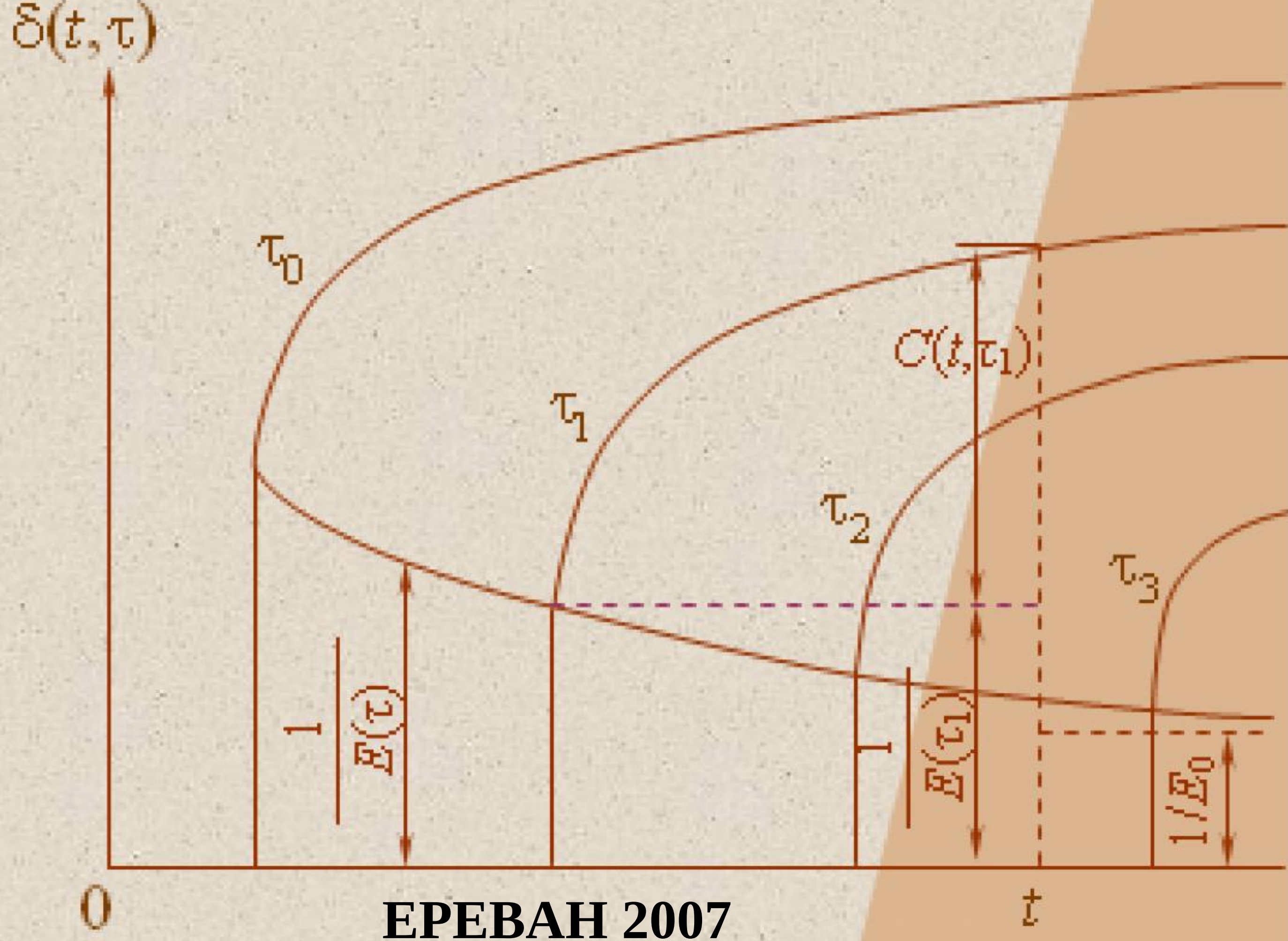
АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

$$C(t,\tau)=\varphi(\tau)f(t-\tau)$$



ЕРЕВАН 2007

ВЫДАЮЩИЙСЯ УЧЕНЫЙ И ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ДЕЯТЕЛЬ

Исполнилось 95 лет со дня рождения академика НАН РА, одного из основателей и выдающегося представителя армянской научной школы механики, заслуженного ученого, удостоившегося широкого международного признания, одного из умелых организаторов в сфере науки и высшего образования, известного государственного деятеля Нагуша Хачатуровича Арутюняна. С его именем связана целая эпоха в развитии механики, формирование и дальнейший прогресс ряда научных направлений механики деформируемого твердого тела в Армении. Почти пол-века отдано им формированию нескольких поколений ученых-механиков. Н.Х.Арутюнян по праву считается первооткрывателем теории ползучести в Армении, одним из основателей современной теории ползучести в целом и зачинателем научного направления по контактным и смешанным задачам механики деформируемого твердого тела в республике.

Пройденный Н.Х.Арутюняном жизненный, научный и научно-педагогический путь поучителен и интересен.

Н.Х. Арутюнян родился 23 ноября 1912 г. в Ереване. Многие годы он прожил со своим дедом — знаменитым историком и одним из основавших ЕГУ профессоров – Лео, который своей внушительной научной фигурой и яркой индивидуальностью внушил юноше уважение к учебе, науке, воспитал в нем трудолюбие.

В 1930 г. Н.Х. Арутюнян отправляется в Москву и поступает в один из самых крупных и престижных вузов страны – Военно-инженерную академию им. В.В. Куйбышева. Окончив ее в 1936 г. и получив специальность инженера-гидростроителя, он возвращается в Армению, поступает на работу в управление Севан-Зангустрой в качестве ведущего инженера и одновременно преподает в Ереванском политехническом институте. В 1937 г. Н.Х. Арутюнян поступает в аспирантуру Ленинградского политехнического института. Общение с крупнейшими учеными-механиками: Б.Г. Галеркиным, Е.Л. Николаи, А.И. Лурье, прослушивание их содержательных лекций, оказало решающее воздействие на его дальнейшую научную судьбу, сформировав его научное кредо. Н.Х. Арутюнян всегда испытывал исключительную любовь и уважение к ленинградской школе механики, научных контактов с которой он никогда не прерывал.

Защитив кандидатскую диссертацию, в 1941 г. он уходит на фронт. Его боевые заслуги были оценены орденами Отечественной войны I и II степени, орденом Красной звезды и медалями.

