ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2014, том 50, № 8, с. 1128–1132

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977

К ОБОБЩЕНИЮ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА

© 2014 г. А. В. Краев, А. И. Роговский, В. В. Фомичев

Дается обобщение понятия относительного порядка для динамической системы с управлением (в том числе, дискретной). Показано, что новое понятие главного неполного относительного порядка определено однозначно для широкого класса (в частности, для управляемых) "квадратных" динамических систем (т.е. систем, у которых количество входов и выходов совпадает). При этом если r является вектором относительного порядка системы в классическом смысле, то он же является им и в обобщенном. Указан конструктивный алгоритм вычисления главного неполного относительного порядка.

DOI: 10.1134/S037406411408010X

1. Введение. Постановка задачи. Определение относительного порядка играет важную роль в теории управления, поскольку является условием приведения системы к удобным каноническим представлениям (см. [1, 2]). В данной работе рассматриваются некоторые вопросы корректного определения относительного порядка (ОП) и приведения динамической системы к виду с ним.

Рассмотрим линейную дискретную стационарную динамическую систему

$$x^{t+1} = Ax^t + B\xi^t, \quad y^t = Cx^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^l$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$.

Так как система (1) однозначно определяется тройкой матриц A, B и C, то далее будем говорить о системе $\{A, B, C\}$.

Замечание 1. Мы рассматриваем случай так называемых "квадратных" систем, т.е. систем, у которых количество входов равно количеству выходов ($m = l$). Предполагается также, что $RgB = RgC = l < n$.

Замечание 2. Хотя все рассуждения проводятся для дискретных систем, полученные результаты остаются в силе и для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

При решении различных задач теории управления обычно используют следующее определение ОП.

Определение 1 (см. [3, с. 220]). Вектор $r = (r_1, r_2, \ldots, r_l)$ называется вектором ОП для системы (1), если

1) $C_iB = 0$, $C_iAB = 0$, $\ldots$, $C_iA^{r_i-2}B = 0$, $C_iA^{r_i-1}B \neq 0$,

2) $\det H(r_1, \ldots, r_l) = \det \begin{pmatrix} C_1A^{r_1-1}B \\ \cdots \\ C_lA^{r_l-1}B \end{pmatrix} \neq 0$,

где C_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, – строки матрицы C.

В монографии [4, с. 72–82] показано, что условия 1) и 2) могут быть несовместны. Рассмотрим вопрос о корректном определении ОП, используя условие 1).

Определение 2. Если для вектора r выполнено только первое из требований определения 1, то будем называть его вектором неполного относительного порядка (НОП).

Определение 1 инвариантно по отношению к невырожденной замене фазовых переменных, но не является таковым по отношению к неособенной замене выходов. Некоторые системы таким преобразованием могут быть приведены к виду с ОП (например, для линейной стационарной MIMO-системы третьего порядка это всегда можно сделать, как показано в работе [5]). Поскольку существование у системы вектора ОП является условием применимости известных алгоритмов управления, указанное свойство позволяет для некоторых систем, не имеющих ОП, решать задачи управления известными методами. Таким образом, при рассмотрении системы, не имеющей ОП, целесообразной становится следующая задача: найти преобразование выходов, приводящее систему к виду с ОП, либо убедиться в отсутствии такого преобразования. Решению этой задачи и посвящена данная работа.

2. Определение главного неполного относительного порядка. Упорядочим компоненты вектора НОП по возрастанию (это всегда можно сделать, перенумеровав строки матрицы C). Пусть среди компонент этого вектора k различных. Тогда

$$r = (r_1^{(1)}, r_2^{(1)}, \ldots, r_{n_1}^{(1)}, \ldots, r_1^{(s)}, r_2^{(s)}, \ldots, r_{n_s}^{(s)}, \ldots, r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \ldots, r_{n_k}^{(k)}),$$

где $r_i^{(p)} = r_j^{(p)}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n_p\}$; $r_i^{(p)} < r_j^{(q)}$ при $p < q$, $i \in \{1, 2, \ldots, n_p\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n_q\}$ и $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = l$, т.е. вектор r разбивается на "секции", состоящие из одинаковых элементов. Таким образом, для элементов вектора r вводятся два вида нумерации: обычная последовательная (одномерная), а также двумерная, в которой каждый элемент определяется номером секции (верхний индекс) и "местом в секции" (нижний индекс).

Далее всюду считается, что компоненты вектора НОП упорядочены по возрастанию.

