НЕПРЕРЫВНЫЕ ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ РАЗРЫВНЫМИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИМИ ТЕЧЕНИЯМИ ПЛАЗМЫ И ЕЕ НАГРЕВ

Л. С. Леденцов[1,*] Б. В. Сомов[1,**]

[1]*Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119991, Москва, Университетский проспект, 13, Россия*

В связи с проблемами, возникающими при интерпретации результатов численного моделирования процесса магнитного пересоединения в плазме, исследована возможность смены типа разрывного течения при постепенном (непрерывном) изменении условий. Законы сохранения на поверхности разрыва в магнитной гидродинамике (МГД) допускают такие переходы, но при этом должны существовать так называемые переходные решения для граничных условий, удовлетворяющие одновременно двум типам разрывов. Найден конкретный вид таких решений и на их основе построена обобщенная схема разрешенных переходов. Получено выражение для скачка внутренней энергии на разрыве. Рассмотрена зависимость эффективности нагрева плазмы от типа разрыва.

* Electronic address: `koob@mail.ru`

** Electronic address: `somov@sai.msu.ru`

1. ВВЕДЕНИЕ

Разрывные течения плазмы в магнитном поле присутствуют в различного рода технических установках и устройствах, имеющих практическое значение [1–3], в лабораторных и численных экспериментах [4–6], в космических условиях – особенно в связи с эффектом магнитного пересоединения [7–11]. При этом существенным, как правило, является вопрос о нагреве плазмы до самых высоких температур [12]. Например, применительно к солнечным вспышкам речь идет о необходимости объяснить появление в короне Солнца плазмы, электронная температура которой значительно превышает 10 кэВ [13].

Современные численные эксперименты, моделирующие процесс пересоединения, например, в приближении диссипативной магнитной гидродинамики (МГД), демонстрируют несколько сглаженную картину разрывных течений в окрестности пересоединяющего токового слоя [14–17]. При интерпретации результатов таких расчетов, особенно трехмерных, трудно идентифицировать однозначно тип того или иного разрыва по некоторому неполному и усредненному набору признаков. Если эту трудность удается преодолеть, то возникает вторая проблема, заключающаяся в объяснении одновременного присутствия в таких экспериментах разных типов разрывов, плавно переходящих друг в друга. При этом задача интерпретации картины переходов часто осложняется появлением в ней неэволюционных разрывов [18].

С теоретической точки зрения при исследовании свойств разрывных течений плазмы принципиальную роль играют следующие факты. Уравнения обычной гидродинамики имеют, как известно, лишь два типа разрывных решений: тангенциальный разрыв и ударная волна. В МГД наличие магнитного поля в плазме приводит к существованию быстрых, медленных, альвеновских ударных волн и других разрывов [19, 20]. Более того, в отличие от гидродинамики, в МГД возможны непрерывные переходы [21, 22] между различными типами разрывных решений при непрерывном изменении условий течения. Происходит это через так называемые переходные решения, одновременно удовлетворяющие условиям двух типов разрывов.

Первое описание переходных решений [21] содержало только четыре типа разрывных течений: тангенциальный разрыв (T) и альвеновская (A), наклонная (S) и перпендикулярная ($S_{\perp}$) ударные волны. Соответствующая схема непрерывных переходов между разрывными решениями уравнений идеальной МГД демонстрировала принципиальную возможность таких переходов, но была заведомо неполной. Во-первых, в ней отсутствовали некоторые разрывные решения, в частности параллельная ударная волна ($S_{\parallel}$) и контактный разрыв (C). Во-вторых, блок наклонных ударных волн (S) молчаливо объединял в себе сразу несколько различных разрывов: быстрые (S_{+}) и медленные (S_{-}) ударные волны, волны включения (S_{on}) и выключения (S_{off}), трансальвеновские ударные волны (Tr), возможность переходов между которыми требует отдельного рассмотрения. Позже эта картина переходов была дополнена на основе соответствия между ударными волнами и волнами малой амплитуды [23]. Хотя такой подход позволяет правильно указать возможные переходы и даже их условия, он не дает описания конкретного вида переходных решений между рассматриваемыми разрывами.

На поверхности разрыва происходит резкое изменение, скачок параметров плазмы и магнитного поля. Тип разрывного МГД решения, т.е. его характер, определяется изменениями плотности плазмы, скорости ее течения и вмороженного в нее магнитного поля. Кроме того, на поверхности разрыва происходит нагрев плазмы, величина которого, разумеется, тоже зависит от типа разрыва, но не определяет его классификационные признаки: непрерывность или скачек плотности, наличие или отсутствие перпендикулярных составляющих скорости $v_\perp$ и магнитного поля $B_\perp$.

Настоящая работа посвящена анализу граничных условий на поверхности разрыва, получаемых из уравнений идеальной МГД и представляющих собой систему нелинейных алгебраических уравнений восьмого порядка. В зависимости от выбора параметров решения этой системы описывают разрыв того или иного типа. План статьи таков. Сначала мы ищем переходные решения, на которых происходит смена типа разрыва, что позволяет нам систематизировать такие решения в обобщенную схему разрешенных переходов. Это можно сделать, не привлекая в рассмотрение граничное условие, отвечающее закону сохранения потока энергии через поверхность разрыва. Затем, используя закон сохранения энергии, мы выводим уравнение, описывающее скачок внутренней энергии плазмы на поверхности разрыва, и рассматриваем эффективность нагрева плазмы в зависимости от типа разрыва.

2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА РАЗРЫВЕ

На поверхности МГД разрыва плотность плазмы, ее давление, скорость течения, направление и напряженность магнитного поля могут изменяться скачком на расстоянии, сравнимом с длиной свободного пробега частиц. Физические процессы внутри такого скачка определяются кинетическими явлениями в плазме, как ламинарными, так и турбулентными [24, 25]. В приближении диссипативной МГД внутренняя структура разрывного течения определяется диссипативными коэффициентами переноса (вязкостью и проводимостью), а также теплопроводностью [26, 27]. Однако в приближении идеальной МГД скачок имеет нулевую толщину, т.е. происходит на некоторой поверхности разрыва.

Будем рассматривать плоскую поверхность разрыва, что является уместным для площадок достаточно малого размера по сравнению с радиусом кривизны поверхности разрыва. Введем декартову систему координат, в которой наблюдатель перемещается вместе с поверхностью разрыва, расположенной в плоскости (y, z), в направлении оси x. В приближении идеальной МГД пренебрегаем вязкостью, теплопроводностью и электрическим сопротивлением плазмы. Тогда граничные условия для уравнений МГД на разрыве принимают вид следующих законов сохранения (см. [19]):

$$\{ B_x \} = 0 \,, \tag{1}$$

$$\{ \rho \, v_x \} = 0 \,, \tag{2}$$

$$\{ v_x B_y - v_y B_x \} = 0 \,, \tag{3}$$

$$\{ v_x B_z - v_z B_x \} = 0 \,, \tag{4}$$

$$\left\{ \rho \, v_x v_y - \frac{1}{4\pi} \, B_x B_y \right\} = 0 \,, \tag{5}$$

$$\left\{ \rho \, v_x v_z - \frac{1}{4\pi} \, B_x B_z \right\} = 0 \,, \tag{6}$$

$$\left\{ p + \rho \, v_x^2 + \frac{B^2}{8\pi} \right\} = 0 \,, \tag{7}$$

$$\left\{ \rho \, v_x \left(\frac{v^2}{2} + \epsilon + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{1}{4\pi} \left(B^2 v_x - (\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \,) \, B_x \right) \right\} = 0 \,. \tag{8}$$

Здесь фигурными скобками обозначена разность значений заключенной внутри скобок величины с обеих сторон от плоскости разрыва. Например, уравнение (1) означает непрерывность нормальной компоненты магнитного поля:

$$\{ B_x \} = B_{x2} - B_{x1} = 0 \, .$$

Величины, отмеченные индексом 1, относятся к стороне, соответствующей набегающему потоку плазмы, а индексом 2 – убегающему.