Демобилизовавшись из армии в 1945 г., Н.Х. Арутюнян возвращается в Армению и возобновляет свою научную и научно-педагогическую деятельность. В 1949 г. в Москве в Институте механики АН СССР он блестяще защищает докторскую диссертацию по техническим наукам. В 1950 г. ему присваивается звание профессора и в том же году он избирается действительным членом Академии наук Армении и членом Президиума Академии.

В 1952–1955 гг. начинается его плодотворная научная и научно-организационная деятельность в Академии наук, где он работает академиком-секретарем Отделения технических наук. В 1955 г. Н.Х. Арутюнян назначается заведующим новооткрытой лаборатории ползучести и прочности в Институте математики и механики АН Арм.ССР. В

1959 г. он избирается вице-президентом АН Арм.ССР. В этой должности он энергично работает над укреплением старых и созданием новых научно-исследовательских институтов.

Параллельно с научной и научно-организационной работой Н.Х. Арутюнян развивает плодотворную педагогическую деятельность. В 1945–1951 гг. он преподает в Ереванском политехническом институте, а в 1951 г. начинает преподавать в Ереванском государственном университете, где сначала занимает должность профессора кафедры теоретической механики, а с 1958 г. возглавляет новооткрытую кафедру теории упругости и пластичности (ныне кафедра механики сплошной среды), которой руководит до 1978 г.

В 1961 г. Н.Х. Арутюнян назначается ректором ЕГУ и занимает этот пост до 1963 г. Этот промежуток весьма невелик по времени, однако именно в эти годы закладывались дальнейшие принципиальные реформы в общественно-политической, экономической, научно-организационной областях и в сфере высшего образования, и в этом отношении то был полный драматизма, динамичный, наполненный внутренним содержанием и насыщенный временной промежуток. В эти годы в республике уже успешно работает ряд известных в стране и в мире научных школ, высших учебных заведений, естественные науки переживают решительный и отвечающий требованиям научно-технического прогресса подъем, формируются новые научные направления, а для общественных наук появляются возможности свободного развития вне идеологических рамок. В эти годы по всей стране в среде студенчества и интеллигенции продолжается духовная революция, по-новому осмысливается пройденный путь, идет переоценка ценностей, в общественной жизни появляются элементы демократизма. Будучи главным вузом страны и одним из крупнейших научных центров, а до основания АН Армении – и единственным центром по линии фундаментальных наук, ЕГУ всегда был центром республиканской общественной мысли, где отражались все актуальные вопросы и проблемы общественной жизни. Постановка и поиск верного решения этих серьезных проблем, продиктованных духом времени, требовали от руководителя нового мышления и нового образа действий, мудрости и исключительных способностей. При таких ответственных обстоятельствах академик Н.Х. Арутюнян и занял высокую и ответственную должность ректора ЕГУ.

Благодаря его усилиям, в университете основываются кафедры биофизики, ядерной физики, экономической кибернетики, проблемные лаборатории радиации и цитологии, объединенный вычислительный центр АН и Ереванского государственного университета. В годы его руководства еще больше укрепляются научные и учебные связи ЕГУ с Московским и Ленинградским государственным университетами и первоклассными университетами, вузами и научными центрами СССР. Н.Х.Арутюнян с особой заботой и вниманием относился к делу формирования и подготовки молодых ученых и специалистов, и его вклад в этой сфере очень велик. Его блестящие лекции в ЕГУ по разным областям механики сплошной среды, насыщенные новейшими достижениями науки, открывали широкую дорогу для будущих специалистов и ученых. Будучи искусным и опытным преподавателем, Н.Х.Арутюнян делал свои лекции простыми и доступными для студентов и слушателей, что сочеталось с необходимой научной строгостью, обоснованностью, логическим изложением последовательных выводов. Он был требователен по отношению к своим лекциям и постоянно совершенствовал их, стремясь к высшему и лучшему, как и в других сферах своей деятельности. Он руководил работами многих молодых ученых и аспирантов, создал свою собственную научную школу, удостоившись глубочайшего уважения своих многочисленных учеников и последователей. Благодаря его рекомендациям многие выпускники ЕГУ смогли продолжить учебу в аспирантуре известных научных центров Советского Союза. Н.Х.Арутюнян пользовался широкой известностью и обладал большим авторитетом в советских и зарубежных научных кругах. В своей научно-организационной и научно-педагогической деятельности Н.Х.Арутюнян всегда стремился укоренить в университете новые научные направления, лекционные курсы по специализации, установить тесные научные и научно-педагогические связи с первостепенными вузами и научными центрами СССР и зарубежья. Он достойно представлял ЕГУ в Советском Союзе и за рубежом.

Н.Х.Арутюнян всегда был другом молодежи, окружая себя талантливыми молодыми научными работниками и преподавателями. Многих в университете он привлекал также к административно-руководящей деятельности.

В 1962 г. Н.Х. Арутюняну было присуждено почетное звание заслуженного деятеля науки Армянской ССР. Долгие годы он был членом Национального комитета СССР по теоретической и прикладной механике и членом его Президиума, главным редактором журнала ”Известия АН АрмССР. Механика”, членом редколлегии журнала ”Известия АН СССР. Механика твердого тела”.

Научно-исследовательская деятельность Н.Х. Арутюняна развивалась, в основном, в двух направлениях: математическая теория упругости и теория ползучести. Первые его работы по теории упругости были посвящены кручению и изгибу призматических стержней полигонального поперечного сечения. Им был предложен эффективный метод решения этих задач, основанный на сведении их к решению бесконечных систем алгебраических уравнений, обладающих свойствами регулярности. В дальнейшем этот метод получил широкое распространение в многочисленных исследованиях по теории упругости и со временем приобрел большую известность. Научные результаты, полученные в связи с задачами кручения, были обобщены и подытожены в фундаментальной работе Н.Х. Арутюняна и Б.Л. Абрамяна ”Кручение упругих тел”, изданной в Москве в 1963 г.

Н.Х. Арутюнян выполнил значительную научно-исследовательскую работу в области контактных и смешанных краевых задач теории упругости и для определенных классов этих задач вместе со своими учениками получил точные решения. Он развил также научное направление контактных задач по вопросам передачи сил массивным упругим телам от тонкостенных элементов в виде накладок.

Свой наибольший научный вклад Н.Х. Арутюнян внес в одну из важных областей механики деформируемого твердого тела – теорию ползучести. Обработав и проанализировав результаты многочисленных экспериментов, Н.Х. Арутюнян вместе с Г.Н. Масловым пришел к выводу, что в вопросах прочности и долговечности инженерных сооружений, помимо обычных физико-механических свойств материалов: например, бетона, пластмассы, стеклопластиков, – необходимо также учитывать свойства, обусловленные ползучестью, такие как свойства старения и наследственности. Эта основополагающая идея легла в основу разработанной Н.Х. Арутюняном новой математической теории ползучести стареющих тел, которая в дальнейшем вошла в науку как теория ползучести Маслова–Арутюняна.