Для удобства дальнейшего изложения введем следующие обозначения: $r^{(p)} = r_i^{(p)}$, где i выбирается произвольно из множества $\{1, 2, \ldots, n_p\}$ (т.е. $r^{(p)}$ – общее значение элементов секции p); $N(p, m) = \sum_{j=0}^{p-1} n_j + m$, $p \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $m \in \{1, 2, \ldots, n_p\}$, $n_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$ – отображение, которое по номеру секции p и номеру элемента m в ней возвращает индекс этого элемента при одномерной нумерации (т.е. $r_m^{(p)} \stackrel{\text{def}}{=} r_{N(p,m)}$);

$$P(s) = \begin{cases} k, & \text{если} \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1} < s, \\ j, & \text{если} \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_{j-1} < s \le n_1 + n_2 + \ldots + n_j, \\ 1, & \text{если} \quad s \le n_1, \end{cases}$$

где $s \in \{1, 2, \ldots, l\}$, – отображение, которое по одномерному индексу элемента r_s возвращает номер секции, содержащей этот элемент при двумерной нумерации;

$$M(s) = s - (n_1 + n_2 + \ldots + n_{P(s)-1}),$$

где $s \in \{1, 2, \ldots, l\}$; $n_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$ – отображение, которое по одномерному индексу элемента возвращает его номер в секции, содержащей этот элемент при двумерной нумерации (т.е. $r_s \stackrel{\text{def}}{=} r_{M(s)}^{(P(s))}$); неравенство $r \le g$, где r и g – векторы одинаковой размерности l, означает, что $r_i \le g_i$ для любых i, а неравенство $r < g$, где r и g – векторы одинаковой размерности l, означает, что $r \le g$ и существует i, для которого $r_i < g_i$.

Замечание 3. Функция N позволяет применять двумерную нумерацию, порожденную вектором r, к другим объектам, например, к строкам матриц C и H, т.е. $C_m^{(p)} = C_s$, $H_m^{(p)} = H_s$, где $s = N(p, m)$.

В условии 2) определения 1 речь, фактически, идет о линейной независимости строк $H_m^{(p)}$ при $p = \overline{1, k}$, $m = \overline{1, n_p}$. Ослабим это требование и рассмотрим следующее определение.

Определение 3. Вектор r назовем главным НОП (ГНОП) системы (1), если r – вектор НОП и для всех $p \in \{1, 2, \ldots, k\}$ строки $\{H_j^{(p)}\}_{j=1}^{n_p}$ линейно независимы. Другими словами, r является вектором ГНОП, если строки $H_m^{(p)}$ линейно независимы внутри каждой секции, при этом линейной независимости всего набора строк не требуется.

Определение 4. Систему (1) назовем слабо приводимой, если для любой матрицы $T \in \mathbb{R}^{l \times l}$ $(\det T \ne 0)$ у системы $\{A, B, T \cdot C\}$ существует вектор НОП.

Замечание 4. Класс слабо приводимых систем не пуст. Например, любая управляемая система является слабо приводимой.

Покажем, что вектор ГНОП r определяется однозначно для заданной слабо приводимой системы (1). Для этого докажем следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть для системы (1) r – вектор ГНОП и в этой системе сделана замена выходов с матрицей T $(\det T \ne 0)$ такая, что для некоторой строки $\tilde{C}_i$ матрицы $\tilde{C}$ преобразованной системы $\{A, B, \tilde{C} = T \cdot C\}$ справедливы равенства $\tilde{C}_i A^{r^{(1)}-1} B = 0$, $\tilde{C}_i A^{r^{(2)}-1} B = 0$, $\ldots$, $\tilde{C}_i A^{r^{(p)}-1} B = 0$ при некотором p. Тогда для элементов матрицы T имеют место равенства $t_{ij} = 0$, $j = \overline{1, n_1 + n_2 + \ldots + n_p}$.*

Доказательство. Рассмотрим строку

$$\tilde{C}_i = \sum_{j=1}^{l} t_{ij} C_j = \sum_{j=N(1,1)}^{N(1,n_1)} t_{ij} C_j + \sum_{j=N(2,1)}^{N(2,n_2)} t_{ij} C_j + \ldots + \sum_{j=N(k,1)}^{N(k,n_k)} t_{ij} C_j. \tag{2}$$

