ԳՅՈՒՄՐՈՒ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՄԱՆԿԱՎԱՐԺԱԿԱՆ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ГЮМРИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. М. НАЛБАНДЯНА
GYUMRI STATE PEDAGOGICAL INSTITUTE AFTER M. NALBANDYAN
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ SCIENTIFIC PROCEEDINGS

Պրակ Ա
Выпуск А
Issue A

2013 № 1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 539.3

А. Ж. Фарманян

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ОРТОТРОПНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Բանալի բառեր՝ միկրոպոլյար, առաձգական, օրթոտրոպ, բարակ, թաղանթ, դինամիկա, մաթեմատիկական մոդել:

Ключевые слова: микрополярный, упругий, ортотропный, тонкий, оболочка, динамика, математическая модель.

Keywords: micropolar, elastic, orthotropic, thin, shell, dynamics, mathematical model.

В работе на основе метода гипотез, который имеет асимптотическое обоснование, построена общая математическая модель динамической деформации микрополярных ортотропных упругих тонких оболочек.

Введение. Микрополярная теория упругости в настоящее время трактуется как континуальная модель деформируемого твердого тела с учетом внутренней атомной структуры [1-3].С этой точки зрения особенно актуально построение математических моделей микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек. Обзоры работ в этом направлены осуществлены в работах [4-6]. В работах С.О.Саркисяна [7-10] построены общие модели статики и динамики микрополярных изотропных упругих тонких балок,пластин и оболочек. В работе [11] построена модель статической деформации микрополярных ортотропных упругих тонких оболочек. В данной работе развивается подход работ [7-11] и построена модель динамического деформирования микрополярных ортотропных упругих тонких оболочек.

1.Постановка задачи. Рассмотрим оболочку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое ортотропное микрополярное тело. Будем исходить из основных уравнений пространственной динамической задачи линейной микрополярной теории упругости для ортотропного материала с независимыми полями перемещений и вращений [12, 13].

Уравнения движения

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(H_2\sigma_{11})+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(H_1\sigma_{21})+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}(H_1H_2\sigma_{31})+\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{12}+H_2\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_3}\sigma_{13}-$$
$$-\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\sigma_{22}=H_1H_2\rho\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\sigma_{12}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\sigma_{22}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_1H_2\sigma_{32}\right)+\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\sigma_{21}+H_1\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_3}\sigma_{23}-$$
$$-\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{11}=H_1H_2\rho\frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\sigma_{13}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\sigma_{23}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_1H_2\sigma_{33}\right)-H_2\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_3}\sigma_{11}-H_1\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_3}\sigma_{22}=$$
$$=H_1H_2\rho\frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\mu_{11}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\mu_{21}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_1H_2\mu_{31}\right)+\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\mu_{12}+H_2\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_3}\mu_{13}-$$
$$-\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\mu_{22}+H_1H_2\left(\sigma_{23}-\sigma_{32}\right)=H_1H_2J\frac{\partial^2\omega_1}{\partial t^2}, \qquad (1.1)$$
$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\mu_{12}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\mu_{22}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_1H_2\mu_{32}\right)+\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\mu_{21}+H_1\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_3}\mu_{23}-$$
$$-\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\mu_{11}+H_1H_2\left(\sigma_{31}-\sigma_{13}\right)=H_1H_2J\frac{\partial^2\omega_2}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\mu_{13}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\mu_{23}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_1H_2\mu_{33}\right)-H_2\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_3}\mu_{11}-H_1\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_3}\mu_{22}-$$
$$+H_1H_2\left(\sigma_{12}-\sigma_{21}\right)=H_1H_2J\frac{\partial^2\omega_3}{\partial t^2}.$$

Физические соотношение упругости [14]

$$\gamma_{11}=a_{11}\sigma_{11}+a_{12}\sigma_{22}+a_{13}\sigma_{33},\qquad \gamma_{22}=a_{12}\sigma_{11}+a_{22}\sigma_{22}+a_{23}\sigma_{33},$$
$$\gamma_{33}=a_{13}\sigma_{11}+a_{23}\sigma_{22}+a_{33}\sigma_{33},\qquad \gamma_{23}=a_{44}\sigma_{23}+a_{45}\sigma_{32},\quad \gamma_{32}=a_{45}\sigma_{23}+a_{55}\sigma_{32},$$
$$\gamma_{13}=a_{56}\sigma_{31}+a_{66}\sigma_{13},\qquad \gamma_{31}=\widetilde{a}_{55}\sigma_{31}+a_{56}\sigma_{13},$$
$$\gamma_{12}=a_{77}\sigma_{12}+a_{78}\sigma_{21},\qquad \gamma_{21}=a_{78}\sigma_{12}+a_{88}\sigma_{21}, \qquad (1.2)$$
$$\chi_{11}=b_{11}\mu_{11}+b_{12}\mu_{22}+b_{13}\mu_{33},\qquad \chi_{22}=b_{12}\mu_{11}+b_{22}\mu_{22}+b_{23}\mu_{33},$$
$$\chi_{33}=b_{13}\mu_{11}+b_{23}\mu_{22}+b_{33}\mu_{33},\qquad \chi_{23}=b_{44}\mu_{23}+b_{45}\mu_{32},$$
$$\chi_{32}=b_{45}\mu_{23}+b_{55}\mu_{32},\qquad \chi_{13}=b_{56}\mu_{31}+b_{66}\mu_{13},$$
$$\chi_{31}=\widetilde{b}_{55}\mu_{31}+b_{56}\mu_{13},\qquad \chi_{12}=b_{77}\mu_{12}+b_{78}\mu_{21},\qquad \chi_{21}=b_{78}\mu_{12}+b_{88}\mu_{21}.$$

