phi^{\alpha+1}} \geqslant -\frac{1}{\Phi^{\alpha-1/2}}(\theta - 1)C_F(\Omega)\sqrt{2}\sqrt{\int_\Omega |h_1|^2\, dx + \int_\Omega |h_2|^2\, dx}.$$

Введем обозначение

$$\beta \equiv \beta(H) \equiv C_F(\Omega)\sqrt{2}\sqrt{\int_\Omega |h_1|^2\, dx + \int_\Omega |h_2|^2\, dx}$$

и перепишем последнее неравенство в виде

$$\frac{\Phi''}{\Phi^\alpha} - \alpha\frac{(\Phi')^2}{\Phi^{\alpha+1}} \geqslant \frac{-\beta(\theta - 1)}{\Phi^{\alpha-1/2}}\,, \tag{6.2}$$

где β при фиксированных данных задачи является константой, $\beta > 0$, $\theta > 2$, $\alpha > 1$. Наша ближайшая цель – доказать, что неравенство (6.2) при некоторых начальных данных приводит к обращению $\Phi(t)$ в бесконечность за конечное время.

Введем в рассмотрение функцию $z(t) = \Phi^{1-\alpha}(t)$, тогда

$$z'(t) = (1-\alpha)\Phi^{-\alpha}\Phi', \qquad z''(t) = -\alpha(1-\alpha)\Phi^{-\alpha-1}(\Phi')^2 + (1-\alpha)\Phi^{-\alpha}\Phi''$$

и неравенство (6.2) преобразуется к виду

$$\frac{z''}{1-\alpha} + \frac{\beta(\theta-1)}{z^{-}(\alpha-1/2)/(\alpha-1)} \geqslant 0,$$

или

$$\frac{z''}{1-\alpha} + \beta(\theta-1)z^{\gamma} \geqslant 0, \qquad \text{где} \quad \gamma = \frac{\alpha-1/2}{\alpha-1} > 1.$$

Пусть $\Phi'(0) > 0$, тогда в силу свойств гладкости решения по t существует такое $\delta > 0$, что при $t \in (0;\delta)$ имеем $\Phi'(t) > 0$. При этих t в силу $\alpha > 1$ имеем

$$z'(t) = (1-\alpha)\Phi^{-\alpha}\Phi' < 0, \qquad 2(1-\alpha)z' > 0,$$

поэтому

$$2z''z' + 2\beta(\theta-1)(1-\alpha)z^{\gamma}z' > 0,$$

т.е.

$$((z')^2)' \geqslant 2(\alpha-1)\beta(\theta-1)z^{\gamma}z',$$

или

$$((z')^2)' \geqslant 2\,\frac{\beta(\theta-1)(\alpha-1)}{\gamma+1}(z^{\gamma+1})'.$$

Ниже мы оговорим соответствующие условия на начальные данные, а пока потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$(z'(0))^2 - 2\,\frac{\beta(\theta-1)(\alpha-1)}{\gamma+1}\,z^{\gamma+1}(0) = A^2 > 0 \tag{6.3}$$

с некоторой константой $A^2 > 0$. Тогда из (6.3) получим

$$(z')^2 - 2\,\frac{\beta(\theta-1)(\alpha-1)}{\gamma+1}\,z^{\gamma+1} \geqslant A^2. \tag{6.4}$$

Поскольку $2(\beta(\theta-1)(\alpha-1)/(\gamma+1))z^{\gamma+1} > 0$, из (6.4) следует, что $(z')^2 \geqslant A^2$. Мы только что доказали это неравенство для всех $t \in (0;\delta)$. При этих t верно неравенство $z'(t) < 0$. Заметим, однако, что при всех t, при которых существует решение задачи (2.1), (2.2), будет выполнено $z'(t) < 0$. В самом деле, пусть это не так, тогда найдется такое $t^* > \delta$, что $z'(t^*) \geqslant 0$. В силу непрерывности $z'(t)$ в таком случае существует и такое $t^{**} \in (\delta;t^*)$, что

$$-A < z'(t^{**}) < 0, \qquad z'(t) < 0 \quad \text{при} \quad t < t^{**}. \tag{6.5}$$

Но тогда $z'(t) < 0$ при $t \in (0;t^{**}+\varepsilon)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$, и следовательно, рассуждения, приведшие к (6.4), верны и для t^{**}. Но условия $(z'(t^{**}))^2 \geqslant A^2$ и (6.5) не могут быть выполнены одновременно. Полученное противоречие доказывает, что при всех t, при которых существует решение задачи (2.1), (2.2), $z'(t) < 0$, и тогда в силу (6.4) имеем $(z')^2 \geqslant A^2$, т.е. $z' < -A$.

Отсюда сразу получаем, что $z(t) \leqslant z(0) - At$, т.е. при

$$t \uparrow T_0 \leqslant \frac{z(0)}{A} = \frac{\Phi^{1-\alpha}(0)}{A}$$

имеем $z(t) \downarrow 0$ и $\Phi(t) \uparrow +\infty$.