Так как $\tilde{C}_i A^{r^{(1)}-1} B = 0$ по условию, то

$$\tilde{C}_i A^{r^{(1)}-1} B = \sum_{j=N(1,1)}^{N(1,n_1)} t_{ij} C_j A^{r^{(1)}-1} B + \ldots + \sum\nolimits_{j=N(k,1)}^{N(k,n_k)} t_{ij} C_j A^{r^{(1)}-1} B \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{j=N(1,1)}^{N(1,n_1)} t_{ij} C_j A^{r^{(1)}-1} B = \sum_{j=1}^{n_1} t_{ij} H_j^{(1)} = 0.$$

Равенство $(*)$ справедливо в силу того, что $C_j A^{r^{(1)}-1} B = 0$ при всех $j > n_1$ по определению секций вектора r. Строки $\{H_j^{(1)}\}_{j=1}^{n_1}$ из первой секции, следовательно, они линейно независимы, так как система обладает ГНОП (по условию), поэтому $t_{ij} = 0$, $j = \overline{1, n_1}$. Значит, первая группа слагаемых в разложении (2) отсутствует.

Далее имеем

$$\tilde{C}_i A^{r^{(2)}-1} B = \sum_{j=N(2,1)}^{N(2,n_2)} t_{ij} C_j A^{r^{(2)}-1} B + \ldots + \sum_{j=N(k,1)}^{N(k,n_k)} t_{ij} C_j A^{r^{(2)}-1} B \overset{(**)}{=}$$

$$\overset{(**)}{=} \sum_{j=N(2,1)}^{N(2,n_2)} t_{ij} C_j A^{r^{(2)}-1} B = \sum_{j=1}^{n_2} t_{ij} H_j^{(2)} = 0,$$

причем равенство $(**)$ справедливо, так как $C_j A^{r^{(2)}-1} B = 0$ для всех $j > n_1 + n_2$ по определению секций. Строки $\{H_j^{(2)}\}_{j=1}^{n_2}$ из второй секции, следовательно, они линейно независимы, поэтому $t_{ij} = 0$, $j = \overline{1, n_1 + n_2}$, т.е. второй группы слагаемых в (2) также нет.

Продолжая эти рассуждения, на p-м шаге получаем, что $t_{ij} = 0$, $j = \overline{1, n_1 + n_2 + \ldots + n_p}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть система $\{A, B, C\}$ обладает вектором ГНОП r. Тогда при любой матрице $T = \{t_{ij}\}$, $T \in \mathbb{R}^{l \times l}$, $\det T \neq 0$, система $\{A, B, \tilde{C} = T \cdot C\}$ имеет упорядоченный вектор НОП $\tilde{r}$, причем $\tilde{r} \leq r$.*

Доказательство. Пусть утверждение неверно. Предположим сначала, что вектор НОП для системы $\{A, B, \tilde{C}\}$ не существует, т.е. существует i такое, что $\tilde{C}_i A^{p-1} B = 0$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда $\tilde{C}_i A^{r^{(m)}-1} B = 0$, $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Так как система обладает ГНОП, то, согласно лемме 1, $t_{ij} = 0$, $j = \overline{1, n_1 + n_2 + \ldots + n_k} = l$, следовательно, i-я строка матрицы T нулевая, что противоречит условию невырожденности этой матрицы.

Пусть теперь вектор НОП $\tilde{r}$ существует, но не выполняется неравенство $\tilde{r} \leq r$, следовательно, существует i, для которого $\tilde{r}_i > r_i$. Рассмотрим случай $P(i) = k$, т.е. секция, к которой относится номер i, является последней. Тогда $r_i = r^{(k)}$ и $\tilde{C}_i A^{r^{(m)}-1} B = 0$, $m \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$. При этом $\tilde{r}_i > r_i$, следовательно, $\tilde{C}_i A^{r^{(m)}-1} B = 0$, $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$, по определению НОП. Тогда, как и в рассмотренном выше случае, согласно лемме 1, $t_{ij} = 0$, $j = \overline{1, n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$, т.е. матрица T вырождена, что неверно.

Пусть теперь $P(i) = p$, $1 \leq p < k$, т.е. секция p, к которой относится номер i, не является последней. Обозначим $M(i) = q$, $1 \leq q \leq n_p$ (номеру i соответствует секция p и номер q в ней). Так как $\tilde{r}_i > r_i = r^{(p)}$, то $\tilde{C}_i A^{r^{(1)}-1} B = 0$, $\tilde{C}_i A^{r^{(2)}-1} B = 0$, $\ldots$, $\tilde{C}_i A^{r^{(p)}-1} B = 0$ и, следовательно, $t_{ij} = 0$, $j = \overline{1, n_1 + n_2 + \ldots + n_p}$, в силу леммы 1. Значит, только последние $l - (n_1 + \ldots + n_p) = n_{p+1} + n_{p+2} + \ldots + n_k$ элементов i-й строки могут быть отличны от нуля.