С учетом этой теории были внесены изменения в действующие нормативы расчета прочности и долговечности гидротехнических сооружений из железобетона и их элементов.

Результаты первостепенной важности, полученные Н.Х. Арутюняном в сфере теории ползучести, были обобщены в опубликованной в 1952 г. в Москве фундаментальной монографии ”Некоторые вопросы теории ползучести”, одной из первых в Советском Союзе и в мире. Эта монография в течение десятилетий была и остается основой формирования, школой для многих поколений научных работников и инженеров-исследователей. Она переведена и издана в Англии, Франции, Китае, а отдельные главы были опубликованы в Германии, Польше и Румынии.

В соответствии с принципами сформулированных Н.Х.Арутюняном линейной и нелинейной теорий ползучести, им были исследованы контактные и многие другие задачи, имеющие теоретическое и практическое значение, в нелинейных задачах – сформулирован и обобщен принцип наложения перемещений.

За последние два десятилетия своей научной деятельности Н.Х. Арутюнян существенно обобщил и развил свою первоначальную теорию ползучести, разработав теорию ползучести наследственно неоднородно-стареющих тел и создав новое направление математической теории наращиваемых деформируемых тел. Полученные научные результаты были изложены во многих монографиях и научных работах.

В 1975 г. Н.Х. Арутюнян переехал в Москву и приступил к работе в Институте проблем механики АН СССР, возглавив лаборатории механики вязкоупругих тел этого института. В годы жизни в Москве его научные и человеческие связи с Арменией никогда не ослабевали. Параллельно он руководил отделом теории вязкоупругости Института механики АН Армении.

Н.Х. Арутюнян активно занимался общественно-политической и государственной деятельностью. Неоднократно он избирался депутатом Верховного Совета АрмССР и Верховного Совета СССР, в 1962–1975 гг. был Председателем Президиума Верховного Совета АрмССР и заместителем Председателя Президиума Верховного Совета СССР. В эти годы он достойно представлял нашу республику в Советском Союзе и за рубежом, выступил со знаменитым предложением выдвигать на выборах хотя бы двух кандидатов, что было по тем временам довольно смелым шагом к демократии.

Н.Х.Арутюнян во всех сферах и на всех этапах своей деятельности всегда стремился к новому, передовому, совершенному и обладал особым чутьем, исключительной способностью видеть это новое. Он был широко мыслящим интеллигентом своего времени. Хорошо разбирался в шедеврах армянской, русской и зарубежной литературы и в своих выступлениях, беседах любил приводить афоризмы и крылатые слова. Он обладал широкой натурой и был интересным собеседником. В годы работы в университете он пользовался любовью и уважением студентов и профессорско-преподавательского состава.

Н.Х. Арутюнян скончался 18 января 1993 г. в Москве. Он оставил большое научное наследие – восемь фундаментальных монографий, около двухсот оригинальных научных работ, научную школу, множество учеников и последователей в Армении, бывшем Советском Союзе и за рубежом.

МЕХАНИКА ФОРМИРОВАНИЯ КРУП

Авагян С. Г.

Атмосферные осадки до сих пор имеют нераскрытые стороны, которые представляют собой научный интерес.

В работе дан принципиально новый подход к механизму формирования круп. Если формирование и рост дождя и снега особого сомнения не вызывает, то с этой точки зрения нельзя говорить о граде и крупе. Существующая точка зрения об их формировании и росте находится в сильном противоречии со структурой град и крупы. К формированию града и круп дан принципиально новый подход в работах [1,2]. Особенно детально рассматривается механизм формирования града, связывая этот механизм с высокой заряженностью облаков. В данном случае доказывается, как могло формироваться цельное ледяное ядро града, которое имеет сравнительно большой размер. Притом, формирование такого ядра града по существующей точке зрения формирования града никак не может происходить. В этом и основная сущность различия предлагаемого механизма формирования града. Дана также новая модель формирования круп, но очень поверхностно[2].

В предлагаемой работе дается детальное объяснение механики формирования круп. В настоящее время крупа считается разновидностью снега, т.е. считается, что крупа формируется из замерзших микрочастиц с дальнейшим ростом. Иногда крупу считают разновидностью града. Но как будет доказано далее, крупа не имеет никакого отношения ни к снегу и ни к граду.

Обычно крупа имеет плосковатую форму или форму конуса. Она зернистая и состоит из маленьких шариков ($d \approx 1$мм). Зернистость –одна из различий между крупой и снегом или градом. То есть физика их формирования различна. Также известно [3,4,5], что плотность крупы равна 0,1-0,2 г/см^3 . В свою очередь, плотность снега равна 0,01г/см^3 , то есть плотность крупы в 10-20 раз больше плотности снега. Это второе основное различие между крупой и снегом. С другой стороны, считать крупу разновидностью града также ошибочно, так как плотность града равна 0,9г/см^3 , т.е. крупа не может формироваться и расти как град и имеет свойственный ей механизм формирования. Отметим также, что крупа обычно имеет размер в среднем 5мм, а самый большой размер бывает 10-15мм.

Крупа имеет зернистую структуру и состоит из довольно твердых зерен (шариков). Хотя эти шарики твердые, всё-таки они не представляют сплошной лёд. Если допустить, что эти шарики сплошные, то их плотность должна быть 0,9 г/см^3 , как и у льда. Но тогда от чего такое резкое отличие плотностей (4-9 раз) круп и шариков, из которых состоит крупа. Допустим, что это следствие межшариковых пустот. Рассмотрим возможно худший из вариантов. Возьмем пример кубического ящика, в котором один над другим рядом расположены шарики.

Если в ряду имеем n шариков, радиус которых равен r, то длина стороны куба будет $a = 2nr$. Объём куба $Q = 8n^3r^3$. Объём всех шариков в ящике будет $q = n\frac{4\pi r^3}{3}$.

Тогда отношение объёма межшариковых пустот к объёму ящика будет

$$\frac{Q-q}{Q} = 1 - \frac{n^3 \frac{4}{3}\pi r^3}{8n^3r^3} = 1 - \frac{\pi}{6} \approx 0,5$$

То есть в лучшем случае уменьшение плотности круп от межшариковых пространств максимально будет 2 раза. Но фактически она составляет 4-9 раза. Остается единственное обоснование, что зёрны крупы не сплошной лёд, а пустотелые шарики.

