

Тема III

Теория пересечения Пойа

Действие группы на множестве: два определения

- Группа $\mathbf{G} = \langle G, \circ, e \rangle$, $|G| = n$.
- Множество T , $|T| = N$.
 - $Bij(T)$ — множество всех биекций (перестановок) элементов T .
 - $Symm(T)$ — симметрическая группа множества T :

$$Symm(T) = \langle Bij(T), *, 1_T \rangle,$$

Действие группы на множестве

Действие группы на множестве: два определения

- Группа $\mathbf{G} = \langle G, \circ, e \rangle$, $|G| = n$.
- Множество T , $|T| = N$.
 - $Bij(T)$ — множество всех биекций (перестановок) элементов T .
 - $Symm(T)$ — симметрическая группа множества T :

$$Symm(T) = \langle Bij(T), *, 1_T \rangle,$$

Определение (1)

$$\alpha \in \text{Hom}(\mathbf{G}, Symm(T)).$$

Действие α группы $\mathbf{G}$ на множестве T : символически —
 $\mathbf{G} : T$
 α

Действие группы на множестве: два определения...

Определение (2)

$$\alpha = \langle G, T; \circ, *, e, 1_T \rangle,$$

где

 $G \times G \xrightarrow{\circ} G$ — групповая операция; $G \times T \xrightarrow{*} T$ — новая операция.

Аксиомы для операций:

- $e * t = t$;
- $(g \circ h) * t = h * (g * t)$.

Запись операции $*$: $g(t) = t'$.Аксиомы: $e(t) = t$ и $(g \circ h)(t) = h(g(t))$.

Т.е. элементы g группы G порождают перестановки на T , обладающие вышеуказанными свойствами.

Действие группы на множестве

Действие группы на множестве: схема

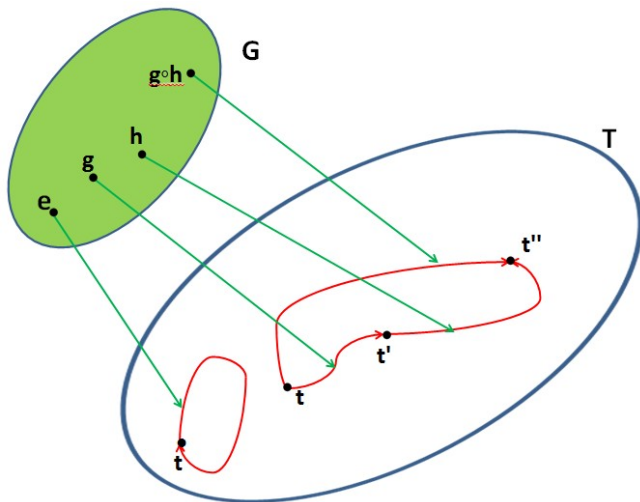


Рис. 1. К определению действия группы на множестве

Действие группы на множестве

Для данной перестановки g :

Введём отношение эквивалентности $\sim_g$ на T —

$$t \sim_g t' \stackrel{\text{def}}{=} \exists k \left(g^k(t) = t' \right).$$

- Смежные классы эквивалентности $\sim_g$ называют *g -циклами*.
- Число всех смежных классов обозначим $C(g)$.
- Количества циклов длины $1, 2, \dots, N$ обозначают $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N$ или $\nu_1(g), \nu_2(g), \dots, \nu_N(g)$.
- Упорядоченную совокупность количеств циклов $\langle \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N \rangle$ называют *типом перестановки g* и обозначают $Type(g)$.

Понятно, что $C(g) = \sum_{k=1}^N \nu_k(g)$ и $\sum_{k=1}^N k \cdot \nu_k(g) = N$.

Действие группы на множестве

Тип перестановки: пример

Пусть

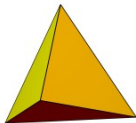
$$\begin{aligned}
 T &= \{1, \dots, 10\}, \\
 g &= \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & 2 & \textcolor{red}{3} & \textcolor{blue}{4} & \textcolor{green}{5} & 6 & \textcolor{violet}{7} & \textcolor{blue}{8} & \textcolor{red}{9} & \textcolor{blue}{10} \\ \textcolor{red}{9} & 6 & \textcolor{red}{1} & \textcolor{blue}{8} & \textcolor{green}{5} & 2 & \textcolor{violet}{7} & \textcolor{blue}{10} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{blue}{4} \end{pmatrix} = \\
 &= (\textcolor{red}{1}, \textcolor{red}{9}, \textcolor{red}{3})(2, 6)(\textcolor{blue}{4}, \textcolor{blue}{8}, \textcolor{blue}{10})(\textcolor{green}{5})(\textcolor{violet}{7})
 \end{aligned}$$

Тогда

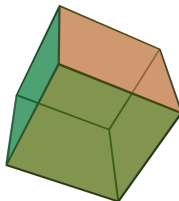
$$\begin{aligned}
 \text{Type}(g) &= \langle 2, 1, 2, 0, \dots, 0 \rangle, \\
 C(g) &= \textcolor{red}{2} + \textcolor{red}{1} + \textcolor{red}{2} = 5, \quad |T| = \textcolor{red}{2} \cdot 1 + \textcolor{red}{1} \cdot 2 + \textcolor{red}{2} \cdot 3 = 10.
 \end{aligned}$$

Действие группы на множестве

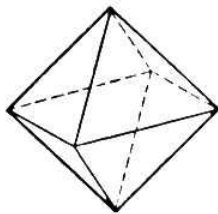
Платоновы тела — правильные 3-х мерные многогранники



Это тетраэдр



А это — кубик



Октаэдр двойственен кубу

Действие группы на множестве

Платоновы тела — правильные 3-х мерные многогранники

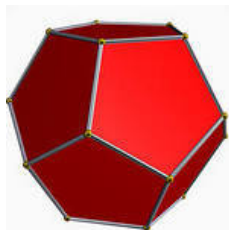
Платоновы тела	Группа симметрии	Порядок группы
тетраэдр	T тетраэдра	$4 \cdot 3 = 12$
куб и октаэдр	O октаэдра	$8 \cdot 3 = 24$
икосаэдр и додекаэдр	Y икосаэдра	$12 \cdot 5 = 60$



Октаэдр



Икосаэдр

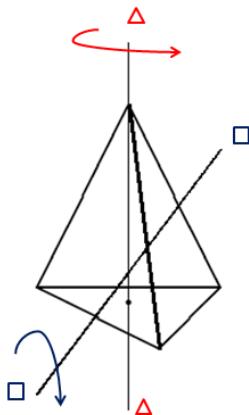


Додекаэдр

Действие группы на множестве

 T — группа вращения тетраэдра

$$T = \langle t, f \rangle, t^3 = f^2 = e, \text{ где:}$$



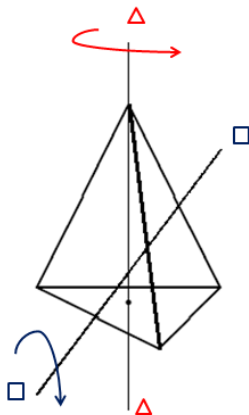
t — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через **вершину** и центр тетраэдра ($\triangle-\triangle$); таких осей 4.

f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через центры двух противоположных **рёбер** ($\square-\square$); таких осей 3.

$$|T| = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 = 12.$$

Действие группы на множестве

Действие T на грани (или вершины) тетраэдра: типы перестановок



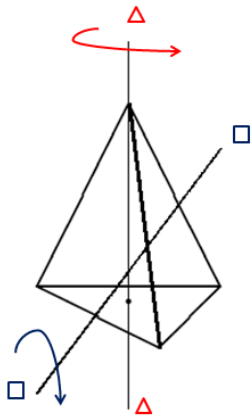
$$\square : Type(t) = Type(t^2) = \langle 1, 0, 1, 0 \rangle;$$

$$\triangle : Type(f) = \langle 0, 2, 0, 0 \rangle.$$

$$|T| = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 = 12.$$

Действие группы на множестве

Действие T на грани (или вершины) тетраэдра: типы перестановок



$$\square : Type(t) = Type(t^2) = \langle 1, 0, 1, 0 \rangle;$$

$$\triangle : Type(f) = \langle 0, 2, 0, 0 \rangle.$$

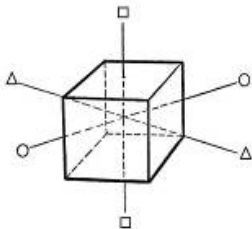
$$|T| = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 = 12.$$

Тетраэдр двойственен самому себе $\Rightarrow$
 действие на грани =
 действие на вершины.

