

*Александр А. Локишин*

# **ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ГРАФОВ**

Учебное пособие

*Второе издание,  
исправленное и дополненное*



---

МОСКВА – 2024

УДК 519.1(072)  
ББК 22.176я7  
Л73



<https://elibrary.ru/meofjv>

Рецензент:

*Е.А. Сагомонян* – канд. физ.-мат. наук, доцент  
(механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова)

**Локшин, Александр Александрович.**

Л73 **Элементарное введение в теорию графов** : учебное пособие / А.А. Локшин. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: МАКС Пресс, 2024. – 148 с. : ил.  
ISBN 978-5-317-07234-6  
<https://doi.org/10.29003/m4173.978-5-317-07234-6>

На элементарном уровне изложены важнейшие понятия теории графов, причем основной материал посвящен именно обыкновенным (не ориентированным) графам. Подробно рассмотрен алгоритм Дейкстры, позволяющий находить кратчайшие маршруты во взвешенном графе, в общих чертах разобран так называемый муравьиный алгоритм, предназначенный для решения известной задачи коммивояжера. Во втором издании исправлены замеченные неточности и опечатки, добавлен ряд новых задач, расширен материал, относящийся к свойствам многогранников.

Книжка адресована старшим школьникам, интересующимся математикой, а также студентам педвузов – будущим учителям математики и информатики.

*Ключевые слова:* граф, оргграф, вершина, ребро, муравьиный алгоритм.

УДК 519.1(072)  
ББК 22.176я7

ISBN 978-5-317-07234-6

© Локшин А.А., 2022  
© Локшин А.А., 2024, с изменениями  
© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2024

# Содержание

Предисловие .....	5
1. Графы и оргграфы. Основные определения.....	7
2. Дальнейшие определения. Полный граф, двудольный граф.....	9
3. Степень вершины. Лемма о рукопожатиях .....	11
4. Различные способы представления графа. Матрица смежности и матрица инцидентности .....	13
5. Помеченные и непомеченные графы. Одинаковость и изоморфизм графов .....	16
6. Подграфы.....	18
7. Удаление вершины. Удаление ребра.....	19
8. Задача о любых шести людях и не только.....	19
9. Маршруты в графах. Связность.....	26
10. Расстояние в графе. Поиск в ширину.....	33
11. Критерий двудольности графа.....	35
12. Вершинная и реберная связность. Точка сочленения. Мост.....	39
13. Поиск в глубину .....	43
14. Кони на шахматной доске $3 \times 3$ .....	46
15. Деревья.....	47
16. Перечисление деревьев.....	54
17. Подграф. Остовный подграф. Минимальное остовное дерево .....	55
18. Раскрашенная шахматная доска .....	58

19. Эйлеровы графы.....	60
20. Эйлеровы цепи .....	73
21. Задача Китайского Почтальона .....	80
22. Гамильтоновы графы.....	85
23. Плоские графы .....	90
24. Формула Эйлера и следствия из нее .....	99
25. Задача коммивояжера .....	113
26. Поиск кратчайшего расстояния в графе. Алгоритм Дейкстры.....	122
27. Орграфы. Дополнительные сведения.....	129
28. Двойственные графы. Применение формулы Эйлера к многогранникам «общего вида».....	135
Литература.....	147

## Предисловие

*Легко ли пересчитать  
все ребра связному графу?*

(математический фольклор)

В книжке на элементарном уровне изложены важнейшие понятия теории графов, причем основной материал посвящен именно обыкновенным (не ориентированным) графам. На авторский стиль изложения и отбор материала, безусловно, повлияла превосходная книга О.И. Мельникова [1]. Однако по сравнению с [1] имеется ряд отличий: подробно рассмотрен алгоритм Дейкстры, позволяющий находить кратчайшие маршруты во взвешенном графе, в общих чертах разобран так называемый муравьиный алгоритм, предназначенный для решения известной задачи коммивояжера. Внесены также некоторые методические уточнения в определения таких базовых понятий теории графов, как «дерево» и «лес». В частности, по определению принимается, что дерево не может состоять из одной-единственной изолированной вершины. Это уточнение позволяет избежать формальных противоречий при доказательстве теоремы о строении деревьев.

Аналогичное методическое уточнение внесено в определение двудольности:

«*Двудольным* графом называется такой граф  $G$ , у которого множество вершин  $V$  представимо в виде объединения

двух **непустых** не пересекающихся множеств (называемых *долями*)  $V_1$  и  $V_2$ , причем вершины внутри каждой доли ни разу не соединяются ребрами».

Без добавления требования *непустоты* обеих долей пришлось бы согласиться с тем, что граф, состоящий из одной вершины, является двудольным. (С математической точки зрения здесь нет никакой ошибки, однако психологический эффект от обнаружения этого факта может быть значительным.)

Книжка адресована старшим школьникам, интересующимся математикой, а также студентам педвузов – будущим учителям математики.

Автор признателен Е.А. Ивановой и И.В. Рублеву за полезные замечания.

\* \* \*

Во втором издании исправлены замеченные неточности и опечатки, добавлен ряд новых задач, расширен материал, относящийся к свойствам двудольных и плоских графов, а также многогранников.

*Автор*

*Москва, август 2022 – июнь 2024*

## 1. Графы и оргграфы. Основные определения

В этом параграфе будет дана сводка основных определений, которые нам понадобятся в дальнейшем.

**Определение 1.1.** *Графом* называют упорядоченную пару  $(V, E)$ , где  $V$  – множество вершин графа, а  $E$  – множество его ребер. При этом каждому ребру  $e \in E$  соответствуют ровно две его *концевые вершины* из множества  $V$ ; эти концевые вершины не должны совпадать. Кроме того, для каждой пары вершин из  $V$  может существовать не более одного ребра, для которого эти вершины являются концевыми. (Иными словами: для любой пары вершин из  $V$  в графе найдется не более одного ребра из  $E$ , *соединяющего* эту пару вершин.)

**Замечание.** Обозначать граф мы будем обычно заглавными буквами  $\Gamma$  или  $G$ . Например, будем писать  $\Gamma = (V, E)$ .

**Определение 1.2.** Две вершины называют *смежными*, если их соединяет ребро. Два ребра называют *смежными*, если у них есть общая концевая вершина.

**Замечание.** Мы будем иметь дело также с обобщениями понятия графа.

Если допустить, что у какого-то ребра из  $E$  концевые вершины совпадают, то такое ребро называют *петлей* и называют  $\Gamma = (V, E)$  *графом с петлями*.

Далее, если допустить, что какую-то пару вершин из  $V$  соединяют два или большее количество ребер из  $E$ , то  $\Gamma = (V, E)$  называют *мультиграфом*. Два ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин, называют *параллельными*.

Наконец, для мультиграфа с петлями имеется специальное название: *псевдограф*.

**Определение 1.3.** *Ориентированным графом (орграфом) называют такой граф, у которого каждое ребро имеет единственное выделенное направление. Ребра орграфа называют дугами.*

Таким образом, в орграфе у каждой дуги есть начальная вершина и конечная вершина. Часто, говоря об орграфе, допускают существование у него петель и параллельных дуг. Две дуги в орграфе, соединяющие одну и ту же пару вершин, *строго параллельны*, если их направления одинаковы; в противном случае эти дуги называют *нестрого параллельными*.

**Определение 1.4.** Если в графе некоторые ребра имеют выделенное направление, а остальные ребра не являются направленными, то такой граф называют *смешанным*.

В дальнейшем мы будем иметь дело в основном с обычными (не ориентированными) графами; при этом большинство результатов легко переносится на графы с петлями, а также на мультиграфы и псевдографы. Обобщения на орграфы обычно требуют несколько больше технических усилий, и мы почти не будем касаться этой темы, отсылая читателя к имеющейся литературе. Подчеркнем, что важнейшие идеи теории удастся ввести в рассмотрение уже в случае обычных графов.

**Определение 1.5.** Если вершина  $v \in V$  является концевой для ребра  $e \in E$ , то говорят, что  $v$  и  $e$  *инцидентны* (говорят также, что вершина  $v$  *принадлежит* ребру  $e$ ).

**Определение 1.6.** Если вершина  $v \in V$  не принадлежит ни одному из ребер графа, то такую вершину называют *изолированной*.

**Определение 1.7.** Граф, состоящий из изолированных вершин, называют *пустым*.

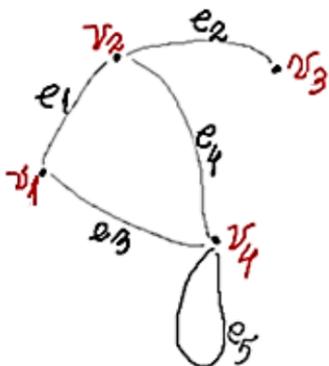


Рис. 1.1. Это граф с петлей



Рис. 1.2. Это орграф. Дуги  $e_5$  и  $e_2$  нестрого параллельны; дуги  $e_3$  и  $e_4$  строго параллельны

**Определение 1.8.** Вершина графа называется *висячей*, если она инцидентна в точности одному ребру, которое в этом случае также называют *висячим*.

На рис. 1.1 вершина  $v_3$  – висячая. Соответственно, ребро  $e_2$  на этом рисунке также является висячим.

## 2. Дальнейшие определения. Полный граф, двудольный граф

**Определение 2.1.** Граф, в котором любая пара вершин соединена ребром, называется *полным*.

Для полного графа, содержащего  $n$  вершин, имеется общепринятое обозначение:  $K_n$ .

(Заметим, что полный граф  $K_1$  состоит из одной-единственной изолированной вершины и поэтому, в соответствии с общепринятыми определениями, является пустым. Полный граф  $K_2$  – это отрезок, две концевые точки которого представляют собой вершины графа.)

В общем случае число ребер в полном графе  $K_n$  легко вычисляется по правилам комбинаторики и, очевидно, равно числу сочетаний из  $n$  элементов по два, т.е.  $n(n-1)/2!$ .

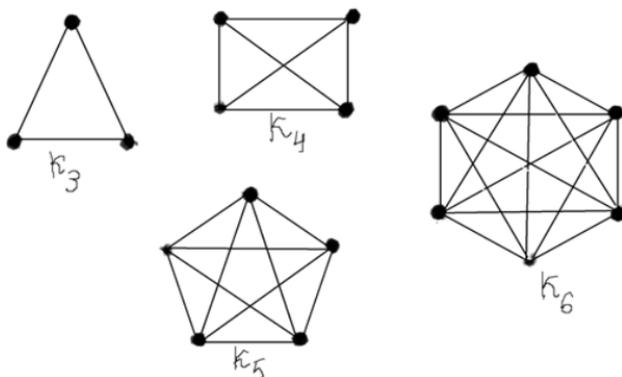


Рис. 2.1. Полные графы

**Определение 2.2.** Двудольный граф – это такой граф  $\Gamma$ , у которого множество вершин  $V$  представимо в виде объединения двух непустых не пересекающихся множеств (называемых долями)  $V_1$  и  $V_2$ , причем вершины внутри каждой доли ни разу не соединяются ребрами.

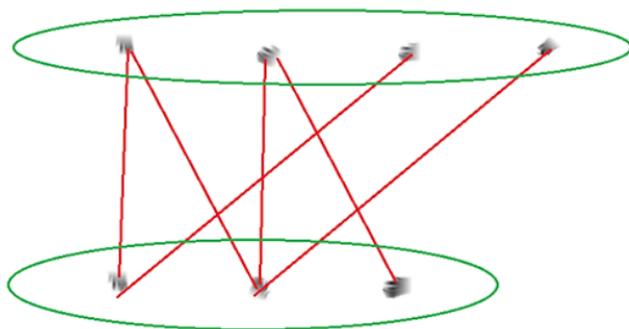


Рис. 2.2. Двудольный граф

**Определение 2.3.** Двудольный граф называется *полным*, если каждая вершина из одной доли соединена ребром с каждой вершиной из другой доли. Если доля  $V_1$  содержит  $p$  вершин, а доля  $V_2$  содержит  $q$  вершин, то соответствующий полный двудольный граф обозначается  $K_{p,q}$ .

**Замечание.** Определение 2.2 можно обобщить. А именно, назовем граф  $\Gamma$  *трехдольным*, если множество его вершин можно представить в виде объединения трех непустых попарно не пересекающихся множеств (долей), причем так, что никакая пара вершин, принадлежащих одной и той же доле, не соединена ребром. (См. по этому поводу, например, [12].)

### Задачи

1. Сколько ребер в полном двудольном графе  $K_{p,q}$ ?
2. В полном двудольном графе 317 ребер. Сколько в этом графе вершин?

## 3. Степень вершины. Лемма о рукопожатиях

**Определение 3.1.** *Степенью* вершины  $v$  называется число инцидентных ей ребер графа.

Таким образом, степень изолированной вершины равна 0, а степень висячей вершины равна 1.

**Замечание.** Если мы имеем дело с графом с петлями (или, более общо, с псевдографом), то при подсчете степеней вершин каждая петля учитывается дважды!

Степень вершины  $v$  обозначается обычно так:  $d(v)$ .

**Лемма о рукопожатиях.** Сумма степеней всех вершин (псевдо)графа равна удвоенному числу его ребер.

**Доказательство** очевидно.

**Следствие.** В любом (псевдо)графе число вершин нечетной степени обязательно четно.

**Замечание.** Интересный результат, касающийся степеней вершин в графах (но не в псевдографах!), приведен ниже в утверждении 9.5.

### Задачи

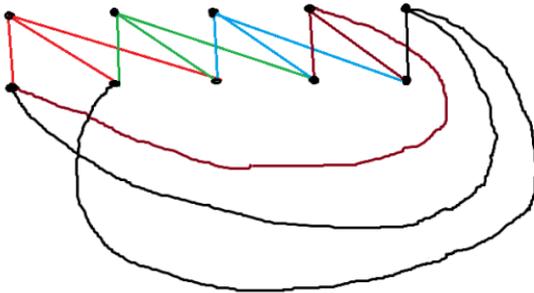
1. Докажите, что в двудольном графе суммы степеней вершин одинаковы для обеих долей.

2. На выставке крокодилов каждый посетитель погладил трех крокодилов, а каждый крокодил был поглажен четырьмя посетителями. Кого было больше – крокодилов или посетителей?

3. На выставке крокодилов каждый посетитель посмотрел на трех крокодилов, а каждый крокодил посмотрел на четырех посетителей. Кого было больше – крокодилов или посетителей?

4. Дан связный двудольный граф  $G$ , в котором каждая доля содержит  $n$  вершин ( $n > 3$ ). Докажите, что при любом натуральном  $k$ , не превосходящем  $n$ , возможна ситуация, когда степень каждой вершины равна  $k$ .

Указание. См. рис. 3.1.



$G$

Рис. 3.1

#### 4. Различные способы представления графа. Матрица смежности и матрица инцидентности

Подчеркнем теперь одно важное обстоятельство, на которое мы выше не обращали внимания. Дело в том, что не следует отождествлять сам граф и его изображение на листе бумаги (или на экране компьютера). Один и тот же граф может быть изображен разными способами (см., например, рис. 4.1).

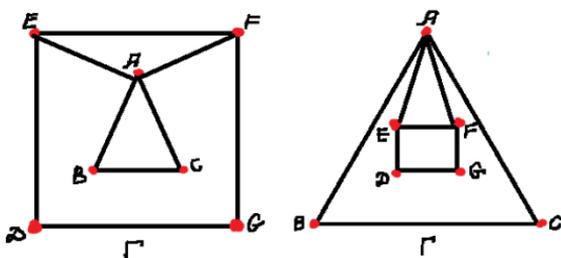


Рис. 4.1. Два изображения одного и того же графа  $\Gamma$

Действительно, на каждом из этих изображений показаны одни и те же связи между объектами A, B, C, D, E, F, G (вершинами графа  $\Gamma$ ); эти связи – ребра графа  $\Gamma$ . В реальности объекты A, B, C, D, E, F, G могут иметь самую разную природу – например, быть состояниями измерительного прибора. Тогда связывающие их ребра, изображенные на рис. 4.1 в виде отрезков, будут способами непосредственного переключения прибора из одного состояния в другое.

В дальнейшем, при изучении так называемых плоских графов, мы обсудим этот круг вопросов более подробно.

Существуют, однако, способы представить (псевдо)граф, не обращаясь к рисункам с их кажущейся неодно-

значностью. Один из таких способов – задать (псевдо)граф с помощью так называемой *матрицы смежности*.

Действительно, зная набор вершин и отношение смежности между вершинами, очевидно, можно однозначно восстановить сам (псевдо)граф. Способ построения матрицы смежности очевиден из примера, приведенного на рис. 4.2. В клетках таблицы размером  $n \times n$  (где  $n$  – число вершин в псевдографе) записано число ребер, соединяющих соответствующие вершины. При этом матрица оказывается, очевидно, симметричной. Клетки, в которых должны были бы стоять нули, мы оставили пустыми, чтобы расположение ненулевых элементов матрицы стало более наглядным (это также допускается при построении матрицы смежности).

**Замечание.** Для орграфов принцип построения матрицы смежности остается таким же, но при этом матрица, вообще говоря, теряет свою симметричность.

**Замечание.** В отличие от ситуации, описанной в Лемме о рукопожатиях, при составлении матрицы смежности число петель, инцидентных той или иной вершине псевдографа, не удваивается.

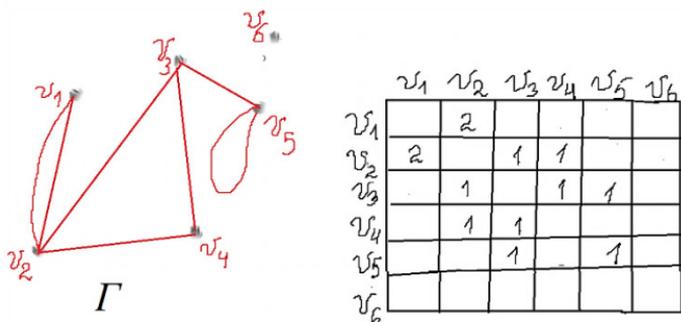


Рис. 4.2. Матрица смежности для псевдографа  $\Gamma$

Точно так же, зная наборы вершин, наборы ребер и отношение инцидентности между ребрами и вершинами, нетрудно однозначно восстановить сам псевдограф. С этой целью вводится в рассмотрение так называемая *матрица инцидентности* для псевдографа. На рис. 4.3 приведен пример построения такой матрицы. В клетки таблицы записывается 1, если соответствующие вершина и ребро инцидентны; в противном случае клетка остается пустой.

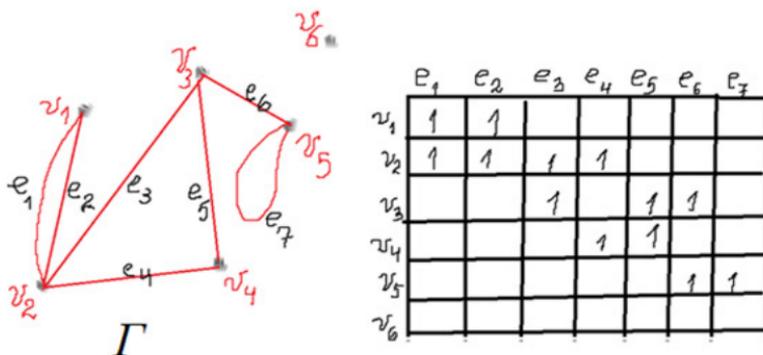


Рис. 4.3. Матрица инцидентности для псевдографа  $\Gamma$

### Задачи

1. Построить матрицу смежности и матрицу инцидентности для графа, изображенного на рис. 4.1.
2. Могут ли в каком-нибудь столбце матрицы инцидентности для псевдографа присутствовать три единицы?
3. Как по матрице инцидентности псевдографа определить, какое из ребер является петлей?

## 5. Помеченные и непомеченные графы. Одинаковость и изоморфизм графов

**Определение 5.1.** Граф  $G$  называется *помеченным*, если его вершины занумерованы. (Тем самым каждая вершина становится уникальной, приобретает «индивидуальность»).

**Определение 5.2.** Два помеченных графа считаются *различными*, если в одном из них найдется пара смежных вершин с номерами  $i$  и  $j$ , а в другом – вершины с этими же номерами смежными не являются. В противном случае помеченные графы считают *одинаковыми*.

*Таким образом, если в двух графах разное число вершин, они по определению различны.*

**Замечание.** Таким образом в помеченных графах вершинам придается «индивидуальность». В качестве примера можно рассмотреть случай, когда вершины с одинаковыми номерами – это одни и те же объекты (арпример, одни и те же города), но ребра обозначают связи разного типа (в одном графе – железнодорожная связь, в другом – автодороги).

Обычно для одинаково устроенных систем в математике используют термин «изоморфность», однако в теории графов, во избежание путаницы, этот термин приберегают для непомеченных графов.

**Пример.** Граф  $\Gamma$  на рис. 4.1 – помеченный.

**Замечание.** Говоря о непомеченных графах, мы будем предполагать, что их вершинам не присвоено вообще никаких имен.

**Определение 5.3.** Два непомеченных графа *изоморфны*, если их вершины можно так перенумеровать, что они превратятся в два одинаковых помеченных графа.

Из этого определения следует, что в изоморфных графах должно быть одно и то же количество вершин.

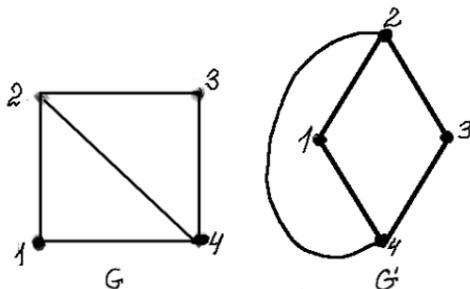


Рис. 5.1. Одинаковые помеченные графы

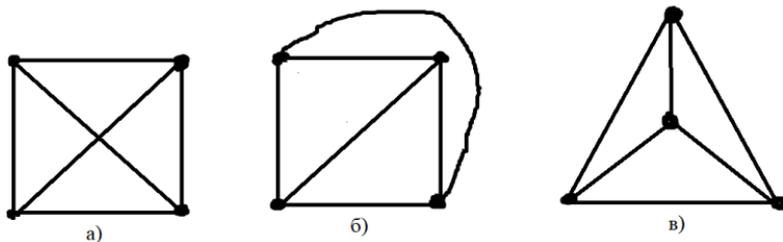


Рис. 5.2. Три изоморфных друг другу изображения графа  $K_4$

### Задачи

1. а) Сколько существует различных помеченных графов с  $N$  вершинами?

б) Тот же вопрос для помеченных орграфов с  $N$  вершинами.

в) Тот же вопрос для полных помеченных орграфов с  $N$  вершинами.

г) Тот же вопрос для помеченных графов с  $N$  вершинами и  $t$  ребрами.

2. Сколько существует различных неизоморфных непомеченных графов с тремя вершинами?

3. Какой граф называют пустым?

4. Верно ли, что объединение двух не пересекающихся полных графов  $K_5$  и  $K_3$  изоморфно  $K_8$ ?

5. Дайте определение двудольного графа.

6. а) В одной доле помеченного двудольного графа содержится  $p$  красных вершин, а в другой доле этого графа содержится  $q$  синих вершин. Сколько существует различных помеченных двудольных графов, удовлетворяющих этим условиям?

б) Тот же вопрос в случае двудольного орграфа.

7. Изобразите матрицу смежности полного графа  $K_5$ .

8. Изобразите матрицу смежности полного двудольного графа  $K_{3,4}$

9. Что такое степень вершины графа?

10. Докажите, что суммы степеней вершин двудольного графа одинаковы для обеих долей.

## 6. Подграфы

**Определение 6.1.** Граф  $\Gamma$  называется *подграфом* графа  $G$ , если все его ребра и вершины принадлежат  $G$ .

**Определение 6.2.** Подграф  $\Gamma$  графа  $G$  называется *остовным*, если множество его вершин совпадает с множеством вершин графа  $G$ .

**Определение 6.3.** Граф  $G'$  называют *дополнительным* по отношению к графу  $G$ , если у  $G$  и у  $G'$  одно и то же множество вершин и при этом каждая пара вершин в  $G'$  соединена ребром в том и только том случае, когда эта пара вершин не соединена ребром в графе  $G$ .

**Определение 6.4.** Пусть  $U$  – некоторое подмножество множества вершин графа  $G$ . Подграф графа  $G$  называют

порожденным множеством  $U$ , если множество его ребер состоит из всех тех ребер графа  $G$ , концы которых принадлежат  $U$ . Такой подграф обозначают  $G(U)$ .

## 7. Удаление вершины. Удаление ребра

**Определение 7.1.** «Удалить вершину  $v$ » из графа  $G$  – это значит удалить не только саму вершину  $v$ , но и все ребра, инцидентные ей (т.е. ребра, чьим концом является эта вершина). Результат такой операции обозначают  $G - v$ .

**Определение 7.2.** «Удалить ребро  $e$ » из графа  $G$  – это значит удалить именно это ребро  $e$ . Концы ребра при этом из графа не удаляются. Результат этой операции обозначают  $G - e$ .

### Обозначение

Если из графа  $G$  удаляется некоторое подмножество  $U$  его вершин, то получившийся граф обозначают так:  $G - U$ .

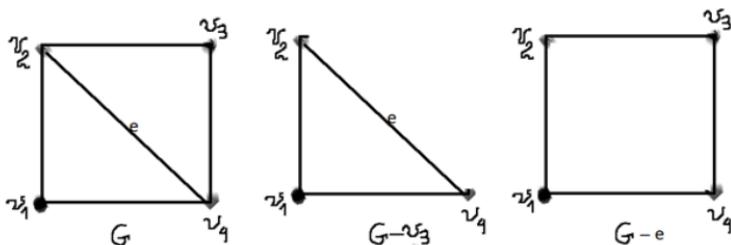


Рис 7.1. Удаление из графа вершины и ребра

## 8. Задача о любых шести людях и не только

**8.1. Задача о пяти боксерах.** Проводится турнир по боксу по круговой системе (каждый боксирует с каждым, никто не вылетает из турнира до его окончания). Всего 5 участников:  $A, B, C, D, E$ .

При этом к настоящему моменту успели выступить:  $A - 4$  раза,  $B - 3$  раза,  $C$  и  $D -$  по 2 раза,  $E - 1$  раз. Верно ли, что  $C$  и  $D$  боксировали друг с другом? Ответ объясните.

Попробуйте решить эту задачу в уме, не глядя на рис. 8.1.

### Решение задачи о пяти боксерах

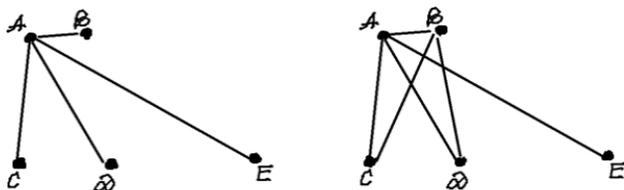


Рис. 8.1

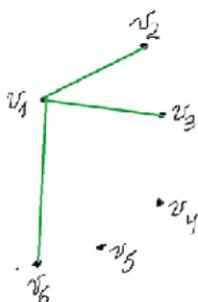
**8.2. Задача о любых шести людях (трех знакомых или трех незнакомых).** Докажите, что среди произвольно взятых шести людей обязательно найдутся трое не знакомых друг с другом или трое знакомых между собой.

**Решение** (см. [1]). Прежде чем решать эту задачу, опираясь на геометрические соображения, попробуем решить ее простым перебором, который можно поручить машине. Обозначим произвольно взятых людей (которых будем считать вершинами графа) через  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ . Знакомство/незнакомство между людьми будем считать ребрами графа. Таким образом, ребра нашего графа бывают двух типов: зеленые (знакомство) и желтые (незнакомство). Подсчитаем количество вариантов, которые нужно было бы рассмотреть при полном переборе. Прежде всего, количество различных пар, составленных из шести людей равно  $C_6^2 = 6 \cdot 5 / 2! = 15$ . Расположим эти пары в некотором фиксированном порядке, у нас получится кортеж длины 15. Каждая из этих пар представляет собой ребро, связывающее

двух людей из нашей шестерки, причем цвет любого ребра не зависит от цвета остальных ребер и может принимать одно из двух значений: «зеленый» или «желтый». По правилу произведения из комбинаторики общее число вариантов равно  $2^{15} = 32\,768$ .

И для каждого из этих вариантов мы должны проверить справедливость утверждения задачи!

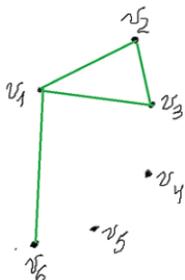
Однако геометрические соображения избавляют нас от огромного перебора всех возможных вариантов раскраски ребер графа.



Из вершины  $v_1$  исходят 5 ребер.

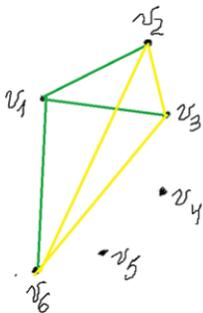
По крайней мере три из них – одного цвета (например, зеленого)

Рис. 8.2. Задача о шести произвольных людях-1



Если хотя бы одно из ребер  $(v_2, v_3)$ ,  $(v_2, v_6)$ ,  $(v_3, v_6)$  – зеленое, то мы нашли зеленый треугольник

Рис. 8.3. Задача о шести произвольных людях-2



Если ни одно из ребер  $(v_2, v_3)$ ,  $(v_2, v_6)$ ,  $(v_3, v_6)$  – не зеленое, то мы нашли желтый треугольник

Рис. 8.4. Задача о шести произвольных людях-3

**8.3. Задача об оазисах в пустыне** (идея взята из [12, с. 19]). В пустыне страны Карабасия  $N$ ,  $N \geq 4$  оазисов. Известно, что среди любых четырех из них обязательно найдется один, удаленный от трех остальных больше, чем на 100 км. Доказать, что в этой пустыне существует оазис, удаленный от всех остальных оазисов больше, чем на 100 км.