Тогда должно быть объяснение о происхождении пустотелых шариков. С учётом этого факта в основе формирования круп подставляется явление кавитации в области внутри облака.

В облаках явление кавитации могло появлятся как от акустических волн, также и от вихревых движений. В результате кавитации в облаках появляются полости (пузырьки) низкого давления и низкой температуры. Находящиеся в этих пузырьках мелкокапельки облаков расширяются (разбухают) адиабатически, вследствие чего они в процессе расширения замерзают и становятся пустотелыми шариками. Замерзание мелкокапельки – следствие известного закона

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-i}$$

Крупа обычно выпадает из ливневых облаков в период переходных времен года (весной и осенью), когда сильны конвективные потоки в облаках. В этот период поверхность Земли теплая, а облака уже холодные. Поэтому и в мощных конвективных облаках наблюдаются мощные вертикальные потоки с большими скоростями, скорость которых достигает 10-15 м/с, а иногда и до 30-40 м/с. Потоки с большими скоростями возникают также между двух облаков с теплой и холодной температурами. В этом случае фронт холодного облака с большой скоростью движется в сторону теплого облака. Уподобляя с движением поршня внутри цилиндра, можно заключить, что внутримассовые потоки в облаках приводят к волнам разрежения, и в следствие чего появляется явление кавитации.

При выпадании крупы можно наблюдать следующую закономерность. Сначала выпадают одиночные крупы, затем следует обильное выпадание, после чего утихает, а затем следует обильное выпадание, которое повторяется несколько раз. А это означает, что происхождение крупы связано с волновыми процессами. То есть формирование крупы можно считать также результатом кавитации, связанной с акустическими волнами.

Общая картина образования кавитационного пузырька представляется в следующем виде. В фазе разрежения акустической волны в жидкости образуется разрыв в виде полости. Когда соответствуящая скорость превышает некоторое критическое значение, то вследствие падения давления внутри облака происходит разрыв сплошности у некоторых центров и образуются пузырьки.

Каждый кавитационный пузырек формируется из ядра. Теоретически при отсутствии ядер жидкость может выдерживать отрицательные давления или напряжения порядка тысяч атмосфер без возникновения кавитации. Однако при наличии в воде твердых несмачиваемых ядер размером порядка 10^{-6} см происходит разрыв сплошности воды при отрицательных давлениях в несколько десятков атмосфер [6] . А такими ядрами в облаках является пыль.

В кавернах давление резко падает и водяные мелкокапельки набухают, одновременно падает температура, и они, охлаждаясь, превращаются в пустотелые шарики.

В каверне при этом часть энергии низкого давления скрывается в шариках. Это приводит к тому, что в пузырьке с маленькими шариками давление сильно не отличается от внешнего давления, и разность становится минимальной. Затем пузырек с замерзшими шариками в своем хаотичном движении в облаках, соударяясь друг с другом или твердыми частицами облаков, разрывается и содержащиеся в ней шарики с небольшими скоростями стремятся к точке разрыва, и таким образом формируется крупа.

При соударении двух пузырьков формируется плосковатая крупа, а при соударении твердой частицы формируется конусообразная крупа.

В особенности отметим, что конусообразная форма крупы может формироваться только этим путем.

При кавитации в пузырьке должно быть такое критическое давление P_k, чтобы оно не превышало поверхностного натяжения, т.е. $P_k \le \frac{2\sigma}{r}$, где σ – поверхностное натяжение, r – радиус шарика.

Если давление ниже критического давления, то мелкокапельки облака разрываются (взрываются) и идет моросящий дождь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Avagyan S. The Formation of the Hail and the Newlycome Snow. /XXI International Congress of Theoritical and Applied Mechanics. August 15-21, 2004. Warsaw, Poland, Abstracts and CDRom Proceedings. P.103.
2. Avagyan S., Avagyan A. The Physics of Hail Formation International Conference “Fluxes and Strustures in Fluids”, June 23-26, 2003. St. Petersburg, Abstracts, p.16-18.
3. Хргиан А.Х. Физика атмосферы. М.: Физматгиз, 1969.
4. Оболенский В.Н. Курс метеорологии. Л.: Гидрометеоиздат, 1944.
5. Матвеев Л.Т. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1976.
6. Пирсол И. Кавитация. / Пер. с англ. М.: Мир, 1978.
7. Кнепп Р., Дейцли Дж., Хэммит Ф. Кавитация. / Пер. с англ. М.: Мир, 1974.
8. Шишкин Н.С. Облака, осадки и грозовое электричество. Л.: Гидрометеоиздат, 1964.

Сведения об авторе

Авагян Славик Григорьевич

Кандидат физико – математических наук, доцент Гюмрийского филиала ГИУА

Адрес: г. Артик, ул. Тонаканян 34, кв 15 Тел.:(091) 36-75-14; E- Mail: slavikavagyan@yahoo.com

О ПОСТРОЕНИИ УПРАВЛЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ ДВУХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ, ГАРАНТИРУЮЩИХ ОТСУТСТВИЯ СТОЛКНОВЕНИЯ

Аветисян В.В.

Рассматривается система из двух управляемых объектов, которые осуществляют пространственные движения. Ставится задача построения управлений, обеспечивающие переход объектов из произвольных начальных состояний в заданные конечные состояния в разные моменты времени и гарантирующие отсутствия столкновения в процессе совместного движения. Предложен алгоритм нахождения наименьшего времени совместного движения, при котором задача разрешима для любых начальных и конечных состояний.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему из двух объектов, управляемых по ускорению в трехмерном пространстве в поле Земли. Уравнения движения объектов зададим в виде

$$X: \ \ddot{x} = u + g\,,\ Y: \ \ddot{y} = \mathrm{v} + g \tag{1.1}$$

Здесь $x, y, u, \mathrm{v}, g \in R^3$ – трехмерные векторы; $g = (0,0,-\mathrm{g})$ – постоянный вектор ускорения свободного падения.

Требуется определить управляющие вектор функци $u(t)$ и $\mathrm{v}(t)$ так, чтобы объекты (1.1) перешли из начальных состояний в момент $t = 0$

$$x(0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}^0;\ y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0 \tag{1.2}$$

в заданные конечные состояния

$$x(T_x) = x^0, \quad \dot{x}(T_x) = \dot{x}^0;\ y(T_y) = y^0, \quad \dot{y}(T_y) = \dot{y}^0 \tag{1.3}$$

в наперед заданные моменты времени $t = T_x$ и $t = T_y$, соответственно, и при этом удовлетворялись следующие условия отсутствия столкновения:

$$\|x(t) - y(t)\| \neq 0\,,\ t \in [0, T],\ T = \min(T_x, T_y) \tag{1.4}$$

где $\|\cdot\|$ – эвклидова норма вектора.