В отличие от граничных условий в обычной гидродинамике, система граничных условий (1)–(8) не распадается на набор взаимоисключающих групп уравнений, а значит, в принципе, она допускает непрерывные переходы между различными типами разрывных решений при непрерывном изменении условий течения плазмы. В силу возможности плавного перехода между разрывами различных типов за основу их классификации принимаются локальные внешние признаки течения вблизи плоскости разрыва: наличие или отсутствие потока массы и потока магнитного поля через разрыв, непрерывность или скачок плотности.

Для течений плазмы в плоскости (x, y) из первых семи уравнений системы (1)–(8) следует формула, связывающая углы наклона вектора магнитного поля к нормали поверхности разрыва $x = 0$ с величинами плотности ρ_1 и ρ_2, компоненты магнитного поля B_x и потоком массы $m = \rho v_x$ [28]:

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{2 \, (\, B_x^2 / \, 4\pi - m^2 \, \tilde{r} \,) + m^2 \, \{ \, r \, \}}{2 \, (\, B_x^2 / \, 4\pi - m^2 \, \tilde{r} \,) - m^2 \, \{ \, r \, \}} \, \operatorname{tg} \theta_1 \, .$$

Здесь $\operatorname{tg} \theta = B_y / \, B_x$, $r = 1/\rho$, тильдой помечены средние значения величин, так $\tilde{r} = (\, r_1 + r_2 \,) / \, 2$. Перепишем эту формулу, раскрывая скачки $\{r\}$ и средние значения $\tilde{r}$. Получим

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{m^2 \cdot 4\pi r_1 / B_x^2 - 1}{m^2 \cdot 4\pi r_2 / B_x^2 - 1} \, \operatorname{tg} \theta_1 \, .$$

Обозначим $m_{\text{off}}^2 = B_x^2/4\pi r_1$ и $m_{\text{on}}^2 = B_x^2/4\pi r_2$; как будет показано ниже, величины m_{off} и m_{on} соответствуют потоку массы через волну выключения и волну включения. Отметим, что $m_{\text{off}} \le m_{\text{on}}$, поскольку в силу теоремы Цемплена (см. [29], § 72) $r_2 \le r_1$. Формула для углов наклона поля принимает вид

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{m^2/m_{\text{off}}^2 - 1}{m^2/m_{\text{on}}^2 - 1}\operatorname{tg}\theta_1 . \tag{9}$$

Из условия существования нетривиальных решений рассматриваемой системы семи уравнений следует ограничение на возможные значения потока массы через разрыв [28]: или

$$m^2 < \frac{B_x^2}{4\pi\tilde{r}}, \tag{10}$$

или

$$m^2 > \frac{B_x^2 + \tilde{B}_y^2}{4\pi\tilde{r}} . \tag{11}$$

Введем обозначения $m_{\text{A}}^2 = B_x^2/4\pi\tilde{r}$ и $m_\perp^2 = \tilde{B}_y^2/\,4\pi\tilde{r}$. Величина m_{A} соответствует альвеновскому потоку массы. Так как $r_2 \le \tilde{r} \le r_1$, то $m_{\text{off}} \le m_{\text{A}} \le m_{\text{on}}$. Условия (10) и (11) запишем в виде:

$$m^2 < m_{\text{A}}^2, \tag{12}$$

$$m^2 > m_{\text{A}}^2 + m_\perp^2 . \tag{13}$$

Отметим, что величины m_{off}, m_{A} и m_{on} не являются независимыми, а связаны соотношением

$$m_{\text{A}}^2 = \frac{2\, m_{\text{on}}^2\, m_{\text{off}}^2}{m_{\text{on}}^2 + m_{\text{off}}^2} . \tag{14}$$

В этом легко убедиться, раскрыв среднее значение $\tilde{r}$ в определении m_{A}^2.

На основе приведенных результатов ниже мы рассмотрим свойства разрывных течений, а именно, установим возможные переходы между ними.

3. ДВУМЕРНЫЕ РАЗРЫВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Поиск переходных решений начнем с поиска условий возможных переходов между различными типами двумерных МГД течений ($v_z = 0$, $B_z = 0$), т.е. течений, для которых поле скоростей и магнитное поле лежат в плоскости (x, y). Мы называем такие разрывные течения плоскими или двумерными. Затем мы найдем соответствующие им переходные решения, а также установим вид решений, являющихся переходными к трехмерным разрывным течениям.

Формула (9) вместе с условиями (12)–(13) описывает зависимость углов наклона магнитного поля от величины потока массы через разрыв. Эту зависимость можно задать либо двумя параметрами $m_{\rm off}$ и $m_{\rm on}$, либо, например, величинами ρ_1 и $\{\rho\}$. Поскольку нас интересуют классификационные признаки разрывов (т.е. качественные изменения соотношения между углами θ_1 и θ_2 при варьировании m^2), будем рассматривать (9) пока без каких-либо конкретных приложений к определенным физическим условиям в плазме. Значения параметров выберем из соображений наглядности. Пусть $m_{\rm off}^2$, $m_{\rm A}^2$ и $m_{\rm on}^2$ соотносятся как $3:4:6$. Квадрат потока массы будем измерять в единицах $m_{\rm A}^2/4$, тогда $m_{\rm off}^2 = 3$ и $m_{\rm on}^2 = 6$. Зависимость $\theta_2(m^2)$ показана на рис. 1 для трех значений угла θ_1, а именно 5°, 25° и 45°. Соответствующие кривые ведут себя одинаковым образом. Во-первых, они пересекаются в одной точке при $m^2 = m_{\rm off}^2$, здесь $\theta_2 = 0$. Во-вторых, для каждой кривой $\theta_2 \to -\theta_1$ при $m^2 \to m_{\rm A}^2 = 4$. В-третьих, все они имеют область, не удовлетворяющую условиям (12) и (13), которая располагается в окрестности точки $m^2 = m_{\rm on}^2$.