Сейчас мы увидим, что отсюда следует разрушение решения за конечное время. Для этого сначала рассмотрим подробнее выражение (5.5). Заметим, что справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}\|Aw\|_*(t) &= \sup_{z\in\mathbb{B},\,\|z\|\leqslant 1} |\langle Aw, z\rangle| \\ &\leqslant \sup_{z\in\mathbb{B},\,\|z\|\leqslant 1}\left|\int_\Omega (\nabla z_1, \nabla u)\,dx + \int_\Omega (\nabla z_2, \nabla v)\,dx + \int_\Omega \Delta z_1 \Delta u\,dx + \int_\Omega \Delta z_2 \Delta v\,dx\right| \\ &\leqslant 2 \sup_{z\in\mathbb{B},\,\|z\|\leqslant 1} \Phi^{1/2}[z](t)\Phi^{1/2}[w](t) \leqslant c_{11}\Phi^{1/2}[w](t)\end{aligned}$$

Справедлива следующая оценка снизу:

$$\|Aw\|_*(t)\|w\|(t) \geqslant \langle Aw(t), w(t)\rangle = 2\Phi[w](t)$$

С другой стороны,

$$\|w\|^2(t) \leqslant 2\Phi[w](t),$$

откуда получаем неравенство

$$\sqrt{2}\Phi^{1/2}[w](t)\|Aw\|_*(t) \geqslant 2\Phi[w](t),$$

из которого вытекает оценка

$$\|Aw\|_*(t) \geqslant \sqrt{2}\Phi^{1/2}[w](t).$$

Тем самым, окончательно приходим к двустороннему неравенству

$$\sqrt{2}\Phi^{1/2}[w](t) \leqslant \|Aw\|_*(t) \leqslant c_{11}\Phi^{1/2}[w](t).$$

Таким образом, предельное равенство (5.5) эквивалентно

$$\limsup_{t\uparrow T_0} \Phi[w](t) = +\infty.$$

Итак, нами доказана следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (i)–(iv), $H(x) = (h_1(x), h_2(x)) \in \mathbb{B}^*$ *и для начальных данных задачи* $w_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{B}$, $w_1 = (u_1, v_1) \in \mathbb{B}$ *выполнены условия*

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathscr{F}(x, \sqrt{|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2})\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_1|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta v_1|^2\,dx \\ - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_1|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_1|^2\,dx - \int_\Omega (h_1 u_0 + h_2 v_0)\,dx \geqslant 0,\end{aligned} \tag{6.6}$$

где

$$\mathscr{F}(x, \sigma) = \int_0^\sigma ds\, s\varkappa(x, s),$$

а также

$$\Phi'(0) > 2\sqrt{\frac{\beta(\theta-1)}{4\alpha-3}}\,\Phi^{3/4}(0), \tag{6.7}$$

где

$$\Phi'(0) = \int_\Omega (\nabla u_1, \nabla u_0)\,dx + \int_\Omega (\nabla v_1, \nabla v_0)\,dx + \int_\Omega \Delta u_1 \Delta u_0\,dx + \int_\Omega \Delta v_1 \Delta v_0\,dx,$$

$$\Phi(0)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta u_0|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta v_0|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u_0|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v_0|^2\,dx.$$

(*Константы* $\beta>0$, $\theta>2$ *и* $\alpha>1$, *зависящие от данных задачи, были введены выше.*)

Тогда имеет место разрушение решения за конечное время, причем для времени T_0 *разрушения решения выполнена оценка*

$$T_0\leqslant\frac{\Phi^{1-\alpha}(0)}{A},$$

где

$$A=(\alpha-1)\biggl((\Phi^{-\alpha}(0)\Phi'(0))^2-\frac{4\beta(\theta-1)}{4\alpha-3}\,\Phi^{3/2-2\alpha}(0)\biggr)^{1/2}.$$

Замечание 1. Нетрудно видеть, что условие $\Phi'(0)>0$, выполнение которого мы потребовали в ходе вывода теоремы, выполняется автоматически благодаря более сильному неравенству (6.7).

Замечание 2. Имеет смысл обсудить совместность условий теоремы 2. Можно убедиться, что класс данных, удовлетворяющих этим условиям, непуст. Для этого при фиксированных $H(x)=(h_1(x),h_2(x))\in\mathbb{B}^*$ выберем произвольные не равные тождественно нулю функции $w_0=w_1=(ru_0,rv_0)\in\mathbb{B}$ (число r будет определено ниже) и положим $\varkappa(x,s)=s^2$, $p=4$. Выполнение условий (i)–(iii) доказывается несложно (при этом можно положить $\theta=4$). Кратко изложим схему обоснования (iv). Для любых $w_1\equiv(u_1,v_1),w_2\equiv(u_2,v_2)\in\mathbb{F}$ имеет место следующая цепочка неравенств (где мы обозначили $s_j\equiv\sqrt{|\nabla u_j|^2+|\nabla v_j|^2}$, $j=1,2$, $p'=p/(p-1)=4/3$):