Действие группы на множестве

 O — группа вращения куба

$$O = \langle t, f, r \rangle, t^4 = f^2 = r^3 = e, \text{ где}$$



t — вращение на 90° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных **граней** ($\square-\square$),

f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных **рёбер** ($\circ-\circ$),

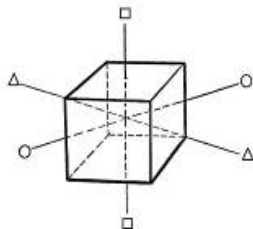
r — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через две противоположные **вершины** ($\triangle-\triangle$)

Сколько осей каждого типа?

Действие группы на множестве

 O — группа вращения куба

$$O = \langle t, f, r \rangle, t^4 = f^2 = r^3 = e, \text{ где}$$



t — вращение на 90° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных **граней** ($\square-\square$),

f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных **рёбер** ($\circ-\circ$),

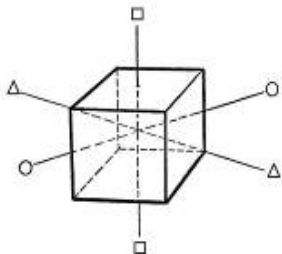
r — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через две противоположные **вершины** ($\triangle-\triangle$)

Сколько осей каждого типа? **3, 6 и 4** соответственно.

$$|O| = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 = 24.$$

Действие группы на множестве

Действие O на вершины куба: типы перестановок



$$\begin{aligned}\square : Type(t) &= Type(t^3) = \\ &= \langle 0, 0, 0, 2, 0, \dots \rangle, \\ Type(t^2) &= \langle 0, 4, 0, \dots \rangle;\end{aligned}$$

$$\circ : Type(f) = \langle 0, 4, 0, \dots \rangle;$$

$$\Delta : Type(r) = Type(r^2) = \langle 2, 0, 2, 0, \dots \rangle.$$

Действие группы на множестве

По всей группе G :

Отношение эквивалентности $\sim_G$ на T —

$$t \sim_G t' \stackrel{\text{def}}{=} \exists_{g \in G} (g(t) = t').$$

Классы этой эквивалентности называют *орбитами*.

Действие группы на множестве

По всей группе G :

Отношение эквивалентности $\sim_G$ на T —

$$t \sim_G t' \stackrel{\text{def}}{=} \exists_{g \in G} (g(t) = t').$$

Классы этой эквивалентности называют *орбитами*.

Число орбит (классов эквивалентности) — $C(G)$.

Действие группы на множестве

По всей группе G :

Отношение эквивалентности $\sim_G$ на T —

$$t \sim_G t' \stackrel{\text{def}}{=} \exists_{g \in G} (g(t) = t').$$

Классы этой эквивалентности называют *орбитами*.

Число орбит (классов эквивалентности) — $C(G)$.

Если $C(G) = 1$ (*любой* элемент T может быть переведён в *любой*), то действие $G_\alpha : T$ называют *транзитивным*.

Класс эквивалентности, в которую попадает элемент t будем обозначать $\text{Orb}(t)$.

Действие группы на множестве

Фиксатор и стабилизатор. Лемма Бёрнсайда

При выполнении этого равенства можно фиксировать t или g .

- 1 Фиксируем g , т.е. находим все элементы множества T , которые перестановка g оставляет на месте (*фиксатор*):

$$\{t \in T \mid g(t) = t\} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Fix}(g) \subseteq T.$$

Действие группы на множестве

Фиксатор и стабилизатор. Лемма Бёрнсайда

При выполнении этого равенства можно фиксировать t или g .

- 1 Фиксируем g , т.е. находим все элементы множества T , которые перестановка g оставляет на месте (*фиксатор*):

$$\{t \in T \mid g(t) = t\} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Fix}(g) \subseteq T.$$

- 2 Фиксируем t , т.е. находим все перестановки g , которые оставляют данный элемент неподвижным (*стабилизатор*):

$$\{g \in G \mid g(t) = t\} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Stab}(t) \subseteq G.$$

Действие группы на множестве

Фиксатор и стабилизатор. Лемма Бёрнсайда

При выполнении этого равенства можно фиксировать t или g .

- ① Фиксируем g , т.е. находим все элементы множества T , которые перестановка g оставляет на месте (**фиксатор**):

$$\{t \in T \mid g(t) = t\} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Fix}(g) \subseteq T.$$

- ② Фиксируем t , т.е. находим все перестановки g , которые оставляют данный элемент неподвижным (**стабилизатор**):

$$\{g \in G \mid g(t) = t\} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Stab}(t) \subseteq G.$$

Справедливы равенства

$$C(\mathbf{G}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in T} |\text{Stab}(t)|;$$

Действие группы на множестве

Фиксатор и стабилизатор. Лемма Бёрнсайда

При выполнении этого равенства можно фиксировать t или g .

- ① Фиксируем g , т.е. находим все элементы множества T , которые перестановка g оставляет на месте (**фиксатор**):

$$\{t \in T \mid g(t) = t\} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Fix}(g) \subseteq T.$$

- ② Фиксируем t , т.е. находим все перестановки g , которые оставляют данный элемент неподвижным (**стабилизатор**):

$$\{g \in G \mid g(t) = t\} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Stab}(t) \subseteq G.$$

Справедливы равенства

$$C(\mathbf{G}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in T} |\text{Stab}(t)|;$$

первое называется **леммой Бёрнсайда** (W.Burnside, 1911).

Действие группы на множестве

Стабилизатор есть подгруппа группы G

- ① $\text{Fix}(g)$ — *фиксатор* перестановки g элемента группы G ;
- ② $\text{Stab}(t)$ — *стабилизатор* элемента t множества T .

Лемма

$$\text{Stab}(t) \leq G.$$

Действие группы на множестве

Стабилизатор есть подгруппа группы G

- 1 $\text{Fix}(g)$ — *фиксатор* перестановки g элемента группы G ;
- 2 $\text{Stab}(t)$ — *стабилизатор* элемента t множества T .

Лемма

$$\text{Stab}(t) \leq G.$$

Доказательство

Зафиксируем $t \in T$ и рассмотрим $g, h \in \text{Stab}(t)$. Тогда $g(t) = h(t) = t$ и $h^{-1}(t) = t$. Следовательно,

$$(g \circ h^{-1}) * t = t \Rightarrow g \circ h^{-1} \in \text{Stab}(t).$$

Действие группы на множестве

Стабилизатор есть подгруппа группы G

- 1 $\text{Fix}(g)$ — *фиксатор* перестановки g элемента группы G ;
- 2 $\text{Stab}(t)$ — *стабилизатор* элемента t множества T .

Лемма

$$\text{Stab}(t) \leq G.$$

Доказательство

Зафиксируем $t \in T$ и рассмотрим $g, h \in \text{Stab}(t)$. Тогда $g(t) = h(t) = t$ и $h^{-1}(t) = t$. Следовательно,

$$(g \circ h^{-1}) * t = t \Rightarrow g \circ h^{-1} \in \text{Stab}(t).$$

$|\text{Stab}(t)| \geq 1$, поскольку всегда $e \in \text{Stab}(t)$.

Действие группы на множестве

Элемент множества: длина орбиты и стабилизатор

Лемма

Длина орбиты $\text{Orb}(t)$ равна индексу $\text{Stab}(t)$ в группе G , т.е.

$$|\text{Orb}(t)| = |G| : |\text{Stab}(t)|.$$

Пример

Пусть T — множество вершин куба. Найти $\text{Stab}(t)$ вершины t при действии группы октаэдра на T .

Действие группы на множестве

Элемент множества: длина орбиты и стабилизатор

Лемма

Длина орбиты $\text{Orb}(t)$ равна индексу $\text{Stab}(t)$ в группе G , т.е.

$$|\text{Orb}(t)| = |G| : |\text{Stab}(t)|.$$

Пример

Пусть T — множество вершин куба. Найти $\text{Stab}(t)$ вершины t при действии группы октаэдра на T .

Решение: $\text{Stab}(t) \cong \mathbb{Z}_3$ — группа вращений на 120° вокруг диагонали куба, проходящей через данную вершину.

Действие группы на множестве

Элемент множества: длина орбиты и стабилизатор

Лемма

Длина орбиты $\text{Orb}(t)$ равна индексу $\text{Stab}(t)$ в группе G , т.е.

$$|\text{Orb}(t)| = |G| : |\text{Stab}(t)|.$$

Пример

Пусть T — множество вершин куба. Найти $\text{Stab}(t)$ вершины t при действии группы октаэдра на T .

Решение: $\text{Stab}(t) \cong \mathbb{Z}_3$ — группа вращений на 120° вокруг диагонали куба, проходящей через данную вершину.

Утверждение (следствие леммы)

Число элементов в группе вращения правильного многогранника есть $|V| \cdot |E_0|$, где $|V|$ — число вершин, а $|E_0|$ — число рёбер, выходящих из одной вершины.