Выделим на рис. 1 области, для каждой из которых характерно свое поведение зависимости θ_2 от m^2. В области I ($0 < m^2 < m_{\rm off}^2$) с ростом m^2 происходит уменьшение тангенциальной составляющей B_{y2} вектора $\mathbf{B}_2$ магнитного поля за поверхностью разрыва. При этом $0 < \theta_2 < \theta_1$, т.е. при переходе через поверхность разрыва тангенциальная составляющая поля ослабевает, но остается положительной. В точке $m^2 = m^2_{\text{off}}$ при пересечении плоскости разрыва компонента B_{y2} становится равной нулю. В области II ($m^2_{\text{off}} < m^2 < m^2_{\text{A}}$) компонента B_{y2} отрицательна, увеличивается по модулю, но $-\theta_1 < \theta_2 < 0$. В области III ($m^2_{\text{A}} < m^2 < m^2_{\text{on}}$), как и в области II, при пересечении плоскости разрыва компонента B_y меняет знак. Однако теперь B_y увеличивается по модулю ($\theta_2 < -\theta_1$), оставаясь отрицательной величиной. Наконец, в области IV ($m^2 > m^2_{\text{on}}$) происходит усиление магнитного поля ($\theta_2 > \theta_1$) с сохранением положительного знака его тангенциальной компоненты.

Рассмотрим поведение функции $\theta_2(m^2, \theta_1)$ вблизи границы областей II и III, где $m^2 = m^2_{\text{A}}$. Область определения функции $\theta_2(m^2, \theta_1)$ слева от величины m^2_{A} задается условием (12), а справа – условием (13). При $m^2 \to m^2_{\text{A}}$ в силу (9) и (14) $\operatorname{tg}\theta_2 \to -\operatorname{tg}\theta_1$, т.е. величина $\tilde{B}_y \to 0$. Неравенство (13) в таком случае преобразуется к виду $m^2 > m^2_{\text{A}}$. Поэтому функция $\theta_2(m^2, \theta_1)$ как в области II, так и в области III определена вблизи значения m^2_{A}. Однако при увеличении m^2 растет и правая часть условия (13). При некотором значении m^2 в области III устанавливается равенство $m^2 = m^2_{\text{A}} + m^2_{\perp}$, и имеет место максимально сильная (в наибольшей степени увеличивающая энергию магнитного поля) трансальвеновская ударная волна. При дальнейшем росте потока массы значение m^2 не может удовлетворить условиям (12) и (13) пока m^2 вновь не сравняется с $m^2_{\text{A}} + m^2_{\perp}$. Происходит это в области IV, где наблюдается наиболее сильная быстрая ударная волна.

Получим уравнение кривой, ограничивающей функцию $\theta_2(m^2, \theta_1)$, а значит и наиболее сильные для данных параметров плазмы быстрые и трансальвеновские ударные волны. Приравняв m^2 к правой части условия (11), найдем

$$B_{y1} = \pm\, 2\,\sqrt{4\pi\tilde{r}\, m^2 - B_x^2}\, - B_{y2}\,,$$

где знак "+" соответствует области IV, а "−" – области III. Разделив полученное уравнение на B_x, имеем

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \pm\, 2\,\sqrt{m^2/\, m_{\text{А}}^2 - 1}\, - \operatorname{tg}\theta_2\,. \tag{15}$$

Подставив выражение (15) в (9), получим уравнение искомой кривой

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \pm\,\frac{2\, m^2/\, m_{\text{off}}^2 - 2}{m^2/\, m_{\text{off}}^2 + m^2/\, m_{\text{on}}^2 - 2}\,\sqrt{\frac{m^2}{m_{\text{A}}^2} - 1}\,.$$

Упростим его, воспользовавшись соотношением (14). Имеем

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \pm\,\frac{m^2/\, m_{\text{off}}^2 - 1}{\sqrt{m^2/\, m_{\text{A}}^2 - 1}}\,. \tag{16}$$

Соответствующие кривые представлены на рис. 1 тонкой линией.

Итак, мы показали, как именно при увеличении потока плазмы меняется характер соотношения между углами наклона магнитного поля, а следовательно, и тип МГД разрыва. Области I и II отвечают медленным ударным волнам, соответственно не обращающим ($S_-^{\uparrow}$) и обращающим ($S_-^{\downarrow}$) тангенциальную компоненту поля. Область III соответствует трансальвеновской волне (Tr), а область IV – быстрой ударной волне (S_+). При этом переходные решения для разрывов, соответствующих соседним областям, реализуются при значении потока массы, разграничивающем эти области.

Теперь будем искать переходные решения в порядке увеличения потока массы m, начиная с $m = 0$. Рассмотрим переход между контактным разрывом

(C) в точке $m^2 = 0$ и медленной ударной волной в области I. Граничные условия для двумерных разрывов следуют из (1)–(7) при подстановке $v_z = 0$ и $B_z = 0$:

$$\{\, B_x \,\} = 0\,, \quad \{\, \rho\, v_x \,\} = 0\,, \quad \left\{ p + \rho\, v_x^2 + \frac{B_y^{\,2}}{8\pi} \right\} = 0\,, \tag{17}$$

$$\{\, v_x B_y - v_y B_x \,\} = 0\,, \quad \left\{ \rho\, v_x v_y - \frac{1}{4\pi}\, B_x B_y \right\} = 0\,.$$

Представленное на рис. 1 решение этих уравнений в области I соответствует медленной ударной волне $(S_-^{\uparrow})$, которая не меняет знак тангенциальной составляющей магнитного поля. В этом легко убедиться при малых m^2. Из формулы (9), которая, разумеется, остается применимой в условиях двумерных разрывных течений, следует, что

$$\operatorname{tg}\theta_2 \approx \left(1 - \frac{m^2}{m_{\rm off}^2} + \frac{m^2}{m_{\rm on}^2} \right) \operatorname{tg}\theta_1\,,$$

т.е. $0 < \theta_2 < \theta_1$, как и должно быть в медленной ударной волне. Более того, при $m^2 \to 0$, т.е. $v_x \to 0$, из (17) следует $\{\, v_y \,\} \to 0$ и $\{\, B_y \,\} \to 0$, что является естественным предельным случаем для медленной ударной волны.

Остается показать, что при $v_x \to 0$ условия (17) переходят в граничные условия на контактном разрыве. В самом деле, подстановка $v_x = 0$ в (17) дает

$$\{\, B_x \,\} = \{\, v_y \,\} = \{\, B_y \,\} = \{\, p \,\} = 0\,, \tag{18}$$

На контактном разрыве скачок плотности $\{\rho\}$ не равен нулю. В противном случае все величины остаются непрерывными. Таким образом, решение (18) описывает одновременно и медленную ударную волну в пределе $v_x \to 0$, и контактный разрыв, т.е. является соответствующим переходным решением.

При пересечении границы областей I и II происходит изменение знака тангенциальной компоненты магнитного поля. Медленная ударная волна $(S_-^{\uparrow})$, не обращающая тангенциальную компоненту, превращается в обращающую медленную ударную волну ($S_{-}^{\downarrow}$). Переходное решение реализуется на границе областей, когда угол $\theta_2 = 0$. Подстановка $B_{y2} = 0$ в (17) дает соответствующее переходное решение:

$$\{\, B_x \,\} = 0 \,, \quad \{\, \rho\, v_x \,\} = 0 \,, \quad \left\{\, p + \rho\, v_x^2 \,\right\} = \frac{B_{y1}^2}{8\pi} \,, \tag{19}$$

$$B_x \,\{\, v_y \,\} = -v_{x1} B_{y1} \,, \quad \rho\, v_x \,\{\, v_y \,\} = -\frac{1}{4\pi}\, B_x B_{y1} \,.$$

Исключая $\{v_y\}$ из двух последних уравнений, находим

$$m^2 = \rho_1 B_x^2 / \, 4\pi = m_{\text{off}}^2 \,, \tag{20}$$

что и следовало доказать. Этот поток массы соответствует волне выключения (S_{off}): за плоскостью разрыва исчезает тангенциальная составляющая поля. Происходит это вне зависимости от угла θ_1 и соответствует пересечению кривых в точке $m^2 = m_{\text{off}}^2$ на рис. 1.