**Решение.** Будем считать оазисы вершинами графа; при этом каждые два оазиса, удаленные друг от друга больше, чем на 100 км, считаем соединенными ребром. Пусть наибольшая из степеней вершин нашего графа равна  $n$ . (Заметим, что из условия следует, что  $n \geq 3$ .) Если  $n = N-1$ , то доказывать нечего.

Предположим, что  $n < N-1$ , и будем рассуждать от противного. Обозначим вершину, степень которой равна  $n$ , через  $V$ , а вершины, удаленные от  $V$  больше, чем на 100 км, через  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ . Пусть теперь  $W$  – вершина, отличная от  $V$  и не принадлежащая множеству  $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$ . Рассмотрим четверку вершин:

$W, V, X_1, X_2$ . По условию, среди этой четверки вершин обязательно найдется одна, удаленная от каждой из остальных больше, чем на 100 км. Очевидно, что такой вершиной

не может быть ни  $W$ , ни  $V$  (поскольку расстояние между  $W$  и  $V \leq 100$  км). Пусть, например, вершина  $X_1$  удалена от  $W$ ,  $V$ ,  $X_2$  больше, чем на 100 км. Рассмотрим теперь следующую четверку вершин:  $W$ ,  $V$ ,  $X_1$ ,  $X_3$ . (Внимание, это тонкий момент в доказательстве!) *Очевидно*, что мы снова можем сказать, что  $X_1$  удалена от остальных трех вершин больше, чем на 100 км. Продолжая процесс, в результате получим, что вершина  $X_1$  удалена больше, чем на 100 км от каждой из вершин  $W$ ,  $V$ ,  $X_2$ ,  $X_3, \dots, X_n$ . Но это, в свою очередь, означает, что степень вершины  $X_1$  больше или равна  $n + 1$ . Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

**Замечание.** Полученный результат можно усилить.

Действительно, среди  $N$  оазисов мы обнаружили один, удаленный от всех остальных на расстояние  $> 100$  км. Исключим из рассмотрения этот оазис, тогда оставшихся оазисов будет всего  $N - 1$ . Если  $N - 1 \geq 4$ , то среди оставшихся оазисов найдется еще один, удаленный от (всех!) остальных оазисов больше, чем на 100 км. Итак, в нашем распоряжении уже два оазиса, удаленных друг от друга и от всех остальных больше, чем на 100 км. Продолжая процесс до тех пор, пока это возможно, получим, что найдутся по крайней мере  $N - 3$  оазиса, удаленные друг от друга и от всех остальных больше, чем на 100 км.

**Другое решение задачи 8.3.** Приведем еще одно, совсем короткое геометрическое решение этой задачи.

Будем на этот раз считать, что соединены ребрами те оазисы, которые отстоят друг от друга *не более*, чем на 100 км. Заметим, что таких ребер не больше трех. Действительно, если предположить, что в нашем графе имеется не менее четырех ребер, то обязательно найдется четверка оазисов, взаимное расположение которых противоречит условию. Посмотрим теперь, какие варианты возникают в случае существования трех ребер в нашем графе (см. рис. 8.5–8.9).



Рис. 8.5



Рис. 8.6



Рис. 8.7

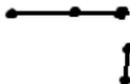


Рис. 8.8



Рис. 8.9

Очевидно, что только ситуация, изображенная на рис. 8.9, не противоречит условию задачи. Итак, имеется по крайней мере  $N - 3$  оазисов, не инцидентных ни одному ребру. Это значит, что любой из них удален от каждого из (всех!) остальных оазисов больше, чем на 100 км.

Наконец, случаи, когда число ребер в нашем графе меньше трех, рассматриваются аналогично.

**8.4. Задача о старинном гобелене.** *К старинному гобелену пришито  $N$ ,  $N > 3$  алмазов. Известно, что из трех произвольно взятых алмазов по крайней мере два отстоят друг от друга меньше, чем на 1 дм. Доказать, что множество алмазов можно разбить на два непересекающихся подмножества, каждое из которых расположено внутри круга радиуса 1 дм. (Одно из этих подмножеств может быть пустым.)*

**Решение.** Будем считать алмазы вершинами графа  $G$ ; каждую пару вершин, расстояние между которыми меньше 1 дм, считаем соединенными ребром. Пусть  $n$  – максимальная степень вершины в графе  $G$ ; обозначим соответствующую вершину через  $V$ . (Очевидно, что  $n \geq 1$ .) Если  $n = N - 1$  или  $N - 2$ , то доказывать нечего.

Рассмотрим теперь случай, когда  $n \leq N - 3$ . Удалим из графа  $G$  вершину  $V$  и все смежные с ней вершины. Очевидно, что множество удаленных вершин содержится внутри круга радиуса 1 дм (с центром в вершине  $V$ ). Далее, нетрудно видеть, что множество оставшихся вершин также целиком расположено внутри некоторого круга радиуса 1 дм. Действительно, в противном случае в этом множестве нашлись бы две вершины  $U$  и  $W$ , отстоящие друг от друга больше, чем на 1 дм. В результате, мы получили бы тройку вершин  $V, U, W$ , попарные расстояния между которыми  $> 1$  дм, что противоречит условию задачи.

**Замечание.** Иной (более сложный, но интересный) подход к решению этой задачи содержится в [12, с. 19].

**8.5. Задача о точках в пространстве.** *В пространстве расположено  $N$ ,  $N \geq 4$  точек. Известно, что из четырех произвольно взятых точек по крайней мере две отстоят друг от друга меньше, чем на 1 м. Доказать, что рассматриваемое множество точек можно разбить на три непересекающихся подмножества, каждое из которых расположено внутри сферы радиуса 1 м. (Одно или два из этих подмножеств могут быть пустыми.)*

**Решение.** Будем считать точки вершинами графа  $G$ ; каждую пару вершин, расстояние между которыми меньше 1 м, считаем соединенными ребром. Пусть  $n$  – максимальная степень вершины в графе  $G$ ; обозначим соответствующую вершину через  $V$ . (Очевидно, что  $n \geq 1$ .) Если  $n = N - 1$  или  $N - 2$  или  $N - 3$ , то доказывать нечего.

Рассмотрим теперь случай, когда  $n \leq N - 4$ . Прежде всего, заметим, что множество  $M$ , образованное вершиной  $V$  и всеми смежными с ней вершинами, располагается внутри единичной сферы (с центром в вершине  $V$ ).

Удалим из графа  $G$  вершину  $V$  и все смежные с ней вершины. В результате получим граф  $G_1$ , с которым проделаем аналогичную процедуру. После чего получим множество вершин  $M_1$ , содержащееся внутри единичной сферы, а также граф  $G_2$ . Если граф  $G_2$  не пуст, то множество  $M_2$  всех его вершин, очевидно, должно также содержаться внутри единичной сферы. (В противном случае, у нас образовалась бы четверка вершин, все попарные расстояния между которыми больше 1 м.) Итак, множество вершин графа  $G$  представимо в виде объединения трех непересекающихся множеств:  $M \cup M_1 \cup M_2$ , каждое из которых содержится в единичной сфере.

## 9. Маршруты в графах. Связность

**Определение 9.1.** *Маршрутом* в графе  $G$  называется такая последовательность чередующихся вершин и ребер этого графа, которая начинается и оканчивается вершиной, причем каждое ребро инцидентно вершинам, между которыми оно встречается в последовательности.

Нетрудно понять, что маршрут в графе можно задать, перечислив соответствующую последовательность его вершин. (При этом подразумевается, что каждые два соседних члена последовательности вершин соединяет ребро графа  $G$ .) Отметим, что изолированные вершины графа никогда не могут быть частью маршрута. Отдельно взятая изолированная вершина также не считается маршрутом.

**Замечание.** Одно и то же ребро может встречаться в маршруте несколько раз. Точно так же, одна и та же вершина может встречаться в маршруте более одного раза.

Маршрут называют *замкнутым (открытым)*, если его первая и последняя вершины совпадают (не совпадают). На рис. 9.1 изображен открытый маршрут.

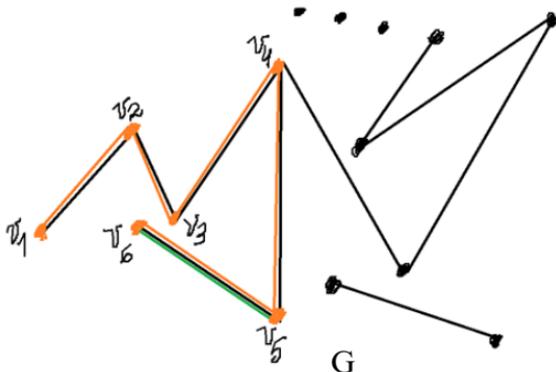


Рис. 9.1.  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ -маршрут в графе  $G$

**Обозначение.** Маршрут, начинающийся в вершине  $v$  и заканчивающийся в вершине  $w$ , будем называть  $(v, w)$ -маршрутом.

**Определение 9.2.** Маршрут в графе называется *цепью*, если ни одно его ребро не повторяется при прохождении маршрута.

**Определение 9.3.** Маршрут в графе называется *простой цепью*, если ни одно его ребро не повторяется и ни одна его вершина (кроме, возможно, крайних) тоже не повторяется.

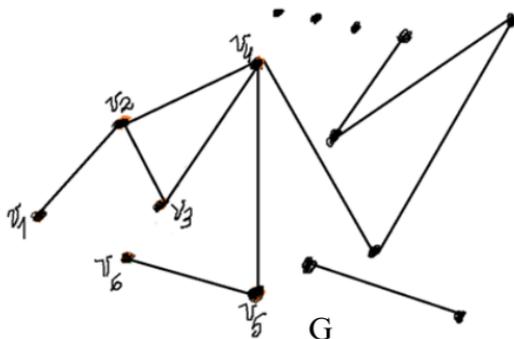
**Определение 9.4.** Замкнутую цепь называют *циклом*. Замкнутую простую цепь называют *простым циклом*.

**Утверждение 9.1.** *Всякий  $(v, w)$ -маршрут, если  $v$  не совпадает с  $w$ , содержит простую  $(v, w)$ -цепь.*

**Доказательство.** Это утверждение геометрически очевидно.

**Замечание.** В то же время, если  $v = w$ , соответствующее утверждение становится неверным (см. рис. 9.2).

**Замечание.** Всякий  $(v, v)$ -маршрут содержит простую  $(v, v)$ -цепь, если первое и последнее ребро маршрута не совпадают.



Маршрут  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_4, v_2, v_1)$  не содержит простой цепи  $(v_1, v_1)$ .  
 Маршрут  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_4, v_2)$  содержит простую цепь  $(v_1, v_2)$

Рис. 9.2

**Утверждение 9.2.** *Всякий цикл содержит внутри себя простой цикл.*

**Доказательство** геометрически очевидно (см. рис. 9.3).

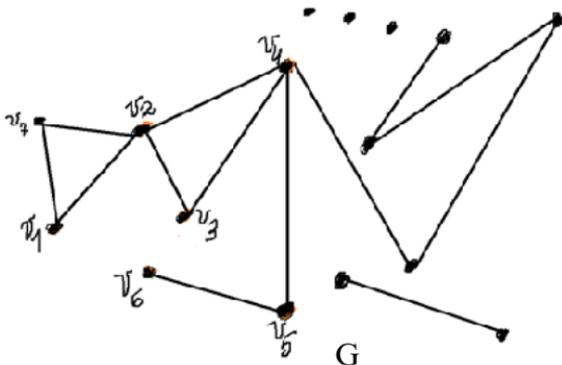


Рис. 9.3. Маршрут  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_7, v_1)$  содержит простой цикл  $(v_1, v_2, v_7, v_1)$

**Определение 9.5.** Граф называется *связным*, если для каждой пары его вершин найдется маршрут, соединяющий эти вершины.

**Определение 9.6.** *Компонентой связности* графа  $G$  называется любой его связный подграф  $\Gamma$ , не являющийся частью какого-либо большего связного подграфа графа  $G$ .

Очевидно, что каждый несвязный граф является объединением своих компонент связности.

**Утверждение 9.3.** Пусть  $G$  – связный граф,  $e$  – ребро, принадлежащее какому-либо циклу графа  $G$ . Тогда граф  $G - e$  связан.

**Доказательство** геометрически очевидно.

**Утверждение 9.4.** Каждый цикл (если он не является простым) можно представить в виде объединения простых циклов, не имеющих общих ребер.

**Доказательство** геометрически очевидно (см. рис. 9.4).

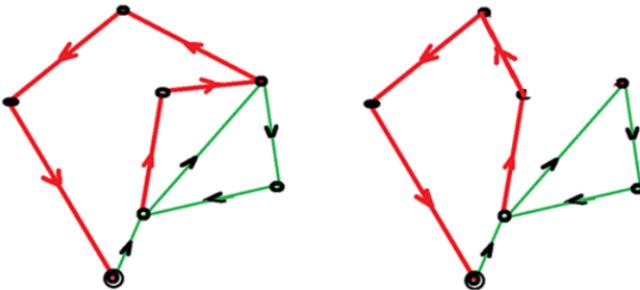


Рис. 9.4. Всякий цикл можно представить в виде объединения простых циклов, не имеющих общих ребер

**Утверждение 9.5.** В любом непустом графе  $G$  всегда найдутся две вершины одинаковой ненулевой степени. (См. по этому поводу [12, с. 12, а также с. 143].)

**Доказательство.** Не ограничивая общности, можно с самого начала считать граф  $G$  связным. (Действительно, если рассматриваемый граф не связан, достаточно доказать сделанное утверждение для какой-либо непустой связной компоненты этого графа.) Пусть в графе  $G$  имеется всего  $n$  вершин. Тогда степени вершин непустого связного графа  $G$ , очевидно, принадлежат множеству

$$M = \{1, 2, \dots, n - 1\}.$$

Будем рассматривать элементы множества  $M$  как ящики, а вершины графа  $G$  – как шары, которые нужно разложить по этим ящикам. Так как шаров  $n$  штук – больше, чем ящиков, то обязательно какие-то два шара окажутся в одном ящике. Теорема доказана.

**Замечание.** Нетрудно проверить, что утверждение 9.5, вообще говоря, *неверно* для графов с петлями, мультиграфов и псевдографов.

**Утверждение 9.6** (см. [12, с.33]). *Пусть  $G$  – граф, содержащий  $n$  вершин, и пусть минимальная степень вершины в графе  $G$  больше или равна  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ , где  $k$  – натуральное,  $k > 1$ . (Квадратные скобки обозначают целую часть числа.) Тогда число компонент связности графа  $G$  меньше  $k$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\Gamma$  – компонента связности графа  $G$ , содержащая наименьшее число вершин. Очевидно, что число вершин в  $\Gamma$  не меньше, чем  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1$ . (Действительно, в противном случае степени всех вершин из  $\Gamma$  были бы меньше  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ , что противоречит условию.)

Будем теперь рассуждать от противного. Предположим, что  $G$  содержит не менее, чем  $k$  компонент связности.

Очевидно, что в каждой из этих компонент должно содержаться не меньше, чем  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1$  вершин. Но тогда для числа вершин графа  $G$  должно выполняться неравенство:

$$n \geq (\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1)k,$$

что, очевидно, невозможно.

**Замечание.** Нетрудно понять, что утверждение 9.6 не переносится на случай графов с петлями и мультиграфов.

**Замечание.** В случае  $k = 2$  из утверждения 9.6 следует, что граф  $G$  состоит из единственной компоненты, т.е. является связным.

**Утверждение 9.7** (см. [18]). Пусть  $G$  – граф с  $n$  вершинами ( $n \geq 4$ ). Обозначим через  $t$  число ребер в этом графе. Тогда если

$$t > C_{n-1}^2,$$

то граф  $G$  – связный.

**Доказательство.** Покажем, что при любом натуральном  $s$  таком, что

$$2 \leq s \leq n - 2,$$

будет выполняться неравенство

$$C_{n-s}^2 + C_s^2 < C_{n-1}^2.$$

Справедливость последнего неравенства проверяется непосредственным вычислением.

Однако из последнего неравенства легко следует, что наибольшее количество ребер в несвязном  $n$ -вершинном графе достигается, когда этот граф представляет собой объединение полного графа  $K_{n-1}$  и одной изолированной вершины. Если  $t$  превосходит эту величину, то граф  $G$ , очевидно, оказывается связным.

## Задачи

1. Проводится турнир по шашкам по круговой системе (каждый играет с каждым, никто не вылетает из турнира до его окончания). Всего 8 участников:  $A, B, C, D, E, F, G, H$ .

При этом к настоящему моменту успели выступить  $A$  – 7 раз,  $B, C$  и  $D$  – по 3 раза,  $E, F, G$  и  $H$  – по 1 разу. Верно ли, что  $C$  и  $D$  играли друг с другом? Ответ объясните.

2. Проводится турнир по домино по круговой системе (каждый играет с каждым, никто не вылетает из турнира до его окончания). Всего 8 участников:  $A, B, C, D, E, F, G, H$ .

При этом к настоящему моменту успели выступить  $A$  – 7 раз,  $B$  – 4 раза,  $C$  и  $D$  – по 3 раза,  $E$  – 2 раза,  $F, G$  и  $H$  – по 1 разу. Верно ли, что  $C$  и  $D$  играли друг с другом? Ответ объясните.

3. Верно ли, что среди каждых семи человек обязательно найдутся либо трое знакомых друг с другом, либо трое не знакомых друг с другом?

4. Верно ли, что среди каждых пяти человек обязательно найдутся либо трое знакомых друг с другом, либо трое не знакомых друг с другом?

5. Верно ли, что в группе из пяти человек никогда не могут одновременно найтись трое знакомых друг с другом и трое незнакомых друг с другом?

6. Что такое маршрут в графе?

7. Что такое висячая вершина? Существуют ли графы без висячих вершин?

8. Может ли у графа быть ровно одна висячая вершина?

9. Что такое мультиграф?

10. Что такое псевдограф?

11. Чем отличается цикл от простого цикла?

12. Может ли у графа быть сто компонент связности?

13. Придумайте определение компоненты связности для мультиграфа и для псевдографа.

14. Является ли схема метро псевдографом? Сколько компонент связности у схемы метро?

## 10. Расстояние в графе. Поиск в ширину

**Определение 10.1.** Расстоянием между вершинами  $v$  и  $w$  в связном графе  $G$  называется наименьшее возможное количество ребер в маршруте, соединяющем эти вершины.

**Обозначение** расстояния между вершинами  $v$  и  $w$ :  $d(v, w)$ .

Число ребер в маршруте называется его *длиной*.

Существенно, что введенное таким образом расстояние между вершинами обладает всеми свойствами *метрики*. А именно, для любых трех вершин  $u, v, w$  справедливо:

1)  $d(u, v) \geq 0$ ; причем  $d(u, v) = 0$  тогда и только тогда, когда  $u = v$ ;

2)  $d(u, v) = d(v, u)$ ;

3)  $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ .

**Определение 10.2.** (Первое определение «поиска в ширину».)

Выберем в связном графе  $G$  произвольную вершину  $w$  и припишем ей номер «0». Затем рассмотрим все вершины, расстояние которых до  $w$  равно 1, и припишем им номер «1».

Далее, всем вершинам, расстояние которых до  $w$  равно 2, припишем номер «2».

Затем всем вершинам, расстояние которых до  $w$  равно 3, припишем номер «3», и так далее. В результате всем вершинам графа  $G$  будут приписаны номера. Описанная процедура, позволяющая обойти все вершины связного графа, и называется *поиском в ширину*.

Существует другое, более экономное для применения, определение «поиска в ширину» (определение это эквивалентно предыдущему).

**Определение 10.2'.** (Второе определение «поиска в ширину».)

Выберем в связном графе  $G$  произвольную вершину  $w$  и припишем ей номер «0». Затем рассмотрим все вершины, расстояние которых до  $w$  равно 1, и припишем им номер «1».

Далее, всем вершинам, еще не имеющим номера и при этом смежным с вершинами, имеющими номер «1», припишем номер «2».

Затем всем вершинам, еще не имеющим номера и смежным с вершинами, имеющими номер «2», припишем номер «3», и так далее. В результате всем вершинам связного графа  $G$  будут приписаны номера. Описанную процедуру посещения всех вершин связного графа и называют *поиском в ширину*.

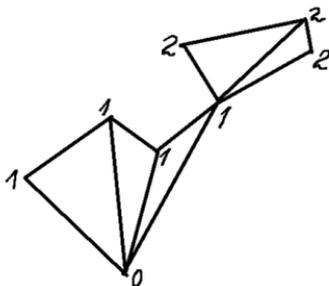


Рис. 10.1. Поиск в ширину

## 11. Критерий двудольности графа

Итак, при помощи поиска в ширину реализуется упорядоченный просмотр всех вершин графа. Для наших целей (выяснения вопроса о двудольности графа) полезно заметить, что при помощи поиска в ширину удастся разбить множество  $E$  всех вершин графа на два (непересекающихся) класса: вершины с четными номерами  $E_0$  и вершины с нечетными номерами  $E_1$ .

**Теорема 11.1** (теорема Кёнига о двудольных графах). *Для двудольности непустого графа  $G$  необходимо и достаточно, чтобы в нем отсутствовали циклы нечетной длины.*

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $G$  – (непустой) двудольный граф. Тогда геометрически очевидно, что в нем не может быть циклов нечетной длины.

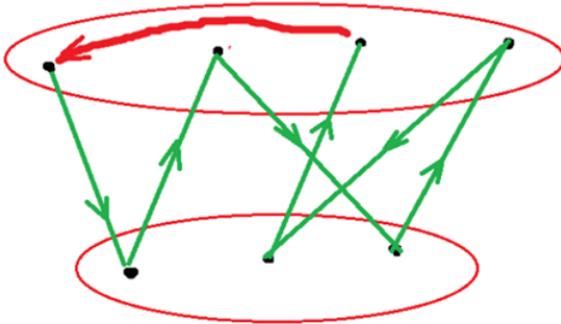


Рис. 11.1. Условие двудольности нарушено.  
Имеется цикл нечетной длины

**Достаточность.** Пусть в непустом графе  $G$  отсутствуют циклы нечетной длины. Покажем, что граф  $G$  – двудольный. (Не ограничивая общности, считаем граф  $G$  связным.)

Точнее, покажем, что, взяв произвольную вершину  $w$ , присвоив ей номер «0» и построив затем при помощи процедуры «поиска в ширину» множество  $E_0$  вершин с четными номерами и множество  $E_1$  вершин с нечетными номерами, мы получим искомое разбиение множества всех вершин на две доли, внутри которых никакая пара вершин не соединена ребром.



Рис. 11.2  
Доказательство  
теоремы Кёнига

Будем рассуждать от противного. Пусть, например, в множестве  $E_0$  содержатся две вершины  $u$  и  $v$ , соединенные ребром.

Прежде всего, очевидно из соображений четности (и из определения расстояния в графе), что должно быть

$$d(w, u) = d(w, v) \quad (11.1)$$

(см. рис. 11.2). В результате, учитывая ребро, соединяющее вершины  $v$  и  $u$ , мы мгновенно получаем цикл нечетной длины, равной  $d(w, u) + 1 + d(w, v)$ . Теорема доказана.

Приведем еще один критерий двудольности графа, немного отличающийся от теоремы Кёнига.

**Теорема 11.2.** Для двудольности непустого графа  $G$  необходимо и достаточно, чтобы в нем был невозможен замкнутый маршрут нечетной длины.

**Доказательство.** Необходимость геометрически очевидна.

**Достаточность.** Пусть в  $G$  невозможно проложить замкнутый маршрут нечетной длины. Будем рассуждать почти так же, как при доказательстве предыдущей теоремы.

Возьмем произвольную вершину  $w$ , присвоим ей номер «0» и построим затем при помощи процедуры «поиска в ширину» множество  $E_0$  вершин с четными номерами и множество  $E_1$  вершин с нечетными номерами. В результате получим разбиение множества всех вершин на две доли, внутри которых никакая пара вершин не может быть соединена ребром. Действительно, предположим противное.

Пусть, например, в множестве  $E_1$  содержатся две вершины  $u$  и  $v$ , соединенные ребром. Перемещаясь из  $w$  в  $u$  за нечетное число шагов, затем из  $u$  в  $v$  за 1 шаг и, наконец, возвращаясь из  $v$  в  $w$  за нечетное число шагов, очевидно, получим замкнутый маршрут нечетной длины, т.е. мы приходим к противоречию. Теорема доказана.

**Следствие 1** (из теорем 11.1 и 11.2). *Для того, чтобы в непустом графе  $G$  мог быть проложен замкнутый маршрут нечетной длины, необходимо и достаточно, чтобы в  $G$  существовал цикл нечетной длины.*

**Следствие 2.** *В непустом графе  $G$  каждый замкнутый маршрут нечетной длины обязательно содержит цикл нечетной длины.*

Действительно, в качестве графа  $G$  всегда можно взять его подграф  $G'$ , образованный вершинами и ребрами рассматриваемого замкнутого маршрута.

**Замечание.** В то же время, наличие в графе замкнутого маршрута четной длины, очевидно, не гарантирует существования в этом графе никакого цикла (неважно, какой длины – четной или нечетной).

### **Задачи**

1. Пусть известно, что  $G$  – связный двудольный граф. Верно ли, что тогда разбиение множества его вершин на доли задано однозначно?

**Решение.** Расстояние между вершинами из одной доли всегда четно, а между вершинами из разных долей – всегда нечетно. Поэтому разбиение множества вершин графа  $G$  на доли определено однозначно.

2. Тот же вопрос для связного трехдольного графа.

Указание. Рассмотрите контрпример, изображенный на рис. 11.3.

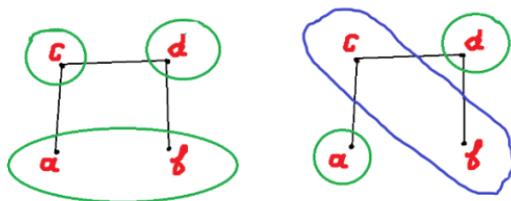


Рис. 11.3

3. Два двудольных графа, не имеющих общих вершин, соединили ребром. Будет ли получившийся граф обязательно двудольным?

4. Может ли замкнутый маршрут четной длины содержать ровно один цикл, притом нечетной длины?

Указание. Добавьте новую вершину на одно из ребер цикла.

5. Может ли замкнутый маршрут нечетной длины содержать ровно два цикла нечетной длины, притом не имеющие общих ребер?

Указание. На какое-либо одно ребро каждого из обоих циклов добавьте по одной новой вершине.

6. Верна ли теорема Кенига для мультиграфов?

## 12. Вершинная и реберная связность. Точка сочленения. Мост

**Определение 12.1.** Числом вершинной связности  $k(G)$  непустого связного графа  $G$  называют наименьшее число вершин, которые нужно удалить из  $G$ , чтобы получился несвязный или одновершинный граф.

**Определение 12.2.** Числом реберной связности  $l(G)$  непустого связного графа  $G$  называют наименьшее число ребер, которые нужно удалить из  $G$ , чтобы получился несвязный граф.

### Обозначения

Будем обозначать через  $P_n$  простую цепь, содержащую  $n$  вершин и такую, что ее крайние вершины не совпадают, а через  $C_n$  – простой цикл, содержащий  $n$  вершин.

Нетрудно видеть, что (см. рис. 12.1):

$$k(P_n) = 1, \quad k(C_n) = 2, \quad l(P_n) = 1, \quad l(C_n) = 2.$$

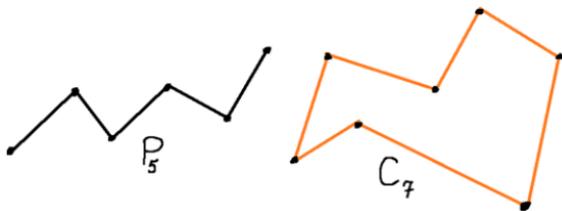


Рис. 12.1. Простая цепь, простой цикл.  
К вопросу о вершинной и реберной связности

Кроме того, геометрически очевидно, что

$$k(K_1) = 0; \quad k(K_2) = 1; \quad k(K_3) = 2; \quad k(K_4) = 3; \dots$$

(см. рис. 12. 2).

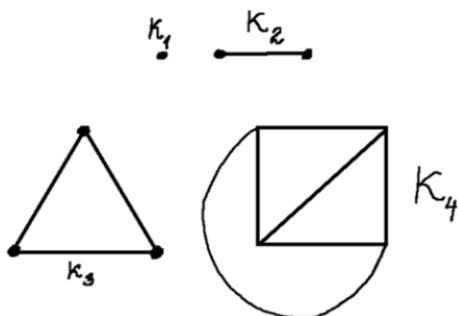


Рис. 12.2. К вопросу о вершинной связности полных графов

**Определение 12.3.** Вершина  $w$  графа  $G$  называется *точкой сочленения* этого графа, если  $G - w$  имеет больше компонент связности, чем  $G$  (см. рис. 12.3).

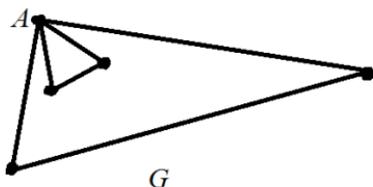


Рис. 12.3. Точка сочленения

**Определение 12.4.** Ребро  $e$  графа  $G$  называется *мостом* этого графа, если  $G - e$  имеет больше компонент связности, чем  $G$  (см. рис. 12.4).

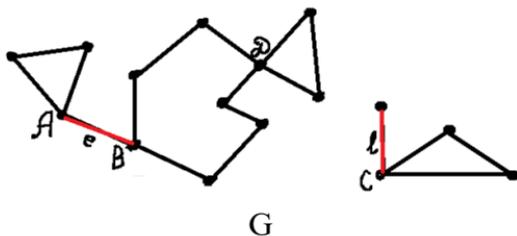


Рис. 12.4. Точки сочленения и мосты

**Теорема 12.1** (см. [1, с. 68]). Для любого графа  $G$  верны неравенства:

$$k(G) \leq l(G) \leq \delta(G), \quad (12.1)$$

где  $\delta(G)$  – минимальная из степеней вершин графа  $G$ .