Поскольку компоненты вектора $\tilde{r}$ упорядочены по возрастанию, то для строк с номерами $i+1, i+2, \ldots, l$ рассуждения, приведенные выше, также справедливы. Это означает, что в последних $n_{p+1}+n_{p+2}+\ldots+n_k+q$ строках отличными от нуля могут быть только последние $n_{p+1}+n_{p+2}+\ldots+n_k$ элементов. Тогда матрица T имеет вид

$$\begin{pmatrix} & T_1 & & & & \\ 0 & \ldots & 0 & t_{(s+q)(s+n_p+1)} & \ldots & t_{(s+q)l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & t_{l(s+n_p+1)} & \ldots & t_{ll} \end{pmatrix},$$

где $s=n_1+n_2+\ldots+n_{p-1}$, т.е. последние $n_{p+1}+n_{p+2}+\ldots+n_k+q$ строк линейно зависимы, следовательно, $\det T=0$, что противоречит исходному предположению. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть r – вектор НОП системы $\{A,B,C\}$ и в системе сделана замена выходов такая, что для вектора НОП $\tilde{r}$ преобразованной системы $\{A,B,\tilde{C}=T\cdot C\}$ $(\det T\neq 0)$ справедливо соотношение $\tilde{r}<r$. Тогда для второй системы не выполнено определение ОП Исидори.*

Доказательство. Пусть утверждение неверно, т.е. $\tilde{r}$ – вектор ОП системы $\{A,B,\tilde{C}\}$. Тогда $\tilde{r}$ также является вектором ГНОП этой системы. При этом она может быть приведена (обратным преобразованием) к виду с вектором НОП $r>\tilde{r}$, что противоречит лемме 2. Лемма доказана.

Лемма 4. *Любая слабо приводимая система $\{A,B,C\}$ невырожденной заменой выходов может быть приведена к виду с ГНОП.*

Доказательство. Приведем алгоритм построения такого преобразования.

1. Рассмотрим строки $\{H_m^{(1)}\}_{m=1}^{n_1}$ из секции 1. Если они линейно независимы, перейдем к шагу 2. В противном случае существует номер $q\in\{1,2,\ldots,n_1\}$ такой, что

$$H_q^{(1)}=\alpha_1 H_1^{(1)}+\ldots+\alpha_{q-1}H_{q-1}^{(1)}+\alpha_{q+1}H_{q+1}^{(1)}+\ldots+\alpha_{n_1}H_{n_1}^{(1)}.$$

Положим $\tilde{C}_q^{(1)}=C_q^{(1)}-\sum_{i=1,\ i\neq q}^{n_1}\alpha_i C_i^{(1)}$, $\tilde{C}_s=C_s$, $s\neq N(1,q)$ (такое преобразование является невырожденным), а затем упорядочим получившийся вектор НОП. При этом изменятся порожденные им секции: в первой количество элементов уменьшится на единицу. Далее, если возможно, повторим действие шага 1.

Пусть по завершении первого шага система имеет вид $\{A,B,\bar{C}=T\cdot C\}$ и ей соответствует вектор НОП $\bar{r}$.

2. Рассмотрим строки $\{\bar{H}_m^{(2)}\}_{m=1}^{\bar{n}_2}$ из секции 2 (в данном случае имеются в виду секции вектора $\bar{r}$). Аналогично шагу 1, если существует $q\in\{1,2,\ldots,\bar{n}_2\}$ такой, что

$$\bar{H}_q^{(2)}=\beta_1\bar{H}_1^{(2)}+\ldots+\beta_{q-1}\bar{H}_{q-1}^{(2)}+\beta_{q+1}\bar{H}_{q+1}^{(2)}+\ldots+\beta_{\bar{n}_2}\bar{H}_{\bar{n}_2}^{(2)},$$

то, положив $\hat{C}_q^{(2)}=\bar{C}_q^{(2)}-\sum_{i=1,\ i\neq q}^{\bar{n}_2}\beta_i\bar{C}_i^{(2)}$, $\hat{C}_s=\bar{C}_s$, $s\neq N(2,q)$, добьемся уменьшения количества строк в секции 2 на единицу. При этом секция 1 не изменится, так как уменьшение компонент вектора НОП не происходит. Повторяя эту процедуру, можно добиться исключения всех линейно зависимых строк из секции 2.