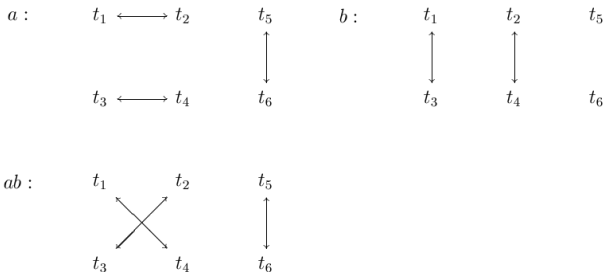
Действие группы на множестве

Действие группы на множестве: пример

Действие группы V_4 на множестве $T = \{t_1, \dots, t_6\}$

$\circ$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

$g * t$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
e	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
a	t_2	t_1	t_4	t_3	t_6	t_5
b	t_3	t_4	t_1	t_2	t_5	t_6
ab	t_4	t_3	t_2	t_1	t_6	t_5



Действие группы на множестве

Действие группы на множестве: пример...

$$\begin{aligned} \text{Type}(e) &= \langle 6, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle, & \text{Type}(a) &= \langle 0, 3, 0, 0, 0, 0 \rangle, \\ \text{Type}(b) &= \langle 2, 2, 0, 0, 0, 0 \rangle, & \text{Type}(ab) &= \langle 0, 3, 0, 0, 0, 0 \rangle. \end{aligned}$$

$$C(e) = 6, \quad C(a) = C(ab) = 3, \quad C(b) = 4.$$

$$\text{Stab}(t_1) = \text{Stab}(t_2) = \text{Stab}(t_3) = \text{Stab}(t_4) = e \leq V_4,$$

$$\text{Stab}(t_5) = \text{Stab}(t_6) = \langle e, b \rangle \leq V_4.$$

$$\text{Fix}(a) = \text{Fix}(ab) = \emptyset, \quad \text{Fix}(b) = \{t_5, t_6\}, \quad \text{Fix}(e) = T.$$

$$|\text{Orb}(t_1)| = \frac{4}{1} = 4, \quad |\text{Orb}(t_5)| = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\frac{1}{4} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = \frac{6 + 2}{4} = 2,$$

$$\frac{1}{4} \sum_{t \in T} |\text{Stab}(t)| = \frac{4 \cdot 1 + 2 \cdot 2}{4} = 2.$$

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Пример применения леммы Бёрнсайда

Задача (про слова)

Состоятся слова длины $l \geq 2$ из алфавита

$A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Слова считаются эквивалентными, если они получаются одно из другого перестановкой крайних букв. Определить число S неэквивалентных слов.

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Пример применения леммы Бёрнсайда

Задача (про слова)

Состоятся слова длины $l \geq 2$ из алфавита $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Слова считаются эквивалентными, если они получаются одно из другого перестановкой крайних букв. Определить число S неэквивалентных слов.

Решение

T — множество слов длины l в алфавите A , $N = |T| = m^l$.

Надо представить эквивалентности как орбиты некоторого действия подходящей группы G на T .

Очевидно, $g^2 = e$ и поэтому подходит $G \cong \mathbb{Z}_2 = \{e, g\}$.

Действие: g переставляет в слове крайние буквы.

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Пример применения леммы Бёрнсайда...

Число S неэквивалентных слов есть число классов эквивалентности $C(\mathbf{G})$ действия $\mathbb{Z}_2 : T_\alpha$ —

$$|\text{Fix}(e)| = |T| = m^l, \quad |\text{Fix}(g)| = m^{l-2} \cdot m = m^{l-1}.$$

$$S = C(\mathbb{Z}_2) = \frac{1}{2} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = \frac{m^l + m^{l-1}}{2} = \frac{m^{l-1}(m+1)}{2}.$$

Для $l = 3, m = 2 \Rightarrow S = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ (из всего 8)

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Пример применения леммы Бёрнсайда...

Число S неэквивалентных слов есть число классов эквивалентности $C(\mathbf{G})$ действия $\mathbb{Z}_2 : T_\alpha$ —

$$|\text{Fix}(e)| = |T| = m^l, \quad |\text{Fix}(g)| = m^{l-2} \cdot m = m^{l-1}.$$

$$S = C(\mathbb{Z}_2) = \frac{1}{2} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = \frac{m^l + m^{l-1}}{2} = \frac{m^{l-1}(m+1)}{2}.$$

Для $l = 3$, $m = 2 \Rightarrow S = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ (из всего 8)

Пусть $A = \{a, b\}$. Показаны слова и классы.

aaa	baa
aab	bab
aba	bba
abb	bbb

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Цикловой индекс

Существует универсальный способ вычисления числа

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = C(\mathbf{G}) \text{ классов эквивалентности (орбит).}$$

Сопоставим каждой перестановке $g \in \mathbf{G}$ вес $w(g)$ по правилу:

$$\text{Type}(g) = \langle \nu_1, \dots, \nu_N \rangle \Rightarrow w(g) = \underbrace{x_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot x_N^{\nu_N}}_{\text{МОНОМ}}.$$

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Цикловой индекс

Существует универсальный способ вычисления числа

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = C(\mathbf{G}) \text{ классов эквивалентности (орбит).}$$

Сопоставим каждой перестановке $g \in \mathbf{G}$ вес $w(g)$ по правилу:

$$\text{Type}(g) = \langle \nu_1, \dots, \nu_N \rangle \Rightarrow w(g) = \underbrace{x_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot x_N^{\nu_N}}_{\text{МОНОМ}}.$$

Определение

Средний вес подстановок в группе называется

цикловым индексом действия $\mathbf{G} : T$:

$$P(\mathbf{G}_{\alpha} : T, x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot x_N^{\nu_N}.$$

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Цикловой индекс

Существует универсальный способ вычисления числа

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = C(\mathbf{G}) \text{ классов эквивалентности (орбит).}$$

Сопоставим каждой перестановке $g \in \mathbf{G}$ вес $w(g)$ по правилу:

$$\text{Type}(g) = \langle \nu_1, \dots, \nu_N \rangle \Rightarrow w(g) = \underbrace{x_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot x_N^{\nu_N}}_{\text{МОНОМ}}.$$

Определение

Средний вес подстановок в группе называется

цикловым индексом действия $\mathbf{G} : T$:

$$P(\mathbf{G} : T, x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot x_N^{\nu_N}.$$

Для продвинутых: это **производящий полином**.

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Цикловой индекс: обозначения и свойства

Другие обозначения: $P_G(x_1, \dots, x_N)$ и $P_G, P(G)$.

- $G \cong G' \Rightarrow P_G = P_{G'}$ — да, если действия определены одинаково (согласовано)
- $P_G = P_{G'} \not\Rightarrow G \cong G'$ — нет, есть контрпример

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Цикловой индекс: обозначения и свойства

Другие обозначения: $P_G(x_1, \dots, x_N)$ и $P_G, P(G)$.

- $G \cong G' \Rightarrow P_G = P_{G'}$ — да, если действия определены одинаково (согласовано)
- $P_G = P_{G'} \not\Rightarrow G \cong G'$ — нет, есть контрпример

Как применять лемму «не-Бёрнсайда?»

Для применения универсального способа вычисления $C(G)$ надо представить эквивалентные элементы множества как классы эквивалентности действия некоторой группы на этом множестве.

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Число неэквивалентных раскрасок

Пусть задано действие $G : T$ группы G на множестве T .

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Число неэквивалентных раскрасок

Пусть задано действие $G : T$ группы G на множестве T .

- Припишем каждому элементу T одно из r значений (неформально: покрасим в один из r цветов). Всего имеется r^N раскрасок.

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Число неэквивалентных раскрасок

Пусть задано действие $G : T$ группы G на множестве T .

- Припишем каждому элементу T одно из r значений (неформально: покрасим в один из r цветов). Всего имеется r^N раскрасок.
- Не будем различать раскраски, если при преобразовании $g : t \rightarrow t'$ элемент сохраняет цвет (t раскрашен также как t' , и каждый g -цикл раскрашен одним своим цветом).

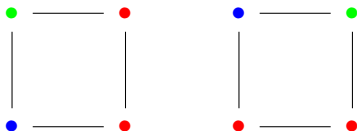


Рис. 2. Поворот на 90° (такая перестановка) не даёт нового раскрашивания вершин квадрата

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Число неэквивалентных раскрасок

Пусть задано действие $G_\alpha : T$ группы G на множестве T .

- Припишем каждому элементу T одно из r значений (неформально: покрасим в один из r цветов). Всего имеется r^N раскрасок.
- Не будем различать раскраски, если при преобразовании $g : t \rightarrow t'$ элемент сохраняет цвет (t раскрашен также как t' , и каждый g -цикл раскрашен одним своим цветом).