**Замечание.** Пусть в графе  $G$ , имеющем  $n$  вершин, степень каждой вершины  $\geq n/2$ . Очевидно, что такой граф обязательно будет связным. Действительно, предположим противное. Тогда у  $G$  найдется компонента связности, в которой не больше  $n/2$  вершин. Следовательно, степени всех вершин этой компоненты не могут быть больше  $n/2 - 1$ . Тем самым мы пришли к противоречию.

(См. в этой связи также теорему 22.1.)

Заметим также, что если степень каждой вершины графа  $G$  строго больше  $n/2$ , то в  $G$  не может существовать мост. (Доказывается аналогично.)

### Задачи

1. Придумайте определение трехдольного графа.
2. Придумайте реалистичную модель трехдольного графа.
3. Соревновались две команды борцов  $(A, B, C)$  и  $(D, E, F)$  по системе «каждый с каждым». В 1-й команде все борцы  $A, B$  и  $C$  успели выступить по 2 раза. Во 2-й команде борцы  $D$  и  $E$  выступили по 3 раза. Сколько раз выступил борец  $F$ ?
4. Верно ли, что для введенного расстояния в связном графе для любых трех вершин справедливо соотношение  $d(u, v) + d(v, w) = d(u, w)$ ?
5. Пусть  $u$  и  $w$  – две вершины в связном графе  $G$ . Назовем **геодезической** любой маршрут наименьшей длины, соединяющий вершины  $u$  и  $w$ . Пусть  $v$  – какая-либо промежуточная вершина этого маршрута. Верно ли, что  $d(u, v) + d(v, w) = d(u, w)$ ?

6. Чему равно число вершинной связности  $k(K_5)$ ?
7. Пусть  $w$  – одна из вершин полного графа  $K_6$ . Верно ли, что  $K_6 - w = K_5$ ?
8. Чему равно число вершинной связности  $k(K_6)$ ?
9. Чему равно число вершинной связности  $k(K_n)$ ?
10. Чему равно число вершинной связности графа, изображенного на рис. 12.3?
11. Чему равно число реберной связности графа, изображенного на рис. 12.3?
12. Чему равно число вершинной связности графа  $G$ , изображенного на рис. 12.4?
13. Чему равно число реберной связности графа  $G$ , изображенного на рис. 12.4?
14. Объясните, почему при доказательстве теоремы Кёнига мы могли утверждать, что справедливо равенство (11.1):
- $$d(w, u) = d(w, v).$$
- 15\*. Из связного графа  $G$  удалили ребро  $e$ . Могут ли в результате образоваться три компоненты связности у графа  $G - e$ ? Указание: выясните, может ли существовать такая компонента связности графа  $G - e$ , которой не принадлежит ни один из концов ребра  $e$ .
- Указание: выясните, может ли существовать такая компонента связности графа  $G - e$ , которой не принадлежит ни один из концов ребра  $e$ .
16. Из связного графа  $G$  удалили вершину  $v$ . Могут ли в результате образоваться три компоненты связности у графа  $G - v$ ?

### 13. Поиск в глубину

Выше мы познакомились с так называемым «поиском в ширину». Процедура такого рода оправдана, когда мы ищем не просто какой-то маршрут в графе, а маршрут, удовлетворяющий определенным условиям оптимальности. *Например, допустим, что мы находимся в одной из вершин связного графа, но структура графа нам неизвестна, а передвижение по ребрам требует опять же заранее неизвестных затрат, о которых мы узнаем заходя на ребро. Предположим, далее, что в некоторых вершинах содержится Объект, который нам необходим. Но узнать, имеется ли Объект в какой-либо вершине, можно только побывав в ней.*

Использовать «поиск в ширину» для нахождения оптимального по затратам маршрута к Объекту вполне разумно.

**Замечание.** Связный граф всегда можно рассматривать как лабиринт, а присутствие Объекта в вершине – как наличие в этой вершине выхода из лабиринта.

Существуют задачи, когда требуется найти не оптимальное, а хоть какое-нибудь решение.

Поиск выхода из лабиринта вполне может быть отнесен к таким задачам.

В этом случае часто применяется так называемый поиск «*в глубину*». Пусть перед нами поставлена та же задача, что и выше, но затраты на передвижение по ребрам графа не нужно учитывать.

**Определение 13.1.** Вот как работает *поиск в глубину*. Исходя из начальной вершины, переходим к любой, смежной с ней. При этом отмечаем направление своего движения по ребру. Далее, если в посещенной вершине Объект не

обнаружен, переходим по любому еще не пройденному ребру в смежную вершину. Так действуем до тех пор, пока это возможно. Так как граф (по определению) конечен, то на некотором шаге действовать подобным образом становится невозможно. Тогда возвращаемся назад до первой развилки, где имеется еще не пройденное ребро, и повторяем процедуру. Если заранее известно, что Объект находится в некоторых вершинах графа, процедура в целом заканчивается нахождением Объекта.

**Замечание.** При поиске в глубину в качестве начальной может быть взята произвольная вершина графа. См. рис. 13.1, где в качестве начальной взята вершина  $w_0$ , а крестиком отмечены вершины, содержащие Объект.

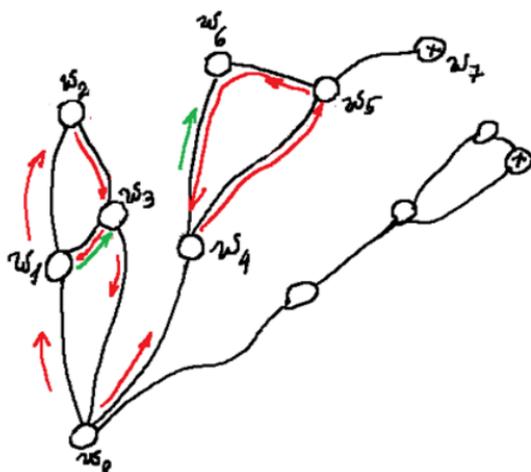
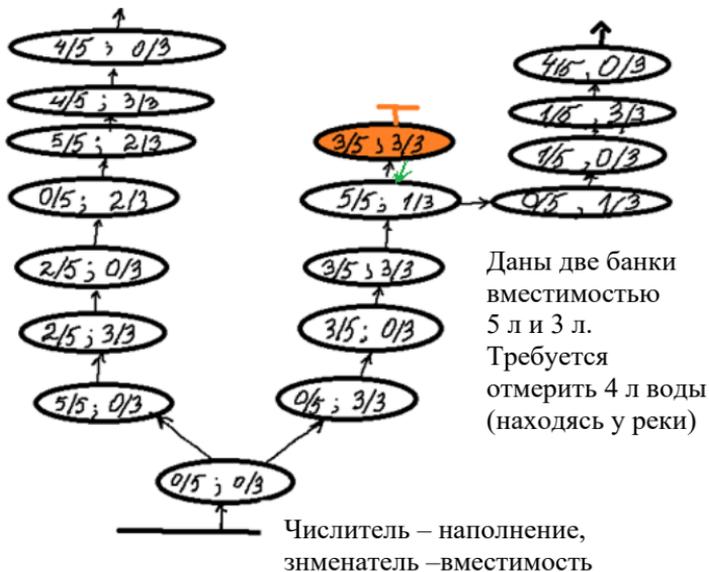


Рис. 13.1. Поиск в глубину

**Замечание.** В случае, когда граф не связный, процедура проводится для каждой компоненты в отдельности.

**Пример.** Поиск «в глубину» может быть использован при решении задач о переливаниях.

См., например, задачу, изображенную на рис. 13.2.



Даны две банки  
вместимостью  
5 л и 3 л.  
Требуется  
отмерить 4 л воды  
(находясь у реки)

Рис. 13.2

## Задачи

1. (Похожие задачи предлагались А.Л. Семеновым в его курсе математики и информатики в МПГУ.) В клетках квадратной таблицы размером  $100 \times 100$  записаны 11-значные числа. Как быстрее всего найти заранее заданное число?

2. В клетках квадратной таблицы размером  $100 \times 100$  расположены мобильные телефоны с 11-значными номерами. Как быстрее всего найти телефон с известным номером?

## 14. Кони на модифицированной шахматной доске 3×3

(См. по этому поводу также  
[https://function-x.ru/graphs1\\_relations.html](https://function-x.ru/graphs1_relations.html))

Рассматривается шахматная доска размером 3×3, из которой выпилена центральная клетка и приклеена к правой нижней угловой клетке (см. рис. 14.1).

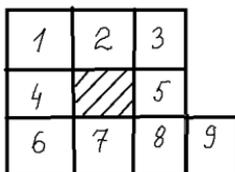


Рис. 14.1

На доске стоят кони А, В, С, D (см. рис. 14.2). Цвет коней неважен, поскольку у них есть индивидуальные имена.

**Задача.** *Можно ли (действуя по шахматным правилам) переставить коней в положение, изображенное на рис. 14.3? (На одной клетке две фигуры стоять, естественно, не могут.)*

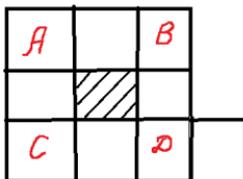


Рис. 14.2

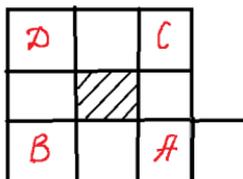


Рис. 14.3

**Решение.** Будем рассматривать модифицированную шахматную доску, изображенную на рис. 14.1, как граф G, в котором вершинами являются клетки, а ребрами, связывающими пары клеток, – возможные (по шахматным правилам) ходы коня из одной клетки в другую.

Нарисуем этот граф, изобразив вершины графа  $G$  в виде точек, а связывающие их ребра – в виде отрезков (т.е. придадим нашему графу более привычный вид); см. рис. 14.4.

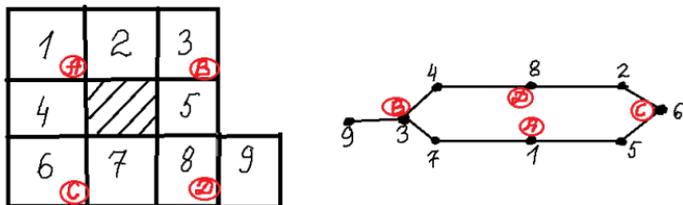


Рис. 14.4

Из рис. 14.4 геометрически очевидно, что мы можем поменять местами любых двух коней. Отсюда, очевидно, и следует утвердительный ответ на вопрос задачи.

## 15. Деревья

**Определение 15.1.** Непустой связный граф, в котором нет циклов, называется *деревом*.

**Определение 15.2.** Граф, все компоненты связности которого представляют собой деревья, называется *лесом*.

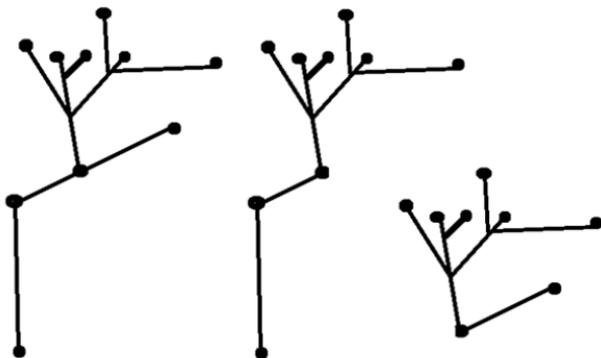


Рис. 15.1. Лес, состоящий из трех деревьев

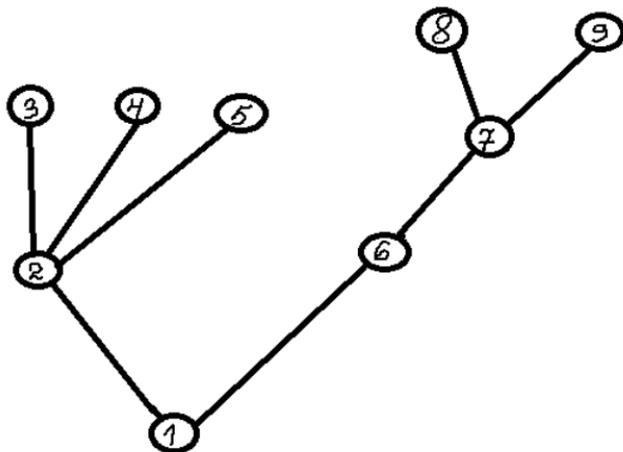


Рис. 15.2. Поиск «в глубину» в дереве

(Номера, присвоенные вершинам дерева, отражают очередность их первого посещения)

**Утверждение 15.1.** *Предположим, что в графе  $G$  степень каждой вершины  $\geq 2$ . Тогда в этом графе есть цикл.*

**Доказательство.** Утверждение геометрически очевидно. Действительно, возьмем произвольную вершину  $u_1$  в качестве начальной и начнем прокладывать из нее маршрут, *запретив себе дважды проходить по одному и тому же ребру*. Никакая впервые посещенная вершина не может оказаться тупиком, из которого дальше нет хода. Однако общее число вершин конечно, поэтому какая-то вершина обязательно повторится до того как мы исчерпаем возможность прокладывать далее свой маршрут. Тем самым искомый цикл будет обнаружен.

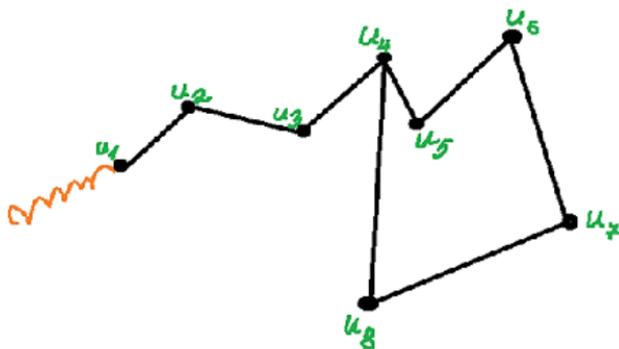


Рис. 15.3. Цикл в графе с кратностью вершин, не меньшей 2

**Замечание.** Из условий Утверждения 15.1 вовсе не следует, что каждая вершина графа  $G$  принадлежит какому-нибудь циклу (см. рис. 15.3а).

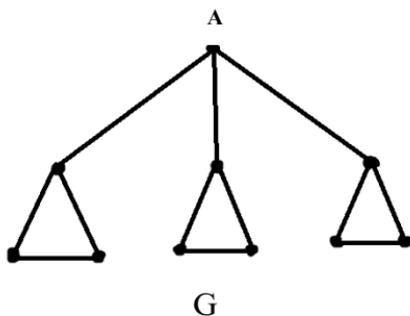


Рис. 15.3а. Вершина  $A$  графа  $G$  не принадлежит никакому циклу

**Утверждение 15.2.** *В каждом дереве есть хотя бы одна висячая вершина.*

**Доказательство.** Будем рассуждать от противного. Предположим, что в некотором дереве нет висячих вершин. Тогда степень каждой вершины этого дерева  $\geq 2$ . Но тогда в силу Утверждения 15.1 в рассматриваемом графе должен существовать цикл, что противоречит определению дерева.

**Следствие.** В каждом дереве имеются как минимум две висячие вершины.

**Доказательство.** Итак, рассмотрим произвольное дерево. Выберем в качестве начальной вершины имеющуюся у него висячую вершину и начнем строить маршрут до тех пор, пока это возможно. Ввиду конечности множества вершин этот маршрут должен закончиться в какой-то вершине. Но конечная вершина маршрута, очевидно, не может совпадать ни с одной из вершин, посещенных ранее, так как в противном случае в рассматриваемом графе имелся бы цикл. Поэтому конечная вершина маршрута – как и его начальная вершина – является висячей.

**Теорема 15.1** (о деревьях). *Непустой связный граф является деревом тогда и только тогда, когда число его ребер ( $m$ ) и число его вершин ( $n$ ) связаны соотношением*

$$m = n - 1. \quad (15.1)$$

**Напоминание о методе математической индукции.** Пусть имеется утверждение  $A(n)$ , зависящее от натурального номера  $n$ .

Наша цель доказать это утверждение при всех натуральных  $n$ , начиная с некоторого  $n_0$ . Метод математической индукции позволяет (при определенных условиях) сделать это, «опираясь на недоказанное». *А именно, если удастся установить, что:*

1)  $A(n_0)$  истинно;

2) из предположения об истинности  $A(k)$  при произвольно выбранном  $k$ ,  $k \geq n_0$  следует истинность  $A(k + 1)$ , то можно утверждать, что  $A(n)$  истинно при всех натуральных  $n$ , больших или равных  $n_0$  (см. рис. 15.4).

Метод матем. индукции

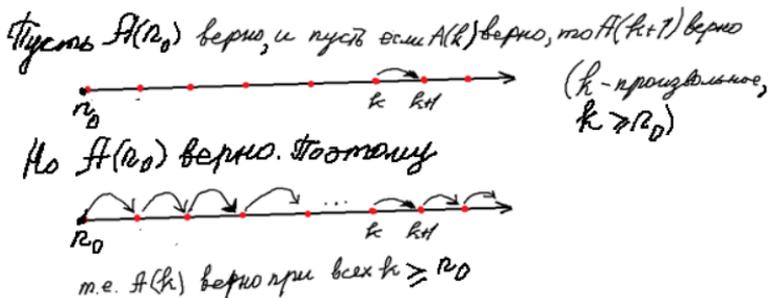


Рис. 15.4

### Доказательство теоремы о деревьях

А) *Необходимость*. Пусть известно, что  $G$  – дерево с  $n$  вершинами. Докажем, что  $m = n - 1$ .

При  $n = 2, 3$  утверждение геометрически очевидно (см. рис. 15.5). Воспользуемся теперь индукцией по  $n$ .

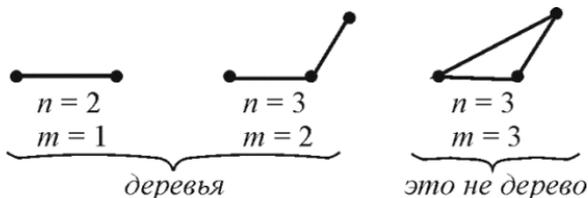


Рис. 15.5. Деревья с  $n$  вершинами и  $m$  ребрами

Предположим, что утверждение верно при  $n = k$  (где  $k \geq 3$ ) и докажем, что тогда оно будет верно и при  $n = k + 1$ .

Будем рассуждать от противного. Пусть существует дерево, у которого  $k + 1$  вершина, но число ребер не равно  $k$ . Как мы знаем, у каждого дерева имеется висячая вершина. Удалив ее (вместе с ребром) получим непустой связный (!) граф без циклов (т.е. дерево), у которого  $k$  вершин, но число ребер не равно  $k - 1$ . Противоречие.

Б) *Достаточность.* Пусть соотношение (15.1) выполнено. Покажем, что  $G$  – дерево. Предположим противное, а именно, что в непустом связном графе  $G$  имеется цикл. Удалив из графа  $G$  одно ребро, принадлежащее этому циклу, получим связный граф с  $n$  вершинами и  $n - 2$  ребрами. Если в получившемся графе еще остались циклы, продолжим действовать подобным образом. В результате циклов не останется, и мы получим дерево, в котором  $n$  вершин, а число ребер  $\leq n - 2$ . Но это противоречит уже доказанному факту, что для любого дерева справедливо равенство  $m = n - 1$ .

**Следствие.** *Наименьшее возможное число ребер в непустом связном графе с  $n$  вершинами равно  $n - 1$ .*

**Доказательство.** Если непустой связный граф  $G$  – дерево, то доказывать нечего. Пусть непустой связный граф  $G$  с  $n$  вершинами не является деревом. Будем рассуждать от противного и предположим, что у  $G$  меньше, чем  $n - 1$  ребер. Так как  $G$  – не дерево, то в нем есть цикл. Удалим из  $G$  одно ребро, принадлежащее этому циклу, при этом граф не потеряет своей связности. Если циклы еще остались, продолжим удалять из них по одному ребру до тех пор, пока граф не превратится в дерево. У такого дерева будет строго меньше, чем  $n - 1$  ребер. Противоречие с результатом теоремы 15.1.

### **Задачи**

1. В связном графе  $G$  имеется  $n$  вершин и  $n$  ребер. Доказать, что:

а) в этом графе есть цикл;

б) в этом графе ровно один цикл (здесь и далее направление обхода циклов не учитываем).

**Решение.** а) См. теорему 15.1.

б) Предположим, что в графе  $G$  существуют два различных цикла (т.е. два цикла, множества ребер которых не совпадают). Очевидно, что у этих циклов должно быть общее ребро ( $e$ ). (Действительно, предположим противное. Тогда из обоих упомянутых циклов можно удалить по одному ребру, не нарушая связности оставшейся части графа. Отсюда легко вывести противоречие с теоремой 15.1.) Удаляя это ребро, замечаем, что в связном графе  $G - e$  по-прежнему существует цикл. Однако у  $G - e$ , очевидно,  $n$  вершин и  $n - 1$  ребро. Противоречие с теоремой 15.1.

2. В связном графе  $n$  вершин и  $n+1$  ребро. Верно ли, что в этом графе ровно два цикла?

*Указание.* Рассмотрите граф, вершинами которого являются вершины квадрата, а ребрами – стороны квадрата и одна из его диагоналей.

3. В непустом связном графе  $G$  ребро  $e$  не принадлежит ни одному циклу. Следует ли отсюда, что ребро  $e$  – мост?

**Решение.** Пусть ребро  $e$  соединяет вершины  $A$  и  $B$ . Так как ребро  $e$  не принадлежит ни одному циклу, то, удалив это ребро из  $G$ , мы не сможем проложить маршрут из  $A$  в  $B$ . Иными словами, граф  $G - e$  оказывается несвязным. Итак, мы установили, что ребро  $e$  – мост.

4. Известно, что в связном графе  $G$  ровно два цикла. Следует ли отсюда, что в  $G$  имеется мост?

**Решение.** Нетрудно заметить, что у обоих упомянутых в условии задачи циклов не может быть ни общих ребер, ни общих вершин. В силу связности графа  $G$  отсюда следует, что в  $G$  имеется ребро, не принадлежащее ни одному из упомянутых циклов. Это значит, что в  $G$  есть ребро, не принадлежащее никакому циклу. Это ребро – мост (см. предыдущую задачу).

## 16. Перечисление деревьев

**Определение 16.1.** Максимальное расстояние между двумя вершинами связного графа  $G$  называется *диаметром* графа  $G$  и обозначается  $d(G)$ .

**Задача 1.** *Может ли диаметр графа уменьшиться при добавлении нового ребра?* (См. рис. 16.1.)

**Задача 2.** *Может ли диаметр графа увеличиться при удалении ребра?* (См. рис. 16.2.)

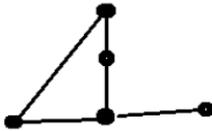


Рис. 16.1. Может ли диаметр графа увеличиться при добавлении ребра?

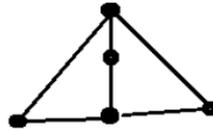


Рис. 16.2. Может ли диаметр графа уменьшиться при удалении ребра?

**Задача 3.** *Требуется перечислить все неизоморфные (непомеченные) деревья с шестью вершинами. Все ли варианты перечислены на рис. 16.3?*

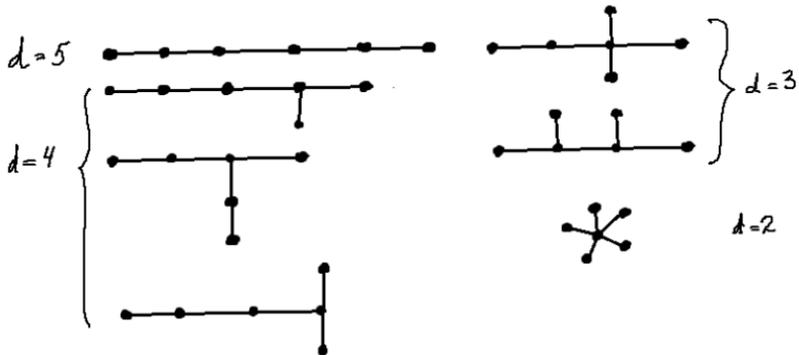


Рис. 16.3

## 17. Подграф. Остовный подграф. Минимальное остовное дерево

Пусть  $G$  – некоторый граф. Напомним, что граф  $\Gamma$  называется *подграфом* графа  $G$ , если каждая вершина графа  $\Gamma$  принадлежит множеству вершин графа  $G$ , а каждое ребро графа  $\Gamma$  принадлежит множеству ребер графа  $G$ .

Напомним также, что подграф  $\Gamma$  графа  $G$  называется *остовным*, если множества вершин  $\Gamma$  и  $G$  совпадают.

**Определение 17.1.** Пусть  $G$  – связный граф. Дерево, являющееся остовным подграфом графа  $G$ , называется *остовным деревом*.

*Будем теперь считать, что каждому ребру  $e$  графа  $G$  сопоставлено положительное число  $L = L(e)$ , которое станем называть *ВЕСОМ* этого ребра*

*Сумму таким образом введенных весов по всем ребрам графа  $\Gamma$  будем называть *ВЕСОМ* графа  $\Gamma$  и обозначать  $L(\Gamma)$ . (Здесь  $\Gamma$  – подграф графа  $G$ .)*

*Ставится задача – найти у графа  $G$  связный остовный подграф минимального веса.*

**Теорема 17.1.** *Пусть  $G$  – непустой связный граф. Связный остовный подграф минимального веса является остовным деревом минимального веса.*

**Доказательство** очевидно.

**Замечание.** Часто в математической литературе вместо термина «вес ребра» используется термин «длина ребра». Однако такая терминология представляется не вполне удачной, поскольку ранее уже было введено понятие «длина маршрута».

**Алгоритм Краскала (построение остовного дерева минимального веса);** см. [1, с. 99].

Вот как работает этот алгоритм для произвольного (непустого) связного графа  $G$ .

Вначале выбираем среди ребер графа  $G$  ребро наименьшего веса (берем его вместе с обеими его вершинами). Затем подсоединяем к выбранному ребру смежное с ним ребро минимального возможного веса (вместе с его вершинами), при условии, что не образуется цикл. Продолжая процесс, подсоединяем новые смежные ребра минимального возможного веса, следя за тем, чтобы не образовался цикл. При этом на каждом шаге новое подсоединяемое ребро может быть смежным с любым из ранее выбранных ребер. Процесс, очевидно, конечен; его результатом и будет построенное остовное дерево минимального веса.

**Замечание.** Возможна ситуация, когда минимальное остовное дерево не единственно.

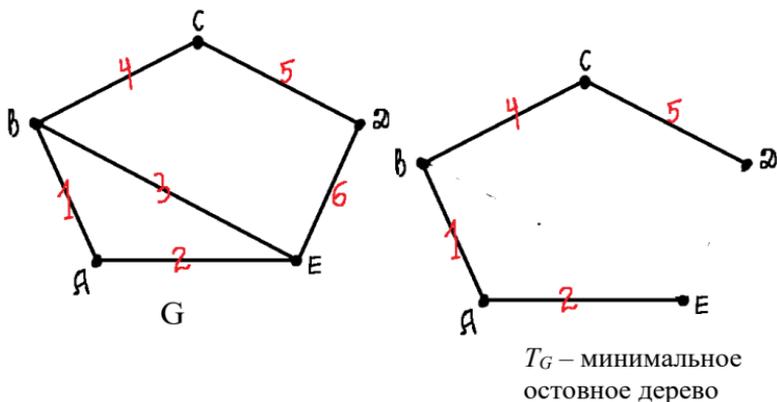


Рис. 17.1. Построение минимального остовного дерева для графа  $G$

## Задачи

1. Является ли граф  $K_6$  деревом?
2. Является ли граф  $K_{3,3}$  деревом?
3. Является ли граф  $K_{4,2}$  связным?
4. Приведите пример реальной ситуации, когда необходим поиск «в ширину».
5. Имеется дерево с девятью ребрами. Всегда ли достаточно удалить одно ребро, чтобы получить два дерева, не связанных друг с другом?

6. Можно ли найти такое дерево с девятью ребрами, что после удаления одного ребра получится три не связанных друг с другом дерева?

Указание: попробуйте рассуждать «от противного» и воспользоваться теоремой о деревьях.

7. Можно ли найти такое дерево с девятью ребрами, что после удаления одной вершины получится три не связанных друг с другом дерева?

8. К графу  $G$  добавили ребро, в результате чего диаметр графа уменьшился вдвое. Могло ли такое быть?

Указание: см. рис. 17.2.

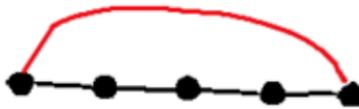


Рис. 17.2

9. В полном графе  $K_5$  вершины перенумерованы числами от 1 до 5. Веса ребер, соединяющих вершины с номерами  $i$  и  $j$ , равны  $|i - j|$ . Требуется построить минимальное остовное дерево.

10. Пусть  $G$  – связный граф; будем для определенности считать, что в  $G$  все ребра имеют разный вес. Поступим следующим образом: перенумеруем все ребра этого графа в порядке убывания их веса. Затем рассмотрим ребро  $e_1$  (т.е. ребро наибольшего веса) и удалим его, если оно входит в какой-либо цикл. Далее, переходим к следующему ребру и с ним поступаем точно так же, и т.д. В результате действия этого алгоритма, очевидно, получим остовное дерево  $T^*$  для графа  $G$  (см. рис. 17.3). Верно ли, что остовное дерево  $T^*$  обязательно будет минимальным?