Геометрические соотношения

$$\gamma_{11}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}V_2+\frac{1}{R_1}V_3,\quad \gamma_{22}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial V_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}V_1+\frac{1}{R_2}V_3,$$

$$\gamma_{33}=\frac{\partial V_3}{\partial \alpha_3},\qquad \gamma_{23}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial V_3}{\partial \alpha_2}-\frac{1}{R_2}V_2-\omega_1,\quad \gamma_{32}=\frac{\partial V_2}{\partial \alpha_3}+\omega_1,$$

$$\gamma_{13}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_3}{\partial \alpha_1}-\frac{1}{R_1}V_1+\omega_2,\qquad \gamma_{31}=\frac{\partial V_1}{\partial \alpha_3}-\omega_2,$$

$$\gamma_{12}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_2}{\partial \alpha_1}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}V_1-\omega_3,\quad \gamma_{21}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial V_1}{\partial \alpha_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}V_2+\omega_3,$$

$$\chi_{11}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}\omega_2+\frac{1}{R_1}\omega_3, \tag{1.3}$$

$$\chi_{22}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}\omega_1+\frac{1}{R_2}\omega_3,\qquad \chi_{33}=\frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_3},\quad \chi_{23}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_2}-\frac{1}{R_2}\omega_2,$$

$$\chi_{32}=\frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_3},\qquad \chi_{13}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_1}-\frac{1}{R_1}\omega_1,\qquad \chi_{31}=\frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_3},$$

$$\chi_{12}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_1}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}\omega_1,\quad \chi_{21}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}\omega_2.$$

Здесь $\hat{\sigma},\hat{\mu}$ -тензоры силовых и моментных напряжений; $\hat{\gamma},\hat{\chi}$ -тензоры деформаций и изгибов-кручений; $\vec{V},\vec{\omega}$ -векторы перемещения и свободного поворота точек оболочки; $\hat{a},\hat{b}$ – тензоры упругих постоянных микрополярного ортотропного материала, ρ – плотность, J – мера инерции вращения указанного материала, $H_1=A_1\left(1+\frac{\alpha_3}{R_1}\right)$, $H_2=A_2\left(1+\frac{\alpha_3}{R_2}\right)$, $H_3=1$ – коэффициенты Ламе криволинейной ортогональной системы координат $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ принятой в теории оболочек. R_i – главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочек.

К основной системе уравнений (1.1)-(1.3) трехмерной микрополярной теории упругости для ортотропного материала будем присоединить граничные условия.

На лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3=\pm h$ будем считать задаными граничные условия первой граничной задачи микрополярной теории упругости:

$$\begin{aligned}&\sigma_{31}\big|_{\alpha_3=\pm h}=\pm q_1^{\pm},\quad \sigma_{32}\big|_{\alpha_3=\pm h}=\pm q_2^{\pm},\quad \sigma_{33}\big|_{\alpha_3=\pm h}=\pm q_3^{\pm},\\&\mu_{31}\big|_{\alpha_3=\pm h}=\pm m_1^{\pm},\quad \mu_{32}\big|_{\alpha_3=\pm h}=\pm m_2^{\pm},\quad \mu_{33}\big|_{\alpha_3=\pm h}=\pm m_3^{\pm}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

На поверхности края оболочки Σ будем рассматривать следующие три основные типы граничных условий:

1)Когда заданы силовые и моментные напряжения, 2) когда точки поверхности Σ закреплены, 3) когда заданы трехмерные смешанные условия типа шарнирного опирания.

Кроме граничных условий к системе уравнений (1.1)-(1.3) присоединим также начальные условия, которые необходимо задавать для компонентов векторов $\vec{V}, \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}, \vec{\omega}, \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}$.

Предполагается, что толщина $(2h)$ оболочки мала по сравнению с характерными радиусами кривизны (R_i) срединной поверхности оболочки.

2.Исходные предположения (гипотезы).