$$\begin{aligned}
&\|B(w_1)-B(w_2)\|_{F^*}\\
&\qquad\leqslant c_8\|\operatorname{div}(\varkappa(x,s_1)\nabla u_1)-\operatorname{div}(\varkappa(x,s_2)\nabla u_2)\|_{\mathbb{W}^{-1,p'}}\\
&\qquad\quad+c_8\|\operatorname{div}(\varkappa(x,s_1)\nabla v_1)-\operatorname{div}(\varkappa(x,s_2)\nabla v_2)\|_{\mathbb{W}^{-1,p'}}\\
&\leqslant c_9\|\varkappa(x,s_1)\nabla u_1-\varkappa(x,s_2)\nabla u_2\|_{p'}+c_9\|\varkappa(x,s_1)\nabla v_1-\varkappa(x,s_2)\nabla v_2\|_{p'}\\
&=c_9\|(|\nabla u_1|^2+|\nabla v_1|^2)\nabla u_1-(|\nabla u_2|^2+|\nabla v_2|^2)\nabla u_2\|_{p'}\\
&\qquad+c_9\|(|\nabla u_1|^2+|\nabla v_1|^2)\nabla v_1-(|\nabla u_2|^2+|\nabla v_2|^2)\nabla v_2\|_{p'}.
\end{aligned}\tag{6.8}$$

Оценим выражение, стоящее в (6.8) под первым знаком нормы:

$$\begin{aligned}
&|(|\nabla u_1|^2+|\nabla v_1|^2)\nabla u_1-(|\nabla u_2|^2+|\nabla v_2|^2)\nabla u_2|\\
&\quad=|(|\nabla u_1|^2+|\nabla v_1|^2)(\nabla u_1-\nabla u_2)+(|\nabla u_1|^2-|\nabla u_2|^2+|\nabla v_1|^2-|\nabla v_2|^2)\nabla u_2|\\
&\quad=|(|\nabla u_1|^2+|\nabla v_1|^2)(\nabla u_1-\nabla u_2)\\
&\qquad\qquad+(\nabla u_1-\nabla u_2,\nabla u_1+\nabla u_2)\nabla u_2+(\nabla v_1-\nabla v_2,\nabla v_1+\nabla v_2)\nabla u_2|\\
&\quad\leqslant(|\nabla u_1|^2+|\nabla v_1|^2)|\nabla u_1-\nabla u_2|\\
&\qquad\quad+|\nabla u_1-\nabla u_2|\cdot|\nabla u_1+\nabla u_2|\cdot|\nabla u_2|+|\nabla v_1-\nabla v_2|\cdot|\nabla v_1+\nabla v_2|\cdot|\nabla v_2|.
\end{aligned}$$

Оценив аналогичным образом выражение, стоящее под вторым знаком нормы в (6.8), и неоднократно воспользовавшись неравенствами вида

$$C_1(a+b)^q\leqslant a^q+b^q\leqslant C_2(a+b)^q,\qquad ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2},\quad q>0,\quad a,b>0,$$

а также неравенством Гёльдера, получаем оценку из условия (iv) с $\mu(R)=c_{10}R^2$.

Далее, условия (6.6) и (6.7) выполнены при достаточно больших r. В самом деле, первое слагаемое в (6.6) при выбранной функции $\varkappa(x,s)=s^2$ равно

$$r^4\int_\Omega(|\nabla u_0|^2+|\nabla v_0|^2)^2\,dx>0,$$

остальные же слагаемые имеют второй и первый порядки по r. Далее, $\Phi'(0)$ и $\Phi(0)$ имеют одинаковый порядок по r, а поэтому (6.6) тоже выполнено при достаточно больших r.

Замечание 3. Можно заметить, что при $H\equiv(h_1(x),h_2(x))=(0,0)$ оценка времени разрушения переходит в $T_0\leqslant\Phi(0)/((\alpha-1)\Phi'(0))$, что совпадает с результатом работы [8].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383.

[2] H. A. Levine, “Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t=-Au+\mathscr{F}(u)$”, *Arch. Rational Mech. Analys.*, **51** (1973), 371–386.

[3] H. A. Levine, “Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt}=-Au+\mathscr{F}(u)$”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **192** (1974), 1–21.

[4] В. К. Калантаров, О. А. Ладыженская, “О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 10, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **69**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1977, 77–102.

[5] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.

[6] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987.

[7] В. А. Галактионов, С. И. Похожаев, “Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:10 (2008), 1819–1846.

[8] М. О. Корпусов, *Разрушение в неклассических волновых уравнениях*, УРСС, М., 2010, Гл. 4, § 2.

Ю. В. Мухартова
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

А. А. Панин
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: a-panin@yandex.ru

Поступило
25.05.2010
Исправленный вариант
22.11.2010