Обращение тангенциальной компоненты поля на границе областей II и III может быть частным случаем трехмерного альвеновского разрыва (A). Поскольку на альвеновском разрыве отсутствует скачок плотности, подставим $\{\rho\} = 0$ в (17):

$$\{\, \rho \,\} = \{\, B_x \,\} = \{\, v_x \,\} = 0 \,, \quad \left\{ p + \frac{B_y^2}{8\pi} \right\} = 0 \,, \tag{21}$$

$$B_x \,\{\, v_y \,\} = v_x \,\{\, B_y \,\} \,, \quad \rho\, v_x \,\{\, v_y \,\} = \frac{1}{4\pi}\, B_x \,\{\, B_y \,\} \,.$$

Если $\{B_y\} = 0$, то все величины непрерывны, и разрыв отсутствует. Пусть $\{B_y\} \neq 0$. Исключая отношение $\{B_y\}/\{v_y\}$ из последних двух уравнений, получим

$$m^2 = \rho B_x^2 / \, 4\pi = m_{\text{A}}^2 \,. \tag{22}$$

При подстановке $\{\rho\} = 0$ в (1)–(7) находим граничные условия на альвеновском разрыве:

$$\{\,\rho\,\} = \{\,B_x\,\} = \{\,v_x\,\} = 0\,, \quad \left\{p + \frac{B_y^2 + B_z^2}{8\,\pi}\right\} = 0\,, \tag{23}$$
$$B_x\,\{\,v_y\,\} = v_x\,\{\,B_y\,\}\;, \quad \rho\,v_x\,\{\,v_y\,\} = \frac{1}{4\pi}\,B_x\,\{\,B_y\,\}\;,$$
$$B_x\,\{\,v_z\,\} = v_x\,\{\,B_z\,\}\;, \quad \rho\,v_x\,\{\,v_z\,\} = \frac{1}{4\pi}\,B_x\,\{\,B_z\,\}\;.$$

Из сравнения (21) и (23) видно, что граничные условия (21) описывают переходный разрыв между медленной ударной волной в пределе $\{\rho\} \to 0$ и альвеновским течением при $v_z = 0$ и $B_z = 0$. Разрыв представляет собой частный случай альвеновского разрыва, переворачивающий тангенциальную компоненту магнитного поля. Трансальвеновские разрывы переворачивают и увеличивают тангенциальную компоненту. Они занимают область III и примыкают к альвеновскому значению потока массы (22) справа. Условия перехода к альвеновскому разрыву идентичны (21).

Вблизи границы областей III и IV, в некотором интервале потоков массы, течение не может быть реализовано. По этой причине запрещен переход между трансальвеновскими и быстрыми ударными волнами. Величина интервала уменьшается с уменьшением начального угла наклона магнитного поля вплоть $\theta_1 = 0$ (рис. 1). Наиболее сильная быстрая ударная волна реализуется при минимальном из возможных потоков массы, допускаемых условием (13). При увеличении потока массы тангенс угла наклона поля за плоскостью разрыва, уменьшаясь, асимптотически стремится к значению $\operatorname{tg}\theta_2 = (\rho_2/\rho_1)\operatorname{tg}\theta_1$.

4. ТРЕХМЕРНЫЕ РАЗРЫВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Варьирование величин ρ_1, $\{\rho\}$ и B_x приводит к сжатию или растяжению кривых, представленных на рис. 1, вдоль координатных осей, без изменения их общей структуры. Для нулевых значений θ_1, B_x и $\{\rho\}$ характер зависимости $\theta_2(m^2)$ показан на рис. 2. В силу (9) при $\theta_1 \to 0$ угол θ_2 также стремится к нулю почти при всех значениях m^2 (случай $m^2 = m^2_{\text{on}}$ будет рассмотрен отдельно). Если $B_{y1} = 0$, то и $B_{y2} = 0$ (рис. 2a). При этом граничные условия двумерных разрывов (17) принимают вид:

$$\{\,\rho\, v_x\,\} = 0\,, \quad \{\,p + \rho\, v_x^2\,\} = 0\,, \tag{24}$$

$$\{\,B_x\,\} = 0\,, \quad \{\,v_y\,\} = 0\,,$$

отвечающий обычной гидродинамической ударной волне, которая распространяется согласно условиям $B_{y1} = 0$ и $B_{y2} = 0$ вдоль магнитного поля. Система (24) – переходное решение между наклонными ударными волнами в пределе $\theta_1 \to 0$ и параллельной ударной волной ($S_\parallel$).

С уменьшением угла θ_1 также будет уменьшаться разрыв между допустимыми значениями потока массы для быстрых и трансальвеновских ударных волн. Условия (17) при этом дают

$$\{\,B_x\,\} = 0\,, \quad \{\,\rho\, v_x\,\} = 0\,, \quad \{\,p + \rho\, v_x^2\,\} = -\frac{B_{y2}^2}{8\pi}\,, \tag{25}$$

$$B_x\,\{\,v_y\,\} = v_{x2} B_{y2}\,, \quad \rho\, v_x\,\{\,v_y\,\} = \frac{1}{4\pi}\,B_x B_{y2}\,.$$

Из совместного решения двух последних уравнений имеем

$$m^2 = \rho_2 B_x^2 / \, 4\pi = m^2_{\text{on}}. \tag{26}$$

Для этого значения потока массы уравнение (9) не имеет однозначного решения. Нулевому значению θ_1 может соответствовать ненулевое значение θ_2. За фронтом ударной волны появляется тангенциальная компонента магнитного поля, что соответствует волне включения ($S_{\rm on}$). Она показана на рис. 2*а* вертикальным отрезком при $m^2 = m^2_{\rm on}$. Волна включения может выполнять роль переходной для трансальвеновской и быстрой ударной волны в пределе $\theta_1 \to 0$, но для этого, разумеется, необходимо, чтобы $m^2 \to m^2_{\rm on}$. В противном случае будет осуществлен переход к параллельной волне согласно (24).

Чтобы установить вид переходного решения между параллельной ударной волной и контактным разрывом, положим в (24) $v_x = 0$, имеем:

$$\{\, B_x \,\} = \{\, v_y \,\} = \{\, p \,\} = 0 \,, \tag{27}$$

Эта система уравнений соответствует контактному разрыву (18), ортогональному линиям магнитного поля. Она описывает переходный разрыв между параллельной ударной волной в пределе $v_x \to 0$ и контактным разрывом. На рис. 2*а* такой переход имеет место при $m^2 = 0$.