Последующие шаги проводятся аналогично. Так как по условию вектор НОП существует при любых неособенных преобразованиях выходов, то процесс не может идти бесконечно (иначе получим противоречие с теоремой Гамильтона–Кэли), и за конечное число шагов система примет требуемый вид. Лемма доказана.

Следствие. *Для любой слабо приводимой системы вектор ГНОП определен однозначно.*

Доказательство. Пусть существуют два вектора ГНОП r_1 и r_2, которые достижимы для системы невырожденной заменой выходов. Так как $r_1\neq r_2$, то существует номер i такой, что $r_{1,i}>r_{2,i}$, т.е. компоненты вектора ГНОП r_2 могут быть увеличены, что противоречит лемме 2. Следствие доказано.

С помощью вектора ГНОП можно определить, приводима ли система неособенным линейным преобразованием выходов к виду с вектором ОП. Это вытекает из следующего утверждения.

Теорема 1. *Слабо приводимая система* $\{A, B, C\}$ *невырожденным преобразованием выходов не приводится к виду с ОП по Исидори тогда и только тогда, когда ее вектор ГНОП* r *не является вектором ОП Исидори.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Приведем систему к виду с вектором ГНОП $\tilde{r}$, положив $\tilde{C} = T_1 \cdot C$, $\det T_1 \neq 0$ (возможно, по лемме 4). Предположим, что вектор $\tilde{r}$ не является вектором ОП, но система может быть приведена к такому виду, т.е. существует неособенная матрица T_2, для которой система $\{A, B, \bar{C} = T_2 \cdot C\}$ имеет вектор ОП $\bar{r}$, при этом $\bar{C} = T_2 T_1^{-1} \tilde{C} = T \cdot \tilde{C}$. В соответствии с леммами 2 и 3 имеем $\tilde{r} = \bar{r}$. Тогда, согласно лемме 1,

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1k} \\ 0 & T_{22} & \dots & T_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & T_{kk} \end{pmatrix},$$

где $T_{ij} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}_i \times \tilde{n}_j}$ (здесь $\tilde{n}_i$ соответствуют секциям вектора $\tilde{r}$).

Пусть $i = N(p, m)$, тогда

$$\bar{C}_m^{(p)} A^{\tilde{r}^{(p)}-1} B =$$

$$= \sum_{j=N(p,1)}^{N(p,\tilde{n}_p)} t_{ij} \tilde{C}_m^{(p)} A^{\tilde{r}^{(p)}-1} B + \sum_{j=N(p+1,1)}^{N(p+1,\tilde{n}_{p+1})} t_{ij} \tilde{C}_m^{(p+1)} A^{\tilde{r}^{(p)}-1} B + \ldots + \sum_{j=N(k,1)}^{N(k,\tilde{n}_k)} t_{ij} \tilde{C}_m^{(k)} A^{\tilde{r}^{(p)}-1} =$$

$$= \sum_{j=N(p,1)}^{N(p,\tilde{n}_p)} t_{ij} \tilde{C}_m^{(p)} A^{\tilde{r}^{(p)}-1} B$$

(так как $\tilde{C}_m^{(s)} A^{\tilde{r}^{(p)}-1} B = 0$, $s > p$). Последнее равенство означает, что $\bar{H} = T' \cdot \tilde{H}$, где $T' = \operatorname{diag}(T_{11}, T_{22}, \ldots, T_{kk})$, поэтому если матрица $\tilde{H}$ вырожденная, то и матрица $\bar{H}$ вырожденная. Полученное противоречие доказывает теорему.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12-07-00456 и 12-01-00571) и программы Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4179.2014.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коровин С.К., Ильин А.В., Фомичев В.В.* Нулевая динамика линейных векторных стационарных систем // Докл. РАН. Теория управления. 2007. Т. 414. № 5. С. 598–604.
2. *Краев А.В.* Об аналоге относительного порядка для линейных динамических MIMO-систем // Докл. РАН. Теория управления. 2014. Т. 454. № 2. С. 152–157.
3. *Isidori A.* Nonlinear control systems. V. 2. London, 1999.
4. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Методы робастного обращения динамических систем. М., 2009.
5. *Краев А.В.* О приведении векторной линейной системы третьего порядка к форме с относительным порядком по Исидори // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 11. С. 1558–1560.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Институт системного анализа РАН, г. Москва,
Институт проблем управления РАН, г. Москва

Поступила в редакцию
02.06.2014 г.