2. Алгоритм решения задачи. Представим уравнения (1.1) в виде

$$\dot{x} = A_x x + B_x u\,;\ \dot{y} = A_y y + B_y \mathrm{v} \tag{2.1}$$

со следующими матрицами, фазовыми и управляющими векторами:

$$A_{x,y} = \begin{pmatrix} A^1_{x,y} & (0) & (0) \\ (0) & A^2_{x,y} & (0) \\ (0) & (0) & A^3_{x,y} \end{pmatrix},\ (0) = \begin{pmatrix} 00 \\ 00 \end{pmatrix},\ A^i_x = A^i_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ i = 1,2,3 \tag{2.2}$$

$$B_{x,y} = (B^1_{x,y} \quad B^2_{x,y} \quad B^3_{x,y})^T,\ B^1_x = B^1_y = \begin{pmatrix} 000 \\ 100 \end{pmatrix},\ B^2_x = B^2_y = \begin{pmatrix} 000 \\ 010 \end{pmatrix},$$

$$B^3_x = B^3_y = \begin{pmatrix} 000 \\ 001 \end{pmatrix}$$

$$x = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(1)}, x_3^{(2)})^T,\ y = (y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, y_2^{(1)}, y_2^{(2)}, y_3^{(1)}, y_3^{(2)})^T \tag{2.3}$$

$$u = (u_1, u_2, u_3 - \mathrm{g})^T,\ \mathrm{v} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3 - \mathrm{g})^T$$

В переменных (2.3) условие (1.4) запишется так:

$$\|x(t) - y(t)\| = \left\| \begin{matrix} x_1(t) - y_1(t) \\ x_2(t) - y_2(t) \\ x_3(t) - y_3(t) \end{matrix} \right\| \neq 0\,,\ t \in [0, T],\ T = \min(T_x, T_y) \tag{2.4}$$

Запишем решения систем (2.1)

$$x(t) = \Phi_x(t)\left[x^0 + \int_0^t \Phi_x^{-1}(\tau) B_x(\tau) u(\tau) d\tau \right],$$

$$y(t) = \Phi_y(t)\left[y^0 + \int_0^t \Phi_y^{-1}(\tau) B_y(\tau) \mathrm{v}(\tau) d\tau \right] \qquad (2.5)$$

где $\Phi_x(t)$, $\Phi_y(t)$ – фундаментальные матрицы

$$\Phi_x = \Phi_y = \begin{pmatrix} \overline{\Phi}(t) & (0) & (0) \\ (0) & \overline{\Phi}(t) & (0) \\ (0) & (0) & \overline{\Phi}(t) \end{pmatrix}, \ \overline{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (0) = \begin{pmatrix} 00 \\ 00 \end{pmatrix} \qquad (2.6)$$

Учитывая (1.3) и (2.5), задача сводится к отысканию таких управлений $u(t)$, $\mathrm{v}(t)$, при которых удовлетворяются условия

$$\int_0^{T_x} \Phi_x^{-1}(t) B_x(t) u(t) dt = \Phi_x^{-1}(T_x)\, x^1 - x^0,$$

$$\int_0^{T_y} \Phi_y^{-1}(t) B_y(t) \mathrm{v}(t) dt = \Phi_y^{-1}(T_y)\, y^1 - y^0 \qquad (2.7)$$

и ограничение (2.4) для всех $t \in [0, T]$, $T = \min(T_x, T_y)$.

Управления, решающие задачу без учета (1.4), ищем в виде [1,2]

$$u(t) = Q_x^T(t) C_x, \ Q_x(t) = \Phi_x^{-1}(t) B_x(t), \ \mathrm{v}(t) = Q_y^T(t) C_y, \ Q_y(t) = \Phi_y^{-1}(t) B_y(t) \qquad (2.8)$$

где C_x, C_y – постоянные вектор-столбцы, определяемые из следующих систем линейных алгебраических уравнений:

$$R_x(T_x) C_x = \Phi_x^{-1}(T_x) x^1 - x^0, \qquad R_x(T_x) = \int_0^{T_x} Q_x(t) Q_x^T(t) dt \qquad (2.9)$$

$$R_y(T_y) C_y = \Phi_y^{-1}(T_y) y^1 - y^0, \qquad R_y(T_y) = \int_0^{T_y} Q_y(t) Q_y^T(t) dt$$

В случае полной управляемости каждой из систем (1.1), матрицы $R_x(T_x)$, $R_y(T_y)$– неособые [3] и поэтому (2.9) имеют единственные решения

$$C_x = R_x^{-1}(T_x)(\Phi_x^{-1}(T_x) x^1 - x^0), \ C_y = R_y^{-1}(T_y)(\Phi_y^{-1}(T_y) y^1 - y^0) \qquad (2.10)$$

Учитывая (2.5), (2.8)-(2.10), управления $u(t)$, $\mathrm{v}(t)$ и соответствующие им фазовые векторы $x(t)$, $y(t)$ можно представить в следующем виде:

$$u(t) = F_x(t, T_x) \cdot (x^*)^T, \ \mathrm{v}(t) = F_y(t, T_y) \cdot (y^*)^T \qquad (2.11)$$

$$x(t) = G_x(t, T_x) \cdot (x^*)^T, \ y(t) = G_y(t, T_y) \cdot (y^*)^T$$

$$F_x = (F_x^0, F_x^1), \ F_y = (F_y^0, F_y^1), \ G_x = (G_x^0, G_x^1), \ G_y = (G_y^0, G_y^1)$$

$$x^* = (x^0, x^1), \quad y^* = (y^0, y^1)$$

где элементы блочных матриц G_x, G_y и F_x, F_y определяются выражениями

$$G_x^0(t, T_x) = \Phi_x(t) - \Phi_x(t) R_x(t) R_x^{-1}(T_x), \ G_x^1(t, T_x) = \Phi_x(t) \Phi_x^{-1}(T_x) R_x^{-1}(T_x) \qquad (2.12)$$

$$F_x^0(t, T_x) = -(\Phi_x^{-1}(t) B_x(t))^T R_x^{-1}(T_x), \ F_x^1(t, T_x) = (\Phi_x^{-1}(t) B_x(t))^T R_x^{-1}(T_x) \Phi_x^{-1}(T_x)$$

$$G_y^0(t, T_y) = \Phi_y(t) - \Phi_y(t) R_y(t) R_y^{-1}(T_y), \ G_y^1(t, T_y) = \Phi_y(t) \Phi_y^{-1}(T_y) R_y^{-1}(T_y)$$

$$F_y^0(t,T_y) = -(\Phi_y^{-1}(t)B_y(t))^T R_y^{-1}(T_y)\,,\ F_y^1(t,T_y) = (\Phi_y^{-1}(t)B_y(t))^T R_y^{-1}(T_y)\Phi_y^{-1}(T_y)$$