Когда $B_x = 0$ (рис. 2*б*), величина $m^2_{\rm on}$ становится равной нулю, а все ненулевые потоки массы оказываются в области IV на рис. 1. Чтобы найти соответствующие им граничные условия, подставим $B_x = 0$ в (17). Получим

$$\{\, \rho\, v_x \,\} = 0 \,, \quad \left\{ p + \rho\, v_x^2 + \frac{B_y^{\,2}}{8\pi} \right\} = 0 \,, \tag{28}$$

$$\{\, v_x B_y \,\} = 0 \,, \quad \{\, v_y \,\} = 0 \,.$$

Эти условия характеризуют ударную волну сжатия, распространяющуюся перпендикулярно магнитному полю. Общий случай перпендикулярной ударной волны ($S_\perp$) найдем, подставив $B_x = 0$ в (1)–(7):

$$\{\,\rho\, v_x\,\} = 0\,, \quad \left\{\, p + \rho\, v_x^2 + \frac{B_y^2 + B_z^2}{8\pi}\,\right\} = 0\,,$$

$$\{\, v_x B_y\,\} = 0\,, \quad \{\, v_y\,\} = 0\,, \tag{29}$$

$$\{\, v_x B_z\,\} = 0\,, \quad \{\, v_z\,\} = 0\,.$$

Тогда уравнения (28) суть граничные условия переходного разрыва между быстрой ударной волной в пределе $B_x \to 0$ и перпендикулярной ударной волной с магнитным полем, направленным вдоль оси y. Этот переход может быть осуществлен только при потоках массы, удовлетворяющих неравенству (11), которое в при $B_x = 0$ принимает вид $m^2 > m_\perp^2$ (рис. 2*б*).

Чтобы определить граничные условия разрыва при $m^2 = 0$ (рис. 2*в*), подставим $B_x = 0$ и $v_x = 0$ в (1)–(7). В этом случае магнитное поле и поле скоростей параллельны поверхности разрыва и могут претерпевать произвольные скачки по величине и по направлению, а скачок давления связан со скачком магнитного поля условием

$$\left\{\, p + \frac{B_y^2 + B_z^2}{8\pi}\,\right\} = 0\,. \tag{30}$$

Это – тангенциальный разрыв (T). К нему в пределе $B_x \to 0$ при определенных условиях могут перейти и контактный разрыв, и медленная ударная волна, и альвеновский разрыв. Найдем соответствующие переходные решения. Во-первых, подставим $B_x = 0$ в граничные условия для контактного разрыва (18), получим переходное решение

$$\{\, B_y\,\} = \{\, v_y\,\} = \{\, p\,\} = 0\,. \tag{31}$$

Оно описывает тангенциальный разрыв (30) при нулевой компоненте поля B_z в отсутствии скачков $\{v_y\}$ и $\{B_y\}$. Во-вторых, условия для наклонных ударных волн (17) при $B_x = 0$ и $v_x = 0$ есть переходное решение

$$\left\{ p + \frac{B_y^2}{8\pi} \right\} = 0 \,, \tag{32}$$

соответствующее плоскому тангенциальному разрыву (30) при $B_z = 0$. Наконец, граничное условие для альвеновского разрыва (23) после подстановки $B_x = 0$ дает переходное решение:

$$\{\,\rho\,\} = 0 \,, \quad \left\{ p + \frac{B_y^2 + B_z^2}{8\pi} \right\} = 0 \,, \tag{33}$$

которое описывает тангенциальный разрыв (30), не имеющий скачка плотности ρ.

Значение угла θ_2 для наиболее сильной трансальвеновской ударной волны определяется уравнением (15). При $B_x \to 0$ в силу (15) угол $\theta_2 \to -\theta_1$. Таким образом, трансальвеновские волны при уменьшении магнитного потока вырождаются в частный случай альвеновского разрыва. Разумеется, для любого типа течения также можно приравнять к нулю скачок плотности. В таком случае все параметры $m^2_{\rm off}$, $m^2_{\rm A}$ и $m^2_{\rm on}$ будут равны потоку (22), при котором реализуется альвеновский разрыв (21). На рис. 2*в* ему соответствует обозначение $m^2_{\rm off,A,on}$. При других потоках массы различия в характеристиках плазмы по разные стороны разрыва исчезнут, разрыв как таковой будет отсутствовать.

Объединим систематизированные выше свойства разрывных решений в схему разрешенных переходов между ними, показанную на рис. 3. Здесь в среднем ряду расположены двумерные разрывы в порядке увеличения потока массы, в верхнем ряду – трехмерные разрывы. Нижний ряд занимает одномерная параллельная ударная волна ($S_\parallel$). Группировка отдельных элементов произведена для удобства сопоставления обобщенной схемы переходов с предлагавшимися ранее. Схема Сыроватского [21] согласуется с рис. 3, если элементы $S_-^{\downarrow}$, S_{off}, $S_-^{\uparrow}$, Tr, S_{on} и S_+ объединить в один блок “наклонные ударные волны” (S), опустив при этом вопрос о возможности переходов внутри блока, и не рассматривать контактный разрыв (C) и параллельную ударную волну ($S_{\parallel}$). Схема, предложенная в [23], включает в себя параллельную волну ($S_{\parallel}$) и разделение наклонных волн на медленную (S_-), соответствующую условию (12), и быструю (S_+), соответствующую (13). Довольно очевидно, что предлагаемая нами схема переходов является корректным и естественным обобщением двух более ранних схем. Схема содержит в себе не только эволюционные, но и неэволюционные типы разрывов: ударную волну включения, альвеновскую и трансальвеновскую ударные волны.

5. СКАЧОК ВНУТРЕННЕЙ ЭНЕРГИИ

Чтобы определить эффективность нагрева плазмы, обратимся к граничному условию (8), представляющему собой закон сохранения энергии. Используя (2), найдем из (8) скачок внутренней энергии

$$\{\,\epsilon\,\} = -\left\{\frac{v^2}{2}\right\} - \frac{1}{m}\,\{\,v_x p\,\} - \frac{1}{4\pi m}\,\{\,B^2 v_x - (\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\,)\,B_x\,\}\,. \tag{34}$$

Используя средние величины скоростей $\tilde{v}_x$, $\tilde{v}_y$ и $\tilde{v}_z$, запишем первое слагаемое в виде

$$-\left\{\frac{v^2}{2}\right\} = -\tilde{v}_x\,\{v_x\} - \tilde{v}_y\,\{v_y\} - \tilde{v}_z\,\{v_z\}\,.$$

Скачки тангенциальных компонент скорости выразим через скачки тангенциальных компонент магнитного поля при помощи уравнений (1), (2), (5) и (6). Получим

$$\{v_y\} = \frac{B_x}{4\pi m}\,\{B_y\}\,, \quad \{v_z\} = \frac{B_x}{4\pi m}\,\{B_z\}\,.$$

Теперь первое слагаемое в правой части уравнения (34) выглядит так

$$-\left\{\frac{v^2}{2}\right\} = -\tilde{v}_x\{v_x\} - \frac{\tilde{v}_y B_x}{4\pi m}\{B_y\} - \frac{\tilde{v}_z B_x}{4\pi m}\{B_z\}. \qquad (35)$$