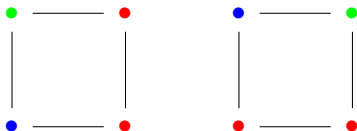


Рис. 2. Поворот на 90° (такая перестановка) не даёт нового раскрашивания вершин квадрата

Вопрос: Сколько существует неэквивалентных раскрасок — классов эквивалентности $C(G)$?

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Вычисление $C(G)$ через цикловой индекс

- Каждый класс эквивалентности это g -цикл; их $C(g) = \nu_1 + \dots + \nu_N$ штук.
- Каждая перестановка $g \in G$ с типом $\langle \nu_1, \dots, \nu_N \rangle$ будет иметь $r^{C(g)}$ неподвижных точек.

Применение леммы Бёрсайда для решения комбинаторных задач

Вычисление $C(\mathbf{G})$ через цикловой индекс

- Каждый класс эквивалентности это g -цикл; их $C(g) = \nu_1 + \dots + \nu_N$ штук.
- Каждая перестановка $g \in \mathbf{G}$ с типом $\langle \nu_1, \dots, \nu_N \rangle$ будет иметь $r^{C(g)}$ неподвижных точек.

Следовательно, по лемме Бёрсайда, число полученных классов эквивалентности, т.е. неэквивалентных раскрасок (приписываний) есть

Теорема

$$C(\mathbf{G}_{\alpha} : T) = P(\mathbf{G}_{\alpha} : T, x_1, \dots, x_N) \Big|_{x_1=\dots=x_N=r} = P_{\mathbf{G}}(r, \dots, r).$$

Применение леммы Бёрсайда для решения комбинаторных задач

Вычисление $C(\mathbf{G})$ через цикловой индекс

- Каждый класс эквивалентности это g -цикл; их $C(g) = \nu_1 + \dots + \nu_N$ штук.
- Каждая перестановка $g \in \mathbf{G}$ с типом $\langle \nu_1, \dots, \nu_N \rangle$ будет иметь $r^{C(g)}$ неподвижных точек.

Следовательно, по лемме Бёрсайда, число полученных классов эквивалентности, т.е. неэквивалентных раскрасок (приписываний) есть

Теорема

$$C(\mathbf{G}_{\alpha} : T) = P(\mathbf{G}_{\alpha} : T, x_1, \dots, x_N) \Big|_{x_1=\dots=x_N=r} = P_{\mathbf{G}}(r, \dots, r).$$

Например, $P_{\mathbf{G}}(1, \dots, 1) = 1$: если все элементы покрасить в один цвет, то таких раскрасок **одна**.

Задача (про слова)

Составляются слова длины $l \geq 2$ из алфавита $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Слова считаются эквивалентными, если они получаются одно из другого перестановкой крайних букв. Определить число S неэквивалентных слов.

Задача (про слова)

Составляются слова длины $l \geq 2$ из алфавита $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Слова считаются эквивалентными, если они получаются одно из другого перестановкой крайних букв. Определить число S неэквивалентных слов.

Было решение: $S = \frac{m^l + m^{l-1}}{2}$.

Задача (про слова)

Составляются слова длины $l \geq 2$ из алфавита $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Слова считаются эквивалентными, если они получаются одно из другого перестановкой крайних букв. Определить число S неэквивалентных слов.

Было решение: $S = \frac{m^l + m^{l-1}}{2}$.

Другое решение: $G = \{e, g\} \cong \mathbb{Z}_2$; T : $\underbrace{\overset{l-2}{\circ \circ \dots \circ}}_l \circ$.

Задача (про слова)

Составляются слова длины $l \geq 2$ из алфавита $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Слова считаются эквивалентными, если они получаются одно из другого перестановкой крайних букв. Определить число S неэквивалентных слов.

Было решение: $S = \frac{m^l + m^{l-1}}{2}$.

Другое решение: $G = \{e, g\} \cong \mathbb{Z}_2$; T : $\underbrace{\overset{l-2}{\circ \dots \circ}}_l \circ$.

Элемент группы g	$Type(g)$	$w(g)$	#МОНОМОВ
e	$\langle l, 0, \dots, 0 \rangle$	x_1^l	1
g	$\langle l-2, 1, 0, \dots, 0 \rangle$	$x_1^{l-2} x_2^1$	1

Цикловой индекс: $P(x_1, \dots, x_l) = \frac{x_1^l + x_1^{l-2} x_2^1}{2}$.

$P(x_1, \dots, x_l)|_{x_1=\dots=x_l=m} = S$.

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Классическая комбинаторная задача об ожерельях

Ожерелье — окружность, на которой на равных расстояниях по дуге располагаются «бусины» (бусины располагаются в **вершинах правильного многоугольника**).

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Классическая комбинаторная задача об ожерельях

Ожерелье — окружность, на которой на равных расстояниях по дуге располагаются «бусины» (бусины располагаются в вершинах правильного многоугольника).

Задача (об ожерельях)

Сколько различных ожерелий можно составить из N бусин r цветов?

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Классическая комбинаторная задача об ожерельях

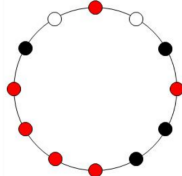
Ожерелье — окружность, на которой на равных расстояниях по дуге располагаются «бусины» (бусины располагаются в **вершинах правильного многоугольника**).

Задача (об ожерельях)

Сколько различных ожерелий можно составить из N бусин r цветов?

Варианты. Ожерелья равны iff одно получается из другого (симметрия в плоскости или в пространстве):

- 1 **поворотом** (бусины плоские, окрашены с одной стороны);
- 2 **поворотом и осевой симметрией** (бусины круглые);



Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Задача об ожерельях: $N = 5, r = 3$

Задача

Сколько разных ожерелий можно составить из 5 бусин 3 цветов?

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Задача об ожерельях: $N = 5, r = 3$

Задача

Сколько разных ожерелий можно составить из 5 бусин 3 цветов?

T — вершины правильного пятиугольника. $\#Col(3) = ?$

1

Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого поворотом

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Задача об ожерельях: $N = 5, r = 3$

Задача

Сколько разных ожерелий можно составить из 5 бусин 3 цветов?

T — вершины правильного пятиугольника. $\#Col(3) = ?$

①

Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого **поворотом**

Решение

$$G \cong \mathbb{Z}_5 = \langle t \rangle, t^5 = e, n = 5.$$

Элемент группы g	Type(g)	$w(g)$	# мономов
e	$\langle 5, 0, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^5	1
t, t^2, t^3, t^4	$\langle 0, 0, 0, 0, 1 \rangle$	x_5	4

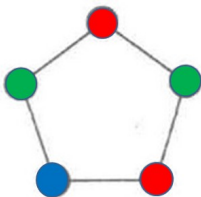
Цикловой индекс: $P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{5} [x_1^5 + 4x_5]$.

$$\#Col(3) = P(3, \dots, 3) = \frac{3^5 + 4 \cdot 3}{5} = \frac{3 \cdot 85}{5} = 3 \cdot 17 = 51.$$

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Задача Олимпиады «Покори Воробьёвы горы – 2009»

Для 50 детей детского сада закуплены 50 одинаковых тарелок. По краю каждой тарелки равномерно расположено 5 белых кружочков. Воспитатели хотят перекрасить какие-либо из этих кружочков в другой цвет так, чтобы все тарелки стали различными. Какое наименьшее число дополнительных цветов потребуется им для этого?



Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Как должны были решать школьники

Решение

Пусть требуется r цветов. Отбросим r вариантов раскраски в один цвет. Число остальных вариантов без учёта возможности поворота тарелки — $r^5 - r$; с учётом поворота — $\frac{r^5 - r}{5}$ (каждый вариант повторятся 5 раз).

$$\text{Итого: } \#Col(r) = \frac{r^5 - r}{5} + r = \frac{r^5 + 4r}{5};$$

При 2-х дополнительных цветах $\#Col(3) = 51$.

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Задача об ожерельях: $N = 5, r = 3$, 2-й вариант

- ② Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого поворотом или переворотом.

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Задача об ожерельях: $N = 5, r = 3$, 2-й вариант

- ② Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого поворотом или переворотом.