Из (2.8)–(2.12) для разности $x(t,T_x) - y(t,T_y) = z(t,T_x,T_y)$ имеем

$$z(t,T_x,T_y) = \begin{pmatrix} z_1(t,T_x,T_y) \\ z_2(t,T_x,T_y) \\ z_3(t,T_x,T_y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t,T_x) - y_1(t,T_y) \\ x_2(t,T_x) - y_2(t,T_y) \\ x_3(t,T_x) - y_3(t,T_y) \end{pmatrix} = \overline{G}(t,T_x,T_y)\,\mathrm{x}\, z^{0,1} \qquad (2.13)$$

$$\overline{G}(t,T_x,T_y) = (\overline{G}_x^0(t,T_x) \quad \overline{G}_x^1(t,T_x) \quad -\overline{G}_y^0(t,T_y) \quad -\overline{G}_y^1(t,T_y)) \qquad (2.14)$$

$$x(t,T_x) = (x_1(t,T_x),\ \dot{x}_1(t,T_x),\ x_2(t,T_x),\ \dot{x}_2(t,T_x),\ x_3(t,T_x),\ \dot{x}_3(t,T_x))^T$$

$$y(t,T_y) = (y_1(t,T_y),\ \dot{y}_1(t,T_y),\ y_2(t,T_y),\ \dot{y}_2(t,T_y),\ y_3(t,T_y),\ \dot{y}_3(t,T_y))^T$$

$$z^{0,1} = (x^0, x^1, y^0, y^1)^T,\ x^{0,1} = (x_1^0,\ \dot{x}_1^0,\ x_2^0,\ \dot{x}_2^0,\ x_3^0,\ \dot{x}_3^0,\ x_1^1,\ \dot{x}_1^1,\ x_2^1,\ \dot{x}_2^1,\ x_3^1,\ \dot{x}_3^1)^T$$

$$y^{0,1} = (y_1^0,\ \dot{y}_1^0,\ y_2^0,\ \dot{y}_2^0,\ y_3^0,\ \dot{y}_3^0,\ y_1^1,\ \dot{y}_1^1,\ y_2^1,\ \dot{y}_2^1,\ y_3^1,\ \dot{y}_3^1)^T$$

$$\overline{G}_x^0(t,T_x) = \begin{pmatrix} g_{11}^{0x} & g_{12}^{0x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{11}^{0x} & g_{12}^{0x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{11}^{0x} & g_{12}^{0x} \end{pmatrix},\quad \overline{G}_x^1(t,T_x) = \begin{pmatrix} g_{11}^{1x} & g_{12}^{1x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{11}^{1x} & g_{12}^{1x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{11}^{1x} & g_{12}^{1x} \end{pmatrix}$$

$$\overline{G}_y^0(t,T_y) = \begin{pmatrix} g_{11}^{0y} & g_{12}^{0y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{11}^{0y} & g_{12}^{0y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{11}^{0y} & g_{12}^{0y} \end{pmatrix},\quad \overline{G}_y^1(t,T_y) = \begin{pmatrix} g_{11}^{1y} & g_{12}^{1y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{11}^{1y} & g_{12}^{1y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{11}^{1y} & g_{12}^{1y} \end{pmatrix}$$

$$g_{11}^{0x} = 1 - 2t^3/T_x^3 - 3t^2/T_x^2,\ g_{12}^{0x} = t + t^3/T_x^2 - 2t^2/T_x^2,\ g_{11}^{1x} = -2t^3/T_x^3 + 3t^2/T_x^2$$

$$g_{12}^{1x} = t^3/T_x^2 - t^2/T_x,\ g_{11}^{0y} = 1 - 2t^3/T_y^3 - 3t^2/T_y^2$$

$$g_{11}^{1y} = -2t^3/T_y^3 + 3t^2/T_y^2,\ g_{12}^{1y} = t^3/T_y^2 - t^2/T_y,\ g_{12}^{0y} = t + t^3/T_y^2 - 2t^2/T_y^2$$

Не нарушая общности, будем полагать, что

$$T = T_x = \min(T_x,T_y), \qquad T_y = T_x + \alpha, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0 \qquad (2.15)$$

Подставим (2.15) в условие (2.4). Получим

$$\left\| z(t,T_x,T_y) \right\| = \left\| \begin{pmatrix} z_1(t,T_x,T_y) \\ z_2(t,T_x,T_y) \\ z_3(t,T_x,T_y) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x_1(t,T_x) - y_1(t,T_y) \\ x_2(t,T_x) - y_2(t,T_y) \\ x_3(t,T_x) - y_3(t,T_y) \end{matrix} \right\| = \left\| \overline{G}(t,T_x,T_y)\,\mathrm{x}\, z^{0,1} \right\| \neq 0 \qquad (2.16)$$

$$t \in [0,T_x]$$

Для выполнения (2.16) необходимо и достаточно, чтобы система

$$x_1(t,T_x) - y_1(t,T_y) = 0\,,\ x_2(t,T_x) - y_2(t,T_y) = 0\,,\ x_3(t,T_x) - y_3(t,T_y) = 0 \qquad (2.17)$$

не имела решения относительно переменной $t \in [0,T_x]$.

Для неразрешимости (2.17) при всех $t \in [0,T_x]$ необходимо и достаточно, чтобы вектор-столбцы матрицы $\overline{G}(t,T_x,T_y)$ были линейно независимыми, т.е. положительно определенной была следующая матрица [4]:

$$H(T_x,T_y) = \int_0^{T_x} \overline{G}(t,T_x,T_y)\overline{G}^T(t,T_x,T_y)dt \quad (2.18)$$

Вычисления по (2.13)–(2.16) показывают, что матрица (2.18) диагональная:

$$H(T_x,T_y)=\begin{pmatrix} h(T_x,T_y) & 0 & 0 \\ 0 & h(T_x,T_y) & 0 \\ 0 & 0 & h(T_x,T_y) \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

где

$$\begin{aligned} h(T_x,T_y)=\int_0^{T_x}\Bigg\{&\sum_{j=1}^{2}[(g_{1j}^{0x}(t,T_x))^2+(g_{1j}^{0y}(t,T_x,T_y))^2]+ \\ &+\sum_{j=1}^{2}[(g_{1j}^{1x}(t,T_x))^2+(g_{1j}^{1y}(t,T_x,T_y))^2]\Bigg\}dt \end{aligned} \tag{2.20}$$