Формулируем те предположения (гипотезы), на основе которых будем построить модель микрополярных ортотропных тонких оболочек [7, 8, 11]:

I. В качестве исходной примем гипотезу прямой линии, т. е. будем считать, что нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к срединной поверхности до деформации, остается после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной срединной поверхности, а поворачивается на некоторый угол, при этом не изменяя своей длины. Вследствии этого имеем линейный закон изменения перемещений по толщине оболочки:

$$V_i = u_i(\alpha_1, \alpha_2, t) + \alpha_3 \psi_i(\alpha_1, \alpha_2, t), \qquad \mathrm{V}_3 = w(\alpha_1, \alpha_2, t), \qquad i = 1,2. \tag{2.1}$$

Будем считать также, что свободные повороты по толщине оболочки изменяются также линейным законом следующего характера:

$$\omega_i = \Omega_i(\alpha_1, \alpha_2, t), \qquad \omega_3 = \Omega_3(\alpha_1, \alpha_2, t) + \alpha_3 \iota(\alpha_1, \alpha_2, t). \tag{2.2}$$

Здесь $u_i, w-$перемещения,Ω_i, Ω_3-свободные повороты точек срединной поверхности оболочки; ψ_i-полные углы поворота первоначально нормального элемента, а ι-представляет собой интенсивность поворота точек трехмерной оболочки вокруг нормали к срединной поверхности;

II. Силовое напряжение σ_{33} в обобщенном законе Гука (1.2) для деформаций γ_{ii} можно пренебрегать относительно силовых напряжений σ_{11}, σ_{22}; таким же образом, в формулах для изгибов-крученной χ_{i3}, моментное напряжение μ_{3i} можно пренебрегать относительно моментного напряжения μ_{i3};

III. Относительно единицы можно пренебрегать величины вида $\frac{\alpha_3}{R_i}$;

IV. При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} примем

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad \mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{33}(\alpha_1, \alpha_2, t). \tag{2.3}$$

После определения указанных величин, окончательные выражения для функций σ_{3i} и μ_{33} определим как сумму значения (2.3) и результата интегрирования соответствующего уравнения равновесия из (1.1). Для последного потребовав условие, что усреденная по толщине оболочки величина была равна нулю.

Отметим, что принятая гипотеза для перемещений (2.1), это по сути дела известная кинематическая гипотеза Тимошенко в классической уточненной теории упругих оболочек [15-17]. С этой точки зрения гипотеза (2.1), (2.2) в целом, как в работах [7-11], назовем обобщенной кинематической гипотезой Тимошеенко в микрополярной теории оболочек.

3. Определение компонентов тензоров деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений.

В соответствии с принятым законом распределения перемещений (2.1) и свободных поворотов (2.2), подставляя их в геометрические формулы (1.3) и сохраняя в выражениях только линейные члены по α_3, находим

$$\begin{gathered}\gamma_{ii} = \Gamma_{ii}(\alpha_1,\alpha_2,t) + \alpha_3 K_{ii}(\alpha_1,\alpha_2,t), \quad \gamma_{33} = 0,\\ \gamma_{ij} = \Gamma_{ij}(\alpha_1,\alpha_2,t) + \alpha_3 K_{ij}(\alpha_1,\alpha_2,t), \ \gamma_{i3} = \Gamma_{i3}(\alpha_1,\alpha_2,t), \ \gamma_{3i} = \Gamma_{3i}(\alpha_1,\alpha_2,t),\end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}\chi_{ii} = k_{ii}(\alpha_1,\alpha_2,t), \quad \chi_{33} = k_{33}(\alpha_1,\alpha_2,t), \quad \chi_{ij} = k_{ij}(\alpha_1,\alpha_2,t),\\ \chi_{3i} = 0, \quad \chi_{i3} = k_{i3}(\alpha_1,\alpha_2,t) + \alpha_3 l_{13}(\alpha_1,\alpha_2,t),\end{gathered} \tag{3.2}$$

где

$$\Gamma_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j + \frac{w}{R_i},$$

$$K_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\psi_j,$$

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i + (-1)^i \Omega_3, \ K_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\psi_i + (-1)^i \iota, \tag{3.4}$$

$$\Gamma_{i3} = -\upsilon_i + (-1)^j \Omega_j, \qquad \Gamma_{3i} = \psi_i + (-1)^i \Omega_j,$$

$$k_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_j + \frac{\Omega_3}{R_i},$$

$$\begin{gathered}k_{33} = \iota, \quad k_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_i, \quad k_{i3} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{R_i}\Omega_i,\\ l_{i3} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \iota}{\partial \alpha_i}, \quad \upsilon_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - \frac{u_i}{R_i}, \quad i,j = 1,2; \quad i \neq j.\end{gathered} \tag{3.5}$$

Здесь Γ_{ii}, Γ_{ij} -компоненты тангенциальной деформации, характеризующие деформацию срединной поверхности; величины $K_{ii}, K_{ij}, k_{ii}, k_{ij}$ -характеризуют изгибную деформацию и скручивание срединной поверхности; Γ_{i3},Γ_{3i}-попереч-ные сдвиги; k_{i3},k_{3i}-изменение кривизны и кручений в нормальных к срединной поверхности плоскостях; l_{i3}-гиперкривизна-или гиперкручение.