Аналогично вся правая часть (34) выражается через скачки нормальной компоненты скорости и тангенциальных компонент магнитного поля:

$$\{\epsilon\} = -\frac{\tilde{p}}{m}\{v_x\} + \frac{\tilde{v}_x\tilde{B}_y - \tilde{v}_y B_x}{4\pi m}\{B_y\} - \frac{v_x B_y - v_y B_x}{4\pi m}\{B_y\} +$$

$$+\frac{\tilde{v}_x\tilde{B}_z - \tilde{v}_z B_x}{4\pi m}\{B_z\} - \frac{v_x B_z - v_z B_x}{4\pi m}\{B_z\}.$$

Это уравнение упрощается, если раскрыть входящие в него средние значения и вынести за скобки $-\{v_x\}/m = -\{r\}$. Получаем

$$\{\epsilon\} = -\{r\}\left(\tilde{p} + \frac{\{B_y\}^2 + \{B_z\}^2}{16\pi}\right). \qquad (36)$$

Для двумерных разрывов оно принимает совсем простой вид

$$\{\epsilon\} = -\{r\}\left(\tilde{p} + \frac{\{B_y\}^2}{16\pi}\right). \qquad (37)$$

Уравнение (36) позволяет сделать определенные выводы относительно изменения внутренней энергии плазмы при пересечении поверхности разрыва. Во-первых, внутренняя энергия растет, поскольку $-\{r\} > 0$ по теореме Цемплена, а $\tilde{p}$ и $\{B_y\}^2$ - положительные величины. Во-вторых, изменение внутренней энергии складывается из двух частей: термодинамической и магнитной. Последняя зависит от конфигурации магнитного поля, а значит, и от типа разрыва. Выразим в уравнении (37) тангенциальные компоненты магнитного поля через соответствующие углы наклона:

$$\{\epsilon\} = -\{r\}\,\tilde{p} - \{r\}\,\frac{B_x^2}{16\pi}\left(\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1\right)^2.$$

Затем термодинамическую часть нагрева, не зависящую от типа разрыва, примем за нулевой отсчет, а сам скачок внутренней энергии будем измерять в единицах $-\{r\}B_x^2/\,16\pi$. Для этого произведем замену

$$\{\,\epsilon\,\}' = -\frac{16\pi}{\{r\}B_x^2}\left(\{\,\epsilon\,\} + \{r\}\tilde{p}\right)\,.$$

Получим уравнение

$$\{\,\epsilon\,\}' = \left(\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1\right)^2\,. \qquad (38)$$

Для разрывов, представленных на рис. 1, зависимость скачка внутренней энергии от потока массы вычислена с использованием формулы (38) и показана на рис. 4. Кривая, описывающая скачки внутренней энергии на наиболее сильных трансальвеновских и быстрых ударных волнах, имеет вид

$$\{\,\epsilon\,\}' = \frac{\left(m^2/\,m_{\text{off}}^2 - \,m^2/\,m_{\text{on}}^2\right)^2}{m^2/\,m_{\text{A}}^2 - 1}\,. \qquad (39)$$

На рис. 4 она нанесена тонкой линией.

Видно, что максимальный скачок внутренней энергии осуществляется наиболее сильной трансальвеновской ударной волной, причем его величина быстро растет с увеличением угла θ_1. Эффективность нагрева плазмы другими типами разрывов зависит от конкретных условий. Например, нагрев медленными ударными волнами может быть как ниже нагрева быстрыми ударными волнами при меньших углах θ_1, так и выше при больших θ_1. В любом случае величина нагрева зависит от силы ударной волны. Чем больше изменение плотности магнитной энергии на разрыве, тем до более высоких температур нагреется плазма.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами рассмотрены граничные условия для уравнений идеальной МГД на поверхности разрывов различных типов и установлен конкретный вид переходных решений для возможных пар разрывных течений. На их основе построена обобщенная схема разрешенных переходов, которая содержит в себе не только эволюционные, но и неэволюционные типы разрывов: ударную волну включения, альвеновскую и трансальвеновскую ударные волны. При интерпретации результатов численного интегрирования уравнений МГД это позволяет видеть области, требующие более аккуратного расчета и дополнительного исследования. В частности, в задаче о магнитном пересоединении в токовых слоях такими областями являются разрывные течения, присоединенные к торцам токового слоя, к обратным токам [30]. Получено уравнение, описывающее изменение внутренней энергии плазмы при переходе через разрыв. Установлена его зависимость от типа разрыва. Нагрев тем сильнее, чем больше скачки плотности плазмы и плотности магнитной энергии на разрыве. Образование неэволюционных трансальвеновских ударных волн также способствует нагреву плазмы. В явлениях, обусловленных процессом магнитного пересоединения, например в солнечных вспышках, это, по-видимому, может объяснить наблюдаемое распределение самых высоких температур плазмы в короне [13, 30].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №11-02-00843-а).

1. G.W. Sutton and A. Sherman, *Engineering Magnetohydrodynamics*, McGraw-Hill Book Co., New York, San Francisco, Toronto (1965).
2. С.Ю. Лукьянов, *Горячая плазма и управляемый ядерный синтез*, Наука, Москва (1975).
3. А.И. Морозов, *Введение в плазмодинамику*, Физматлит, Москва (2006).
4. D. Biskamp, *Nonlinear Magnetohydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (1997).
5. Имшенник В.С., Боброва Н.А., *Динамика столкновительной плазмы*, Энергоатомиздат, Москва (1997).
6. J. Büchner, C.T. Dum, and M. Scholer (Eds.), *Space Plasma Simulation*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (2003).
7. С.И. Сыроватский, Астрон. журн. **39**, 987 (1962).
8. H.E. Petschek, in AAS-NASA Symposium on the Physics of Solar Flares, ed. by W.N. Hess, NASA Sci. and Tech. Info. Division, Washington (1964), vol. SP-50, p. 425.
9. К.В. Брушлинский, А.М. Заборов, С.И. Сыроватский, Физика плазмы **6**, 297 (1980).
10. E.W.Jr. Hones (Ed.), *Magnetic Reconnection in Space and Laboratory Plasmas*, American Geophys. Union, Washington (1984).
11. M. Hoshino, R.L. Stenzel, and K. Shibata (Eds.) *Magnetic Reconnection in Space and Laboratory Plasmas*, Terra Scientific Publishing Co., Tokyo (2001).
12. J.A. Orta, M.A. Huerta, and G.C. Boynton, Astrophys. J. **596**, 646 (2003).
13. L. Sui and G.D. Holman, Astrophys. J. **596**, L251 (2003).

14. T. Shimizu and M. Ugai, Phys. Plasmas **10**, 921 (2003).

15. M. Ugai, K. Kondoh, and T. Shimizu, Phys. Plasmas **12**, 042903 (2005).

16. M. Ugai, Phys. Plasmas **15**, 032902 (2008).

17. S. Zenitani and T. Miyoshi, Phys. Plasmas **18**, 022105 (2011).

18. С.И. Безродных, В.И. Власов, Б.В. Сомов, Письма в Астрон. журн. **37**, 133 (2011).

19. С.И. Сыроватский, УФН **62**, 247 (1957).

20. J.E. Anderson, *Magnetohydrodynamic Shock Waves*, M.I.T. Press, Massachusetts (1963).

21. С.И. Сыроватский, Тр. ФИАН СССР **8**, 13 (1956).

22. Р.В. Половин, УФН **72**, 33 (1960).