Для положительной определенности (2.19) достаточно, чтобы $h(T_x,T_y)>0$. Определим время T_x, при котором $h(T_x,T_y)>0$. С помощью (2.13)–(2.15) найдем

$$\int_0^{T_x}(g_{11}^{0x}(t,T_x))^2\,dt=\int_0^{T_x}(g_{11}^{1x}(t,T_x))^2\,dt=\frac{13}{35}T_x \tag{2.21)(a}$$

$$\int_0^{T_x}(g_{12}^{0x}(t,T_x))^2\,dt=\frac{1}{105}T_x,\ \int_0^{T_x}(g_{12}^{1x}(t,T_x))^2\,dt=\frac{9}{105}T_x^3 \tag{2.21)(b}$$

$$\int_0^{T_x}(g_{11}^{0y}(t,T_x,T_y))^2\,dt=T_x\left(\frac{4}{7}\ {}^{6}-2\ {}^{5}+\frac{9}{5}\ {}^{4}+\ {}^{3}-2\ {}^{2}+1\right) \tag{2.21)(c}$$

$$\int_0^{T_x}(g_{12}^{0y}(t,T_x,T_y))^2\,dt=T_x^3\left(\frac{1}{7}\ {}^{4}-\frac{2}{3}\ {}^{3}+\frac{6}{5}\ {}^{2}-\ \ +\frac{1}{3}\right) \tag{2.21)(d}$$

$$\int_0^{T_x}(g_{11}^{1y}(t,T_x,T_y))^2\,dt=T_x\ \ {}^{4}\left(\frac{4}{7}\ {}^{2}-2\ \ +\frac{9}{5}\right) \tag{2.21)(e}$$

$$\int_0^{T_x}(g_{12}^{1y}(t,T_x,T_y))^2\,dt=T_x^3\ \ {}^{2}\left(\frac{4}{9}\ {}^{4}-3\ {}^{3}+\frac{44}{7}\ {}^{2}-4\ \ +\frac{4}{5}\right) \tag{2.21)(f}$$

где с учетом (2.17) введено следующее обозначение:

$$\frac{T_x}{T_y}=\frac{T_x}{T_x+\sim}=\frac{1}{1+\sim/T_x}= \tag{2.22}$$

Как следует из (2.21)(c)-(f), многочлен в скобке (2.21)(e) положителен на всем интервале $0<\ \ <1$. Многочлены в скобках (2.21)(c), (2.21)(d) и (2.21)(f), принимают положительные значения вблизи крайних точек – справа от $\ \ =0$ и слева от $\ \ =1$. Если эти многочлены положительны на интервале $0<\ \ <1$, то для любого $T_x>0$ положительны все интегралы (2.21)(a)–(2.21)(f) и, следовательно, $h(T_x,T_y)>0$. В противном случае, если $\ ^*>0$ наименьший общий положительный корень этих многочленов на интервале $0<\ \ <1$, из (2.22) можно определить, то наименьшее значение времени $T_x^*=\dfrac{\sim\ \ ^*}{1-\ \ ^*}$, при котором обеспечивается положительность интегралов (2.21)(c)-(f) и, следовательно, положительная определенность матрицы (2.19). Заметим, что если в (2.17) $\sim\ =0$, то $T_y=T_x$, т.е. $\ \ =1$. Тогда интегралы в (2.21)(a)-(f) положительны и, следовательно, положительно определена и матрица $H(T_x,T_y)$.

Автор приносит свою благодарность чл.–корр. РАН А.А. Меликяну и Н.В. Овакимян за

совместное обсуждение постановки задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р. Об общей теории систем управления // Тр. I-го конгресса Междунароной федерации по автоматическому управлениюю. (IFAC). М.:АН СССР, 1961. Т.2. С.521-547.
2. Черноусько Ф. Л. О построении ограниченного управления в колебательных системах // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 549-558.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
4. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1973. 496 с.

<u>Сведения об авторе</u>

Аветисян Ваган Вардгесович
Доктор физ.-мат.наук, ЕГУ и Институт механики НАН РА
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б},
Тел: (+37410) 52-48-90; E-mail: vanavet@yahoo.com

К ПРИМЕНЕНИЮ НОВЫХ КОМБИНИРОВАННЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕШЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ СОСТАВНЫХ ТЕЛ

Агаларян О.Б.

В постановке плоской задачи теории упругости рассматривается краевая задача составного клина, изготовленного из трех различных материалов и ослабленного трещиной конечной длины. С помощью интегральных преобразований решение краевой задачи сведено к решению системы сингулярных интегральных уравнений относительно введенных двух новых неизвестных функций, которые выражаются через компоненты тензора напряжений. При этом вводятся новые комбинированные механические параметры, которые существенно упрощают как вид сложной зависимости решения от механических параметров, так и вид трансцендентного уравнения, характеризующего поведение поля напряжений в окрестности вершины соединения клиньев. В отличие от параметров Дандерса, областью изменения их является квадрат с центром в начале координат и сторона длиной, равной двум. Исследуется явление малонапряженности на более реальной физической основе.

В отличие от однородных тел в составных телах виды возникающих полей напряжений и перемещений существенно зависят от механических параметров: чем больше разница значений этих параметров, тем более существенно перераспределение этих полей в теле в целом и, в частности, около линий соединения и особенно в окрестностях угловых точек. Из исследований по этим направлениям отметим [1-6], в которых основное внимание направлено на определения характеров полей напряжений в окрестностях угловой точки в зависимости от величин геометрических и механических параметров. По существу, решение этого вопроса сводится к определению корня некоторого трансцендентного уравнения в определенном конечном интервале.

В настоящей работе исследуется первая краевая задача составного тела, состоящего из трех бесконечных клиньев с произвольными растворами углов. Средний клин на линии своей биссектрисы содержит трещину конечной длины, берега которой нагружены уравновешенными внешними нагрузками. Необходимо определить как напряженное состояние составного тела, так и асимптотический характер напряженного состояния в окрестности вершины соединения клиньев и коэффициенты интенсивностей напряжений на концах трещины.

Пусть $\Omega_i\left(i=1,2,3\right)$ – три бесконечных клина с углами α_i, $\left(\alpha_2+2\alpha_1+\alpha_3\le 2\pi\right)$ в полярной системе координат $\left(r,\vartheta\right)$.