Решение

G — группа диэдра:

$$G \cong D_5 = \langle t, f \rangle, t^5 = f^2 = e, n = |D_5| = 10.$$

Элемент группы g	$Type(g)$	$w(g)$	# мономов
e	$\langle 5, 0, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^5	1
t, t^2, t^3, t^4	$\langle 0, 0, 0, 0, 1 \rangle$	x_5	4
$f, tf, \dots, t^4f$	$\langle 1, 2, 0, 0, 0 \rangle$	$x_1x_2^2$	5
Всего			10

Цикловой индекс: $P = \frac{1}{10} [x_1^5 + 4x_5 + 5x_1x_2^2]$.

$$\#Col(3) = P(x_1, \dots, x_5)|_{x_1=\dots=x_5=3} = \frac{3^5 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3^3}{10} = 39.$$

Запомним этот ответ.

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Задача о раскраске куба

Задача (раскраска граней куба в два цвета)

Грани куба раскрашивают в 2 и 3 цвета.

Сколько существует различно окрашенных кубов?

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Задача о раскраске куба

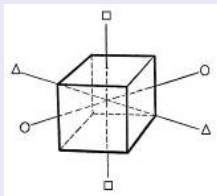
Задача (раскраска граней куба в два цвета)

Грани куба раскрашивают в 2 и 3 цвета.

Сколько существует различно окрашенных кубов?

Решение

Напоминание: $G = O = \langle t, f, r \rangle$, $|O| = 24$.



t — вращение на 90° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных *граней* ($\square - \square$, *3 оси*);

f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных *ребер* ($\circ - \circ$, *6 осей*);

r — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через две противоположные *вершины* ($\triangle - \triangle$, *4 оси*).

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Задача о раскраске куба...

Обозначим через F множество граней куба; $|F| = N = 6$.
Выберем некоторую **грань** куба (квадрат) и обозначим её ①,
а параллельную ей — ②.

Перенумеруем последовательно **вершины** грани ① числами
 $1, \dots, 4$, а вершины грани ② — числами $5, \dots, 8$ так, что
вершина с номером i смежна с вершиной с номером
 $i + 4$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Перестановки далее указаны для случая, когда ось вращения

$\langle t \rangle$ проходит через середины граней ① и ②,

$\langle f \rangle$ проходит через середины рёбер (3-7) и (1-5),

$\langle s \rangle$ проходит через вершины (1) и (7),

а грани обозначены:

(1-2-6-5) через ③, параллельная ей грань — ⑤,

грань (2-3-7-6) — через ④, параллельная ей грань — ⑥.

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Задача о раскраске куба...

$g \in O$	перестановка	$Type(g)$	$w(g)$	$\#w(g)$
e	(①)...(⑥)	$\langle 6, 0, \dots \rangle$	x_1^6	1
t, t^3	(①)(②)(③④⑤⑥)	$\langle 2, 0, 0, 1, 0, \rangle$	$x_1^2 x_4$	$3 \cdot 2 = 6$
t^2	(①)(②)(③⑤)(④⑥)	$\langle 2, 2, 0, \dots \rangle$	$x_1^2 x_2^2$	3
f	(①)(②)(③⑥)(④⑤)	$\langle 0, 3, 0, \dots \rangle$	x_2^3	6
r, r^2	(①③⑥)(②④⑤)	$\langle 0, 0, 2, 0, \dots \rangle$	x_3^2	$4 \cdot 2 = 8$
<i>Всего</i>				24

$$P(x_1, \dots, x_6) = \frac{1}{24} [x_1^6 + 6x_1^2 x_4 + 3x_1^2 x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2].$$

$$\#Col(2) = P(2, \dots, 2) = \frac{2^6 + 12 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 8 \cdot 2^2}{24} = 10,$$

$$\#Col(3) = P(3, \dots, 3) = \frac{3^6 + 12 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 8 \cdot 3^2}{24} = 48.$$

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Цикловой индекс действия группы октаэдра —

— на множество R рёбер куба ($|R| = N = 12$):

$g \in O$	$Type(g)$	$w(g)$	$\#w(g)$
e	$\langle 12, 0, \dots \rangle$	x_1^1	1
t, t^3	$\langle 0, 0, 0, 3, 0, 0 \rangle$	x_4^3	$3 \cdot 2 = 6$
t^2	$\langle 0, 6, 0, \dots \rangle$	x_2^6	3
f	$\langle 2, 5, 0, \dots \rangle$	$x_1^2 x_2^5$	6
r, r^2	$\langle 0, 0, 4, 0, \dots \rangle$	x_3^4	$4 \cdot 2 = 8$
Всего			24

Цикловой индекс:

$$P(O_{\alpha} : R) = \frac{1}{24} [x_1^{12} + 6x_4^3 + 3x_2^6 + 6x_1^2 x_2^5 + 8x_3^4].$$

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Цикловой индекс действия группы октаэдра —

— на множество V вершин куба ($|V| = N = 8$):

$g \in O$	$Type(g)$	$w(g)$	$\#w(g)$
e	$\langle 8, 0, \dots \rangle$	x_1^8	1
t, t^3	$\langle 0, 0, 0, 2, 0, 0 \rangle$	x_4^2	$3 \cdot 2 = 6$
t^2	$\langle 0, 4, 0, \dots \rangle$	x_2^4	3
f	$\langle 0, 4, 0, \dots \rangle$	x_2^4	6
r, r^2	$\langle 2, 0, 2, 0, \dots \rangle$	$x_1^2 x_3^2$	$4 \cdot 2 = 8$
Всего			24

Цикловой индекс:

$$P(O : V) = \frac{1}{24} [x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2 x_3^2].$$

Задача (Пересчисление графов)

Сколько имеется неориентированных непомеченных графов (без петель и кратных рёбер) с тремя вершинами?

Задача (Перечисление графов)

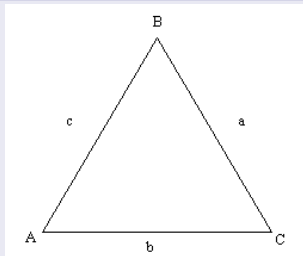
Сколько имеется неориентированных непомеченных графов (без петель и кратных рёбер) с тремя вершинами?

Решение

T — стороны треугольника, $N = 3$.

$G \cong S_3$ — все перестановки трёх вершин,
 $n = 3! = 6$.

$G : T$ — действие перестановок
 α вершин на стороны.



Графы неориентированные —
 $r = 2$ — пометки «есть ребро/нет ребра»

$$S_3 = \{ e, 2 * (ABC), 3 * ((A)(BC)) \}.$$

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Пересчисление графов...

$$S_3 = \{ e, 2 * \underbrace{(ABC)}_{g_1}, 3 * \underbrace{((A)(BC))}_{g_2} \}.$$

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Перечисление графов...

$$S_3 = \{ e, 2 * \underbrace{(ABC)}_{g_1}, 3 * \underbrace{((A)(BC))}_{g_2} \}.$$

Элемент группы g	$Type(g)$	$w(g)$	$\#w(g)$
$e = (a)(b)(c)$	$\langle 3, 0, 0 \rangle$	x_1^3	1
$g_1 = (abc)$	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	x_3^1	2
$g_2 = (a)(bc)$	$\langle 1, 1, 0 \rangle$	$x_1^1 x_2^1$	3
Всего			6

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Пересчисление графов...

$$S_3 = \{ e, 2 * \underbrace{(ABC)}_{g_1}, 3 * \underbrace{((A)(BC))}_{g_2} \}.$$

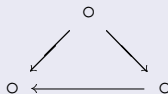
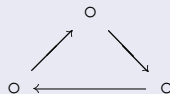
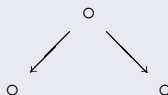
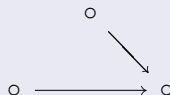
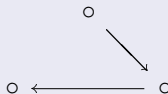
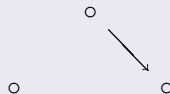
Элемент группы g	$Type(g)$	$w(g)$	$\#w(g)$
$e = (a)(b)(c)$	$\langle 3, 0, 0 \rangle$	x_1^3	1
$g_1 = (abc)$	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	x_3^1	2
$g_2 = (a)(bc)$	$\langle 1, 1, 0 \rangle$	$x_1^1 x_2^1$	3
Всего			6

$$P_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6} [x_1^3 + 2x_3^1 + 3x_1^1 x_2^1], \quad P_1(2, 2, 2) = 4.$$

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Перечисление графов...

Перечислим **ориентированные**: пустой граф и графы



— всего **7** графов **неориентированных** — 4.

Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач

Цикловые индексы самодействия и действия O на элементы куба

$$P(S_n) = \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ 1j_1 + 2j_2 + \dots + nj_n = n}} \frac{x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}}{(1^{j_1} j_1!)(2^{j_2} j_2!) \dots (n^{j_n} j_n!)},$$

$$P(\mathbb{Z}_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{n/d}, \quad \varphi - \text{функция Эйлера},$$

$$P(D_n) = \frac{1}{2} P(\mathbb{Z}_n) + \begin{cases} \frac{1}{2} x_1 x_2^{(n-1)/2}, & \text{если } n \text{ нечётно,} \\ \frac{1}{4} \left(x_2^{n/2} + x_1^2 x_2^{(n-2)/2} \right), & \text{если } n \text{ чётно,} \end{cases}$$

$$P(O_\alpha : V) = \frac{1}{24} [x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 6x_4^2 + 8x_1^2 x_3^2],$$

$$P(O_\alpha : E) = \frac{1}{24} [x_1^{12} + 3x_2^6 + 8x_3^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2 x_2^5 + 6x_4^3],$$

$$P(O_\alpha : F) = \frac{1}{24} [x_1^6 + 3x_1^2 x_2^2 + 6x_1^2 x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2].$$

Применение теоремы Пойа для решения комбинаторных задач

Теорема Пойа

К множеству T , $|T| = N$, группе $\mathbf{G}$, $|G| = n$ и действию $\mathbf{G} : T$ _{α} добавим множество $R = \{c_1, \dots, c_r\}$, меток («красок»), и совокупность функций $F = R^T$ — приписывания меток (*раскрашиваний*) элементам T .

Применение теоремы Пойа для решения комбинаторных задач

Теорема Пойа

К множеству T , $|T| = N$, группе G , $|G| = n$ и действию $G_\alpha : T$ добавим множество $R = \{c_1, \dots, c_r\}$, меток («красок»), и совокупность функций $F = R^T$ — приписывания меток (*раскрашиваний*) элементам T .

G , действуя на T , действует и на R^T — $\circ : R^T \times G \xrightarrow{\circ} R^T$.

Применение теоремы Пойа для решения комбинаторных задач

Теорема Пойа

К множеству T , $|T| = N$, группе $\mathbf{G}$, $|G| = n$ и действию $\mathbf{G} : T$
 α
добавим множество $R = \{c_1, \dots, c_r\}$, меток («красок»), и
совокупность функций $F = R^T$ — приписывания меток
(*раскрашиваний*) элементам T .

$\mathbf{G}$, действуя на T , действует и на R^T — $\circ : R^T \times G \overset{\circ}{=} R^T$.
Придадим вес элементам R : $w(c_i) = y_i$, $i = \overline{1, r}$.

Применение теоремы Пойа для решения комбинаторных задач

Теорема Пойа

К множеству T , $|T| = N$, группе $\mathbf{G}$, $|G| = n$ и действию $\mathbf{G}_\alpha : T$ добавим множество $R = \{c_1, \dots, c_r\}$, меток («красок»), и совокупность функций $F = R^T$ — приписывания меток (*раскрашиваний*) элементам T .

$\mathbf{G}$, действуя на T , действует и на R^T — $\circ : R^T \times G \xrightarrow{\circ} R^T$. Придадим вес элементам R : $w(c_i) = y_i$, $i = \overline{1, r}$.

Теорема (Редфилда-Пойа)

Цикловой индекс действия группы $\mathbf{G}$ на R^T есть

$$P(\mathbf{G}_\alpha : R^T) = P(\mathbf{G}_\alpha : T, x_1, \dots, x_N) \Big|_{x_k = y_1^k + \dots + y_r^k}$$

Следствие

Если все веса выбраны одинаковыми ($y_1 = \dots y_r = 1$), то $x_1 = \dots x_N = r$ и $W(F)$ — число классов эквивалентности

$$C(\mathbf{G}_{\alpha} : R^T) = C(\mathbf{G}_{\alpha} : T) = P(\mathbf{G}_{\alpha} : T, r, \dots, r).$$

— лемма Бёрнсайда.

Следствие

Если все веса выбраны одинаковыми ($y_1 = \dots y_r = 1$), то $x_1 = \dots x_N = r$ и $W(F)$ — число классов эквивалентности

$$C(\mathbf{G}_{\alpha} : R^T) = C(\mathbf{G}_{\alpha} : T) = P(\mathbf{G}_{\alpha} : T, r, \dots, r).$$

— лемма Бёрнсайда.

Что можно определить (подсчитать) с помощью:

леммы Бёрнсайда — **общее число** неэквивалентных
разметок (раскрасок);

теорема Редфилда-Пойа — число разметок **данного типа**,
т.е. содержащих данное количество элементов
конкретного цвета.

Применение теоремы Пойа для решения комбинаторных задач

Усложним задачу об ожерельях $N = 5$, $r = 3$

Задача (об ожерельях: 5 бусин 3 цветов —)

— *красный, синий, зелёный*. Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого поворотом и/или переворотом.

Сколько имеется ожерелий, имеющих ровно 2 красные бусины?

Применение теоремы Пойа для решения комбинаторных задач

Усложним задачу об ожерельях $N = 5$, $r = 3$

Задача (об ожерельях: 5 бусин 3 цветов —)

— **красный**, **синий**, **зелёный**. Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого поворотом и/или переворотом.
Сколько имеется ожерелий, имеющих ровно 2 красные бусины?

Решение

Было: $G = D_5$, цикловой индекс $P = \frac{1}{10} [x_1^5 + 4x_5 + 5x_1x_2^2]$.
Всего ожерелий $P(3, \dots, 3) = 39$ (только поворот — 51).

Применение теоремы Пойа для решения комбинаторных задач

Усложним задачу об ожерельях $N = 5$, $r = 3$

Задача (об ожерельях: 5 бусин 3 цветов —)

— **красный**, **синий**, **зелёный**. Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого поворотом и/или переворотом.

Сколько имеется ожерелий, имеющих ровно 2 красные бусины?

Решение

Было: $G = D_5$, цикловой индекс $P = \frac{1}{10} [x_1^5 + 4x_5 + 5x_1x_2^2]$.

Всего ожерелий $P(3, \dots, 3) = 39$ (только поворот — 51).

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3, \quad x_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \quad \dots, \quad x_k = y_1^k + y_2^k + y_3^k.$$

Применение теоремы Пойа для решения комбинаторных задач

Усложним задачу об ожерельях $N = 5$, $r = 3$

Задача (об ожерельях: 5 бусин 3 цветов —)

— **красный**, **синий**, **зелёный**. Ожерелья одинаковы, если одно получается из другого поворотом и/или переворотом.

Сколько имеется ожерелий, имеющих ровно 2 красные бусины?

Решение

Было: $G = D_5$, цикловой индекс $P = \frac{1}{10} [x_1^5 + 4x_5 + 5x_1x_2^2]$.
Всего ожерелий $P(3, \dots, 3) = 39$ (только поворот — 51).

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3, \quad x_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \quad \dots, \quad x_k = y_1^k + y_2^k + y_3^k.$$

$$\begin{cases} w(\text{красный}) = y_1, \\ w(\text{синий}) = y_2, \\ w(\text{зелёный}) = y_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y, \\ y_2 = y_3 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y + 2, \\ x_2 = y^2 + 2, \\ \dots \\ x_5 = y^5 + 2. \end{cases}$$

Применение теоремы Пойа для решения комбинаторных задач

$$P(x_1, \dots, x_5) = \frac{1}{10} [x_1^5 + 4x_5 + 5x_1x_2^2]$$
$$x_k \mapsto y^k + 2, \quad k = \overline{1, 5}; \quad P(y) = \sum_{i=1}^5 u_i y^i, \quad \boxed{u_2 = ?}$$

Применение теоремы Пойа для решения комбинаторных задач

$$P(x_1, \dots, x_5) = \frac{1}{10} [x_1^5 + 4x_5 + 5x_1x_2^2]$$

$$x_k \mapsto y^k + 2, \quad k = \overline{1, 5}; \quad P(y) = \sum_{i=1}^5 u_i y^i, \quad \boxed{u_2 = ?}$$

$$\begin{aligned} P(y) &= \frac{1}{10} [u_0 + u_1 y + \textcolor{red}{u}_2 y^2 + \dots + u_5 y^5] = \\ &= \frac{1}{10} [(y+2)^5 + 4(y^5+2) + 5(y+2)(y^2+2)^2] = \\ &= \frac{1}{10} [\dots + C_5^2 2^3 y^2 + \dots + 5(y+2)(y^4+4y^2+4)] = \\ &= \frac{1}{10} [\dots + (\textcolor{red}{10} \cdot \textcolor{red}{8} + \textcolor{red}{5} \cdot \textcolor{red}{2} \cdot \textcolor{red}{4}) y^2 + \dots]. \end{aligned}$$

$$u_2 = \frac{80 + 40}{10} = \textcolor{red}{12}.$$

Задача

Вершины куба помечают **красными** и **синим** цветами.

Сколько существует

- ① разнопомеченных кубов;
- ② кубов, у которых половина вершины красные;
- ③ кубов, у которых не более 2-х красных вершин?

Задача

Вершины куба помечают **красными** и **синим** цветами.