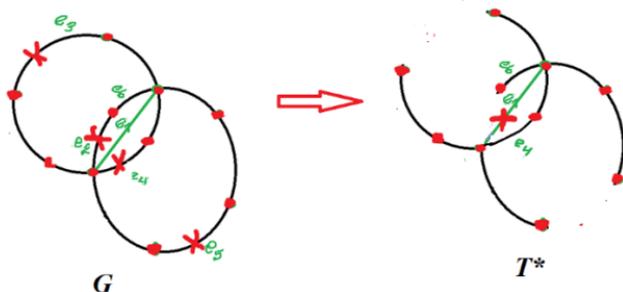


Рис. 17.3

## 18. Раскрашенная шахматная доска

Эта оригинальная задача взята из пособия О.И. Мельникова [1, с. 97] (в слегка модифицированном виде).

**Задача 18.1.** Обычная шахматная доска размером  $8 \times 8$  раскрашена одиннадцатью разными красками. При этом клетки, имеющие общие стороны, покрашены в разные цвета. (Все 11 красок использованы.) Две краски назовем соседними, если ими окрашены клетки, имеющие общую сторону. Чему равно наименьшее число пар соседних красок?

**Решение.** Прежде всего, ясно, что доску можно покрасить так, чтобы число пар соседних красок было равно 10.

Для этого покрасим, например, в синий цвет все черные клетки шахматной доски, а остальные клетки покрасим в оставшиеся 10 цветов (используем все 10). В результате синие клетки не позволят другим цветам соседствовать друг с другом.

Труднее показать, что число пар соседних красок не может быть меньше 10. Именно в этом соль задачи, поскольку для ее решения потребуется изменить точку зрения на задачу и построить граф, в котором вовсе не клетки будут вершинами. *Необходимо догадаться, что в качестве вершин графа можно взять краски!* Отношение соседства между красками будет однозначно задавать ребра в этом графе, который будем обозначать  $G'$ .

Заметим, что  $G'$  – связный граф, поскольку связан граф  $G$  (в котором вершинами являются именно клетки, а ребра задаются отношением смежности между клетками). Однако, как мы знаем, наименьшее возможное количество ребер в *связном* графе с  $n$  вершинами равно  $n - 1$ . Задача решена.

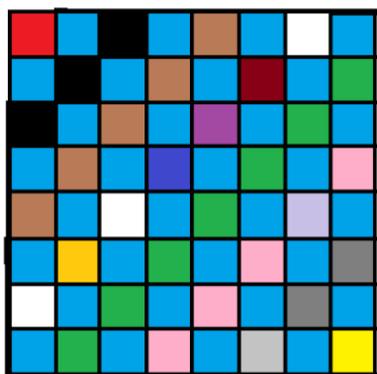


Рис. 18.1. Шахматная доска с синими клетками

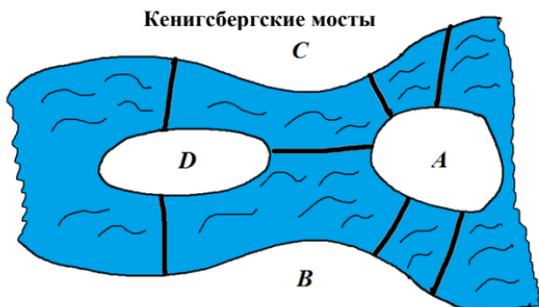
**Замечание.** После того, как все черные клетки покрасили в синий цвет, на шахматной доске осталось 32 клетки, которые все можно покрасить в разные цвета.

Таким образом, если, например, в нашем распоряжении будет не 11, а 33 цвета, то наименьшее число соседних пар цветов окажется равным 32. Задача резко усложняется, если число цветов, которые надо использовать, больше 33 (очевидно, это число не может превосходить 64).

**Задача 18.2.** Обычная шахматная доска размером  $8 \times 8$  раскрашена 34 разными красками. При этом клетки, имеющие общие стороны, покрашены в разные цвета. (Все 34 краски использованы.) Две краски назовем соседними, если ими окрашены клетки, имеющие общую сторону. Чему равно наименьшее число пар соседних красок?

**Задача 18.3.** Шахматная доска размером  $7 \times 7$ , из которой вырезана центральная клетка, раскрашена одиннадцатью разными красками. При этом клетки, имеющие общие стороны, покрашены в разные цвета. (Все 11 красок использованы.) Две краски назовем соседними, если ими окрашены клетки, имеющие общую сторону. Чему равно наименьшее число пар соседних красок?

## 19. Эйлеровы графы



**Задача о Кенигсбергских мостах.** Можно ли, пройдя по каждому из Кенигсбергских мостов ровно 1 раз, вернуться в исходную точку?

Эту задачу решил в 1736 году Леонард Эйлер.

Нарисуем граф, соответствующий сути поставленной задачи. В качестве вершин графа возьмем части суши (!), а в качестве ребер – мосты, соединяющие эти части суши (см. рис. 19.1).

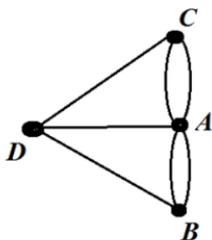


Рис. 19.1. Граф с Кенигсбергскими мостами

**Определение 19.1.** Цикл в графе называется *эйлеровым*, если он содержит все ребра графа.

*(Напомним, что цикл – это замкнутая цепь, т.е. цепь, у которой начало и конец совпадают. Цепь – это маршрут, в котором все ребра различны.)*

**Определение 19.2.** Граф называется *эйлеровым*, если он содержит эйлеров цикл.

**Замечание.** Обратим внимание на то, что в предыдущем определении сказано: «граф *содержит* эйлеров цикл», а не «граф *является* эйлеровым циклом» (хотя, казалось бы, речь идет об одном и том же множестве вершин и ребер). Дело в том, что в эйлеровом цикле вершины и ребра расположены в особом порядке; этот особый порядок, вообще говоря, не является единственным (так что эйлеров граф может содержать несколько эйлеровых циклов, которые необходимо еще обнаружить).

**Лемма 19.1.** Если в непустом связном графе  $G$  все вершины четные, то для любой его вершины  $w$  существует цикл, содержащий эту вершину.

**Доказательство леммы.** Возьмем произвольную вершину  $v_0$  в качестве начальной и начнем прокладывать из нее маршрут, запретив себе повторять уже пройденные ребра. Из соображений четности ясно, что такой маршрут может закончиться только в начальной вершине  $v_0$ .

**Теорема 19.1 (Эйлер).** *Непустой связный граф  $G$  эйлеров тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четные.*

**Доказательство теоремы. Необходимость.** Пусть непустой связный граф  $G$  – эйлеров, т.е. содержит цикл, проходящий через все ребра этого графа. Очевидно, что эйлеров цикл заходит в каждую вершину, причем ровно столько же раз, сколько раз он из этой вершины выходит. Действительно, рассмотрим, например, вершину  $v$ , смежную с начальной вершиной  $w$ . Войдя в вершину  $v$ , цикл не может в ней закончиться (т.к. цикл может завершиться только в начальной вершине  $w$ ). Следовательно, каждому ребру из нашего цикла, входящему в вершину  $v$ , мы наверняка сможем поставить в соответствие следующее ребро цикла, исходящее из вершины  $v$ .

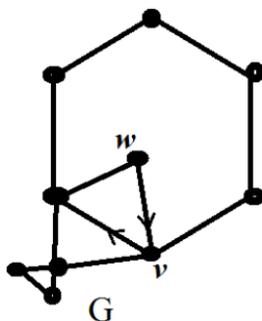


Рис. 19.2. Необходимость в теореме Эйлера

Рассуждая аналогичным образом, получаем, что степени всех вершин цикла (кроме начальной вершины  $w$ ) будут четными. Ситуация с начальной вершиной  $w$  рассматривается при помощи таких же соображений.

*Достаточность.* Пусть степени всех вершин непустого связного графа  $G$  – четные. Как мы знаем, если в графе степени всех вершин  $\geq 2$ , то в этом графе имеется цикл.

Если такой цикл  $C_1$ , имеющийся в графе  $G$ , содержит все его ребра, то граф  $G$ , очевидно, эйлеров.

В противном случае удалим из графа  $G$  все ребра имеющегося там цикла  $C_1$ , а также все образовавшиеся после такого удаления изолированные вершины.

В результате получим непустой граф  $G_1$ , у которого все вершины четные (!) и который не имеет с циклом  $C_1$  общих ребер.

Поскольку исходный граф  $G$  был связным, цикл  $C_1$  и граф  $G_1$  должны иметь хотя бы одну общую вершину  $w$ .

Теперь аналогичную процедуру применим к графу  $G_1$  и построим там цикл  $C'_2$ , содержащий вершину  $w$ .

Далее поступим следующим образом. Построим цикл  $C_2$ , пройдя из вершины  $w$  сначала цикл  $C'_2$ , а затем (вернувшись в вершину  $w$ ) – цикл  $C_1$ .

Если цикл  $C_2$  содержит все ребра графа  $G$ , то искомым эйлеров цикл построен.

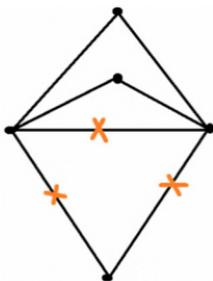


Рис. 19.3. Достаточность в теореме Эйлера

В противном случае продолжаем процедуру, которая обязательно закончится ввиду конечности числа ребер исходного графа. Теорема доказана.

**Замечание.** В результате процедуры, изложенной при доказательстве достаточности, мы получим представление эйлерова графа  $G$  в виде объединения нескольких циклов, не имеющих общих ребер. Заодно, в процессе доказательства достаточности, мы получаем способ построения эйлерова цикла в эйлеровом графе. Этот способ достаточно громоздкий. Ниже будет рассмотрен более эффективный способ построения эйлерова цикла.

**Замечание.** Нетрудно видеть, что теорема Эйлера остается справедливой и для мультиграфов. (Эта теорема останется справедливой также и для графов с петлями, если при определении степени вершины каждое ребро, образующее петлю, считать дважды.)

**Замечание.** Из теоремы Эйлера очевидным образом следует, что в любом связном графе существует замкнутый маршрут, проходящий по каждому ребру ровно  $2k$  раз ( $k$  – любое натуральное число). См. в этой связи также задачи к параграфу 27.

**Теорема 19.2.** *Непустой связный граф  $G$  эйлеров тогда и только тогда, когда он может быть представлен в виде объединения простых циклов, не имеющих друг с другом общих ребер.*

**Доказательство.** *Необходимость.* Пусть непустой связный граф  $G$  – эйлеров. Тогда он содержит эйлеров цикл. Однако геометрически очевидно, что любой цикл можно представить в виде объединения простых циклов, попарно не имеющих общих ребер.

*Достаточность.* Пусть (непустой) связный граф  $G$  представим в виде объединения простых циклов, попарно не имеющих общих ребер. Очевидно, что тогда все его вершины – четные. Следовательно, по теореме 19.1 граф  $G$  – эйлеров.

**Алгоритм Флёрн** (поиск эйлерова цикла в эйлеровом графе; см. [3, с. 195]).

1) Выбираем в качестве начальной произвольную вершину «и», движемся в любую смежную вершину «v». Ребро  $iv$ , соединяющее эти вершины, вычеркиваем. Затем начинаем двигаться из вершины  $v$ , соблюдая следующее правило:

2) Если мы исходим из некоторой вершины  $w$ , то перемещаемся по (почти) любому не вычеркнутому ранее инцидентному с ней ребру, а потом это ребро вычеркиваем. Но среди ребер, инцидентных  $w$ , мост выбираем в последнюю очередь, если нет других возможностей.

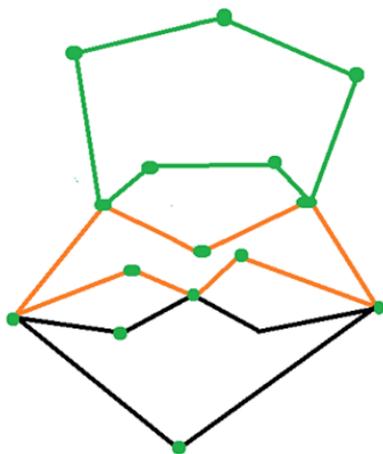


Рис. 19.4. Как построить эйлеров цикл?

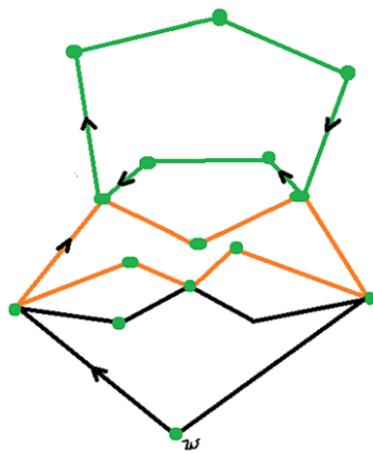


Рис. 19.5. Построение эйлерова цикла

## Задачи

1. Докажите, что если в связном графе  $G$  есть мост, то в таком графе обязательно найдутся по крайней мере две нечетные вершины. (См. рис.19.6.)

**Решение.** Геометрически очевидно, что в графе  $G$ , в котором имеется мост, не может существовать эйлеров цикл. Следовательно, некоторые вершины графа  $G$  – нечетные. Поскольку число нечетных вершин обязательно должно быть четным, заключаем, что в  $G$  есть по крайней мере две нечетные вершины.

2. Пусть в связном графе  $G$  имеется мост  $e$ , после удаления которого граф  $G$  распадается на две компоненты связности:  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Докажите, что тогда в каждой из образовавшихся компонент связности окажется по крайней мере одна вершина, которая была нечетной в графе  $G$ .

**Решение.** Будем рассуждать от противного. Пусть, например, в компоненте  $\Gamma_2$  не оказалось ни одной вершины, которая была нечетной в исходном графе  $G$ . Восстановим тогда удаленное ребро  $e$  и разобьем все нечетные вершины графа  $G$  (содержащиеся в  $\Gamma_1$ ) на пары, которые соединим новыми ребрами (не имеющими никаких общих вершин с  $\Gamma_2$ ). В результате получим новый граф  $G'$ , в котором по-прежнему есть мост, но нет нечетных вершин, что противоречит результату задачи 1.

2'. Попробуйте решить задачу 2, не опираясь на теорему Эйлера.

3. Может ли существовать связный граф, у которого  $n$  ( $n > 1$ ) мостов, но только две нечетные вершины?

4. Пусть  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  - два произвольных связных графа, не имеющих общих вершин. Построим граф  $G$ , соединив  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  тремя новыми ребрами. Верно ли, что в построенном графе  $G$  обязательно найдутся нечетные вершины?

5. В связном графе  $G$  был проложен замкнутый маршрут, проходящий через каждое ребро этого графа ровно 3 раза. Можно ли утверждать, что граф  $G$  - эйлеров?

**Решение.** Очевидно, можно с самого начала считать, что существует эйлеров цикл в мультиграфе  $\Gamma$ , получающемся из графа  $G$  «утроением» каждого ребра этого графа. Соответственно, степени вершин  $\Gamma$  в 3 раза больше степеней соответствующих вершин графа  $G$ . Однако по теореме Эйлера степени всех вершин  $\Gamma$  обязаны быть четными, откуда, очевидно, следует четность степеней всех вершин  $G$ . Тем самым эйлеровость графа  $G$  установлена.

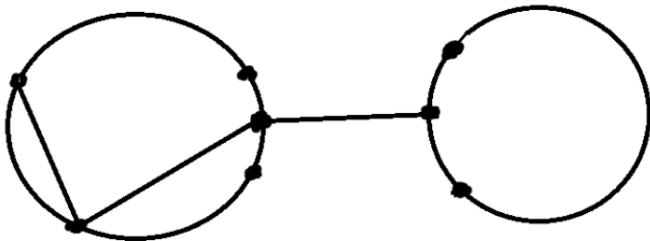


Рис. 19.6

6. (см. [8, с. 37]). На каждом из двух берегов реки имеется некоторое количество телефонов. Каждый телефон соединен в точности с двумя другими телефонами на противоположном берегу. Доказать, что всегда можно так перерезать некоторые провода, что каждый телефон будет соединен в точности с одним телефоном на противоположном берегу.

**Решение.** Прежде всего, заметим, что количество телефонов на обоих берегах реки одинаково.

Действительно, пусть общее число проводов, соединяющих телефоны, равно  $N$ . Тогда число телефонов на каждом из берегов реки, очевидно, должно быть вдвое меньше, т.е. равно  $n = N/2$ .

Далее, не ограничивая общности, считаем связным двудольный граф  $G$ , вершинами которого являются телефоны, а ребрами – соединяющие их провода. Так как все вершины графа  $G$  – четные, то существует эйлеров цикл, проходящий по всем ребрам этого графа. Из условий задачи следует также, что этот цикл будет простым, так как для каждой вершины должно существовать в точности одно входящее и в точности одно исходящее ребро. Перенумеровав по очереди все ребра эйлерова цикла, замечаем, что достаточно будет разрезать каждое второе ребро, после чего установится взаимно-однозначное соответствие между телефонами на противоположных берегах реки.

7. На каждом из двух берегов реки имеется некоторое количество телефонов. Каждый телефон соединен в точности с четырьмя другими телефонами

на противоположном берегу. Доказать, что всегда можно так перерезать некоторые провода, что каждый телефон будет соединен в точности с одним телефоном на противоположном берегу.

**Решение.** Прежде всего, заметим, что количество телефонов на обоих берегах реки одинаково.

Действительно, пусть общее число проводов, соединяющих телефоны, равно  $N$ . Тогда число телефонов на каждом из берегов реки, очевидно, должно быть вчетверо меньше, т.е. равно  $n = N/4$ .

Далее, не ограничивая общности, считаем связным двудольный граф  $G$ , вершинами которого являются телефоны, а ребрами – соединяющие их провода. Так как все вершины графа  $G$  – четные, то снова, как в задаче №6, существует эйлеров цикл, проходящий по всем ребрам этого графа. Однако теперь этот цикл не будет простым, так как каждая вершина в нем будет встречаться дважды (для каждой вершины должны существовать в точности два входящих и в точности два исходящих ребра). Перенумеруем по очереди все ребра эйлерова цикла, а затем разрежем каждое второе ребро (т.е. удалим все упомянутые ребра из графа  $G$ ). В результате получим подграф  $\Gamma$  графа  $G$ , содержащий все его вершины, причем степень каждой вершины в  $\Gamma$ , очевидно, окажется равной 2. Применив ту же процедуру к каждой компоненте связности графа  $\Gamma$ , установим взаимно-однозначное соответствие между телефонами на противоположных берегах реки.

8. На каждом из двух берегов реки имеется некоторое количество телефонов. Каждый левобережный телефон соединен в точности с двумя правобережными, а каждый правобережный телефон соединен в точности с четырьмя левобережными. Доказать, что:

а) всегда можно так перерезать некоторые провода, что каждый левобережный телефон будет соединен в точности с одним правобережным, а каждый правобережный – в точности с двумя левобережными;

б) всегда можно так перерезать некоторые провода, что оставшиеся провода установят взаимнооднозначное соответствие между множеством всех правобережных телефонов и множеством, состоящим из половины всех левобережных телефонов.

**Решение.** а) В графе  $G$ , соответствующем условию задачи, все вершины четные; поэтому в  $G$  имеется эйлеров цикл. Нужно перенумеровать по порядку все ребра эйлерова цикла и стереть каждое второе ребро. В результате получим подграф  $G'$  графа  $G$ , дающий решение задачи.

б) С самого начала работаем с графом  $G'$  из пункта а). Геометрически очевидно, что граф  $G'$  несвязный, если в нем больше трех вершин, причем каждая его компонента связности представляет собой трехвершинное дерево. Достаточно в каждом таком дереве стереть одно из двух ребер.

9\*. На каждом из двух берегов реки имеется некоторое количество телефонов. Каждый телефон соединен в точности с тремя другими телефонами на противоположном берегу. Верно ли, что всегда можно так перерезать некоторые провода, что каждый телефон будет соединен в точности с одним телефоном на противоположном берегу?

10. На каждом из двух берегов реки имеется по  $n$  ( $n > 2$ ) телефонов. Каждый телефон соединен в точности с двумя другими телефонами на противоположном берегу. При каких  $n$  можно так подсоединить новые провода, что каждый телефон будет соединен в точности с тремя телефонами на противоположном берегу?

Указание. Перенумеруйте по порядку вершины в эйлеровом цикле, естественно возникающем в условиях задачи. Важно, что новые ребра должны соединять между собой вершины с номерами разной четности. Разберите два случая:  $n = 2k$  и  $n = 2k + 1$ .

11. В связном графе  $G$  был проложен замкнутый маршрут, проходивший по всем ребрам, кроме ребра  $e$ , трижды. А по ребру  $e$  этот маршрут проходил дважды. Докажите, что обе вершины, которые соединяет ребро  $e$ , – нечетные.

Решение. Будем с самого начала считать, что мы имеем дело с мультиграфом  $\Gamma$ , получающимся из  $G$  в результате утроения всех его ребер, кроме ребра  $e$ , которое удваивается. Обозначим через  $A$  и  $B$  вершины, которые соединяет ребро  $e$ . Рассмотрим, напри-

мер, вершину  $A$ . Очевидно, что ее степень в мультиграфе  $\Gamma$  имеет вид

$$d_{\Gamma}(A) = 3k + 2,$$

где  $k$  – натуральное. В силу теоремы Эйлера степень  $d_{\Gamma}(A)$  должна быть четной, т.е.

$$3k + 2 = 2p,$$

где  $p$  – натуральное. Отсюда ясно, что  $k$  – четное. Однако в графе  $G$  степень вершины  $A$ , очевидно, равна  $k + 1$  и, следовательно, нечетна. Аналогично рассматривается случай вершины  $B$ .

*12. В двудольном графе  $G$  всего  $2n$  вершин (по  $n$  вершин в каждой доле). Известно, что степень каждой вершины  $\geq 2$ . Верно ли, что всегда можно удалить некоторые ребра так, чтобы установилось взаимно-однозначное соответствие между вершинами обеих долей графа?*

**Ответ:** нет, неверно. Нетрудно построить контр-пример, воспользовавшись тем, что в условии задачи ничего не сказано о связности графа  $G$ . Например, можно в качестве  $G$  взять объединение двух непересекающихся графов  $K_{3,2}$  и  $K_{2,3}$ .

*13. Пусть в связном двудольном графе  $G$  всего  $2n$  вершин (по  $n$  вершин в каждой доле), причем известно, что степень каждой вершины  $\geq 2$ . Верно ли, что всегда можно так удалить некоторые ребра, чтобы установилось взаимно-однозначное соответствие между вершинами обеих долей графа?*

**Ответ:** Нет, неверно. В качестве очевидного контрпримера можно рассмотреть двудольный граф  $G$  представляющий собой объединение  $K_{5,2} \cup \{e\} \cup K_{2,5}$ , где  $e$  – ребро, соединяющее одну из вершин верхней доли  $K_{5,2}$  с какой-нибудь вершиной нижней доли  $K_{2,5}$  (см. рис. 19.7).



Рис. 19.7

## 20. Эйлеровы цепи

**Определение 20.1.** Цепь в связном графе  $G$  называется *эйлеровой*, если она проходит через все ребра этого графа.

**Теорема 20.1.** *Связный граф  $G$  содержит эйлерову цепь в одном и только в одном из двух случаев:*

*а) все вершины графа  $G$  – четные,*

либо

*б) в графе  $G$  содержатся ровно две нечетные вершины.*

**Доказательство.** Прежде всего, заметим, что случай а) неинтересен, поскольку в качестве эйлеровой цепи можно взять эйлеров цикл. Более того, нетрудно видеть, что всякая эйлерова цепь в случае а) обязательно будет эйлеровым циклом.

Перейдем к случаю б). Итак, допустим, что в графе  $G$  содержатся ровно две нечетные вершины  $v$  и  $w$ . Соединим эти вершины ребром  $(u, v)$ , в результате граф  $G$  преобразуется в эйлеров граф  $G'$ . Теперь выберем в  $G'$  эйлеров цикл, а

затем удалим из этого цикла ребро  $(u, v)$ . В результате получим искомую эйлерову цепь в графе  $G$ . Нетрудно понять, что начальной и конечной вершинами этой цепи обязательно должны быть нечетные вершины, т.е. соответственно вершины  $u$  и  $v$ .

Далее, геометрически очевидно, что ни в каком графе не может существовать ровно одна нечетная вершина.

Наконец, если нечетных вершин больше двух, то в таком графе эйлерова цепь существовать не может. (Это легко доказывается от противного.)

Примеры см. на рис. 20.1 и 20.2.

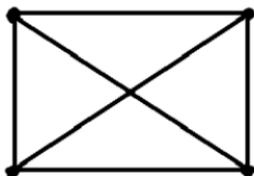


Рис. 20.1. «Закрытый конверт»  
(Четыре нечетные вершины,  
эйлерова цепь отсутствует)

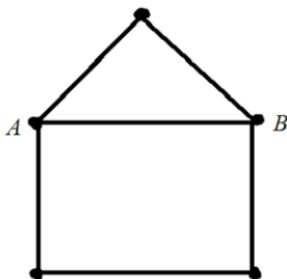


Рис. 20.2. «Открытый конверт»  
(Две нечетные вершины,  
имеется эйлерова цепь)

**Замечание.** Теорема об эйлеровых цепях, очевидно, остается верной и для мультиграфов, а также для графов с петлями, если при определении степени вершины каждое ребро, образующее петлю, считать *дважды*.

**Замечание.** Связные графы, содержащие эйлеровы цепи, можно нарисовать, не отрывая карандаша от листа бумаги. Такие линии называют *уникурсальными*.

**Теорема 20.2** (о разбиении графа); см. [1, с. 113], [5, с. 39].

Если связный граф  $G$  содержит  $2k$  нечетных вершин, то граф можно разбить на  $k$  цепей. При этом на меньшее число цепей граф разбить не удастся. (Говоря о разбиении графа на цепи, предполагаем, что у этих цепей нет общих ребер.)

**Замечание.** Эта теорема полезна при решении задач следующего типа: определить, из какого наименьшего числа кусков проволоки можно спаять заранее заданную фигуру.

**Доказательство теоремы.** Разобьем все нечетные вершины графа на пары:  $A_1$  и  $B_1$ ,  $A_2$  и  $B_2$ , ...,  $A_k$  и  $B_k$ , а затем соединим вершины каждой пары новым ребром (всего нарисуем  $k$  новых ребер). В результате получим эйлеров граф. Рассмотрим соответствующий эйлеров цикл; удалив из него  $k$  добавленных ребер (которые по своему построению не могли быть смежными друг с другом!), получим  $k$  цепей, не имеющих общих ребер (но, возможно, имеющих общие вершины).

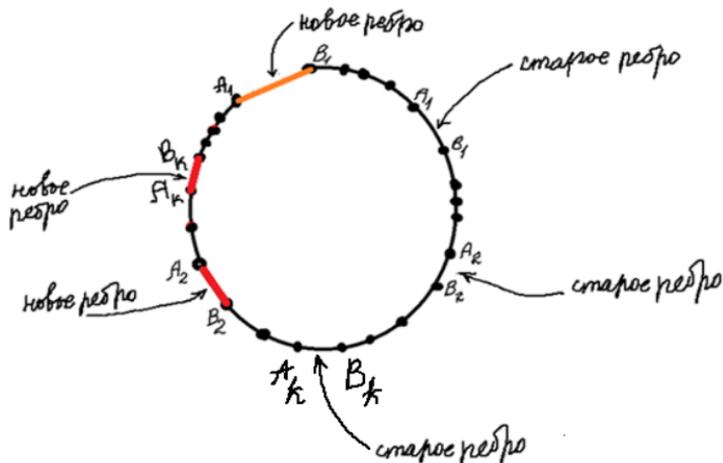


Рис. 20.3. Разбиение графа с  $2k$  нечетными вершинами на  $k$  цепей

Докажем теперь, что при выполнении условий теоремы граф  $G$  невозможно разбить на меньшее число цепей. Для определенности будем считать, что цепи, на которые разбит граф  $G$ , не являются циклами. Будем рассуждать от противного. Предположим, что в нашем распоряжении имеется меньше, чем  $k$  цепей, из которых можно составить исходный граф  $G$ , имеющий ровно  $2k$  нечетных вершин. Возьмем вначале какую-то одну цепь, у нее две нечетных вершины. Рассмотрим объединение этой цепи с какой-либо следующей цепью. У этого объединения, очевидно, будет не более 4 нечетных вершин. Продолжая процесс, получим в итоге, что у графа  $G$  окажется меньше, чем  $2k$  нечетных вершин. Противоречие.

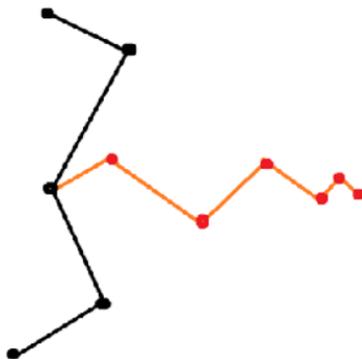


Рис. 20.4. Соединение двух цепей, не имеющих общих ребер

### Задачи

1. На каждом из двух берегов реки имеется некоторое количество телефонов. Каждый левобережный телефон (кроме одного) соединен в точности с двумя правобережными телефонами, а один левобережный телефон соединен в точности с тремя правобережными. Аналогично, каждый правобережный телефон (кроме одного) соединен

*в точности с двумя левобережными телефонами, а один правобережный телефон соединен в точности с тремя левобережными. Докажите, что всегда можно так перерезать некоторые провода, что каждый телефон будет соединен в точности с одним телефоном на противоположном берегу.*

**Решение.** В двудольном графе  $G$ , соответствующем условию задачи, число вершин в обеих долях обязательно будет одинаковым; сказанное относится также к каждой компоненте связности графа  $G$ . При этом обе вершины нечетной степени обязательно будут принадлежать одной компоненте связности. Пусть число вершин в этой компоненте равно  $2n$ . Тогда в этой компоненте имеется эйлерова цепь, концами которой будут обе нечетные вершины. Покажем, что длина этой цепи равна  $2n+1$ . Обозначим нечетные концевые вершины буквами  $A$  и  $B$ . Ясно, что в эйлеровой цепи все остальные вершины будут встречаться по 1 разу, а вершины  $A$  и  $B$  – дважды. Тем самым в цепи вершины (с учетом повторов) будут встречаться  $2n + 2$  раза, откуда следует, что ребер в такой цепи будет на 1 меньше, т.е.  $2n + 1$ . Дальнейшее геометрически очевидно (см. рис. 20.5–20.7, где нечетными номерами обозначены вершины из верхней доли графа, а четными номерами – вершины из нижней доли). Проведем, все же, аккуратное рассуждение. Повторные появления упомянутых концевых вершин нам будет удобно обозначать через  $A'$  и  $B'$  соответственно. Заметим теперь, что расстояние от  $A$  до  $A'$  в эйлеровой цепи (измеряемое количеством пройденных ребер) будет четным числом в силу четности любого цикла в двудольном графе. Заметим, что оба ребра, инцидентные вершине  $A'$  обязательно должны быть удалены, если мы сохраняем самое первое ребро, с которого начинается маршрут. Но тогда расстояние от  $A$  до вершины, предшествующей  $A'$  будет нечетным числом.