На основе обобщенного закона Гука (1.2) (имея ввиду также статические гипотезы II), IV)), для силовых и моментных напряжений получим:

$$\begin{gathered}
\sigma_{ii}=\overset{0}{\sigma}_{ii}(\alpha_1,\alpha_2,t)+\alpha_3\overset{1}{\sigma}_{ii}(\alpha_1,\alpha_2,t),\quad \sigma_{33}=\overset{0}{\sigma}_{33}(\alpha_1,\alpha_2,t)+\alpha_3\overset{1}{\sigma}_{33}(\alpha_1,\alpha_2,t),\\
\sigma_{ij}=\overset{0}{\sigma}_{ij}(\alpha_1,\alpha_2,t)+\alpha_3\overset{1}{\sigma}_{ij}(\alpha_1,\alpha_2,t),\ \sigma_{i3}=\overset{0}{\sigma}_{i3}(\alpha_1,\alpha_2,t),\\
\sigma_{3i}=\overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2,t)+\alpha_3\overset{1}{\sigma}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2,t)+\frac{1}{2}\left(\alpha_3^2-\frac{h^2}{3}\right)\overset{2}{\sigma}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2,t),
\end{gathered}\tag{3.6}$$

$$\begin{gathered}
\mu_{ii}=\overset{0}{\mu}_{ii}(\alpha_1,\alpha_2,t),\\
\mu_{33}=\overset{0}{\mu}_{33}(\alpha_1,\alpha_2,t)+\alpha_3\overset{1}{\mu}_{33}(\alpha_1,\alpha_2,t)+\frac{1}{2}\left(\alpha_3^2-\frac{h^2}{3}\right)\overset{2}{\mu}_{33}(\alpha_1,\alpha_2,t),\\
\mu_{ij}=\overset{0}{\mu}_{ij}(\alpha_1,\alpha_2,t),\ \ \mu_{3i}=\overset{0}{\mu}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2,t)+\alpha_3\overset{1}{\mu}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2,t),\\
\mu_{i3}=\overset{0}{\mu}_{i3}(\alpha_1,\alpha_2,t)+\alpha_3\overset{1}{\mu}_{i3}(\alpha_1,\alpha_2,t),
\end{gathered}\tag{3.7}$$

где

$$\overset{0}{\sigma}_{11}=\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Gamma_{11}-\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Gamma_{22},$$

$$\overset{1}{\sigma}_{11}=\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}K_{11}-\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}K_{22},$$

$$\overset{0}{\sigma}_{22}=\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Gamma_{22}-\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Gamma_{11},$$

$$\overset{1}{\sigma}_{22}=\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}K_{22}-\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}K_{11},$$

$$\overset{0}{\sigma}_{12}=\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\Gamma_{12}-\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\Gamma_{21},$$

$$\overset{1}{\sigma}_{12}=\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}K_{12}-\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}K_{21},$$

$$\overset{0}{\sigma}_{21}=\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\Gamma_{21}-\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\Gamma_{12},$$

$$\overset{1}{\sigma}_{21}=\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}K_{21}-\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}K_{12},$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{0}{\sigma}_{13} = \frac{\tilde{a}_{55}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2}\Gamma_{13} - \frac{a_{56}}{\tilde{a}_{551}a_{66} - a_{56}^2}\Gamma_{31},\\
&\overset{0}{\sigma}_{31} = \frac{a_{66}}{a_{66}\tilde{a}_{55} - a_{56}^2}\Gamma_{31} - \frac{a_{56}}{a_{66}\tilde{a}_{55} - a_{56}^2}\Gamma_{13},\\
&\overset{0}{\sigma}_{23} = \frac{a_{55}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2}\Gamma_{23} - \frac{a_{45}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2}\Gamma_{32},\\
&\overset{0}{\sigma}_{32} = \frac{a_{44}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2}\Gamma_{32} - \frac{a_{45}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2}\Gamma_{23},\\
&\overset{1}{\sigma}_{31} = -\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\overset{0}{\sigma}_{11}\right)}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\overset{0}{\sigma}_{21}\right)}{\partial\alpha_2} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{0}{\sigma}_{12} - \frac{1}{R_1}\overset{0}{\sigma}_{13} +\\
&+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{0}{\sigma}_{22} + \rho\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2},\\
&\overset{2}{\sigma}_{31} = -\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\overset{1}{\sigma}_{11}\right)}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\overset{1}{\sigma}_{21}\right)}{\partial\alpha_2} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{1}{\sigma}_{12} +\\
&+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{1}{\sigma}_{22} + \rho\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2},\\
&\overset{1}{\sigma}_{32} = -\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\overset{0}{\sigma}_{12}\right)}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\overset{0}{\sigma}_{22}\right)}{\partial\alpha_2} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{0}{\sigma}_{21} - \frac{\overset{0}{\sigma}_{23}}{R_2} +\\
&+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{0}{\sigma}_{11} + \rho\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2},\\
&\overset{2}{\sigma}_{32} = -\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\overset{1}{\sigma}_{12}\right)}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\overset{1}{\sigma}_{22}\right)}{\partial\alpha_2} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{1}{\sigma}_{21} +\\
&+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{1}{\sigma}_{11} + \rho\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2},\\
&\overset{1}{\sigma}_{33} = -\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\overset{0}{\sigma}_{13}\right)}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\overset{0}{\sigma}_{23}\right)}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{R_1}\overset{0}{\sigma}_{11} + \frac{1}{R_2}\overset{0}{\sigma}_{22} + \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{q_3^+ + q_3^-}{2h},\\
&\overset{0}{\sigma}_{33} = \frac{q_3^+ - q_3^-}{2}, \qquad \overset{0}{\mu}_{3i} = \frac{m_i^+ - m_i^-}{2},
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