23. B.V. Somov, *Fundamentals of Cosmic Electrodynamics*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht (1994).

24. К. Лонгмайр, *Физика плазмы*, Атомиздат, Москва (1966).

25. D.A. Tideman and N.A. Krall, *Shock Waves in Collisionless Plasma*, Wiley-Interscience, New York, London, Sydney (1971).

26. Е.П. Сиротина, С.И. Сыроватский, ЖЭТФ **39**, 746 (1960).

27. Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер, *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*, Наука, Москва (1966).

28. Л.С. Леденцов, Б.В. Сомов, Письма в Астрон. журн. **37**, 151 (2011).

29. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).

30. B.V. Somov, *Plasma Astrophysics, Part II: Reconnection and Flares, Second Edition*, Springer SBM, New York (2013).

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис.1. Зависимость угла θ_2 наклона магнитного поля за плоскостью разрыва от квадрата потока массы вещества m^2 при различных значениях угла θ_1: 5° – сплошная линия, 25° – штриховая, 45° – пунктирная.

Рис.2. Схематическое поведение зависимости $\theta_2\,(m^2)$ при $\theta_1 = 0$ (а), $B_x = 0$ (б), $\{\rho\} = 0$ (в).

Рис.3. Схема непрерывных переходов между МГД разрывами. Пунктирной линией обведен набор разрывов, соответствующий блоку наклонных ударных волн в схеме Сыроватского [21]. Внутри контура заливкой выделены "медленная" (слева) и "быстрая" (справа) составляющие схемы, предложенной в [23].

Рис.4. Зависимости скачка внутренней энергии ϵ от потока массы при различных значениях угла θ_1: 5° – сплошная линия, 25° – штриховая, 45° – пунктирная.

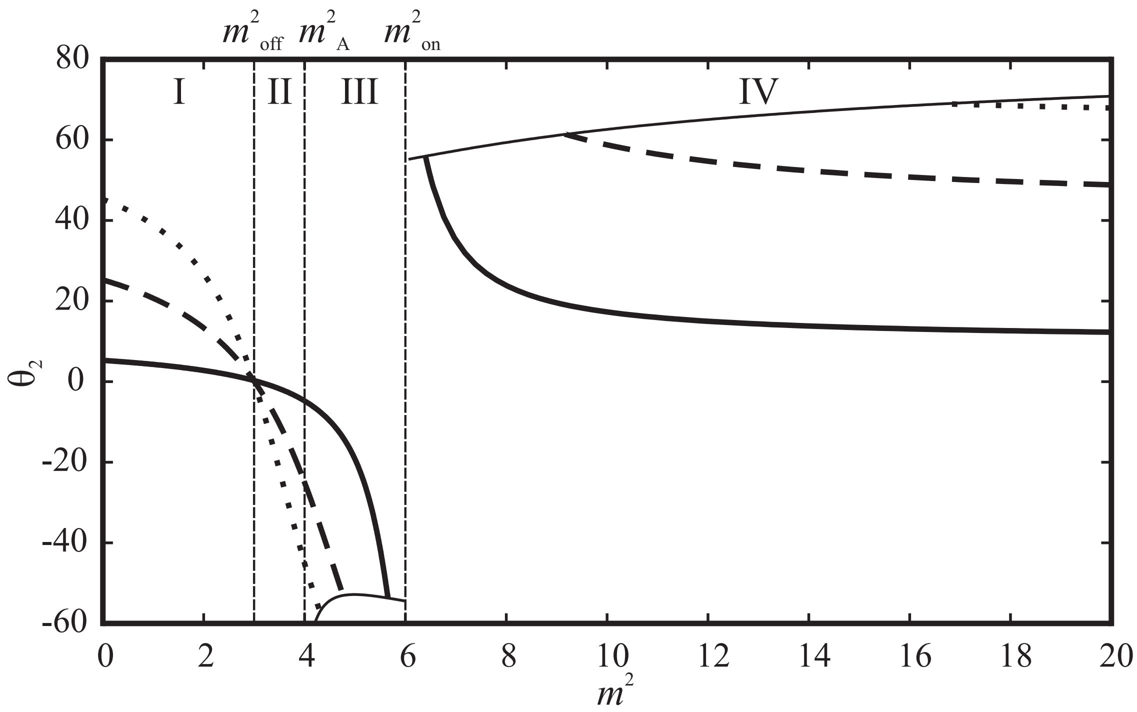

Рис. 1. Леденцов, Сомов.

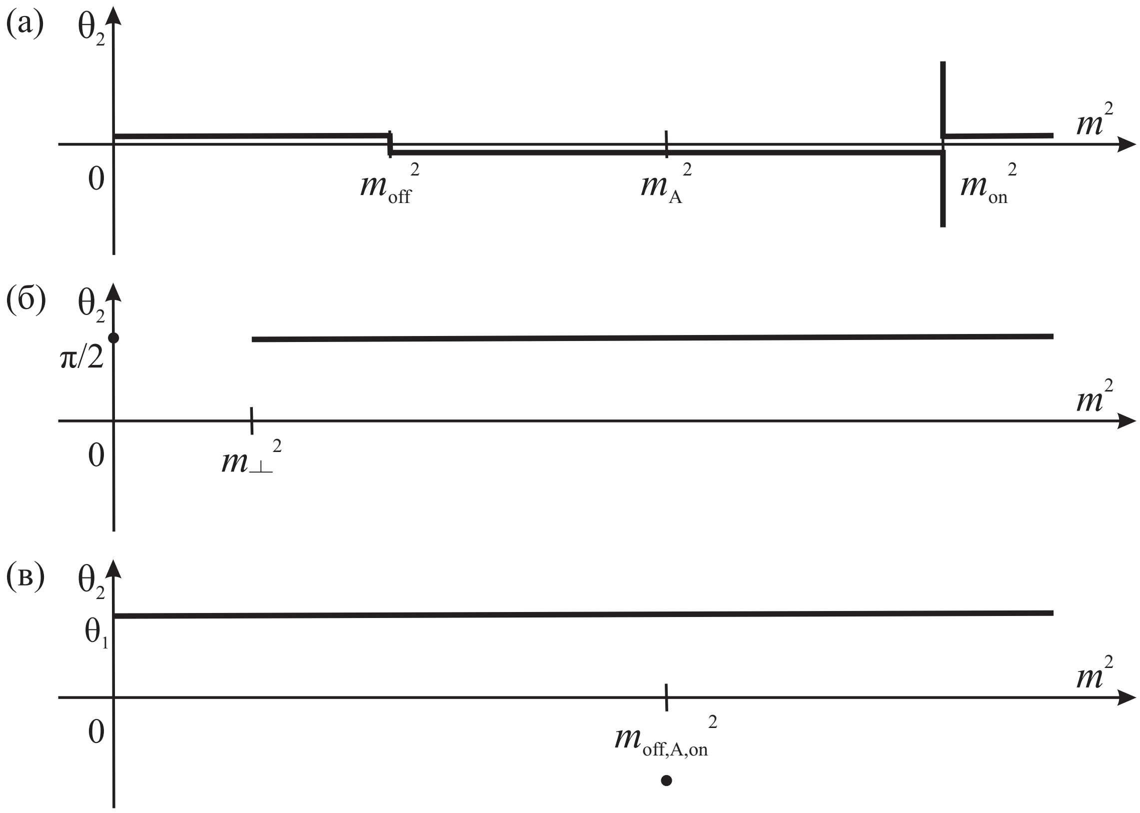

Рис. 2. Леденцов, Сомов.