Совершенно аналогично, *расстояние от вершины, непосредственно следующей за  $V'$ , до вершины  $B$  – тоже будет нечетным числом.*

Наконец, учитывая нечетность длины всей эйлеровой цепи, заключаем, что *расстояние от вершины, непосредственно следующей за  $A'$ , до вершины, предшествующей  $V'$ , также выражается нечетным числом.*

Теперь, удалив из эйлеровой цепи вершины  $A'$  и  $B'$  (вместе с соседними ребрами), видим, что из исходной эйлеровой цепи образовался граф  $\Gamma$ , состоящий из трех компонент связности; *эти компоненты представляют собой, очевидно, простые цепи нечетной длины.* Теперь, чтобы получить решение задачи, достаточно в каждой из этих простых цепей удалить каждое второе ребро. В результате искомое взаимно-однозначное соответствие между вершинами долей графа  $G$  будет установлено.

(В силу нечетности длин упомянутых трех простых цепей, после удаления каждого второго ребра все вершины, имеющиеся в этих цепях, будут естественным образом разбиты на пары.)

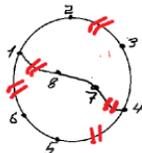


Рис.20.5. Эйлерова цепь: 1-2-3-4-5-6-1-8-7-4. Если ребро (1; 2) сохраняем, то дальнейшее "перерезание" (удаление) ребер определяется однозначно. Вершины с нечетными номерами соответствуют телефонам на левом берегу, а вершины с четными номерами - телефонам на правом берегу.

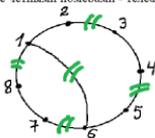


Рис.20.6. Эйлерова цепь: 1-2-3-4-5-6-7-8-1-6. Если ребро (1;2) сохраняем, то дальнейшее "перерезание" ребер определяется однозначно. В итоге устанавливается взаимно-однозначное соответствие между вершинами с четными и нечетными номерами.

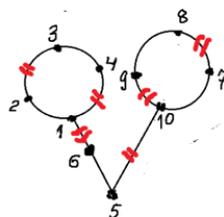


Рис.20.7. Эйлерова цепь: 1-2-3-4-1-6-5-10-9-8-7-10. Сохраняем ребра (1;2) и (7;10). Остальные четыре ребра, примыкающие к вершинам 1 и 10, удаляем. В образовавшихся простых цепях удаляем каждое второе ребро.

2\*. На каждом из двух берегов реки имеется некоторое количество телефонов. Каждый левобережный телефон (кроме одного) соединен в точности с двумя правобережными телефонами, а один левобережный телефон соединен в точности с пятью правобережными. Аналогично, каждый правобережный телефон (кроме одного) соединен в точности с двумя левобережными телефонами, а один правобережный телефон соединен в точности с пятью левобережными. Верно ли, что всегда можно так перерезать некоторые провода, что каждый телефон будет соединен в точности с одним телефоном на противоположном берегу?

3. Пусть в связном двудольном графе  $G$  всего  $2n$  вершин (по  $n$  вершин в каждой доле), причем известно, что степени всех вершин, кроме двух – четные. А степени двух оставшихся вершин (принадлежащих разным долям) равны 3. Верно ли, что всегда можно так удалить некоторые ребра, чтобы установилось взаимно-однозначное соответствие между вершинами обеих долей графа?

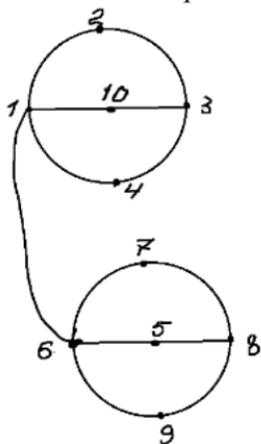


Рис. 20.8

3. Верно ли, что всегда можно так удалить некоторые ребра, чтобы установилось взаимно-однозначное соответствие между вершинами обеих долей графа?

**Ответ:** нет, неверно. См., например, рис. 20.8, где четные номера обозначают вершины из верхней доли графа, а нечетные номера – вершины из нижней доли.

## 21. Задача Китайского Почтальона

Рассматривается следующая

**Задача.** *Почтальон должен развезти по нескольким адресам посылки и вернуться на почту, при этом он должен проехать не менее одного раза по каждой из дорог, связывающих упомянутые адреса. Для каждой дороги указана стоимость проезда по ней, и почтальон хочет минимизировать свои расходы.*

Эти адреса (пункты приема посылок) естественно считать вершинами графа  $G$ , а соответствующие дороги – ребрами. На рис. 21.1–21.3 изображен пример, где вершины графа  $G$  обозначены заглавными латинскими буквами и указана стоимость проезда по каждой из дорог.

Если бы граф  $G$  был эйлеровым, все сводилось бы к путешествию по эйлерову циклу, и итоговая сумма расходов почтальона была бы predetermined заранее и равнялась бы сумме всех чисел, записанных рядом с ребрами графа.

Однако граф  $G$  – не эйлеров, у него имеются две нечетные вершины. Очевидно, что почтальону следует найти наименее дорогостоящий маршрут, связывающий эти вершины, и продублировать (использовать в своем путешествии дважды) ребра этого маршрута. В простейших случаях выбор маршрута наименьшего веса (наименее дорогостоящего), который соединяет две нечетные вершины, можно осуществлять «вручную», не формализуя процесс перебора вариантов. Однако если вершин в графе много, такой перебор необходимо поручить машине, а значит – нужен соответствующий алгоритм. Такой алгоритм существует (алгоритм Дейкстры), и мы его рассмотрим в дальнейшем.

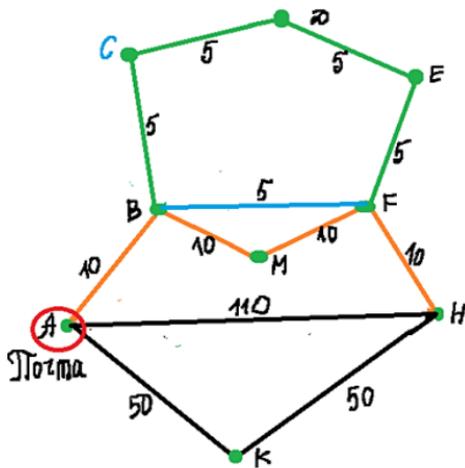


Рис. 21.1. Задача Почтальона

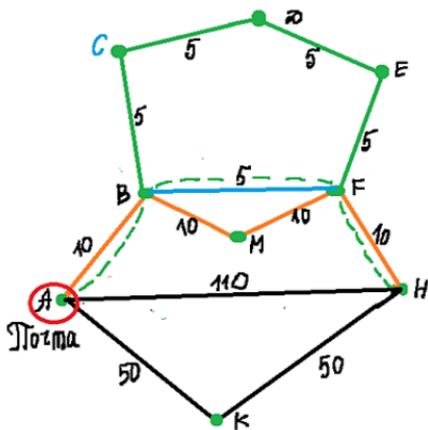


Рис. 21.2. Решение задачи Почтальона (начало)

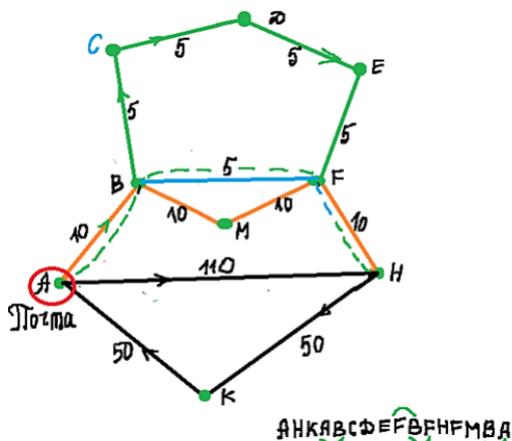


Рис. 21.3. Решение задачи Почтальона (окончание)

**Замечание.** Решение задачи Китайского Почтальона резко усложняется, если число нечетных вершин больше двух. (Очевидно, что нечетных вершин может быть только четное количество.) Пусть, например, число нечетных вершин равно 4 (см. рис. 21.4).

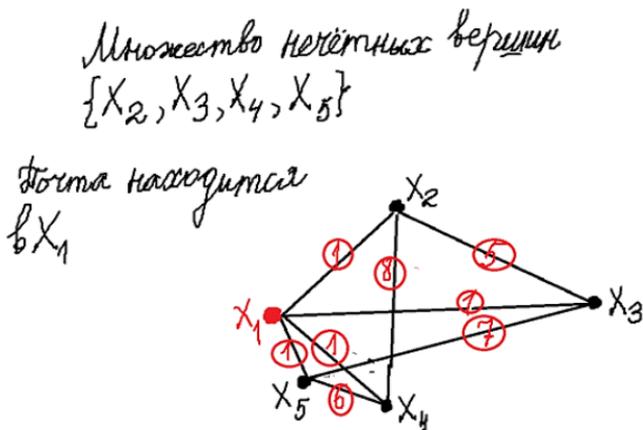


Рис. 21.4

Существует ровно три различных способа разбиения четырех нечетных вершин на пары:  $C_4^2/2 = 3$ . (Обдумайте, почему число этих способов вдвое меньше, чем число сочетаний  $C_4^2$ .) И для каждого из этих способов нужно построить маршруты наименьшего веса, соединяющие каждую выбранную пару, а затем выбрать наиболее экономный итоговый маршрут.

### Задачи

1. На Земле существуют пять континентов. Нарисуйте граф, изобразив континенты в виде вершин, а в качестве ребер взяв возможность добраться от одного континента до другого водным транспортом.

2. Решите задачу Почтальона, схематически изображенную на рис. 21.5.

3. Имеется шахматная доска размером  $5 \times 5$  (см. рис. 21.6). Две клетки считаются соединенными ребром, если из одной из них можно перейти в другую ходом коня. Полученный граф (с вершинами в клетках доски) будем обозначать  $\Gamma$ . а) Является ли граф  $\Gamma$  связным? б) Является ли граф  $\Gamma$  эйлеровым?

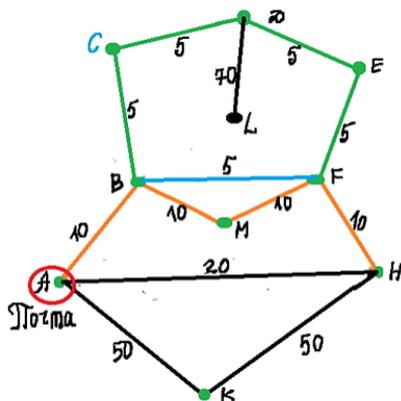


Рис. 21.5. Вторая задача Почтальона

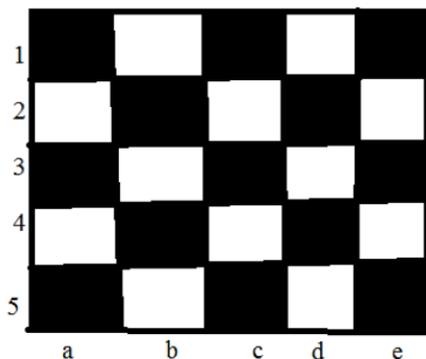


Рис. 21.6

4. Имеется шахматная доска размером  $4 \times 4$  (см. рис. 21.7). Две клетки считаются соединенными ребром, если из одной из них можно перейти в другую ходом коня. Полученный граф (с вершинами в клетках доски) будем обозначать  $G$ . а) Является ли граф  $G$  связным? б) Является ли граф  $G$  эйлеровым?

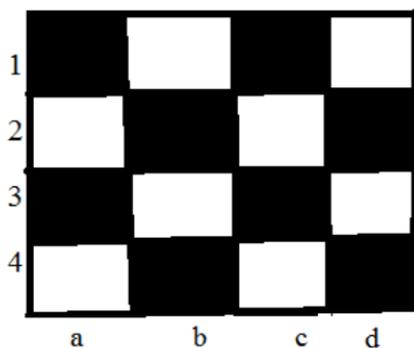


Рис. 21.7

## 22. Гамильтоновы графы

**Определение 22.1.** *Гамильтоновым циклом* в графе  $G$  называется простой цикл, проходящий через все вершины этого графа.

**Определение 22.2.** Граф  $G$  называют *гамильтоновым*, если он содержит гамильтонов цикл.

**Определение 22.3.** *Гамильтоновой цепью* в графе  $G$  называют простую цепь, которая содержит все вершины этого графа.

**Замечание.** *Простое необходимое и достаточное условие гамильтоновости графа до сих пор не найдено.*

Вот два очевидных необходимых (но не достаточных) условия гамильтоновости графа:

- 1) связность;
- 2) отсутствие точки сочленения.

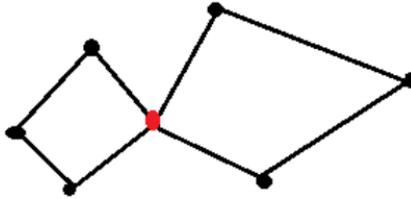


Рис. 22.1. Точка сочленения – препятствие для гамильтоновости графа

Однако отсутствие точки сочленения у связного графа не гарантирует его гамильтоновости (см. рис. 22.2).

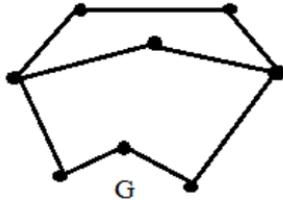


Рис. 22.2. Точки сочленения нет, но граф негамильтонов

Заметим, что гамильтонова цепь существует в негамильтоновом графе  $G$  (см. рис. 22.3), причем отличается от эйлеровой цепи в этом же графе. (Эйлерова цепь, как мы знаем, начинается и заканчивается в нечетной вершине).

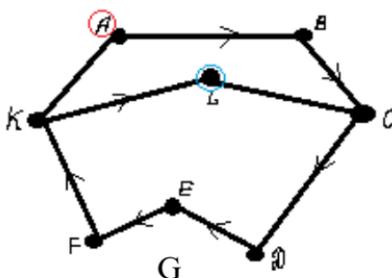


Рис. 22.3. Гамильтонова цепь  $ABCDEFKL$

**Замечание.** Гамильтонова цепь  $ABCDEFKL$  графа  $G$ , изображенная на рис. 22.3, не единственная. В этом же графе содержатся и другие гамильтоновы цепи, например,  $ABCLKFED$ .

**Замечание.** Графы, устроенные аналогично графу, изображенному на рис. 22.2, называются «*тэта-графами*» (видимо, из-за сходства с начертанием греческой буквы «тэта»  $\Theta$ ). Точное описание тэта-графа таково: *тэта-граф должен содержать две вершины  $v$  и  $w$  степени 3, соединенные тремя простыми цепями, содержащими не менее трех вершин и не имеющими друг с другом общих вершин, кроме  $v$  и  $w$ .*

**Определение 22.4.** Напомним, что граф называется *двусвязным* (в смысле вершинной связности), если в нем найдутся такие две вершины, что после их удаления получается несвязный или одновершинный граф.

**Пример.** Тэта-граф на рис. 22.3 – двусвязный. После удаления вершин  $K$  и  $C$  он теряет связность.

**Утверждение 22.1** (см. [1, с.122]). *Каждый негамильтонов двусвязный граф содержит тэта-граф.*

**Теорема 22.1** (теорема Дирака; доказательство см. [1, с. 126]). *Если в графе  $G$ , имеющем  $n \geq 3$  вершин, степень каждой вершины  $\geq n/2$ , то этот граф гамильтонов.*

(Очевидно, что в графе  $G$ , удовлетворяющем условиям теоремы 22.1, не может быть точки сочленения.)

Имеется еще более сильный результат, из которого следует теорема Дирака.

**Теорема 22.2** (теорема Оре; доказательство см. [1, с. 124]). *Если в графе  $G$ , имеющем  $n \geq 3$  вершин, сумма степеней любых двух вершин  $\geq n$ , то этот граф гамильтонов.*

**Замечание.** При  $n = 2$  обе предыдущие теоремы, очевидно, неверны.

**Замечание.** С гамильтоновыми графами связаны многие важные задачи логистики, в частности – «задача коммивояжера», которому нужно объехать по наиболее выгодному пути  $n$  городов и вернуться обратно. В отличие от задачи почтальона, коммивояжеру не нужно проезжать по каждой из дорог, связывающих пункты, которые он должен посетить. Однако при этом коммивояжер не может посещать более одного раза ни один из промежуточных городов по пути своего следования.

### **Задачи**

1. *Что можно сказать о гамильтоновости графов  $K_n$ ? (Напомним, что  $K_n$  – полный граф, содержащий  $n$  вершин.)*
2. *Что можно сказать об эйлеровости графов  $K_n$ ?*
3. *Верно ли, что каждый гамильтонов граф является эйлеровым?*

4. Верно ли, что каждый эйлеров граф является гамильтоновым?

5. Верно ли, что в одном эйлеровом графе может существовать несколько эйлеровых циклов?

6. Может ли у связного графа быть две точки сочленения?

7. Может ли у полного графа быть точка сочленения?

8. Может ли существовать граф, у которого эйлеров цикл и гамильтонов цикл совпадают?

9. Нарисуйте связный граф с десятью вершинами, в котором:

А) имеется эйлеров цикл;

Б) имеется эйлерова цепь, но отсутствует эйлеров цикл;

В) нет ни эйлерова цикла, ни эйлеровой цепи;

Г) имеется простая цепь, содержащая все ребра графа.

10. Верно ли, что произвольный связный граф можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и пройдя при этом каждое ребро дважды?

11. Придумайте пример такого связного графа с пятью вершинами, который нельзя нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, если при этом дополнительно требуется пройти по каждому ребру трижды.

12. Из какого наименьшего количества кусков проволоки можно спаять каркас куба?

13. Из какого наименьшего количества кусков проволоки можно спаять каркас тетраэдра?

14. Найдите в графе, изображенном на рис. 22.4, гамильтонову цепь.

15. Найдите в графе, изображенном на рис. 22.4, гамильтонов цикл, начинающийся и оканчивающийся в точке 11.

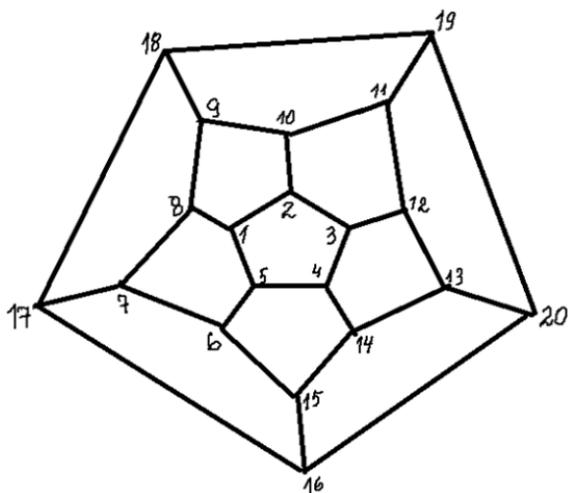


Рис. 22.4. Путешествие по додекаэдру

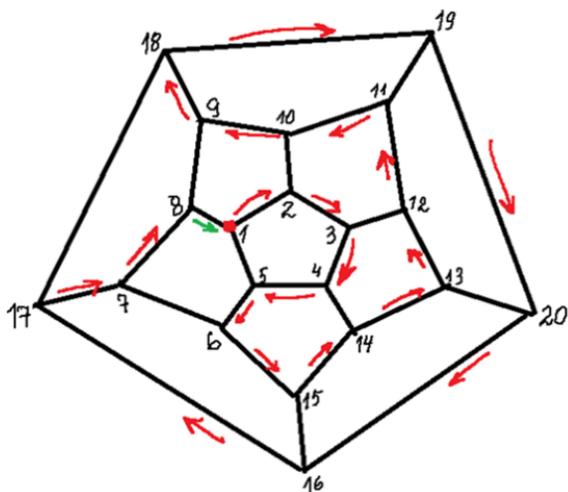


Рис. 22.5. Гамильтонов цикл в додекаэдре

16. Является ли наличие в графе  $G$  точки сочленения препятствием для существования в этом графе гамильтоновой цепи? А если точек сочленения несколько?

17. Может ли существовать гамильтонов граф, в котором имеется гамильтонова цепь, не являющаяся частью гамильтонова цикла?

**Решение.** См. рис. 22.6.

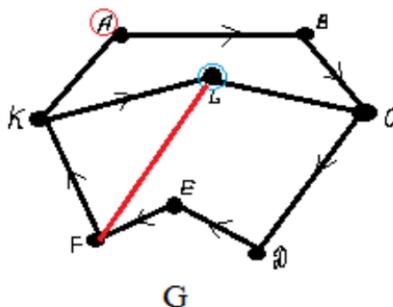


Рис. 22.6. Гамильтонов цикл KLFEDCBAK;  
гамильтонова цепь ABCDEFKL

18. Может ли в эйлеровом графе существовать эйлерова цепь, не являющаяся циклом?

**Ответ.** Нет, не может.

## 23. Плоские графы

**Определение 23.1.** Говорят, что граф  $G$  *планарный*, если его можно нарисовать на плоскости, соблюдая условие: *ребра графа не имеют никаких общих точек, за исключением общих вершин.* (23.1)

**Определение 23.2.** Изображение планарного графа на плоскости при соблюдении условия (23.1) называется *плоским графом*.

**Замечание.** Изображение планарного графа при соблюдении условия (23.1) называют также *плоской укладкой* (укладкой на плоскость) графа.

**Замечание.** Введенная терминология переносится без изменений на случай мультиграфов, графов с петлями и псевдографов.

**Замечание.** Один и тот же планарный граф может быть изображен на плоскости (с соблюдением условия (23.1)) многими способами (точнее, бесконечным числом способов).

Соответствующие примеры приведены на рис. 23.1 и 23.2:

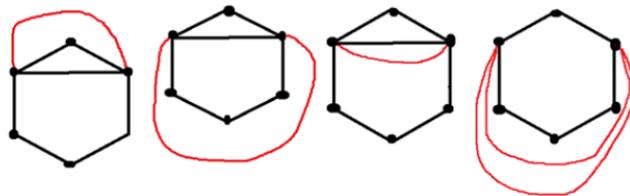


Рис. 23.1. Различные изображения одного и того же планарного мультиграфа

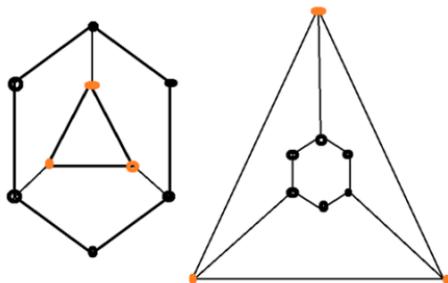


Рис. 23.2. Два различных изображения одного и того же планарного мультиграфа

**Замечание.** Далеко не все графы являются планарными. (Однако все деревья, очевидно, планарны.)

**Теорема 23.1.** *Граф  $K_5$  не планарен.*

**Доказательство.** Рассуждаем от противного. Допустим, что существует укладка графа  $K_5$  на плоскость. Очевидно, что в этом графе (и тем самым в его укладке на плоскость) существует цикл, содержащий все пять вершин. Занумеруем эти вершины числами от 1 до 5. Очевидно, что цикл  $(1,2,3,4,5,1)$  делит плоскость на 2 части – внешнюю и внутреннюю (см. рис. 23.3).

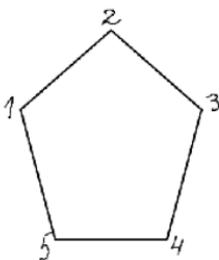


Рис. 23.3

Проведем теперь ребро  $(1,4)$ . Здесь возможны три варианта, см. рис. 23.4.

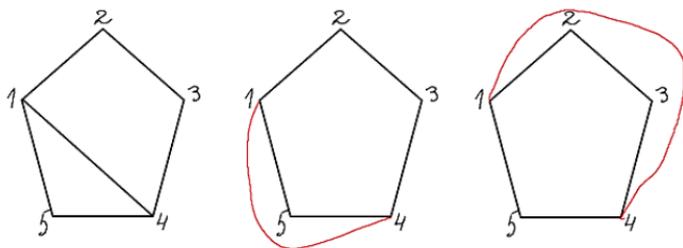


Рис. 23.4

Для каждой из трех укладок ребра  $(1,4)$ , изображенных на рис. 23.4, можно рассмотреть возможные варианты укладки ребра  $(5,3)$ . Все такие варианты (когда укладываемое ребро  $(5,3)$  не пересекает ранее уложенные ребра) изображены на рис. 23.5.

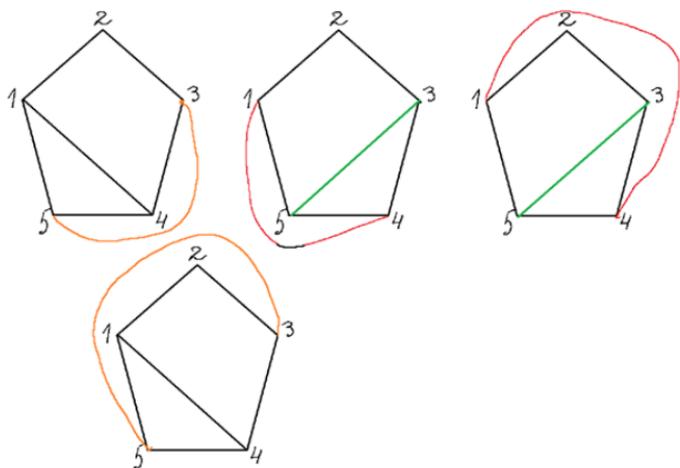


Рис. 23.5

Далее, укладываем ребро (2,4) всеми возможными способами; см. рис. 23.6.

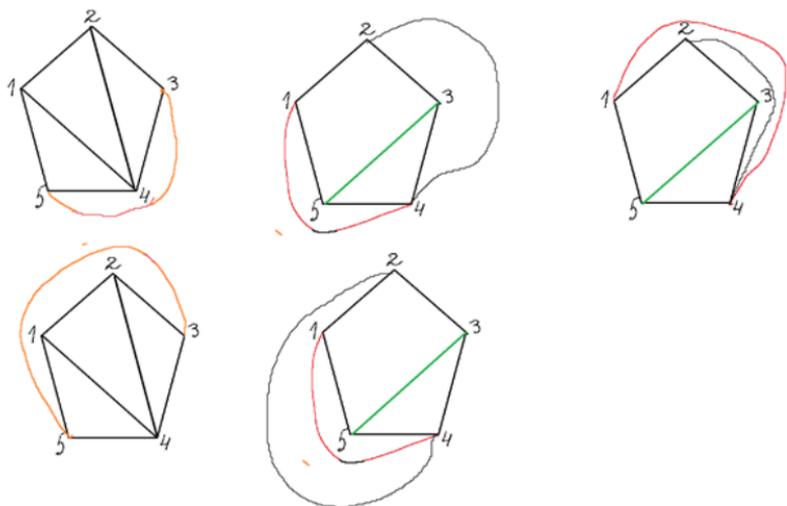


Рис. 23.6

Теперь укладываем ребро (1,3). См. рис.23.7.

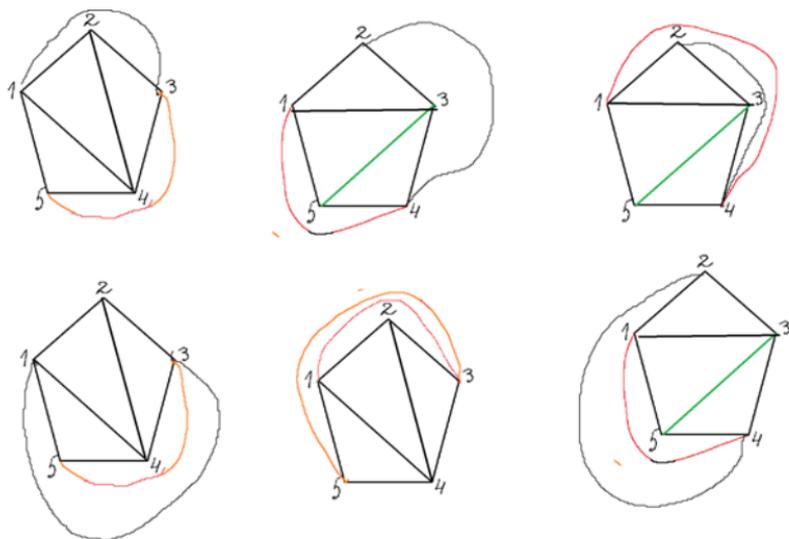
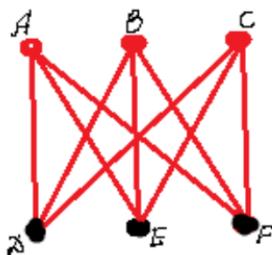


Рис. 23.7

Как мы видим из рис. 23.7, уложить ребро (2,5), не пересекая ранее уложенные ребра, уже невозможно. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

**Теорема 23.2.** *Граф  $K_{3,3}$  не планарен.*

**Доказательство.**



$K_{3,3}$

Рис. 23.8

Нетрудно видеть, что в графе  $K_{3,3}$  имеется гамильтонов цикл  $AFBDCEA$  (см. рис. 23.8). Будем вести доказательство от противного, предположив, что рассматриваемый граф  $K_{3,3}$  можно уложить на плоскость (т.е. нарисовать на плоскости, избежав пересечения ребер). Замечаем, что цикл  $AFBDCEA$  неминуемо разделит плоскость на две части – внешнюю и внутреннюю; см. рис. 23.9.