$$\overset{0}{\mu}_{11}=\frac{b_{22}b_{33}-b_{23}b_{32}}{\Delta}k_{11}+\frac{b_{13}b_{32}-b_{12}b_{33}}{\Delta}k_{22}+\frac{b_{12}b_{23}-b_{13}b_{22}}{\Delta}k_{33},$$

$$\overset{0}{\mu}_{22}=\frac{b_{23}b_{31}-b_{21}b_{32}}{\Delta}k_{11}+\frac{b_{11}b_{33}-b_{13}b_{31}}{\Delta}k_{22}+\frac{b_{13}b_{21}-b_{23}b_{11}}{\Delta}k_{33},$$

$$\overset{0}{\mu}_{33}=\frac{b_{21}b_{32}-b_{31}b_{22}}{\Delta}k_{11}+\frac{b_{12}b_{31}-b_{11}b_{32}}{\Delta}k_{22}+\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}}{\Delta}k_{33},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i & b_{13}^i \\ b_{12}^i & b_{22}^i & b_{23}^i \\ b_{13}^i & b_{23}^i & b_{33}^i \end{vmatrix},$$

$$\overset{0}{\mu}_{12}=\frac{b_{88}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2}k_{12}-\frac{b_{78}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2}k_{21},$$

$$\overset{0}{\mu}_{21}=\frac{b_{77}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2}k_{21}-\frac{b_{78}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2}k_{12},$$

$$\overset{0}{\mu}_{13}=\frac{1}{b_{66}}k_{13},\quad \overset{1}{\mu}_{13}=\frac{1}{b_{66}}l_{13},\quad \overset{0}{\mu}_{23}=\frac{1}{b_{44}}k_{23},\quad \overset{1}{\mu}_{23}=\frac{1}{b_{44}}l_{23},$$

$$\overset{1}{\mu}_{31}=-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\overset{0}{\mu}_{11}\right)}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\overset{0}{\mu}_{21}\right)}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{0}{\mu}_{12}-\frac{\overset{0}{\mu}_{13}}{R_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{0}{\mu}_{22}-$$
$$-\left(\overset{0}{\sigma}_{23}-\overset{0}{\sigma}_{32}\right)+J\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial t^2}=\frac{m_1^++m_1^-}{2h},$$

$$\overset{1}{\mu}_{32}=-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\overset{0}{\mu}_{12}\right)}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\overset{0}{\mu}_{22}\right)}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{0}{\mu}_{21}-\frac{\overset{0}{\mu}_{23}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{0}{\mu}_{11}-$$
$$-\left(\overset{0}{\sigma}_{31}-\overset{0}{\sigma}_{13}\right)+J\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial t^2}=\frac{m_2^++m_2^-}{2h}, \tag{3.9}$$

$$\overset{1}{\mu}_{33}=-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\overset{0}{\mu}_{13}\right)}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\overset{0}{\mu}_{23}\right)}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{R_1}\overset{0}{\mu}_{11}+\frac{1}{R_2}\overset{0}{\mu}_{22}-\left(\overset{0}{\sigma}_{12}-\overset{0}{\sigma}_{21}\right)+J\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2},$$

$$\overset{2}{\mu}_{33}=-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\overset{1}{\mu}_{13}\right)}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\overset{1}{\mu}_{23}\right)}{\partial\alpha_2}-\left(\overset{1}{\sigma}_{12}-\overset{1}{\sigma}_{21}\right)+J\frac{\partial^2\iota}{\partial t^2}.$$

4. Основная система уравнений, граничные и начальные условия прикладной теории динамики микрополярных упругих ортотропных тонких оболочек.