Сколько существует

- 1 разнопомеченных кубов;
- 2 кубов, у которых половина вершины красные;
- 3 кубов, у которых не более 2-х красных вершин?

Решение

Цикловой индекс действия группы O на вершины куба

$$P(O : V) = \frac{1}{24} [x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2].$$

Задача

Вершины куба помечают **красными** и **синим** цветами.

Сколько существует

- 1 разнопомеченных кубов;
- 2 кубов, у которых половина вершины красные;
- 3 кубов, у которых не более 2-х красных вершин?

Решение

Цикловой индекс действия группы O на вершины куба

$$P(O : V) = \frac{1}{24} [x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2].$$

- 1 Число разнопомеченных кубов —

$$\#Col(3) = P|_{x_1=\dots=x_8=2} = \frac{552}{24} = \mathbf{23}.$$

② $w(\text{красный}) = y$, $w(\text{синий}) = 1$, $x_k = y^k + 1$, $k = \overline{1, 8}$:

$$\begin{aligned} \#Col(4, 4) &= \frac{1}{24} \left[(y+1)^8 + 9 \cdot (y^2+1)^4 + 6 \cdot (y^4+1)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 8 \cdot (y+1)^2 (y^3+1)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{24} \left[\dots + 28y^2 + C_8^4 y^4 + \dots + 9(\dots 4y^2 + 6y^4 + \dots) + \right. \\ &\quad \left. \dots + 6 \cdot 2y^4 \dots + 8(\dots + 2y + y^2 + \dots)(\dots + 2y^3 + \dots) \right]. \\ u_4 &= \frac{1}{24} [70 + 9 \cdot 6 + 6 \cdot 2 + 8 \cdot 2 \cdot 2] = \frac{168}{24} = 7. \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad w(\text{красный}) = y, \quad w(\text{синий}) = 1, \quad x_k = y^k + 1, \quad k = \overline{1, 8}:$$

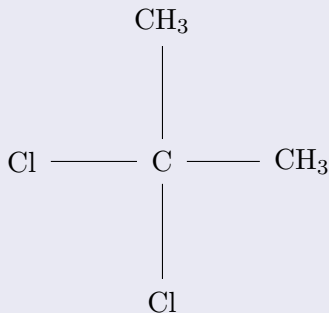
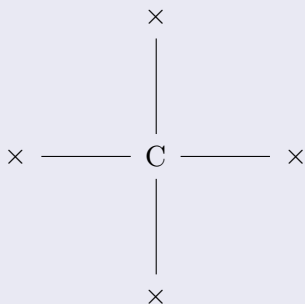
$$\begin{aligned} \#Col(4, 4) &= \frac{1}{24} \left[(y+1)^8 + 9 \cdot (y^2+1)^4 + 6 \cdot (y^4+1)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 8 \cdot (y+1)^2 (y^3+1)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{24} \left[\dots + 28y^2 + C_8^4 y^4 + \dots + 9(\dots 4y^2 + 6y^4 + \dots) + \right. \\ &\quad \left. \dots + 6 \cdot 2y^4 \dots + 8(\dots + 2y + y^2 + \dots)(\dots + 2y^3 + \dots) \right]. \\ u_4 &= \frac{1}{24} [70 + 9 \cdot 6 + 6 \cdot 2 + 8 \cdot 2 \cdot 2] = \frac{168}{24} = 7. \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad \#Col(\leq 2, *) = u_0 + u_1 + u_2. \quad u_0 = u_1 = 1.$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{24} [\dots + 28y^2 + \dots + 9(\dots + 4y^2 \dots) + 8(\dots + y^2 + \dots)] = \\ &= \frac{28 + 36 + 8}{24} = \frac{72}{24} = 3. \quad \#Col(\leq 2, *) = 1 + 1 + 3 = 5. \end{aligned}$$

Задача

Рассматриваются молекулы 4-х валентного углерода C:



где на месте $\times$ могут находиться CH_3 (метил), C_2H_5 (этил), H (водород) или Cl (хлор). Например — *дихлорбутан*.

Задача (продолжение)

Найти

- 1 общее число M всех молекул;
- 2 число молекул с $H = 0, 1, 2, 3, 4$ атомами водорода.

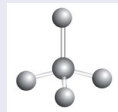
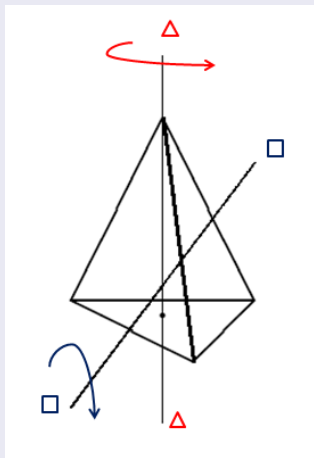
Решение

Какая группа действует на каком множестве?

Решение

Какая группа действует на каком множестве?

$T = \langle t, f \rangle, t^3 = f^2 = e$, где



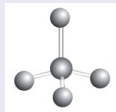
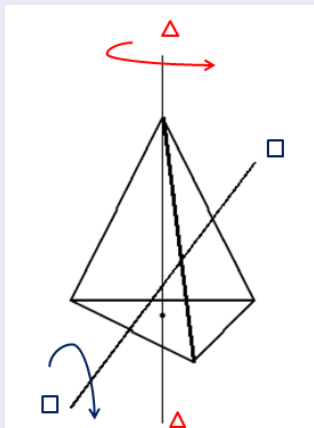
t — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через **вершину** ($\triangle$ — $\triangle$);
 f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через центры двух противоположных **рёбер** ($\square$ — $\square$).

$$P(T_\alpha : V) = \frac{1}{12} [x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2].$$

Решение

Какая группа действует на каком множестве?

$T = \langle t, f \rangle, t^3 = f^2 = e$, где



t — вращение на 120° вокруг оси, проходящей через **вершину** ($\triangle-\triangle$);
 f — вращение на 180° вокруг оси, проходящей через центры двух противоположных **рёбер** ($\square-\square$).

$$P(T : V) = \frac{1}{12} [x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2].$$

Почему перед x_1x_3 коэффициент 8, ведь осей $\triangle-\triangle$ всего 4?

(продолжение)

- ① Имеем $N = 4$, действие T на вершины тетраэдра:

$$P(T : V) = \frac{1}{12} [x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2].$$

Всего молекул (4 радикала) —

$$M = P(4, \dots, 4) = \frac{1}{12} [4^4 + 8 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2] = \frac{16 \cdot 27}{12} = 36.$$

- ② Веса: $y_1 = \text{H}$, $y_2 = y_3 = y_4 = 1$.

Подстановка в P : $x_k = \text{H}^k + 3$, $k = \overline{1, 4}$.

$$P(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{12} [x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2].$$

Проводим подстановку — $x_k \mapsto H^k + 3$, $k = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} P(H) &= \frac{1}{12} [(H+3)^4 + 8(H+3)(H^3+3) + 3(H^2+3)^2] = \\ &= \frac{1}{12} [(H^4 + 4 \cdot H^3 \cdot 3 + 6 \cdot H^2 \cdot 9 + 4 \cdot H \cdot 27 + 81) + \\ &\quad + 8(H^4 + 3H^3 + 3H + 9) + 3(H^4 + 6H^2 + 9)] = \\ &= 1H^4 + 3H^3 + 6H^2 + 11H + 15. \end{aligned}$$

Итого имеется молекул с числом атома водорода:

с 4-мя — 1 шт., с 3-мя — 3 шт., с 2-мя — 6 шт., с 1-м — 11 шт.,

без атомов водорода — 15 шт.,

всего — $1 + 3 + 6 + 11 + 15 = 36$.

Задачи

ТП-1

Задача

Показать, что если элементы g и h группы G сопряжены, то $\text{Stab}(g) = \text{Stab}(h)$.
(т.е. стабилизаторы сопряжённых элементов группы совпадают)

Задачи

ТП-1

Задача

Показать, что если элементы g и h группы G сопряжены, то $\text{Stab}(g) = \text{Stab}(h)$.
(т.е. стабилизаторы сопряжённых элементов группы совпадают)

Решение

$$\begin{aligned} gf = fh &\Rightarrow \text{Stab}(gf) = \text{Stab}(g) \cap \text{Stab}(f) = \text{Stab}(fh) = \\ &= \text{Stab}(f) \cap \text{Stab}(h) \Rightarrow \text{Stab}(g) = \text{Stab}(h). \end{aligned}$$

Задачи

ТП-2

Задача

Найти цикловой индекс самодействия группы симметрии правильного треугольника.

Задачи

ТП-2

Задача

Найти цикловой индекс самодействия группы симметрии правильного треугольника.