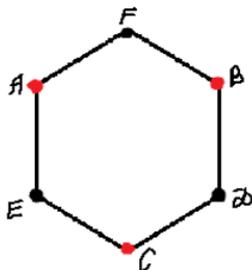


Рис. 23.9

Теперь ребро  $AD$  можно провести либо внутри цикла, либо снаружи, а затем ребро  $FC$  соответственно либо снаружи, либо внутри цикла; см. рис. 23.10.

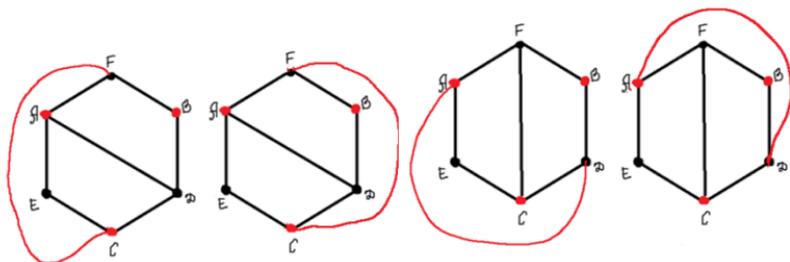


Рис. 23.10

Однако ребро  $BE$  уложить на плоскость уже не удастся. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

**Определение 23.3.** Назовем граф  $\Gamma$  *расширением* (подразбиением, подразделением) графа  $G$ , если  $\Gamma$  получается из  $G$  добавлением новых вершин на его ребра.

Справедлив следующий важный результат.

**Теорема 23.3 (Понтрягина – Куратовского).** *Граф  $G$  планарен тогда и только тогда, когда он не содержит в качестве подграфов  $K_5$ ,  $K_{3,3}$  и их расширений.*

**Замечание.** Простое необходимое условие планарности графа будет приведено в следующем параграфе.

**Утверждение 23.1** (см.[1]). *Любой граф укладывается в трехмерном пространстве.*

**Доказательство.** Это утверждение геометрически очевидно.

**Утверждение 23.2** (см.[1]). *Граф укладывается на плоскость тогда и только тогда, когда он укладывается на сферу.*

**Доказательство.** Это утверждение тоже геометрически очевидно.

### **Задачи**

1. а) *Может ли существовать плоский граф  $G$  с 20-ю вершинами, у которого степень каждой вершины равна 3?*

*Указание:* используйте в качестве «строительного блока» граф  $K_4$ .

б) *Тот же вопрос при условии, что граф  $G$  должен быть связным.*

*Указание:* снова возьмите в качестве «строительного блока» граф  $K_4$ , используя одно из ребер каждого такого «блока» в качестве перемычки между «блоками».

2. Пусть известно, что два плоских графа  $G$  и  $\Gamma$  одинаковы. Значит ли это, что можно (не выходя в трехмерное пространство) непрерывно преобразовать  $G$  в  $\Gamma$ ?

3. Уложить на плоскость граф  $K_5 - e$  ( $e$  – ребро  $CD$  графа  $K_5$ ; см. рис.23.11).

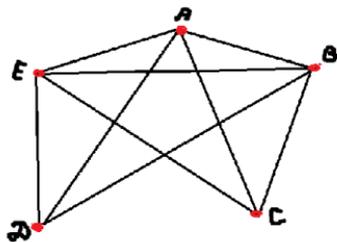


Рис. 23.11

**Решение.** См. рис. 23.12.

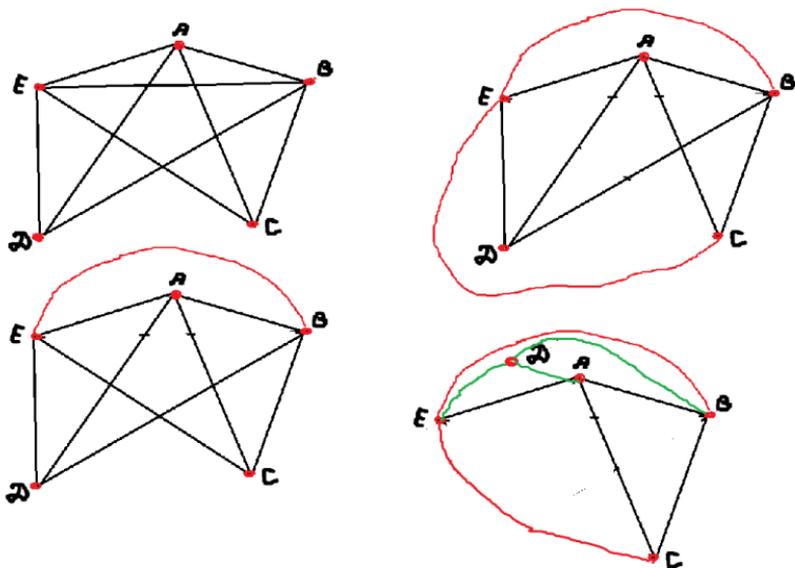


Рис. 23.12

4. В каркасе куба соединили ребром верхнюю левую вершину передней грани с правой нижней вершиной задней грани. Будет ли получившийся граф планарным?

Указание. См. рис. 23.13.

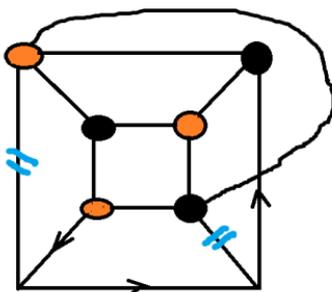


Рис. 23.13

5. Пусть  $G$  – связный планарный граф, у которого степень каждой вершины  $\geq 3$ . Верно ли, что  $G$  изоморфен каркасу некоторого многогранника?

6. Попробуйте изобразить такой граф, который можно уложить на поверхность тора, но нельзя уложить на сферу.

Подсказка. См. рис.23.14.

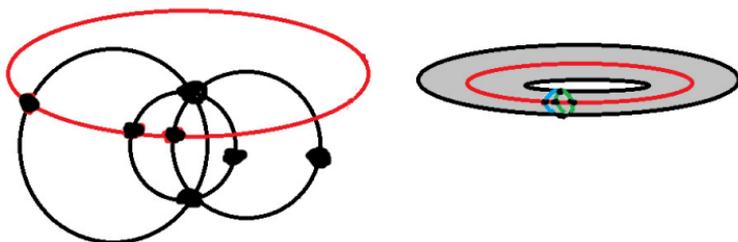


Рис. 23.14

## 24. Формула Эйлера и следствия из нее

**Определение 24.1.** *Гранью плоского графа называется область на плоскости, ограниченная ребрами этого графа. Простирающаяся в бесконечность (содержащая бесконечно удаленную точку) грань плоского графа называется его *внешней гранью*.*

**Утверждение 24.1.** *Для каждой грани  $W$  плоского графа  $G$  существует такая укладка этого графа на плоскость, что грань  $W$  станет внешней.*

**Доказательство** сводится к укладке графа  $G$  на сферу; при этом всегда можно считать, что «Северный полюс» сферы принадлежит грани  $W$ . Затем с помощью стереографической проекции укладываем граф  $G$  на плоскость. Геометрически очевидно, что грань  $W$  окажется при этой проекции внешней гранью для  $G$  (см. рис. 24.1).

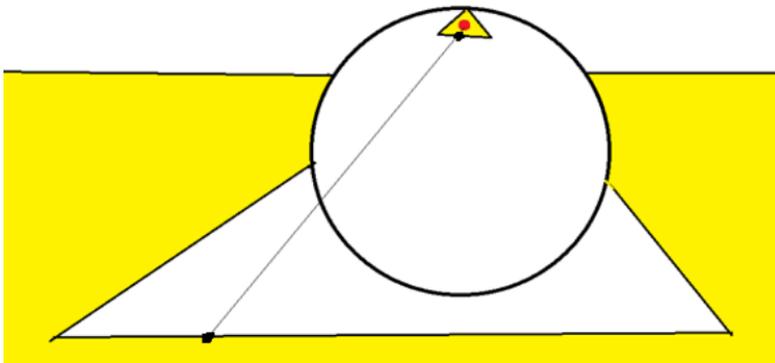


Рис. 24.1. Стереографическая проекция «треугольника»

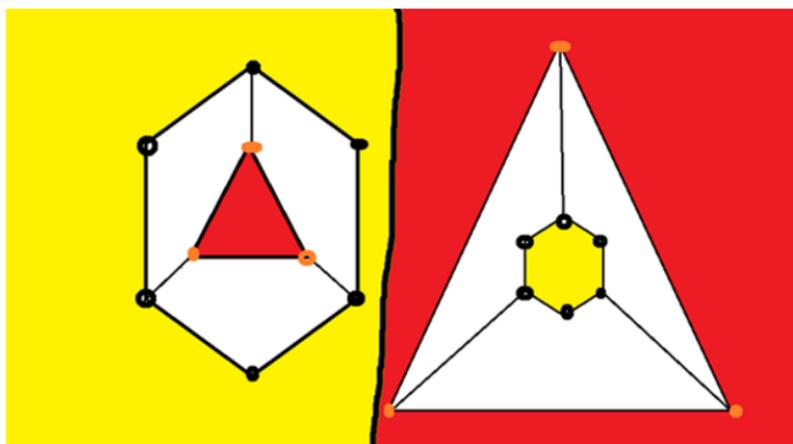


Рис. 24.2. Две различные укладки одного и того же плоского графа

**Теорема 24.1** (теорема Эйлера о плоских графах). *Для каждого связного плоского графа, у которого  $n$  вершин,  $t$  ребер и  $f$  граней, верно равенство:*

$$n - t + f = 2. \quad (24.1)$$

**Замечание.** Равенство (24.1) называют *формулой Эйлера*.

**Следствие.** *Если у плоского графа  $G$  имеется  $k$  компонент связности, то формула (24.1) приобретает вид:*

$$n - t + f = k + 1. \quad (24.1')$$

**Доказательство следствия.** Для простоты ограничимся случаем  $k = 3$ . Имеем тогда из (24.1) для каждой из компонент связности в отдельности:

$$n_1 - t_1 + f_1 = 2,$$

$$n_2 - t_2 + f_2 = 2,$$

$$n_3 - t_3 + f_3 = 2.$$

Складывая эти соотношения и учитывая тот очевидный факт, что общее число вершин, ребер и граней для графа  $G$  задается соответственно равенствами

$$n = n_1 + n_2 + n_3,$$

$$m = m_1 + m_2 + m_3,$$

$$f = f_1 + f_2 + f_3 - (k - 1),$$

получаем требуемый результат.

**Доказательство теоремы 24.1.** Для одновершинного графа формула (24.1), очевидно верна. Рассмотрим теперь произвольный непустой связный плоский граф. Если этот граф является деревом, то, как мы знаем,  $m = n - 1$ . Очевидно также, что у дерева только одна грань, т.е.  $f = 1$ . Таким образом, для дерева имеем

$$n - (n - 1) + 1 = 2, \text{ т.е. формула Эйлера верна.}$$

Пусть теперь рассматриваемый связный плоский граф  $G$  не является деревом. Начнем удалять из его простых циклов ребра, по одному ребру из каждого остающегося не разрушенным при такой процедуре простого цикла (при этом граф остается связным, а количество его вершин не меняется). В конце концов граф  $G$  превратится в дерево, для которого формулу Эйлера (24.1) мы уже установили. Возвратим сначала одно ребро, тогда количество ребер возрастет на 1, но и количество граней возрастет на 1. В результате соотношение (24.1) сохранится. Затем возвратим следующее ребро, снова и количество ребер, и количество граней возрастет на 1. И так далее. В результате граф  $G$  будет восстановлен, причем соотношение (24.1) останется верным. Теорема доказана.

**Замечание 1.** Нетрудно показать, что формула Эйлера остается справедливой также для мультиграфов, графов с петлями и псевдографов. (При этом петлю считаем за одно ребро, а не за два.)

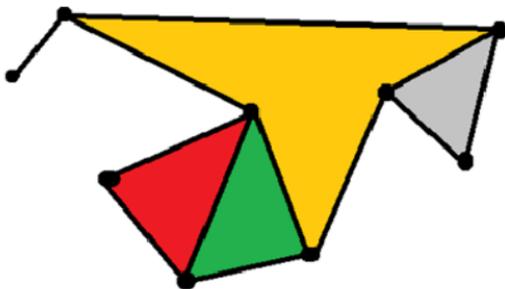


Рис. 24.3. При удалении 1-го ребра из любого простого цикла количество граней уменьшается на 1, а количество вершин не меняется

**Замечание 2.** Каждый раз при возвращении одного ребра возрастает на 1 именно число граней; при этом число простых циклов тоже возрастает, но не обязательно на 1. Именно поэтому теорему Эйлера нельзя непосредственно перенести на случай непланарных графов. Впрочем, нетрудно показать, что для числа простых циклов ( $F$ ) в связном, не обязательно планарном графе  $G$  будет справедливо неравенство

$$F \geq 1 + m - n. \quad (24.1'')$$

Действительно, как и при доказательстве теоремы 24.1, будем удалять по очереди из простых циклов графа  $G$  по одному ребру, до тех пор, пока не получим вместо  $G$  некоторое дерево. При этом у образовавшегося дерева будет  $n$  вершин (столько же, сколько у  $G$ ), число ребер будет равно  $m = n - 1$ , а число  $F$  простых циклов, очевидно, будет равно нулю.

Тем самым, для построенного дерева формула (24.1'') оказывается верной. Будем теперь восстанавливать по очереди удаленные ребра. Каждый раз правая часть (24.1'') будет увеличиваться на 1, а левая часть – не меньше, чем на 1. Тем самым, соотношение (24.1'') установлено.

**Замечание 3.** Проведем на плоскости  $p$  прямых в ситуации «общего положения», т.е. предполагая, что никакие две прямые не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. В результате у нас образуется мультиграф  $\Gamma$ , вершинами которого считаем точки пересечения проведенных прямых, а также бесконечно удаленную точку (в которой сходятся все проведенные прямые). Ребрами  $\Gamma$  будем считать отрезки прямых (либо лучи), соединяющие вершины этого мультиграфа. Геометрически очевидно, что  $\Gamma$  планарен, и для него справедлива формула Эйлера (24.1), где число вершин, очевидно, оказывается равным

$$n = C_p^2 + 1.$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче формула Эйлера приобретает вид:

$$C_p^2 - m + f = 1.$$

Выразим теперь число ребер ( $m$ ) через число  $p$  проведенных прямых. Каждая вершина  $\Gamma$ , кроме бесконечно удаленной вершины, имеет, очевидно, степень 4. Таким образом, вклад в общую сумму степеней всех вершин от вершин, расположенных в конечной части плоскости, будет равен  $4C_p^2$ . Что касается бесконечно удаленной вершины мультиграфа  $\Gamma$ , то в нее, очевидно, входит  $2p$  ребер (лучей). Итак, общая сумма степеней всех вершин  $\Gamma$  оказывается равной  $4C_p^2 + 2p$ . Поскольку каждое ребро соединяет две вершины, заключаем, что  $m = (4C_p^2 + 2p)/2 = p(p - 1) + p$ , откуда

$$m = p^2. \tag{24.1'''}.$$

Подставляя найденное выражение для  $m$  в предыдущее соотношение, имеем:

$$f = p^2 - C_p^2 + 1,$$

откуда окончательно получаем выражение для числа выпуклых областей, на которые  $p$  проведенных прямых (в ситуации «общего положения») разбивают плоскость:

$$f = \frac{p^2 + p + 2}{2} \quad (24.1''''')$$

(см. рис. 24.3а).

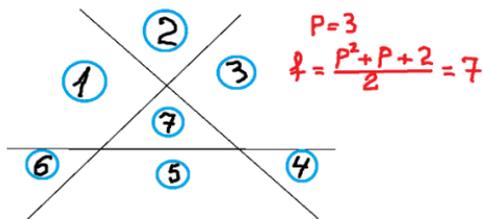


Рис. 24.3а

**Следствие из теоремы 24.1.** Для выпуклого многогранника, у которого  $n$  вершин,  $m$  ребер и  $f$  граней, справедливо равенство:

$$n - m + f = 2,$$

(т.е. фактически имеет место все та же формула (24.1)).

Справедливость этой формулы для выпуклых многогранников можно проверить в частном случае, подсчитав количество вершин, ребер и граней у многогранника, изображенного на рис. 24.4. В общем случае доказательство фактически сводится к тому, что выпуклый многогранник сначала проектируется на сферу из ее центра, а затем с поверхности сферы с помощью стереографической проекции проектируется на плоскость. При каждой из упомянутых проекций число вершин, ребер и граней не меняется. (См., например, [1, с. 145]).

**Замечание 4.** Формула Эйлера (24.1) обобщается также на случай невыпуклых многогранников; см по этому поводу, например, [15].

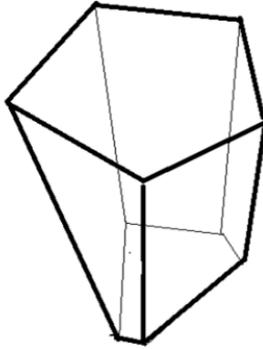


Рис. 24.4

**Теорема 24.2** (о правильных многогранниках). *Существует ровно пять правильных многогранников.*

**Доказательство.** Итак, мы знаем, что для любого выпуклого многогранника имеет место формула (24.1).

Для правильного многогранника в этой формуле нужно учесть, что:

А) в каждой вершине сходится одно и то же число  $k$  ребер. Таким образом, общее число ребер выражается через число вершин равенством:

$$m = kn/2 \quad (24.2)$$

(мы учли, что каждое ребро соединяет две вершины, и поэтому было сосчитано дважды при суммировании степеней всех вершин). [Сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер.]

Кроме того, у каждой грани правильного многогранника одно и то же число  $d$  ребер. Учитывая, что одно ребро принадлежит всегда двум граням, получаем  $m = df/2$ , откуда  $df/2 = kn/2$ . Следовательно

$$f = kn/d. \quad (24.3)$$

Подставляя выражения (24.2) и (24.3) в (24.1), получаем уравнение:

$$n(1 - k/2 + k/d) = 2. \quad (24.3')$$

Выражение в скобках должно быть положительным, поэтому должно выполняться неравенство

$$k/2 < 1 + k/d. \quad (24.4)$$

Заметим теперь, что в каждой вершине многогранника сходится не менее трех ребер ( $k \geq 3$ ), кроме того, число ребер грани также не меньше трех ( $d \geq 3$ ). Итак, имеются дополнительные ограничения:

$$k \geq 3; d \geq 3. \quad (24.5)$$

Решая систему неравенств (24.4), (24.5), получаем (на множестве натуральных чисел) следующий результат:

$$k=3; d=3 \text{ (тетраэдр); } 3/2 < 3/3 + 1;$$

$$k=3; d=4 \text{ (куб); } 3/2 < 3/4 + 1;$$

$$k=3; d=5 \text{ (додекаэдр); } 3/2 < 3/5 + 1;$$

$$k=4; d=3 \text{ (октаэдр); } 4/2 < 4/3 + 1;$$

$$k=5; d=3 \text{ (икосаэдр); } 5/2 < 5/3 + 1.$$

Любопытно, что все целочисленные (точнее, натуральные) решения системы (24.4), (24.5) отвечают реально существующим правильным многогранникам. Теорема доказана.

**Замечание 5.** *О решении системы (24.3'),(24.4),(24.5).*

Перепишем (24.4) в виде

$$k(1/2 - 1/d) < 1. \quad (24.6)$$

Поскольку  $d \geq 3$ , выражение в скобках  $\geq 1/6$ . Поэтому при  $k \geq 6$  система (24.4), (24.5) не имеет решений. Далее, при  $d \geq 6$  выражение в скобках  $\geq 1/3$ . Поскольку  $k \geq 3$ , система (24.4), (24.5) не будет иметь решений при  $d \geq 6$ .

Итак, остается найти все целочисленные решения уравнения (24.3') при условиях

$$5 \geq k \geq 3; 5 \geq d \geq 3.$$

Это делается с помощью перебора. В частности, при  $k=3; d=3$  уравнение (24.3') принимает вид

$$n(1 - 3/2 + 3/3) = 2,$$

откуда  $n = 4$  (тетраэдр).

**Замечание 6. Необходимое условие планарности.**

Опираясь на теорему Эйлера, нетрудно вывести простое необходимое условие планарности связного графа  $G$ , содержащего  $n$  ( $n \geq 3$ ) вершин. Итак, предположим, что граф  $G$ , не имеющий мостов, укладывается на плоскость, причем каждая его грань (в том числе внешняя) содержит ровно  $k$  ребер. Очевидно, что тогда должно выполняться равенство

$$kf = 2m, \tag{24.7}$$

поскольку каждое ребро граничит с двумя гранями и при подсчете общего числа ребер учитывается дважды.

По-прежнему предполагая, что в графе  $G$  отсутствуют мосты, будем теперь считать, что число ребер у каждой грани  $\geq k$ . В этом случае (24.7), очевидно, заменится неравенством

$$kf \leq 2m. \tag{24.8}$$

Заметим, однако, что (24.8) тем более сохранит свою силу и в общем случае, когда в графе  $G$  имеются мосты. (Действительно, при подсчете ребер графа, последовательно производимого по всем его граням, мосты учитываются лишь один раз, а не дважды, как остальные ребра. От того, что мосты в правой части (24.8) учтены дважды, разность между правой и левой частью (24.8) может только возрасти.)

Воспользуемся теперь формулой Эйлера (24.1), в которой, опираясь на (24.8), заменим  $f$  на  $2m/k$ . В результате (24.1) превратится в неравенство:

$$n - m + 2m/k \geq 2,$$

откуда имеем:

$$m \leq \frac{n-2}{1-2/k}. \quad (24.8)$$

Наибольший интерес представляет, конечно, случай  $k = 3$ , поскольку (при  $n \geq 3$ ) каждая грань плоского графа обязательно содержит не менее трех ребер.

В этом случае (24.8) приобретает вид

$$m \leq 3(n - 2). \quad (24.9)$$

Итак, приходим к следующему результату общего характера (см. [1, с. 146]):

**Теорема 24.2.** *Для планарности связного графа  $G$ , содержащего не менее трех вершин, необходимо выполнение неравенства (24.9).*

**Замечание 7.** Проверим на планарность, с помощью критерия (24.9), полные графы  $K_n$  (при  $n \geq 3$ ). Число ребер в  $K_n$ , как мы знаем, равно

$$m = n(n - 1)/2;$$

подставляя это выражение в (24.9), получаем, что для планарности  $K_n$  необходимо выполнение неравенства

$$n(n - 1)/2 \leq 3(n - 2),$$

или, что то же самое,

$$n^2 - 7n + 12 \leq 0.$$

Единственными целочисленными решениями этого неравенства являются  $n = 3$  и  $n = 4$ .

Тем самым мы получили независимое доказательство того факта, что граф  $K_5$  не планарен.

**Замечание 8.** Нетрудно проверить, что с помощью критерия (24.9) не удастся установить непланарность графа  $K_{3,3}$ . Тем не менее, с помощью формулы Эйлера (24.1) и свойства двудольных графов, удастся получить новое доказательство непланарности  $K_{3,3}$ , опирающееся в большей степени на логику, чем на геометрическую очевидность.

Итак, будем рассуждать от противного. Пусть существует укладка на плоскость графа  $K_{3,3}$ . Тогда для этого графа должна быть справедлива формула Эйлера (24.1), которую перепишем в виде:

$$f = 2 + m - n,$$

где, очевидно, следует положить  $m = 9$ ,  $n = 6$ . Таким образом, из предыдущего соотношения получаем, что для числа граней рассматриваемого графа должно выполняться равенство

$$f = 5.$$

Так как ребра нашего графа при (предполагаемой) укладке на плоскость не могут пересекаться, то границы каждой из упомянутых пяти граней могут состоять только из ребер, образующих (простой) цикл. Наименьшая длина такого цикла в двудольном графе равна 4. Следовательно, в совокупности пять обнаруженных граней потребуют для своего «огораживания» не менее  $5 \times 4 / 2 = 10$  ребер. (Здесь мы учли, что каждое ребро может принадлежать не более, чем двум граням.) Однако в графе  $K_{3,3}$  только 9 ребер. Полученное противоречие завершает доказательство.

### Задачи

1. Из графа  $K_6$  удалили одну вершину. Будет ли получившийся граф гамильтоновым? Ответ объясните.

2. Из графа  $K_5$  удалили одну вершину. Будет ли получившийся граф эйлеровым? Ответ объясните.

3. Трое друзей – Антон, Владислав и Семен – живут в трех отдельных домах. Недалеко от их домов течет река, на берегу которой расположены три лодочных станции. Друзья хотят проложить от своих домов к каждой станции тропинку так, чтобы эти тропинки нигде не пересекались. Смогут ли они это сделать?

4. Трое жителей дачного поселка хотят проложить тропинки к своим воротам так, чтобы эти тропинки нигде не пересекались; см. рис. 24.5. Удастся ли им это сделать? (См. [13, с.90].)

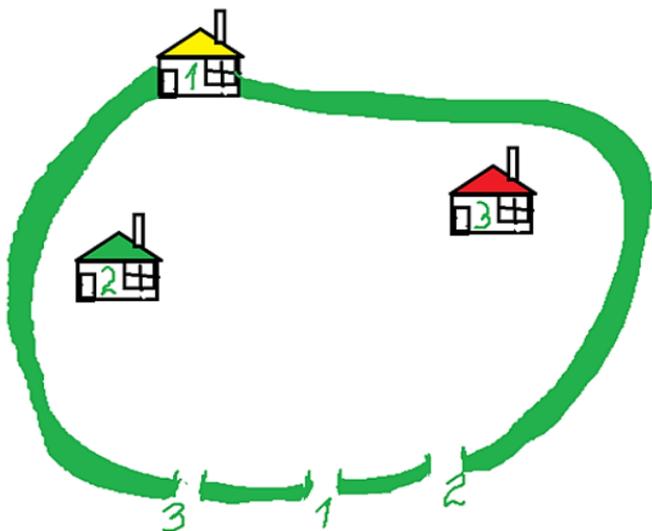


Рис. 24.5

5. Является ли граф  $K_{4,3}$  эйлеровым?

6. На бескрайнем поле в землю вбили 14 столбов и соединили их 13-ю заборами, не пересекающимися друг с дру-

гом. Никакие два столба не соединены непосредственно более, чем одним забором. К каждому столбу подведен хотя бы один забор. Концы каждого забора – два различных столба. Сколько ограниченных участков земли могло образоваться? (См. [1, с. 156–157].)

ба. На бескрайнем поле в землю вбили 14 столбов и соединили некоторые из них заборами, не пересекающимися друг с другом; всего заборов было построено 13. Никакие два столба не соединены непосредственно более, чем одним забором. Концы каждого забора – два различных столба. Какое наибольшее количество ограниченных участков земли могло образоваться?

7. а) Из графа  $K_6$  удалили одно ребро. Будет ли получившийся граф планарным? б) Укладывается ли на плоскость граф  $K_{4,4}$ ? в) Укладывается ли на плоскость граф  $K_{10,2}$ ?

8. Верна ли теорема Эйлера для плоского графа с петлями? (Проверьте это на примерах.)

9. Верна ли теорема Эйлера для плоских мультиграфов? (Проверьте это на примерах.)

10. В круге провели  $p$  хорд. Какое наибольшее число отрезков, не содержащих внутренних точек деления, могло образоваться?

11. Круглый арбуз разрезали  $p$  плоскостями, проходящими через его центр. Какое наибольшее число кусков могло образоваться?

**Решение.** Проведем на сфере (т.е. на поверхности арбуза)  $p$  больших окружностей (окружностей, центр которых совпадает с центром сферы) в ситуации «общего положения», иными словами – предполагая, что никакие три окружности не пересекаются в одной точке. (Именно такие окружности образуются на поверхности арбуза при рассе-

чении его плоскостями, проходящими через его центр. В терминах проведенных плоскостей ситуация «общего положения» означает, что никакие три плоскости не пересекаются по одной прямой.) В результате у нас на поверхности арбуза образуется граф  $\Gamma$ , вершинами которого считаем точки пересечения проведенных окружностей. Ребрами  $\Gamma$  будем считать дуги окружностей, соединяющие вершины этого графа. Геометрически очевидно, что  $\Gamma$  планарен, и для него справедлива формула Эйлера (24.1), где число вершин, очевидно, оказывается равным

$$n = 2C_p^2.$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче формула Эйлера приобретает вид:

$$2C_p^2 - m + f = 2.$$

Выразим теперь число ребер ( $m$ ) через число  $p$  проведенных окружностей. Каждая вершина  $\Gamma$  имеет, очевидно, степень 4. Таким образом, общая сумма степеней всех вершин будет равна  $8C_p^2$ . Поскольку каждое ребро соединяет две вершины, заключаем, что  $m = 8C_p^2/2 = 4C_p^2$ .