С целью приведения трехмерной задачи микрополярной теории упругости к двумерной, что уже выполнено для перемещений, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, в теории микрополярных упругих оболочек вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики-усилия $T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}$, моменты $M_{ii}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}, L_{33}$ и гипермоменты Λ_{i3}, которые с учетом предположения III) выражаются следующим образом [7,8]:

$$
\begin{gathered}
T_{ii}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ii}d\alpha_3,\quad S_{ij}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ij}d\alpha_3,\quad N_{i3}=\int_{-h}^{h}\sigma_{i3}d\alpha_3,\quad N_{3i}=\int_{-h}^{h}\sigma_{3i}d\alpha_3,\\
M_{ii}=\int_{-h}^{h}\alpha_3\sigma_{ii}d\alpha_3,\quad H_{ij}=\int_{-h}^{h}\sigma_3\sigma_{ij}d\alpha_3,\quad L_{ii}=\int_{-h}^{h}\mu_{ii}d\alpha_3,\quad L_{ij}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ij}d\alpha_3,\\
L_{33}=\int_{-h}^{h}\mu_{33}d\alpha_3,\quad L_{i3}=\int_{-h}^{h}\mu_{i3}d\alpha_3,\quad \Lambda_{i3}=\int_{-h}^{h}\alpha_3\mu_{i3}d\alpha_3.
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

Основная система уравнений динамики микрополярных упругих ортотропных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений будет выражатся так:

Уравнения движения

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{11}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(T_{11}-T_{22}\right)+\frac{1}{A_2}\frac{\partial S_{21}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(S_{21}+S_{12}\right)+\frac{N_{13}}{R_1}=\\
=-\left[q_1^{+}+q_1^{-}\right]+2h\rho\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2},\\
\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{22}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(T_{22}-T_{11}\right)+\frac{1}{A_1}\frac{\partial S_{12}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(S_{12}+S_{21}\right)+\frac{N_{23}}{R_2}=\\
=-\left[q_2^{+}+q_2^{-}\right]+2h\rho\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2},\\
\frac{1}{A_1}\frac{\partial M_{11}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(M_{11}-M_{22}\right)+\frac{1}{A_2}\frac{\partial H_{21}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(H_{21}+H_{12}\right)-N_{31}=\\
=-h\left[q_1^{+}-q_1^{-}\right]+\frac{2h^3}{3}\rho\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2},\\
\frac{1}{A_2}\frac{\partial M_{22}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(M_{22}-M_{11}\right)+\frac{1}{A_1}\frac{\partial H_{12}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(H_{12}+H_{21}\right)-N_{32}=\\
=-h\left[q_2^{+}-q_2^{-}\right]+\frac{2h^3}{3}\rho\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2},\\
\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2N_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1N_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]-\frac{T_{11}}{R_1}-\frac{T_{22}}{R_2}=-\left[q_3^{+}+q_3^{-}\right]+2h\rho\frac{\partial^2w}{\partial t^2},\\
\frac{1}{A_1}\frac{\partial L_{11}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(L_{11}-L_{22}\right)+\frac{1}{A_2}\frac{\partial L_{21}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(L_{21}+L_{12}\right)+\frac{L_{13}}{R_1}+\\
+\left(N_{23}-N_{32}\right)=-\left[m_1^{+}+m_1^{-}\right]+2hJ\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial t^2},\\
\frac{1}{A_2}\frac{\partial L_{22}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(L_{22}-L_{11}\right)+\frac{1}{A_2}\frac{\partial L_{12}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(L_{12}+L_{21}\right)+\frac{L_{23}}{R_2}+
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

$$+\left(N_{31}-N_{13}\right)=-\left[m_2^+ + m_2^-\right]+2hJ\,\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2L_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1L_{23}\right)}{\partial\alpha_2}-\frac{L_{11}}{R_1}-\frac{L_{22}}{R_2}+\left(S_{12}-S_{21}\right)=-\left[m_3^+ + m_3^-\right]+2hJ\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\Lambda_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\Lambda_{23}\right)}{\partial\alpha_2}+\left(H_{12}-H_{21}\right)-L_{33}=-h\left[m_3^+ - m_3^-\right]+\frac{2}{3}h^3J\frac{\partial^2\iota}{\partial t^2}.$$

Физические соотношения упругости

$$T_{11}=C_{11}\Gamma_{11}+C_{12}\Gamma_{22},\quad T_{22}=C_{22}\Gamma_{22}+C_{12}\Gamma_{11},\quad S_{12}=C_{88}\Gamma_{12}+C_{78}\Gamma_{21},$$

$$S_{21}=C_{77}\Gamma_{21}+C_{78}\Gamma_{12},\ N_{13}=\widetilde{C}_{55}\Gamma_{13}+C_{56}\Gamma_{31},\quad N_{31}=C_{66}\Gamma_{31}+C_{56}\Gamma_{13},\qquad (4.3)$$

$$N_{23}=C_{55}\Gamma_{23}+C_{45}\Gamma_{32},\ N_{32}=C_{44}\Gamma_{32}+C_{45}\Gamma_{23},\ M_{11}=D_{11}K_{11}+D_{12}K_{22},$$