Решение

Группа симметрии правильного треугольника — группа диэдра $D_3 \cong S_3$. $D_3 = \langle t, s \rangle$, $t^3 = s^2 = e$, $t^2s = st$, $|D_3| = 6$.

Элемент группы g	$Type(g)$	$w(g)$
$e = (1)(2)(3)$	$\langle 3, 0, 0 \rangle$	x_1^3
$t = (123), t^2 = (132)$	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	x_3
$s = (1)(23), st, st^2$	$\langle 1, 1, 0 \rangle$	x_1x_2

Цикловой индекс —

$$P_{S_3} = \frac{1}{6} \cdot [x_1^3 + 2x_3 + 3x_1x_2].$$

Задачи

ТП-3

Задача

Найти цикловой индекс транзитивного самодействия группы Z_6 .

Задачи

ТП-3

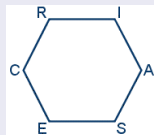
Задача

Найти цикловой индекс транзитивного самодействия группы Z_6 .

Решение

Занумеруем последовательно вершины 6-и угольника числами $1, \dots, 6$

Элемент g группы Z_6	$Type(g)$	$w(g)$
$e = (1) \dots (6)$	$\langle 6, 0, \dots \rangle$	x_1^6
$g = (123456)$	$\langle 0, 0, 0, 0, 0, 1 \rangle$	x_6
$g^2 = (135)(246)$	$\langle 0, 0, 2, 0, \dots \rangle$	x_3^2
$g^3 = (14)(25)(36)$	$\langle 0, 3, 0, \dots \rangle$	x_3^2
$g^4 = (153)(264)$	$\langle 0, 0, 2, 0, \dots \rangle$	x_3^2
$g = (165432)$	$\langle 0, 0, 0, 0, 0, 1 \rangle$	x_6



$$P_{Z_6} = \frac{1}{6} [x_1^6 + x_2^3 + 2x_6 + 2x_3^2].$$

Задачи

ТП-3 -1

Цикловой индекс

$$P_{D_7}(x_1, \dots, x_7) = \frac{1}{14} [x_1^7 + 6x_7 + 7x_1x_2^3].$$

Число различных раскрасок в r цветов —

$$P(r, \dots, r) = \frac{1}{14} [r^7 + 6r + 7r^4].$$

Для $r = 2$ имеем

$$\begin{aligned} P(2, \dots, 2) &= \frac{1}{14} [2^7 + 12 + 7 \cdot 16] = \frac{128 + 12 + 112}{14} = \\ &= \frac{252}{14} = 18. \end{aligned}$$

Задачи

ТП-4

Задача

Определить число различных раскрасок правильной 4-х угольной пирамиды P в 3 цвета.

Задачи

ТП-4

Задача

Определить число различных раскрасок правильной 4-х угольной пирамиды Π в 3 цвета.

Решение

Занумеруем последовательно боковые грани Π числами $1, \dots, 4$, основание — 5. $G \cong \mathbb{Z}_4 = \langle t \rangle$, t — вращение на 90° .

Элемент группы g	$Type(g)$	$w(g)$
$e = (1)(2)(3)(4)(5)$	$\langle \underline{5}, 0, 0, 0, 0 \rangle$	x_1^5
$r = (1234)(5)$	$\langle \underline{1}, 0, 0, 1, 0 \rangle$	$x_1 x_4$
$r^2 = (12)(34)(5)$	$\langle \underline{1}, 2, 0, 1, 0 \rangle$	$x_1 x_2^2$
$r^3 = (1432)(5)$	$\langle \underline{1}, 0, 0, 1, 0 \rangle$	$x_1 x_4$

$$P_G = \frac{1}{4} [x_1^5 + x_1 x_4 + x_1 x_2^2 + x_1 x_4], \quad P(2) = \frac{136}{4} = 34.$$

Задачи

ТП-5

Задача

Сколькими геометрически различными способами три абсолютно одинаковые мухи могут усестись в вершинах правильного семиугольника, нарисованного на листе бумаги?

Задачи

ТП-5

Задача

Сколькими геометрически различными способами три абсолютно одинаковые мухи могут усестись в вершинах правильного семиугольника, нарисованного на листе бумаги?

Решение

Множество T — вершины семиугольника, на которые действует группа $Z_7 = \langle t \rangle$, $t^7 = e$.

Элемент $g \in Z_7$	$Type(g)$	$w(g)$
e	$\langle 7, 0, \dots \rangle$	x_1^7
$t, t^2, \dots, t^6$	$\langle 0, \dots, 0, 1 \rangle$	x_7
Всего		7

$$\text{Цикловой индекс: } P_{Z_7}(x_1, \dots, x_7) = \frac{1}{7} [x_1^7 + 6x_7].$$

Задачи

ТП-5 -1

Число различных раскрасок в 2 цвета (муха есть/нет), при условии окраски ровно 3-х вершин из 7-и есть коэффициент u_3 при y^3 после подстановки $x_1 \mapsto y + 1$, $x_7 \mapsto y^7 + 1$ в $P(Z_7)$:

$$P(y) = \frac{1}{7} [(y+1)^7 + 6(y+1)] = \frac{1}{7} \left[\dots + \binom{7}{3} y^3 + \dots \right].$$

$$u_3 = \frac{7!}{7 \cdot 3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{3!} = 5.$$

Задачи

ТП-6

Задача

Боковые грани правильной b -и угольной пирамиды окрашиваются в красный, синий и зелёный цвета. Определить

- а) число различных 2-х и 3-х цветных пирамид;
- б) число пирамид с одной красной гранью?
- в) число пирамид, у которых не менее трёх красных граней;

Задачи

ТП-6

Задача

Боковые грани правильной 6-и угольной пирамиды окрашиваются в красный, синий и зелёный цвета. Определить

- а) число различных 2-х и 3-х цветных пирамид;
- б) число пирамид с одной красной гранью?
- в) число пирамид, у которых не менее трёх красных граней;

Решение

Имеем транзитивное самодействие Z_6 .

(а) Общее число пирамид.

$$P(Z_6) = \frac{1}{6} \sum_{d|6} \varphi(d) x_d^{6/d} \quad \boxed{=}$$

Задачи

ТП-6 -1

$$d = 1, 2, 3, 6. \quad \varphi(1) = \varphi(2) = 1, \varphi(3) = \varphi(6) = 2.$$

$$\boxed{=} \frac{1}{6} [x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6] = P_{Z_6}(x_1, \dots, x_6).$$

проверили, P_{Z_6} мы уже находили в задаче ТП-3

$$\begin{aligned} \#Col(2) &= P(2, \dots, 2) = \\ &= \frac{1}{6} [2^6 + 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2] = \frac{84}{6} = 14. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \#Col(3) &= P(3, \dots, 3) = \\ &= \frac{1}{6} [3^6 + 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3] = \frac{780}{6} = 130. \end{aligned}$$

Задачи

ТП-6 -1

(6, в) Число пирамид с 1-й $3 \leq$ красными гранями.

Полагаем $y_1 = y$, $y_2 = y_3 = 1$ (следим только за красными гранями), $x_1 = y + 2$, $x_2 = y^2 + 2$, $x_3 = y^3 + 2$.

$$\begin{aligned} P(y) &= \frac{1}{6} \left[(y+2)^6 + (y^2+2)^3 + 2(y^3+2)^2 + 2(y^6+2) \right] = \\ &= \frac{1}{6} \left[u_0 + u_1 y + u_2 y^2 + \dots + u_6 y^6 \right] = \\ &= \frac{1}{6} \left[\dots + (16 \cdot 15 + 12) y^2 + 6 \cdot 2^5 y + (2^6 + 2^3 + 2^3 + 4) \right]. \\ u_0 &= 84/6 = 14, \quad u_1 = 32, \quad u_2 = (8 \cdot 5 + 2)/6 = 42. \end{aligned}$$

Число пирамид с одной красной бусиной — $u_1 = 32$,

с не менее, чем 3-я красными гранями —

$$\#Col(3) - (u_0 + u_1 + u_2) = 130 - (14 + 32 + 42) = 130 - 88 = 42.$$

Что надо знать

- Действие группы на множестве: два определения. g -циклы, тип перестановки. Орбиты. Неподвижные точки группы преобразований: фиксатор и стабилизатор. Лемма Бёрнсайда.
- Группы вращений платоновых тел. Примеры.
- Применение леммы Бёрнсайда для решения комбинаторных задач. Примеры.
- Действие группы вращений куба на его элементы.
- Цикловой индекс: определение и свойства. Вычисление числа орбит через цикловой индекс. Примеры.
- Решения комбинаторной задачи об ожерельях.
- Теорема Редфилда-Пойа и её применение для решения комбинаторных задач. Примеры.