Подставляя найденное выражение для  $m$  в предыдущее соотношение, имеем:  $2C_p^2 - 4C_p^2 + f = 2$ ,

откуда окончательно получаем выражение для числа областей, на которые  $p$  проведенных больших окружностей (в ситуации «общего положения») разбивают поверхность арбуза:

$$f = 2 + p(p - 1).$$

Геометрически очевидно, что это число одновременно является ответом на вопрос задачи.

В частности, при  $p = 3$  арбуз будет разрезан на  $f = 8$  частей.

12. Круглый блинчик разрезали четырьмя прямолинейными разрезами. Какое наибольшее число частей могло образоваться?

## 25. Задача коммивояжера

### Первая формулировка задачи.

**Дано:** полный граф  $K_n$ , в котором прохождению каждого ребра приписана определенная строго положительная цена.

**Требуется найти:** гамильтонов цикл наименьшей стоимости.

Та же задача в другой формулировке:

### Вторая формулировка задачи.

**Дано:**  $n$  городов, каждые два из которых непосредственно связаны автомобильной дорогой. Все дороги платные.

**Коммивояжеру требуется:** посетить все  $n$  городов в точности по одному разу и вернуться обратно, совершив наиболее экономное путешествие.

**Замечание.** Город, из которого коммивояжер отправляется в путь, не считается посещенным в момент отправления.

Прежде чем обсуждать различные подходы к решению поставленной задачи, заметим, что при  $n > 2$  граф  $K_n$  обязательно гамильтонов.

Как мы знаем, всего ребер в таком графе  $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ . В то же время, число ребер в каждом гамильтоновом цикле, очевидно, равно  $n$ .

Иными словами, в одном гамильтоновом цикле содержится очень небольшая доля от общего количества ребер графа  $K_n$ , а именно  $2/(n-1)$ .

Сколько же всего гамильтоновых циклов в графе  $K_n$ ? Если считать фиксированной вершину, откуда начинается свое путешествие коммивояжер, то таких циклов всего  $(n-1)!$  ( $n$  минус один факториал). Так как коммивояжеру безразлично, в каком из двух направлений проходить свой циклический маршрут, то число различных маршрутов оказывается равным  $(n-1)!/2$ . При  $n = 1000$  это огромное число.

Именно  $(n-1)!/2$  разных циклов нужно перебрать, чтобы найти точное решение задачи коммивояжера о цикле наименьшей стоимости.

**Замечание.** Решать задачу коммивояжера не обязательно для полного графа, достаточно потребовать, чтобы этот граф был гамильтоновым.

Экономное (по времени) точное решение задачи коммивояжера для больших  $n$  до сих пор неизвестно. Поэтому представляет значительный интерес нахождение приближенного решения за сравнительно малое время.

Таких приближенных методов существует несколько.

**А. Метод Монте-Карло** (см. [2], [4])

*Составляют последовательность длины  $n+1$  из вершин графа, выбирая их случайным образом без повторений (повторяются только первая и последняя вершина). Затем подсчитывают стоимость сформированного маршрута.*

*После чего процесс осуществляется снова. За сравнительно небольшое число шагов часто удается получить приемлемое приближение к точному решению, выбирая цикл с наименьшей стоимостью из просмотренных циклов.*

**Замечание.** Если в графе (неполном) отсутствует ребро между двумя вершинами, которые оказались соседними в последовательности по методу Монте-Карло, то стоимость прохождения (несуществующего) ребра между ними полагают равной бесконечности. При этом сам метод не теряет работоспособности.

**Примеры.** Решить задачи коммивояжера для графов, изображенных на рис. 25.1 и 25.2. Коммивояжер отправляется в путь из пункта А. Рядом с ребрами обозначены цены проезда по ним.

**Замечание.** Если в примере, изображенном на рис. 25.1, разрешить коммивояжеру дважды проезжать по ребру АВ, то стоимость оптимального маршрута снизится примерно в 200 раз.

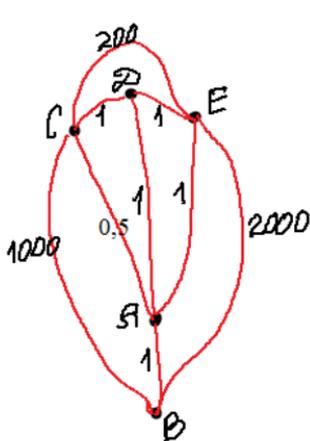


Рис. 25.1

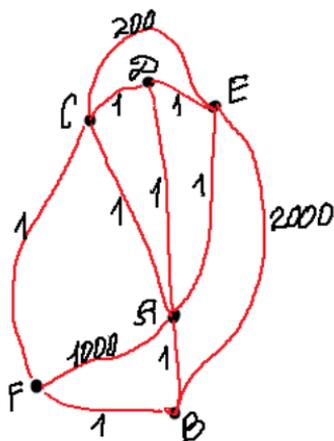


Рис. 25.2

### Б. Жадный алгоритм (см. [2, с. 86])

Суть этого алгоритма заключается в следующем. Движение начинаем из произвольной вершины, переходя из нее в ту из соседних вершин, дорога к которой стоит дешевле

всего. Затем продолжаем движение, следуя такому же принципу и следя за тем, чтобы не посещать ранее пройденные вершины. Если несколько исходящих из данной вершины ребер имеют одинаковую (и притом минимальную) стоимость, то выбираем любое из этих ребер для продолжения маршрута. Этот алгоритм иногда дает неплохие результаты.

**Пример.** Применим жадный алгоритм к графу, изображенному на рис. 25.1.

Движение начнем из вершины А. В результате применения указанного алгоритма получим такой маршрут коммивояжера: ACDEBA, который почти вдвое дороже оптимального маршрута ABCDEA.

Для того, чтобы получать приемлемый результат, нужно испытывать различные вершины графа в качестве начальных, а затем выбрать наилучший (наиболее экономный) вариант из рассмотренных.

**Замечание.** Вообще, *жадным* принято называть любой алгоритм, делающий на каждом шаге локально наиболее выгодный выбор и не пересматривающий этот выбор на следующих шагах. Удивительным примером жадного алгоритма, приводящего к *точному* решению задачи, является алгоритм Краскала, предназначенный для построения минимального остовного дерева (см. параграф 17).

## **В. Муравьиный алгоритм** (см. [2], [6], [10])

Итальянский математик Марко Дориго в 90-е годы положил в основу изобретенного им алгоритма следующее наблюдение за действиями муравьев. (Муравьи, как выяснилось, эффективно прокладывают маршруты к пище, расположенной в окрестностях муравейника.) А именно, происходит следующее. Муравей, нашедший длинный путь к пище, успевает сделать за единицу времени мало ходок

к источнику пищи. При этом вдоль своего маршрута каждый муравей откладывает пахучий след (из феромона), играющий роль указателя движения. В результате количество пахучего вещества на единицу пути будет выше у того муравья, чья дорога к источнику пищи короче. Соответственно, другие муравьи отправятся (в основном) за пищей именно по более пахучему пути. Через некоторое время сеть муравьиных маршрутов становится близка к оптимальной.

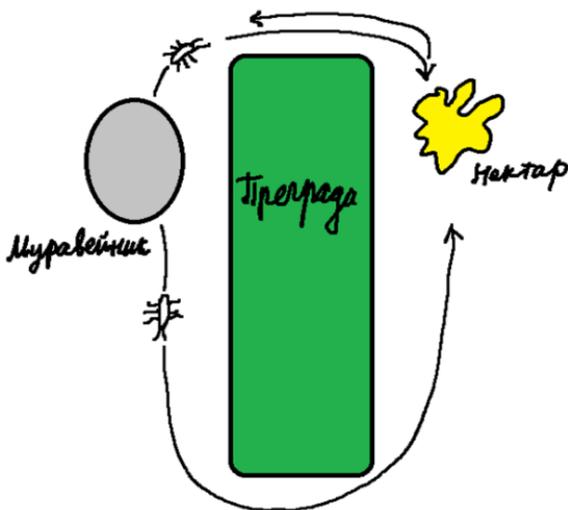


Рис. 25.3. Происхождение муравьиного алгоритма  
(рисунок взят из книги [6])

Именно эту идею Марко Дориго формализовал и положил в основу своего алгоритма, предназначенного для решения задачи коммивояжера.

Опишем в самых грубых чертах математическую идею «муравьиного алгоритма» Марко Дориго.

*Муравьиный алгоритм (общая идея):*

Рассматривается полный взвешенный граф  $K_n$ . (Взвешенным называют такой граф, каждому ребру которого сопоставлено положительное число.)

Перенумеруем все его вершины числами от 1 до  $n$ , а ребра, соединяющие  $i$ -ю и  $j$ -ю вершины, будем обозначать  $(i, j)$ . Каждому ребру вида  $(i, j)$  изначально сопоставлен его вес (в качестве «веса» может выступать физическая длина ребра, стоимость прохождения по ребру и т.д.); величину, обратную к этому весу будем обозначать через  $A(i, j)$ . Кроме того, каждому ребру вида  $(i, j)$  сопоставим вероятность выбора этого ребра при прохождении маршрута «муравьем», оказавшимся в  $i$ -й вершине; эту вероятность обозначим через  $P(i, j)$ . В качестве исходных значений  $P(i, j)$  возьмем

$$P_0(i, j) = A(i, j) / \sum_k A(i, k).$$

Таким образом, чем дешевле прохождение какого-либо ребра, исходящего из данной вершины, тем с большей вероятностью маршрут будет продолжен именно по такому ребру.

Подчеркнем, что на каждой итерации муравьиного алгоритма вероятности  $P(i, j)$  будут пересчитываться. Прежде чем описывать механизм пересчета этих вероятностей, заметим, что для каждой вершины (т.е. для вершины с произвольным номером  $i$ ) определено отношение

$$P(i, j) / \sum_{k, k \neq j} P(i, k) \quad (25.1)$$

*(здесь суммирование ведется по всем не пройденным на данной итерации вершинам, отличным от  $j$ -ой).*

Предположим теперь, что в результате очередного цикла коммивояжеру удалось пройти свой маршрут, заплатив в 2 раза меньше, чем за наиболее дешевый маршрут, прой-

денный во время предыдущих циклов. Тогда всем ребрам, по которым реально проходил последний маршрут, приписываются новые вероятности таким образом, что соответствующие отношения (25.1) увеличиваются вдвое.

**Пример.** Пусть вероятность перехода из вершины А в вершину В равна  $t$ . Тогда сумма вероятностей перехода из вершины А во все остальные не пройденные ранее (на данной итерации) вершины равна  $1 - t$ . Обозначим через  $w$  отношение  $t/(1 - t)$ . Таким образом,

$$t = w/(1 + w);$$

$$1 - t = 1/(1 + w).$$

Предположим, что после завершения данной итерации алгоритма выяснилось, что затраты на прохождение всего маршрута коммивояжера оказались в  $k$  раз меньше, чем затраты на наиболее дешевой из предыдущих итераций. Тогда вероятности прохождения всех ребер, реально составивших последний маршрут, должны пропорционально возрасти. Если ребро АВ реально участвовало в последнем маршруте, то вероятность прохождения (уже в дальнейшем) ребра АВ должна измениться так, чтобы отношение  $w$  возросло в  $k$  раз. Очевидно, что для этого нужно будет приписать прохождению ребра АВ вероятность

$$t' = kw/(1 + kw);$$

при этом вероятности прохождения остальных ребер, исходящих из вершины А, пропорционально уменьшаются, их сумма будет равна

$$1 - t' = 1/(1 + kw).$$

**Замечание.** Для тех, кому совсем не интересны детали, а важна лишь основная идея муравьиного алгоритма, приведем здесь его приблизительное словесное описание.

Итак, рассматривается взвешенный полный граф  $K_n$ ,  $n \geq 3$ ; все веса ребер строго положительны. В этом графе выделяется «стартовая» вершина  $w$ , из которой виртуальный муравей должен начать свой путь и затем, обойдя все остальные вершины по одному разу, вернуться в  $w$ . На начальном этапе вероятности перехода из одной вершины в любую другую, не посещенную ранее в течение данного маршрута, обратно пропорциональны весам ребер, связывающих эти вершины. Никакую вершину (за исключением  $w$ ) нельзя посещать дважды, а в  $w$  можно вернуться, только посетив все остальные вершины.

Все упомянутые выше вероятности перехода действуют в течение нулевого и первого циклов муравьиного алгоритма; на следующих итерациях эти вероятности меняются!

Итак, на нулевой итерации, получаем некоторый маршрут (гамильтонов цикл) определенного веса  $P_0$ .

Затем снова запускаем виртуального муравья из вершины  $w$ , все еще рассчитывая вероятности перехода по правилам, принятым на нулевой итерации. В результате получаем некоторый маршрут веса  $P_1$ .

В этот момент и начинает реализовываться основная идея муравьиного алгоритма.

Если  $P_1 \geq P_0$ , то правила подсчета вероятностей перехода из одной вершины в другую не меняем и снова запускаем виртуального муравья.

Если же выполнено строгое неравенство  $P_1 < P_0$ , то правила подсчета вероятностей перехода меняются. А именно, на следующей (второй) итерации вероятности прохождения (с учетом направления) каждого ребра, пройденного на предыдущей (первой) итерации, возрастает — за счет уменьшения вероятностей прохождения по смежным ребрам. Характер возрастания упомянутых вероятностей бли-

зок к прямой пропорциональности с коэффициентом  $P_0/P_1$ . Затем процедура многократно повторяется.

После прохождения заранее заданного числа итераций из всех сгенерированных маршрутов выбирается маршрут наименьшего веса.

**Замечание.** Мы изложили основную идею муравьиного алгоритма; на практике этот алгоритм устроен сложнее и включает в себя использование дополнительных эвристических параметров. В настоящее время муравьиный алгоритм считается одним из наиболее эффективных средств решения задачи коммивояжера. За сравнительно небольшое количество итераций этот алгоритм позволяет получить хорошее приближение к решению задачи для графа, содержащего сотни вершин.

**Г. «Генетический алгоритм»** (см., например, [16]). Чрезвычайно остроумная идея этого алгоритма (так же, как и идея муравьиного алгоритма) взята из биологии. Рассмотрим в самых общих чертах действие генетического алгоритма на примере взвешенного графа  $K_n$ ,  $n \geq 3$ . В совокупности всех гамильтоновых циклов, имеющих в этом графе и начинающихся в фиксированной вершине, выделяют случайным образом подмножество заданной численности.

Это подмножество в дальнейшем рассматривается как «популяция», а входящие в него гамильтоновы циклы – как «особи» и, одновременно, как «хромосомы». Таким образом, вершины графа – это «гены», из которых составлены «хромосомы». Очевидно, что набор «генов» у всех таких «хромосом» – один и тот же, различен в этих «хромосомах» только порядок «генов».

Затем из составленной «популяции» случайным образом выбираются несколько пар «особей», которые обмениваются фрагментами своих «хромосом», в результате чего от каждой пары отпочковываются две новые «особи». При

этом обмен фрагментами «хромосом» организован так, что у новых «особей» ни один «ген» не повторяется и присутствует полный набор «генов». Кроме того, у новых «особей» с некоторой вероятностью могут меняться местами отдельные «гены».

Итак, «популяция» временно разрастается, но из нее удаляются все «особи» слишком большого веса – с таким расчетом, чтобы «популяция» вернулась к прежней своей численности.

После ряда «поколений» (т.е. итераций) достигается приближенное решение поставленной оптимизационной задачи.

## 26. Поиск кратчайшего расстояния в графе. Алгоритм Дейкстры

В этом параграфе мы будем снова иметь дело со взвешенными графами; веса ребер нам будет удобно интерпретировать как *физические расстояния* (в метрах, километрах и т.д.), поскольку такая интерпретация является наиболее распространенной.

**Замечание.** *Введенные таким образом физические расстояния ни в коем случае не следует путать с длинами маршрутов, определенными ранее как число пройденных ребер!*

Поиск кратчайшего пути между двумя вершинами (в иной терминологии – поиск маршрута наименьшего веса) представляет собой составную часть решения задачи Китайского Почтальона. (Ну, а кроме того, – это классическая задача теории графов. Ее исключительно элегантное решение было получено голландским математиком Э. Дейкстрой в 1959 г.).

Итак, рассмотрим взвешенный связный граф  $G$  (см. рис. 26.1) и представим алгоритм Дейкстры, позволяющий найти кратчайшие (физические) расстояния от вершины  $X_1$  до всех остальных вершин. Наше изложение будет в основном следовать (видео)лекции [11].

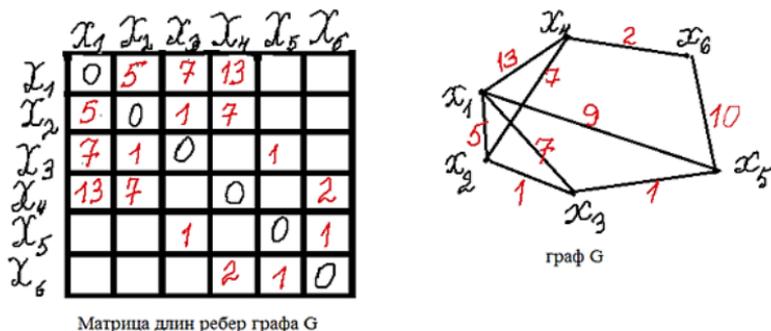


Рис. 26.1

На следующем рисунке (рис. 26.2) представлено начало алгоритма Дейкстры (нулевой шаг). С самого начала вводится вспомогательная функция, вычисляющая «пометки» для вершин графа. Эти пометки  $L(X_i)$  для каждой вершины  $X_i$  представляют собой результат промежуточных вычислений кратчайшего расстояния от  $X_1$  до  $X_i$  (на каждом шаге алгоритма пометки, вообще говоря, меняются).

Формула для пометок задает их изменение при переходе к каждому следующему шагу алгоритма и требует пояснений. Вот эта формула:

$$L(X_i) := \min[L(X_i); L(X_s) + d(X_s, X_i)]. \quad (26.1)$$

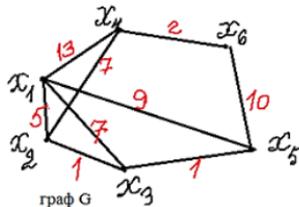
Из формулы (26.1) видно, что при переходе к следующему шагу алгоритма значение пометки может оставаться прежним, а может измениться (уменьшиться). В (26.1) важную роль играет промежуточная пометка  $L(X_s)$ , обозначающая кратчайшее расстояние от  $X_1$  до  $X_s$ . В дальнейшем

будет объяснено, каким образом следует выбирать вершину  $X_s$  на каждом шаге. Наконец,  $d(X_s; X_i)$  – длина ребра, соединяющего вершины  $X_s$  и  $X_i$ .

**Алгоритм Дейкстры**

номера шагов алгоритма

	0	1	2	3	4	5
$X_1$	0					
$X_2$	$\infty$					
$X_3$	$\infty$					
$X_4$	$\infty$					
$X_5$	$\infty$					
$X_6$	$\infty$					



$$L(X_i) := \min \begin{cases} L(X_i) \\ L(X_s) + d(X_s, X_i) \end{cases}$$

Рис. 26.2

Таблицу будут заполнять уточняющиеся на каждом шаге алгоритма расстояния от вершины  $X_1$  до остальных вершин.

Итак, нулевой шаг сделан. Расстояние от  $X_1$  до  $X_1$ , очевидно, полагаем равным 0. Расстояния от  $X_1$  до остальных вершин графа временно считаем равными бесконечности. Фактически, это означает, что мы еще даже не посмотрели на рисунок графа и привели заведомо верную оценку сверху для всех этих расстояний.

Полоса в верхней строке таблицы означает, что ни на одном из следующих шагов алгоритма мы не будем возвращаться в  $X_1$ , так как любой околный путь из  $X_1$  в  $X_1$  будет иметь длину  $> 0$ .

В терминах величины  $L(X_i)$  содержимое нулевого столбца на рис. 24.2 может быть записано в виде:

$$L(X_1) = 0, \quad (26.2)$$

$$L(X_i) = \infty \text{ при } i > 1.$$

Начнем теперь заполнять 1-й столбец нашей таблицы, т.е. сделаем 1-й шаг алгоритма в соответствии с формулой (26.1) и нашими знаниями о длинах ребер графа G.

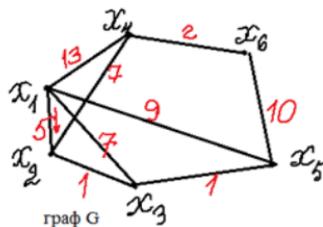
При этом в качестве  $X_s$  берем  $X_1$ , поскольку для  $X_1$  соответствующая пометка в предыдущем (нулевом) столбце таблицы – наименьшая. Именно этот принцип – всегда брать в качестве  $L(X_s)$  наименьшую пометку из предыдущего столбца – составляет суть алгоритма Дейкстры.

В результате по формуле (26.1) заполняем первый столбец таблицы (см. рис. 26.3). Пометка для  $X_2$  в этом столбце оказывается наименьшей, мы ее делаем постоянной (обводим в кружок). Это означает, что наименьшее расстояние от  $X_1$  до  $X_2$  уже найдено. Никакой околный путь из  $X_1$  в  $X_2$  не будет иметь длину, меньшую, чем 5. (Обдумайте, почему! Это важно для понимания алгоритма Дейкстры.) Вторую сверху горизонтальную полосу после обведенного в кружок числового значения закрашиваем. Это значит, что пометка для  $X_2$  уже не будет меняться. Более того, это означает, что при дальнейших шагах алгоритма ни из какой вершины мы не будем заходить в  $X_2$ , поскольку любой иной путь из  $X_1$  в  $X_2$  окажется длиннее уже найденного.

**Замечание.** Стрелкой на рис. 26.3 показан кратчайший путь из  $X_1$  в  $X_2$ .

**Алгоритм Дейкстры**  
номера шагов алгоритма

	0	1	2	3	4	5
$X_1$	0					
$X_2$	$\infty$	5				
$X_3$	$\infty$	7				
$X_4$	$\infty$	13				
$X_5$	$\infty$	9				
$X_6$	$\infty$	$\infty$				



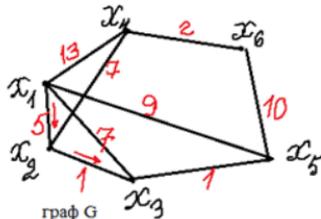
$$L(X_i) := \min \begin{cases} L(X_i) \\ L(X_s) + d(X_s, X_i) \\ (s=1) \end{cases}$$

Рис. 26.3

Начнем теперь заполнять второй столбец по правилу (26.1), причем в качестве  $X_s$ , в соответствии со сказанным выше, берем  $X_2$  (см. рис. 26.4).

**Алгоритм Дейкстры**  
номера шагов алгоритма

	0	1	2	3	4	5
$X_1$	0					
$X_2$	$\infty$	5				
$X_3$	$\infty$	7	6			
$X_4$	$\infty$	13	12			
$X_5$	$\infty$	9	9			
$X_6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$			



$$L(X_i) := \min \begin{cases} L(X_i) \\ L(X_2) + d(X_2, X_i) \end{cases} \quad (s=2)$$

Рис. 26.4

Итак, кратчайшее расстояние от  $X_1$  до  $X_3$  равно 6.

Попробуем разобраться, почему любой другой маршрут из  $X_1$  в  $X_3$  будет длиннее. Имеет смысл провести рассуждение, не обращаясь к изображению графа  $G$ , а оперируя только данными таблицы, приведенной на рис. 26.1. Итак, предположим противное, а именно, что существует более короткий маршрут (длины  $< 6$ ), ведущий из  $X_1$  в  $X_3$ . Прежде всего, ни одно из ребер, исходящих из вершины  $X_1$  (кроме ребра  $(X_1, X_2)$ ) не может служить началом такого маршрута. (Остальные ребра – слишком длинные!) Далее, чисто теоретически могла бы возникнуть ситуация, когда найдутся два очень коротких ребра  $(X_2, X_n)$  и  $(X_n, X_3)$ .

Однако «очень короткое» (длины  $< 1$ ) ребро  $(X_2, X_n)$  найтись не может, поскольку имеющее длину 1 ребро  $(X_2, X_3)$  самое короткое среди ребер, инцидентных вершине  $X_2$ .

Перейдем к третьему шагу алгоритма. На этот раз, очевидно, следует положить  $s = 3$  (см. рис. 26.4).

В результате оказывается заполненным очередной столбец нашей таблицы (см. рис. 26.5).

**Алгоритм Дейкстры**  
номера шагов алгоритма

	0	1	2	3	4	5
$X_1$	0					
$X_2$	$\infty$	5				
$X_3$	$\infty$	7	6			
$X_4$	$\infty$	13	12	12		
$X_5$	$\infty$	9	9	7		
$X_6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$		

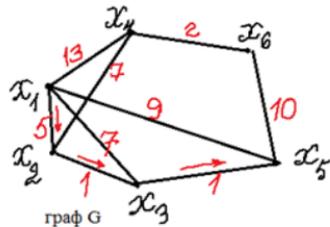


Рис. 26.5

$$L(X_i) := \min \begin{cases} L(X_i) \\ L(X_s) + d(X_s, X_i) \end{cases} \quad (s=3)$$

Итак, на третьем шаге алгоритма мы выяснили, что длина кратчайшего маршрута из  $X_1$  в  $X_5$  равна 7. Конечно, в нашем примере это «видно невооруженным глазом», но для графов с многими десятками или даже сотнями вершин требуется строго упорядоченная последовательность действий, которую можно поручить машине. Именно такую последовательность представляет собой алгоритм Дейкстры.

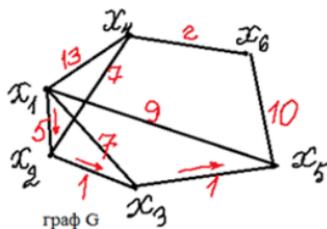
Перейдем к четвертому шагу алгоритма. На этот раз в формуле (26.1) нам следует положить  $s = 5$  (см. рис. 26.5). В результате заполняем предпоследний столбец таблицы (рис. 26.6).

Итак, на четвертом шаге алгоритма мы выяснили, что длина кратчайшего маршрута из  $X_1$  в  $X_4$  равна 12. Наконец, на пятом (последнем) шаге алгоритма полагаем  $s = 4$  и узнаем, что кратчайшее расстояние от  $X_1$  до  $X_6$  равно 14 (см. рис. 26.7).

### Алгоритм Дейкстры

номера шагов алгоритма

	0	1	2	3	4	5
$X_1$	0					
$X_2$	$\infty$	5				
$X_3$	$\infty$	7	6			
$X_4$	$\infty$	13	12	12	12	
$X_5$	$\infty$	9	9	7		
$X_6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	17	



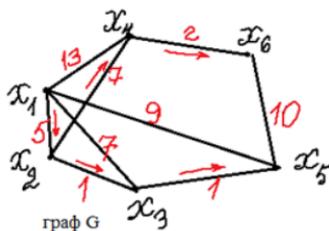
$$L(X_i) := \min \begin{cases} L(X_i) \\ L(X_5) + d(X_5, X_i) \end{cases} \quad (s=5)$$

Рис. 26.6

### Алгоритм Дейкстры

номера шагов алгоритма

	0	1	2	3	4	5
$X_1$	0					
$X_2$	$\infty$	5				
$X_3$	$\infty$	7	6			
$X_4$	$\infty$	13	12	12	12	
$X_5$	$\infty$	9	9	7		
$X_6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	17	14



$$L(X_i) := \min \begin{cases} L(X_i) \\ L(X_4) + d(X_4, X_i) \end{cases} \quad (s=4)$$

Рис. 26.7

## 27. Орграфы. Дополнительные сведения

Приведем вначале сводку наиболее важных аналогичных друг другу терминов, встречающихся в теориях графов и орграфов (см. табл. 27.1)

Таблица 27.1

	Графы	Орграфы
1	Маршрут	Маршрут
2	Ребро	Дуга
3	Конец ребра	Концевая вершина (начало либо конец дуги)
4	Цепь, цикл	Цепь, цикл
5	Простая цепь	Путь
6	Простой цикл	Контур
7	Связный граф	Сильный орграф (орграф наз. связным, если он связан как обычный граф)
8	Полный граф	Полный орграф (если он полный как обычный граф)

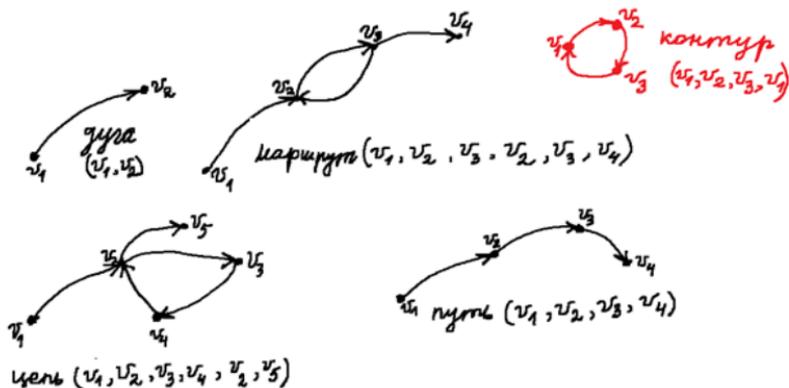


Рис. 27.1

В отличие от обычного графа в орграфе маршрут всегда следует по заранее заданному направлению каждой дуги.

**Определение 27.1.** Цепь или цикл в связном орграфе называются *эйлеровыми*, если они содержат каждую его дугу. Связный орграф называется *эйлеровым*, если в нем имеется эйлеров цикл.

**Определение 27.2.** Путь или контур в связном орграфе называются *гамильтоновыми*, если они проходят через все его вершины. Связный орграф называется *гамильтоновым*, если в нем имеется гамильтонов контур.

**Определение 27.3.** Пусть  $w$  – произвольно взятая вершина орграфа. Через  $d^+(w)$  обозначим число дуг, исходящих из вершины  $w$ , а через  $d^-(w)$  – число дуг, заходящих в вершину  $w$ . Число  $d(w) = d^+(w) + d^-(w)$  называют *степенью* вершины  $w$ . Число  $d^+(w)$  называют при этом *полустепенью исхода* вершины  $w$ , а число  $d^-(w)$  *полустепенью захода* вершины  $w$ .