$$M_{22}=D_{22}K_{22}+D_{12}K_{11},\quad H_{12}=D_{88}K_{12}+D_{78}K_{21},\ H_{21}=D_{77}K_{21}+D_{78}K_{12},$$

$$L_{11}=d_{11}k_{11}+d_{12}k_{22}+d_{13}k_{33},\ L_{22}=d_{22}k_{22}+d_{12}k_{11}+d_{23}k_{33},$$

$$L_{33}=d_{33}k_{33}+d_{13}k_{11}+d_{23}k_{22},\ L_{12}=d_{88}k_{12}+d_{78}k_{21},\ L_{21}=d_{77}k_{21}+d_{78}k_{12},\ (4.4)$$

$$L_{13}=d_{66}k_{13},\quad L_{23}=d_{44}k_{23},\quad \Lambda_{13}=\lambda_{66}l_{13},\qquad \Lambda_{23}=\lambda_{44}l_{23}.$$

Геометрические соотношения (т.е. соотношения (2.6), (2.7))

$$\Gamma_{11}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}u_2+\frac{w}{R_1},\quad \Gamma_{22}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}u_1+\frac{w}{R_2},$$

$$K_{11}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\psi_2,\qquad K_{22}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\psi_1,$$

$$\Gamma_{12}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}u_1-\Omega_3,\quad \Gamma_{21}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}u_2+\Omega_3,\qquad (4.5)$$

$$K_{12}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\psi_1-\iota,\quad K_{21}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\psi_2+\iota,$$

$$\Gamma_{23}=-\vartheta_2-\Omega_1,\quad \Gamma_{32}=\psi_2+\Omega_1,\quad \Gamma_{13}=-\vartheta_1+\Omega_2,\quad \Gamma_{31}=\psi_1-\Omega_2,$$

$$\vartheta_2=-\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}+\frac{u_2}{R_2},\qquad \vartheta_1=-\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}+\frac{u_1}{R_1},$$

$$k_{11}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\Omega_2+\frac{\Omega_3}{R_1},\qquad k_{22}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\Omega_1+\frac{\Omega_3}{R_2},$$

$$k_{33}=\iota,\quad k_{12}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\Omega_1,\quad k_{21}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\Omega_2,\qquad (4.6)$$

$$k_{13}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_1}-\frac{\Omega_1}{R_1},\ k_{23}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_2}-\frac{\Omega_2}{R_2},\ l_{13}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_1},\ l_{23}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_2}.$$

Здесь

$$C_{11}=2h\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\ C_{12}=-2h\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\ C_{22}=2h\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},$$

$$C_{88}=2h\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},\ C_{78}=-2h\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},\ C_{77}=2h\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},$$

$$C_{66}=2h\frac{a_{66}}{a_{55}a_{66}-a_{56}^2},\quad C_{56}=-2h\frac{a_{56}}{\widetilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2},\ C_{55}=2h\frac{a_{55}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2},$$

$$C_{45}=-2h\frac{a_{45}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2},\ C_{44}=2h\frac{a_{44}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2},\ \widetilde{C}_{55}=2h\frac{\widetilde{a}_{55}}{\widetilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2},$$

$$D_{11}=\frac{2}{3}h^3\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\quad D_{12}=-\frac{2}{3}h^3\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\ D_{22}=\frac{2}{3}h^3\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},$$

$$D_{88}=\frac{2}{3}h^3\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},\quad D_{78}=-\frac{2}{3}h^3\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},\ D_{77}=\frac{2}{3}h^3\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},$$

$$d_{11}=2h\frac{b_{22}b_{33}-b_{23}^2}{\Delta},\quad d_{12}=2h\frac{b_{13}b_{23}-b_{12}b_{33}}{\Delta},\ d_{13}=2h\frac{b_{12}b_{23}-b_{13}b_{22}}{\Delta},$$

$$d_{22}=2h\frac{b_{23}b_{31}-b_{21}b_{33}}{\Delta},\ d_{23}=2h\frac{b_{13}b_{12}-b_{23}b_{11}}{\Delta},\ d_{33}=2h\frac{b_{11}b_{33}-b_{13}^2}{\Delta},$$

$$d_{88}=2h\frac{b_{88}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2},\quad d_{78}=-2h\frac{b_{78}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2},\quad d_{77}=2h\frac{b_{77}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2},$$

$$d_{66}=2h\frac{1}{b_{66}},\quad d_{44}=2h\frac{1}{b_{44}},\quad \lambda_{66}=\frac{2}{3}h^3\frac{1}{b_{66}},\quad \lambda_{44}=\frac{2}{3}h^3\frac{1}{b_{44}}.$$