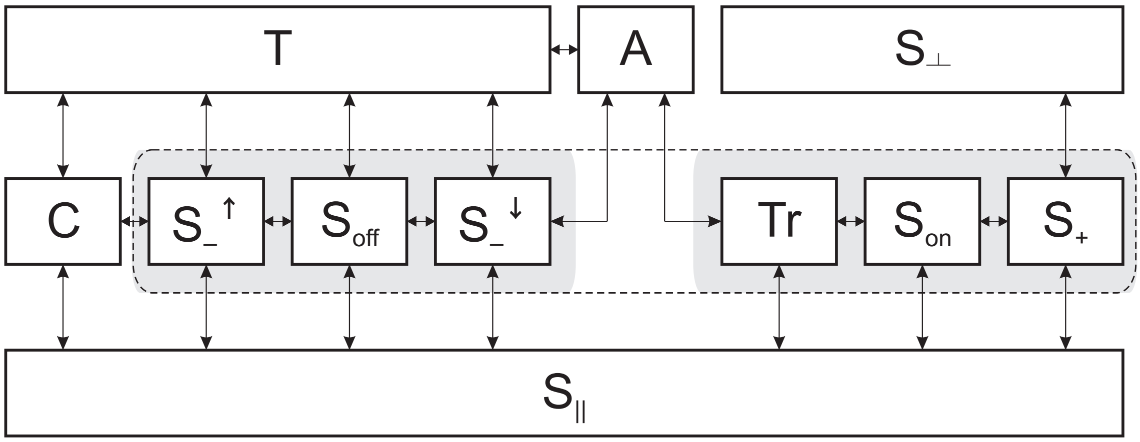

Рис. 3. Леденцов, Сомов.

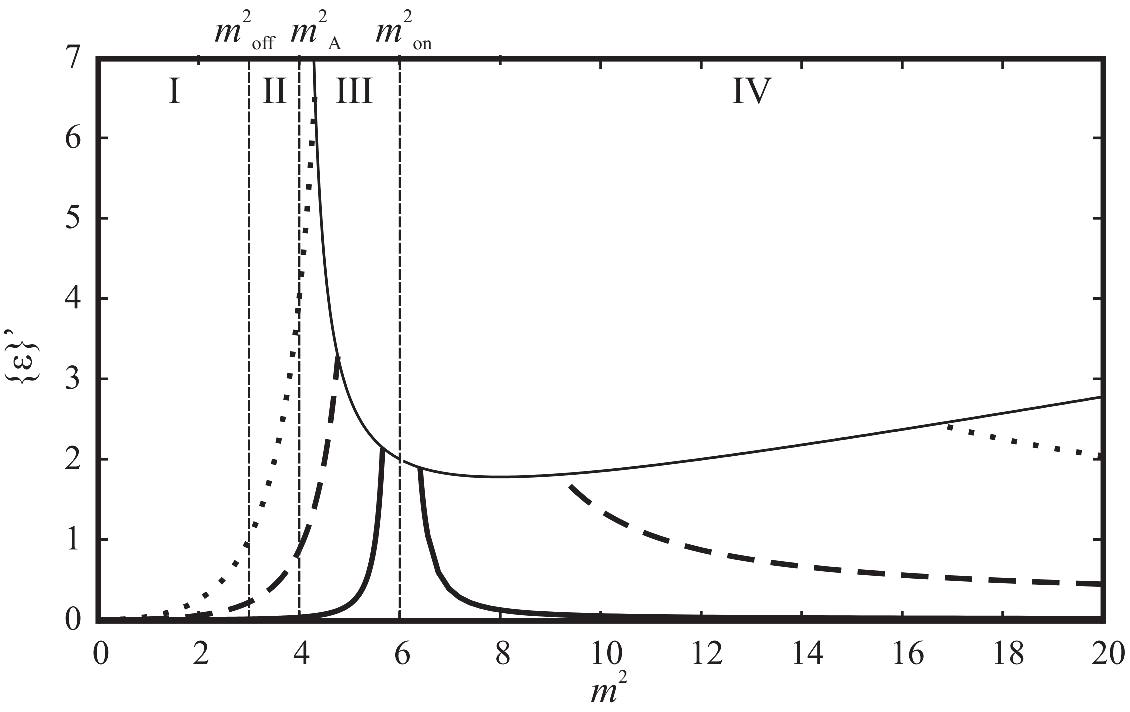

Рис. 4. Леденцов, Сомов.

АВТОРЕФЕРАТ СТАТЬИ

НЕПРЕРЫВНЫЕ ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ РАЗРЫВНЫМИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИМИ ТЕЧЕНИЯМИ ПЛАЗМЫ И ЕЕ НАГРЕВ

Л.С. Леденцова и Б.В. Сомова

Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119991, Москва, Университетский проспект, 13, Россия

CONTINUOUS TRANSITIONS BETWEEN DISCONTINUOUS FLOWS OF PLASMA IN MAGNETIC FIELD AND ITS HEATING

by L.S. Ledentsov and B.V. Somov

P.K. Sternberg Astronomical Institute, M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Universitetskii prospekt, 13, Russia

В связи с проблемами, возникающими при интерпретации результатов численного моделирования процесса магнитного пересоединения в плазме, исследована возможность смены типа разрывного течения при постепенном (непрерывном) изменении условий. Законы сохранения на поверхности разрыва в магнитной гидродинамике (МГД) допускают такие переходы, но при этом должны существовать так называемые переходные решения для граничных условий, удовлетворяющие одновременно двум типам разрывов. Тип разрыва определяется по внешним признакам таким, как наличие или отсутствие

перетекания плазмы, соотношение между компонентами магнитного поля. Установлено, что изменение конфигурации магнитного поля при пересечении поверхности разрыва имеет простую зависимость от величины потока массы через разрыв m:

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{m^2/m_{\text{off}}^2 - 1}{m^2/m_{\text{on}}^2 - 1}\operatorname{tg}\theta_1\,,$$

где θ_1 и θ_2 - углы наклона поля к поверхности разрыва до и после ее пересечения, а m_{on} и m_{off} - потоки массы через ударные волны включения и выключения. С использованием этой зависимости найден конкретный вид переходных решений решений, на основе которых построена обобщенная схема разрешенных переходов в МГД.

Получено выражение для скачка внутренней энергии на разрыве $\{\,\epsilon\,\}$ (разность значении физической величины за разрывом и перед обозначена фигурными скобками):

$$\{\,\epsilon\,\} = -\{r\}\left(\tilde{p} + \frac{\{B_y\}^2 + \{B_z\}^2}{16\pi}\right).$$

Здесь r - величина, обратная плотности, B_y и B_z - компоненты магнитного поля, тангенциальные к поверхности разрыва, тильдой помечено арифметическое среднее между значениями параметра до и после разрыва. Рассмотрена зависимость эффективности нагрева плазмы от типа разрывного течения.