**Теорема 27.1.** Сумма полустепеней исхода по всем вершинам орграфа = сумме полустепеней захода по всем вершинам орграфа = числу дуг орграфа.

**Доказательство** очевидно.

**Теорема 27.2** (см. [1, с. 207]). Связный орграф  $G$  эйлеров тогда и только тогда, когда для каждой его вершины  $w$  выполнено равенство:

$$d^+(w) = d^-(w). \quad (27.1)$$

**Доказательство. Необходимость.** Пусть связный орграф  $G$  содержит эйлеров цикл. Очевидно, что этот цикл заходит в каждую вершину столько же раз, сколько выходит из нее.

**Достаточность** доказывается точно так же, как в теореме 19.1.

**Пример 1.** *Пять подруг: Алла, Белла, Велла, Гелла и Делла играли в снежки.*

*В результате выяснилось, что Алла бросила 7 снежков (и три раза промахнулась), Белла, Велла, Гелла и Делла бросили по 1 снежку. При этом в Аллу попало 3 снежка, в Веллу – 2 снежка, в Беллу и Геллу – по 1 снежку. Кроме Аллы, никто ни разу не промахнулся.*

*Сколько снежков попало в Деллу?*

**Решение.** Количество брошенных (и попавших в цель) снежков:  $(7 - 3) + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$ .

Количество попаданий:  $3 + 2 + 1 + 1 + x$ .

Записываем уравнение:

$$3 + 2 + 1 + 1 + x = 8,$$

откуда  $x = 1$ . (См. рис. 27.2, где изображена одна из возможных игровых ситуаций.)

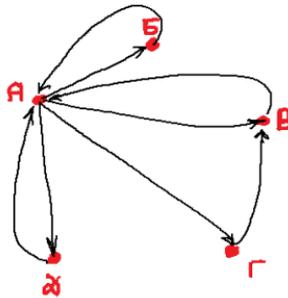


Рис. 27.2

**Пример 2** (см. [5, с. 66]). *В баскетбольном турнире приняли участие 40 команд. Все команды сыграли друг с другом по одному разу, причем ничьих не было. Известно, что команды А и Б набрали по одинаковому количеству очков (выиграли одинаковое количество раз). Требуется*

доказать, что найдутся команды № 1, № 2 и № 3 такие, что команда № 1 выиграла у № 2, команда № 2 выиграла у № 3, а команда № 3 выиграла у № 1.

**Доказательство.** Предположим для определенности, что А выиграла у В (используем условное обозначение « $A \rightarrow B$ » для такой ситуации).

Рассмотрим множество всех команд, у которых выиграла В. Среди них обязательно найдется такая команда В, что  $B \rightarrow A$  (в противном случае у А было бы больше выигранных, чем у В). Итак:  $A \rightarrow B \rightarrow V \rightarrow A$ . (См. рис. 27.3.)

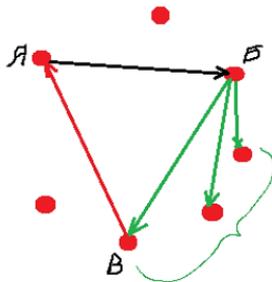


Рис. 27.3

**Замечание.** То, что в примере 2 был рассмотрен случай, когда между собой соревновались 40 команд, не играло для наших рассуждений никакой роли. Рассуждения остаются верными при любом количестве команд, начиная с трех.

**Теорема 27.3** (см. [5, с. 67]). Пусть  $G_n$  – полный орграф с  $n$  вершинами. Тогда в  $G_n$  найдется гамильтонов путь.

**Доказательство.** При  $n = 2$  и при  $n = 3$  утверждение теоремы очевидно. Предположим, что оно верно при  $n = k$ , и докажем, что оно верно при  $n = k+1$ .

Итак, пусть  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots \rightarrow A_{k-1} \rightarrow A_k$  – гамильтонов путь в орграфе  $G_k$  (здесь  $A_1, A_2, \dots, A_k$  – вершины

орграфа  $G_k$ ). Добавим к этому орграфу новую вершину  $A_{k+1}$ . Рассмотрим возникающие здесь ситуации.

1)  $A_k \rightarrow A_{k+1}$ . В этом случае гамильтонов путь очевиден:

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots \rightarrow A_{k-1} \rightarrow A_k \rightarrow A_{k+1}.$$

2)  $A_{k+1} \rightarrow A_1$ . В этом случае гамильтонов путь тоже очевиден:

$$A_{k+1} \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots \rightarrow A_{k-1} \rightarrow A_k.$$

3) Пусть при всех номерах  $j$  таких, что  $s < j < k+1$ , дуги построенного нового полного орграфа  $G_{k+1}$  ведут из  $A_{k+1}$  в  $A_j$ , но  $A_s \rightarrow A_{k+1}$ .

Тогда у нас возникает следующий гамильтонов путь (см. рис. 27.4):

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots \rightarrow A_s \rightarrow A_{k+1} \rightarrow A_{s+1} \rightarrow \dots \rightarrow A_k \rightarrow A_{k+1}.$$

(Фактически рассмотрен общий случай, когда направления на новую вершину не одинаковы у всех прежних вершин гамильтонова пути. В этом случае найдется место в прежнем гамильтоновом пути, где направление на  $A_{k+1}$  меняется.)

Теорема доказана.

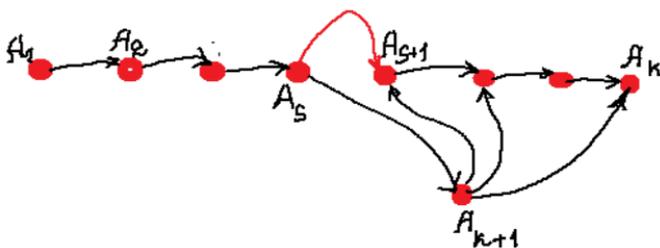


Рис. 27.4

**Задача 1.** В турнире по крестикам-ноликам принимали участие 45 мастеров. Каждый сыграл с каждым, причем

ничьих не было. Кроме того, известно, что участник *A* выиграл у всех, кроме *B*, а участник *B* проиграл всем, кроме *A*. Можно ли рассадить за круглым столом всех участников так, чтобы оказалось, что каждый выиграл у соседа, сидящего по левую руку?

**Задача 2.** На рис. 27.5 изображены пункты, которые необходимо объехать коммивояжеру по кратчайшему пути, причем ни в один пункт он не может заезжать дважды. Выхватить коммивояжер должен из пункта *A* и туда же вернуться.

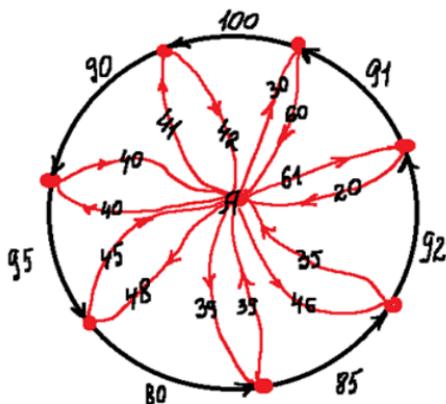


Рис. 27.5

**Задача 3.** В стране Карабасии 45 городов, причем каждый город соединен с каждым другим городом единственной дорогой с односторонним движением. (Таким образом, если из города *A* можно добраться до города *B* по некоторой дороге (без пересадок), то воспользоваться этой же дорогой для того, чтобы вернуться из *B* в *A* уже не получится.) Стоимость проезда по дороге, соединяющей напрямую любые два города, равна 100 пиастрам. Сможет ли министр транспорта Карабасии так расставить ука-

затели на дорогах, что добраться из любого города в любой другой город будет стоить не дороже 200 пиастров?

*Указание.* Попробуйте решить задачу в случае, когда городов не 45, а всего 5.

**Задача 4.** В государстве Мерехлюндия 45 деревень, причем каждая деревня соединена с каждой другой деревней единственной дорогой с односторонним движением. Однажды Кощей Бессмертный решил переставить дорожные указатели так, чтобы ни один житель Мерехлюндии, выехавший из своей деревни, не смог вернуться домой. Удастся ли ему это сделать?

**Задача 5.** а) В связном графе  $G$  был проложен замкнутый маршрут, проходящий по всем его ребрам ровно 2 раза. Известно, что существуют три ребра, по которым маршрут оба раза проходил в одном и том же направлении, а все остальные ребра были пройдены в обоих направлениях. Можно ли утверждать, что упомянутые три ребра образуют цикл в графе  $G$ ?

б) Аналогичный вопрос, если имеется ровно 4 ребра, дважды пройденные в одном направлении.

в) Аналогичный вопрос, если имеется ровно 5 ребер, дважды пройденных в одном направлении.

*Указание.* Воспользуйтесь теоремой Эйлера для орграфов.

## 28. Двойственные графы. Применение формулы Эйлера к многогранникам «общего вида»

Пусть  $G$  – произвольный плоский граф (см. рис. 28.1). Сопоставим каждой его грани (в том числе – внешней) вершину нового графа  $G^*$  (нарисовав ее внутри соответ-

ствующей грани), а каждой паре граней исходного графа  $G$ , соприкасающейся по общему ребру, – ребро нового графа  $G^*$  (см. рис. 28.2). Нетрудно понять, что ребра графа  $G^*$  можно нарисовать так, что они не будут пересекаться (смогут иметь общие точки только в вершинах нового графа  $G^*$ ). При этом, если какие-то две грани графа  $G$  соприкасаются по нескольким ребрам, то в  $G^*$  соответствующие вершины окажутся соединенными несколькими ребрами, т.е.  $G^*$  окажется мультиграфом. Если в графе  $G$  имеется висячее ребро, то в графе  $G^*$  у соответствующей вершины будет петля.

**Определение 28.1.** Построенный указанным выше способом (псевдо)граф  $G^*$  называется *двойственным* по отношению к графу  $G$ .

**Замечание 1.** Геометрически очевидно, что (псевдо)граф, двойственный к плоскому графу, также оказывается плоским.

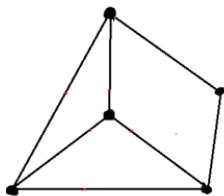


Рис. 28.1. Граф  $G$

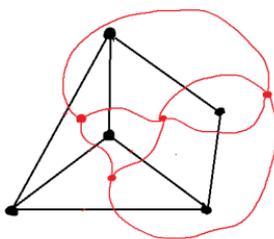


Рис. 28.2. Граф  $G$  и мультиграф  $G^*$

**Замечание 2.** Можно показать, что для плоских графов (и псевдографов) операция перехода к двойственному (псевдо)графу сама себе обратна, т.е.

$G^{**}$  изоморфен  $G$ .

Например,  $K_3^{**}$  изоморфен  $K_3$  (см. рис. 28.2а).

**Замечание 3.** Итак, если  $G$  – планарный граф, то мы можем говорить о двойственном к нему графе, имея в виду некоторую определенную укладку  $G$  на плоскость. Можно показать, что существуют планарные графы, которым при разных укладках на плоскость соответствуют не изоморфные друг другу двойственные графы.

**Замечание 4.** На первый взгляд может показаться, что понятие двойственного графа применимо только к планарным графам, однако, это не так. Если у нас имеется граф  $\Gamma$ , не укладывающийся на плоскость, но укладывающийся, например, на тор, то определить  $\Gamma^*$  можно в точности таким же способом, что и в плоском случае.

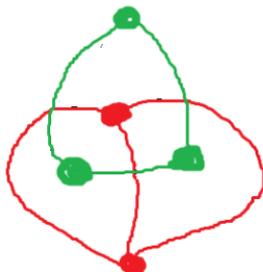


Рис. 28.2а

В следующей теореме мы увидим, каким образом понятие двойственного графа позволяет установить довольно удивительный геометрический факт.

**Теорема 28.1** (см. [12, с. 143]). *В любом выпуклом многограннике найдутся две грани с одинаковым числом ребер.*

**Доказательство.** Спроектируем каркас рассматриваемого выпуклого многогранника на сферу (из ее центра), а затем – на плоскость с помощью стереографической проекции. В результате получим связный плоский граф  $G$ , обладающий следующими свойствами:

А) у графа  $G$  нет висячих вершин;

Б) грани графа  $G$  имеют друг с другом не более одного общего ребра.

Поэтому  $G^*$  будет именно обыкновенным непустым графом (а не графом с петлями и не мультиграфом). Следовательно (см. утверждение 9.5), в графе  $G^*$  найдутся две вершины одинаковой степени. Но это и означает, что в исходном выпуклом многограннике существуют две грани с одинаковым числом ребер. Теорема доказана.

**Замечание 5.** Можно было бы не проектировать каркас выпуклого многогранника на сферу, а затем на плоскость, а поступить проще. Нарисовать на каждой грани многогранника точку и считать ее вершиной расположенного в пространстве графа  $\Gamma^*$  (две вершины графа  $\Gamma^*$  соединяются ребром, если две соответствующие грани выпуклого многогранника имеют общее ребро). Дальнейшее рассуждение аналогично проведенному выше.

**Замечание 6.** С некоторой точки зрения, многогранники, у которых в каждой вершине сходятся в точности три ребра, представляют собой *общий случай*, а все остальные многогранники можно рассматривать как исключения.

Действительно, начнем случайным образом проводить в трехмерном пространстве плоскости. Проведем вначале первую плоскость, а затем – вторую. С вероятностью 1 эти две плоскости не будут параллельны, а пересекутся по некоторой прямой  $L$ . После чего, опять же, случайным образом проведем третью плоскость, которая с вероятностью 1 пересечется с прямой  $L$  в единственной точке  $P$ . В результате образуется трехгранный угол с вершиной в  $P$ . Если теперь мы продолжим проводить (случайным образом) новые плоскости, то с вероятностью 1 все они *не будут* проходить через точку  $P$ . Аналогичные соображения примени-

мы к точкам пересечения любых трех случайным образом проведенных плоскостей. В результате приходим к выводу, что все выпуклые многогранники, которые будут высечены в пространстве случайно проведенными плоскостями, с вероятностью 1 будут обладать вышеупомянутым свойством: в каждой их вершине будут сходиться ровно 3 ребра.

**Теорема 28.2.** Пусть  $M$  – выпуклый многогранник, в каждой вершине которого сходятся ровно три ребра. Тогда:

- а) число вершин многогранника  $M$  четно;
- б) среди граней  $M$  обязательно найдется грань, у которой число ребер не больше 5.

**Доказательство.** Как и выше, будем обозначать через  $n$ ,  $m$ ,  $f$  соответственно число вершин, ребер и граней многогранника  $M$ .

Прежде всего имеем:

$$m = 3n/2, \quad (28.1)$$

откуда и следует утверждение а) теоремы.

Перейдем к доказательству утверждения б).

Применим к многограннику  $M$  формулу Эйлера (24.1):

$$n - m + f = 2,$$

где теперь, очевидно, следует заменить число ребер  $m$  его выражением (28.1).

Итак, в силу формулы Эйлера и равенства (28.1) число граней  $f$  и число вершин  $n$  многогранника  $M$  оказываются связаны соотношением:

$$f = 2 + n/2. \quad (28.2)$$

Кроме того, из (28.1) и (28.2) имеем:

$$f = m/3 + 2. \quad (28.3)$$

Будем теперь рассуждать от противного. Для простоты предположим, что у  $M$  имеются только шестиугольные, семиугольные и восьмиугольные грани. Пусть

$A$  – число шестиугольных граней,

$B$  – число семиугольных граней,

$C$  – число восьмиугольных граней.

Тогда, очевидно, будем иметь:

$$f = A + B + C; \quad (28.4)$$

$$(6A + 7B + 8C)/2 = m. \quad (28.5)$$

Из (28.3) – (28.5) легко получаем, что должно выполняться равенство:

$$(6A + 7B + 8C)/2 = 3(A + B + C) - 6,$$

т.е.

$$B + 2C + 12 = 0,$$

что, очевидно, невозможно. Теорема доказана.

**Замечание.** То, что в каждой вершине выпуклого многогранника общего вида ( $M$ ) сходятся три ребра, наводит на следующую мысль. Можно попытаться удалить из каркаса многогранника  $M$  все «третьи» ребра, с тем, чтобы степени всех вершин стали равны 2. Если это удастся сделать и притом сохранить связность оставшейся части каркаса, то в ней естественным образом возникает простой эйлеров цикл, который одновременно оказывается гамильтоновым для всего каркаса. (См. в этой связи рис. 28.3.)

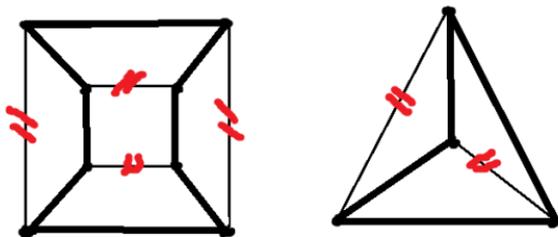


Рис. 28.3

## Задачи

1. Можно ли проложить непрерывный маршрут, пересекающий ровно по одному разу все ребра плоского графа, изображенного на рис. 28.4?

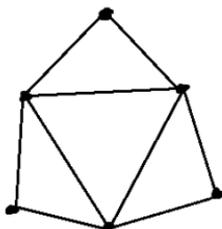


Рис. 28.4

2. Волшебная квартира имеет в плане форму квадрата, разделенного на четыре квадратные комнаты. В центре каждой стены каждой из комнат имеется форточка, которую можно открыть только один раз, после чего форточка навсегда захлопывается. Может ли муха, находящаяся в одной из комнат, пролететь через все форточки и вернуться обратно? (Кроме форточек, никаких других отверстий в Волшебной квартире нет.)

3. Пусть  $G$  – граф, укладывающийся на тор, но не укладывающийся на сферу. Верно ли, что графы  $G$  и  $G^{**}$  изоморфны?

4. Пусть  $G$  – плоский эйлеров граф. Следует ли отсюда, что граф  $G^*$  тоже будет эйлеровым?

Указание. Рассмотрите в качестве примера граф  $K_3$ .

5. Существует ли (непомеченный) плоский граф  $G$ , изоморфный своему двойственному графу  $G^*$ ?

Указание. Рассмотрите граф  $K_4$  (см., например, рис. 5.2в).

6. Приведите еще один пример (непомеченного) плоского графа  $G$ , изоморфного своему двойственному графу  $G^*$ .

*Указание.* Обобщите ситуацию, изображенную на рис. 5.2в.

7. Поверхность правильной четырехугольной пирамиды выполнена из тонкой прозрачной пленки. Существует ли непрерывная замкнутая кривая, пересекающая каждую из пяти граней этой пирамиды ровно один раз? (Кривая не должна проходить через ребра и вершины пирамиды.)

8. Волшебная башня, имеющая форму куба, висит в воздухе (см. рис. 28.5). В каждой грани башни имеется форточка, которая может открыться только один раз, а потом навсегда захлопывается. Может ли муха, живущая внутри башни, пролетев сквозь все форточки, вернуться обратно?

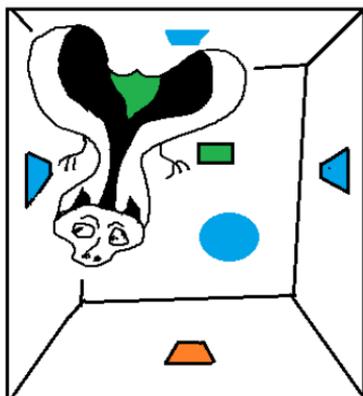


Рис. 28.5

9. Каркас волшебной башни вместе с мухой отобразили на плоскость (см. рис. 28.6). Сможет ли плоская муха проползти по плоскости так, чтобы пересечь ровно по одному разу все ребра плоского графа, получившегося из каркаса куба?

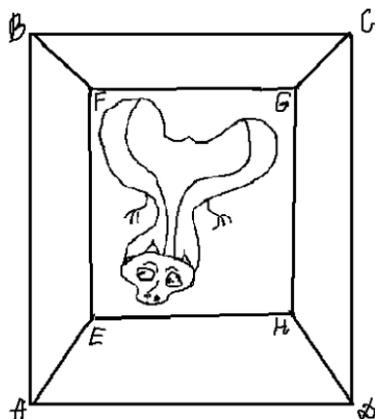


Рис. 28.6

10. Волшебная башня, имеющая форму Большого куба, висит в воздухе. Большой куб состоит из 8 Малых кубов. В каждой грани каждого Малого куба имеется форточка, которая может открыться только один раз, а потом навсегда захлопывается. Может ли муха, живущая снаружи, пролетев сквозь все форточки, вернуться обратно?

11. Две волшебные башни, из которых одна имеет форму куба, а другая – форму пятиугольной пирамиды, висят в воздухе. В каждой грани этих башен имеется форточка, которая может открыться только один раз, а потом навсегда захлопывается. Может ли муха, живущая внутри кубической башни, пролететь сквозь все форточки?

12. На рис. 28.7 изображен план огорода. Жирные точки обозначают столбы, отделяющие друг от друга грядки с различными сортами капусты. Сможет ли улитка проползти по земле так, чтобы пересечь каждую грядку ровно по одному разу, а потом вернуться обратно?

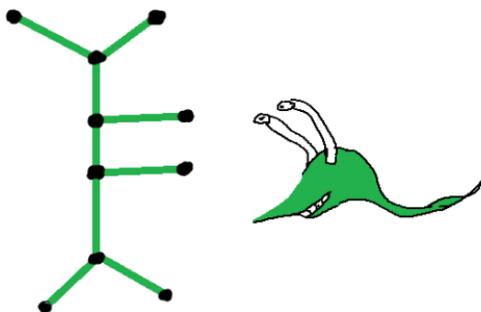


Рис. 28.7

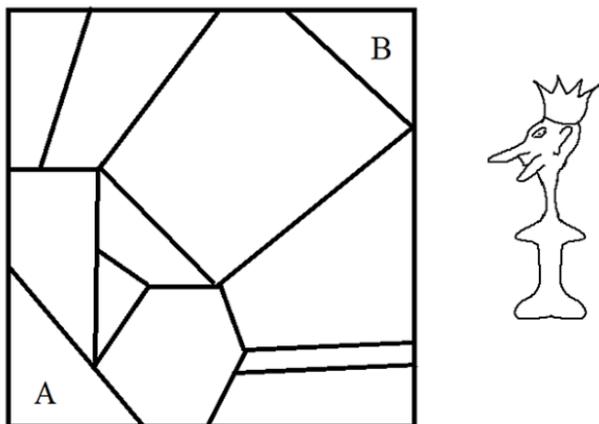


Рис. 28.8

13. (См. также [13, с. 48] и [9, с. 41].) Квадратная доска разделена на клетки, имеющие форму неправильных выпуклых многоугольников; см. рис. 28.8. Две клетки считаются соседними, если у них есть общий протяженный участок границы. Шахматному королю разрешено перемещаться из той клетки, где он находится, в соседнюю клетку, но при этом, пересекая границу между клетками, он может дви-

гаться либо вверх, либо вправо, либо под углом вверх/вправо. Ему нужно добраться из левого нижнего угла (клетка А) в правый верхний (клетка В). Сколькими способами он может это сделать? (Король может пересекать границу между клетками только под прямым углом.)

14. Квадратная доска разделена на клетки, имеющие форму неправильных выпуклых многоугольников (см. рис. 28.9); при этом внутри квадратной доски ни у одного многоугольника нет строго вертикальных ребер. Две клетки считаются соседними, если у них есть общий протяженный участок границы. Шахматному королю разрешено перемещаться из той клетки, где он находится, в соседнюю клетку, но при этом, пересекая границу между клетками, он не может опускаться вниз (ни вертикально, ни под углом). Ему нужно добраться из левого нижнего угла в правый верхний. Сколькими способами он может это сделать? (Король может пересекать границу между клетками только под прямым углом.)

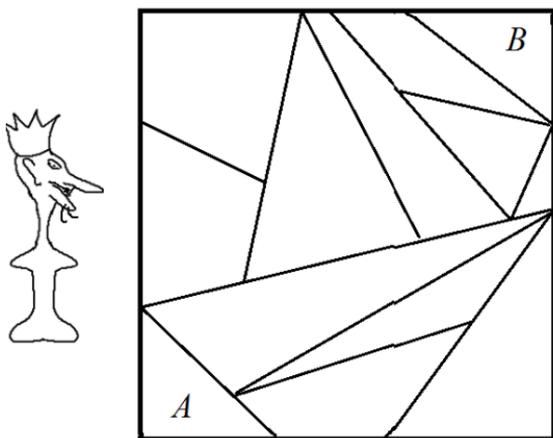


Рис. 28.9

15. Пусть  $M$  – произвольный выпуклый многогранник. Срежем все его вершины плоскостями. Верно ли, что у получившегося в результате такой процедуры многогранника  $M_1$  в каждой вершине будут сходиться ровно три ребра?

16. Пусть  $G$  – граф, укладываемыйся на тор, причем так, что каждая его грань может быть непрерывно стянута в точку.

а) Можно ли утверждать, что  $G$  не укладывается на плоскость?

б) Тот же вопрос для  $G^*$ .

17. Имеется трехмерная шахматная доска размером  $8 \times 8 \times 8$ . Можно ли обойти ее ходом коня, побывав на каждой клетке ровно один раз? (Шахматный конь ходит обычным образом, как по горизонтальным слоям трехмерной шахматной доски, так и по вертикальным.)

## Литература

1. Мельников, О.И. Теория графов для учителей, для школьников... и не только! – М.: URSS, 2019. – 240 с.
2. Кирсанов, М.Н. Графы в Maple. – М.: Физматлит, 2007. – 168 с.
3. Емеличев, В.А. и др. Лекции по теории графов. – М.: Физматлит, 1990. – 384 с.
4. Мудров, В.И. Задача о коммивояжере. – М.: Знание, 1969. – 62 с.
5. Березина, Л.Ю. Графы и их применение. – М.: Просвещение, 1979. – 143 с.
6. М. Тим Джонс. Программирование искусственного интеллекта в приложениях. – М.: ДМК Пресс, 2004. – 312 с.
7. Баврин, И.И. Дискретная математика. – М.: Юрайт, 2017. – 209 с.
8. Локшин, А.А., Иванова, Е.А. Математическая смесь. – М.: МАКС Пресс, 2016. – 124 с.
9. Локшин, А.А., Лаврова, Н.Н., Мальгина, М.С. Односторонний муравей, деревья и линейный перебор объектов. – М.: МАКС Пресс, 2022. – 48 с.
10. «Роевой интеллект. Муравьиный алгоритм»: <https://www.youtube.com/watch?v=8KTzAiusfPs>
11. «Кратчайший путь в графе. Алгоритм Дейкстры»: <https://www.youtube.com/watch?v=LoOTwzYrLCg>
12. Мельников, О.И. Теория графов в занимательных задачах. – М.: URSS, 2019. – 240 с.
13. Спивак, А.В. Тысяча и одна задача по математике. – М.: Просвещение, 2012. – 207 с.
14. Ландо, С.К. Введение в дискретную математику. – М.: МЦНМО, 2019. – 265 с.
15. Шашкин Ю.А. Эйлерова характеристика. – М.: Наука, 1984. – 96 с.
16. «Генетический алгоритм решения задачи коммивояжера» [https://www.youtube.com/watch?v=ufAHNtZkO\\_A](https://www.youtube.com/watch?v=ufAHNtZkO_A)
17. «Задача коммивояжера. Связь с биоинформатикой» <https://www.youtube.com/watch?v=tnr661-Iqvo>
18. «Графы. Повторение. Основные понятия» (Олимпиадная математика) [https://www.youtube.com/watch?v=v7H4rLI3x1E&list=PLnhjOF6hXRMq8mLQwvnSHIxAc\\_97puVaQ&index=5](https://www.youtube.com/watch?v=v7H4rLI3x1E&list=PLnhjOF6hXRMq8mLQwvnSHIxAc_97puVaQ&index=5)

Reviewer:

*Sagomyan E.A.*, Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor,  
Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University

**Lokshin, A.A.**

**An Elementary Introduction to Graph Theory:** manual. – Ed.2, rev. add. –  
Moscow: MAKS Press, 2024. – 148 p.: ill.

ISBN 978-5-317-07234-6

<https://doi.org/10.29003/m4173.978-5-317-07234-6>

The most important concepts of graph theory are presented at an elementary level, and the main material is devoted specifically to ordinary (undirected) graphs. Dijkstra's algorithm, which allows one to find the shortest routes in a weighted graph, is considered in detail; the so-called ant algorithm, designed to solve the well-known traveling salesman problem, is discussed in general terms. In the second edition, noted inaccuracies and typos have been corrected, a number of new problems have been added, and material related to the properties of polyhedra has been expanded.

The book is addressed to high school students interested in mathematics, as well as students of pedagogical universities - future teachers of mathematics and computer science.

*Keywords:* Graph, digraph, vertex, edge, ant algorithm.

---

*Учебное издание*

ЛОКШИН Александр Александрович

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ  
В ТЕОРИЮ ГРАФОВ

Учебное пособие

*2-е издание, исправленное и дополненное*

В издании использованы рисунки автора

Подготовка оригинал-макета:

*Издательство «МАКС Пресс»*

Главный редактор: *Е.М. Бугачева*

Компьютерная верстка: *Н.С. Давыдова.*

Обложка: *А.В. Кононова*

Подписано в печать 29.07.2024 г.

Формат 84x108 1/32. Усл.печ.л. 7,77. Тираж 25 экз. Заказ 119.

Издательство ООО «МАКС Пресс». Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.  
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова,  
2-й учебный корпус, 527 к.

Тел.8(495) 939-3890/91. Тел./Факс 8(495) 939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»  
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42,  
корп. 5, эт. 1, пом. I, ком. 6.3-23Н