К основным уравнениям (4.2)-(4.6) микрополярных ортотропных упругих тонких оболочек присоединим соответствующие граничные условия (при $\alpha_1=const$) [7,8]:

$$\begin{aligned}
&T_{11}=T_{11}^* \text{ или } u_1=u_1^*,\ S_{12}=S_{12}^* \text{ или } u_2=u_2^*,\ N_{13}=N_{13}^* \text{ или } w=w^*,\\
&M_{11}=M_{11}^* \text{ или } K_{11}=K_{11}^*,\ H_{12}=H_{12}^* \text{ или } K_{12}=K_{12}^*,\\
&L_{11}=L_{11}^* \text{ или } \kappa_{11}=\kappa_{11}^*,\ L_{12}=L_{12}^* \text{ или } \kappa_{12}=\kappa_{12}^*,\\
&L_{13}=L_{13}^* \text{ или } \kappa_{13}=\kappa_{13}^*,\ \Lambda_{13}=\Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13}=l_{13}^*.
\end{aligned}\tag{4.7}$$

Начальные условия (при $t=0$) необходимо задавать для $u_1,\frac{\partial u_1}{\partial t},\ u_2,\frac{\partial u_2}{\partial t}$,

$w,\frac{\partial w}{\partial t},\psi_1,\frac{\partial\psi_1}{\partial t},\psi_2,\frac{\partial\psi_2}{\partial t},\Omega_1\ \frac{\partial\Omega_1}{\partial t},\Omega_2,\frac{\partial\Omega_2}{\partial t},\Omega_3,\frac{\partial\Omega_3}{\partial t},\iota,\frac{\partial\iota}{\partial t}$.

Уравнения (4.2)-(4.6), граничные условия (4.7) и отмеченные начальные условия составляют общую математическую модель динамического деформиро-

вания микрополярных ортотропных упругих тонких оболочек с независимым полями перемещений и вращений.
На основе этой построенной общей теории в дальнейшем будут рассмотрены конкретные задачи о свободных и вынужденных колебаниях микрополярных ортотропных цилиндрических оболочек, оболочек вращения и пологих оболочек.

Ա.Ժ.Ֆարմանյան

Միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական բարակ թաղանթների դինամիկայի մաթեմատիկական մոդելը

Աշխատանքում վարկածների մեթոդի օգնությամբ, որն ունի ասիմպտոտիկ հիմնավորում, կառուցված է միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական բարակ թաղանթի դինամիկական դեֆորմացիայի ընդհանուր մաթեմատիկական մոդելը:

A.J. Farmanyan

Mathematical Model of Dynamic Micropolar Orthotropic Elastic Thin Shells

In the present paper on the basis of asymptotically confirmed hypotheses method general mathematical model of dynamic deformation of micropolar orthotropic elastic thin shells is constructed.

Литература

1. Физическая мезомеханика и компьюторное конструирование материалов// Отв. ред. В. Е. Панин. Новосибирск: Наука. 1995. Т.1. 298с. Т. 2. 320 с.
2. Иванова Е. А., Кривцов А. М., Морозов Н. Ф. Получение макроскопических соотношений упругости сложных кристаллических решеток при учете моментных взаимодействий на микроуровне//Прикладная математика и механика.2007. Т. 71. Вып. 4. С. 595-615.
3. Ерофеев В. И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ. 1999. 328с.
4. Саркисян С.О. Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек// Известия НАН Армении. Механика. 2005.Т.58.N2. С.84-95.
5. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. A. 2009. “On generalized Cosserat-tape theories of plates and shells: a short review and bibliography”. // Arch. Mech (Special Issue) DOI 10. 1007/s 00419-009-0365-3. Springer-Verlag.
6. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the linear theory of micropolar plates//Z. Anqew. Math. Mech. (ZAMM). 2009. Vol. 89. № 4. P.242-256.
7. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек//Физическая Мезомеханика. 2011. Том 14. № 1. С. 55-66.
8. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Доклады Академии Наук России. 2011.Том 436. N2. С.195-198.

9. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жесткостных характеристик// Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. Вып. 2. С. 148-156.
10. Sargsyan S.H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars// Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol.2. N1. P.98-108.
11. Саркисян С.О., Фарманян А.Ж. Математическая модель микрополярных анизотропных (ортотропных) упругих тонких оболочек//Вестник Перьмского Национально-исследовательского Политехнического университета. Механика. 2011. N3. С. 128-145.
12. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 862с.
13. Пальмов В. А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401-408.
14. Iesen D. Torsion of Anisotropic Micropolar Elastic Cylinders//ZAMM. 1974. Vol. 54. № 12. P. 773-779.
15. Перцев А.К., Платонов Э. Г. Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи). Ленинград: “Судостроение”. 1987. 316 с.
16. Пелех, Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Изд.-во “Наукова думка”. 1973. 248с.
17. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наукова думка. 1981. 544с.

Сведения об авторе:

Фарманян Анаит Жораевна - *Кандидат физ.-мат. наук, доцент, проректор по науки и внешних связей Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна.*

E-mail: afarmanyan@yahoo.com

Поступило в редакцию 25.05.2012