Имеем следующие уравнения статики:

$$\begin{cases} r\dfrac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\dfrac{\partial\tau_{r\vartheta}}{\partial\vartheta}+\sigma_r-\sigma_\theta=0 \\ \dfrac{\partial\sigma_\vartheta}{\partial\vartheta}+r\dfrac{\partial\tau_{r\vartheta}}{\partial r}+2\tau_{r\vartheta}=0 \end{cases} \tag{1.1}$$

и уравнение неразрывности, написанное в компонентах напряжений

$$\Delta\left(\sigma_r+\sigma_\vartheta\right)=0,\ \ \Delta=\frac{\partial}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \tag{1.2}$$

Систему уравнений (1.1) и (1.2) необходимо решить при следующих граничных условиях:

$$\begin{cases} \sigma_\vartheta^{(2)}\left(r,-\left(\alpha_2+\alpha_1\right)\right)=0 \\ \tau_{r\vartheta}^{(2)}\left(r-\left(\alpha_2+\alpha_1\right)\right)=0 \end{cases},\quad \begin{cases} \sigma_\vartheta^{(3)}\left(r,\alpha_1+\alpha_3\right)=0 \\ \tau_{r\vartheta}^{(3)}\left(r,\alpha_1+\alpha_3\right)=0 \end{cases} \tag{1.3}$$

На общих гранях будем иметь условие непрерывности составляющих напряжений и перемещений, т.е.

$$\begin{cases} \sigma_\vartheta^{(2)}\left(r-\alpha_1\right)=\sigma_\vartheta^{(1)}\left(r-\alpha_1\right) \\ \tau_{r\vartheta}^{(2)}\left(r,-\alpha_1\right)=\tau_{r\vartheta}^{(1)}\left(r,-\alpha_1\right) \end{cases},\quad \begin{cases} u_2\left(r,-\alpha_1\right)=u_1\left(r,-\alpha_1\right) \\ v_2\left(r,-\alpha_1\right)=v_1\left(r,-\alpha_1\right) \end{cases} \tag{1.4}$$

и соответственно,

$$\begin{cases}\sigma_{\vartheta}^{(3)}\left(r,\alpha_1\right)=\sigma_{\vartheta}^{(1)}\left(r,\alpha_1\right)\\ \tau_{r\vartheta}^{(3)}\left(r,\alpha_1\right)=\tau_{r\vartheta}^{(1)}\left(r,\alpha_1\right)\end{cases},\quad \begin{cases}u_3\left(r,\alpha_1\right)=u_1\left(r,\alpha_1\right)\\ v_3\left(r,\alpha_1\right)=v_1\left(r,\alpha_1\right)\end{cases} \tag{1.5}$$

На границах разреза заданы внешние уравновешенные нормальные и касательные нагрузки

$$\begin{cases}\sigma_{\vartheta}^{+}\left(r,0\right)=\sigma_{\vartheta}^{-}\left(r,0\right)=\mathrm{P}\left(r\right)\\ \tau_{r\vartheta}^{+}\left(r,0\right)=\tau_{r\vartheta}^{-}\left(r,0\right)=\mathrm{T}\left(r\right)\end{cases} \tag{1.6}$$

Предварительно на основе преобразования условий непрерывности компонент перемещений на общих гранях клиньев и на линии продолжения трещины вводятся следующие новые неизвестные функции, отличные от нуля лишь на берегах трещины

$$\begin{cases}\text{£}_r^{+}\left(r,0\right)-\text{£}_r^{-}\left(r,0\right)=\text{¨}\left(r\right)=\begin{cases}\text{¨}\left(r\right) & r\in\left(l_1,l_2\right)\\ 0 & r\notin\left(l_1,l_2\right)\end{cases}\\ \dfrac{\partial}{\partial \text{g}}\left[\text{£}_r^{+}\left(r,0\right)-\text{£}_r^{-}\left(r,0\right)\right]-\dfrac{\partial}{\partial r}r\left[\text{¥}_{r\text{g}}^{+}\left(r,0\right)-\text{¥}_{r\text{g}}^{-}\left(r,0\right)\right]=\\ =\Psi\left(r\right)=\begin{cases}\Psi\left(r\right) & r\in\left(l_1,l_2\right)\\ 0 & r\notin\left(l_1,l_2\right)\end{cases}\end{cases} \tag{1.7}$$

где ε_r , $\gamma_{r\vartheta}$ – компоненты тензора деформации, l_1 и l_2 – координаты вершины трещины.

Это позволяет решение смешанной задачи свести к решению системы уравнений равновесия и условий совместности с граничными условиями, написанными только относительно компонент тензора напряжений.

Для решения краевой задачи применим интегральное преобразование Меллина. В результате, из преобразованных граничных условий, написанных относительно компонентов напряжений, приходим к алгебраической системе из двенадцати уравнений относительно неизвестных параметров. Решая эту систему и применяя обратное преобразование Меллина, получим для компонент напряжения интегральные выражения. Далее, из граничных условий на берегах трещины окончательно для определения неизвестных функций приходим к системе интегральных уравнений, которая после соответствующей замены переменных с выделенными особенностями примет вид:

$$\begin{cases}\int\limits_{-1}^{1}\left[\dfrac{1}{\text{¶}-x}+K_{11}^{(1)}\left(\text{¶},x\right)\right]\text{¨}_1\left(\text{¶}\right)d\text{¶}+\\ +\int\limits_{-1}^{+1}\left[\dfrac{1}{\text{¶}-x}+K_{12}^{(1)}\left(\text{¶},x\right)\right]\cdot_1\left(\text{¶}\right)d\text{¶}=\mathrm{P}\left(x\right)\\ \int\limits_{-1}^{1}\left[\dfrac{1}{\text{¶}-x}+K_{21}^{(2)}\left(\text{¶},x\right)\right]\text{¨}_1\left(\text{¶}\right)d\text{¶}+\\ +\int\limits_{-1}^{+1}\left[\dfrac{1}{\text{¶}-x}+K_{22}^{(2)}\left(\text{¶},x\right)\right]\cdot_1\left(\text{¶}\right)d\text{¶}=\mathrm{T}\left(x\right)\end{cases} \tag{1.8}$$

Здесь $K_{ij}^{(j)}\left(\xi,x\right)$, $\mathrm{P}_1\left(x\right)$,$\mathrm{T}_1\left(x\right)$ выражаются через известные функции, которые из-за ограниченности объема статьи не приводятся .

При этом характер напряжения в окрестности соединения определяется соответствующим корнем трансцендентного уравнения, которое получается приравниванием к нулю главного определителя окончательной системы:

$$\begin{gathered}D\left(\text{«}_{21},\text{«}_{23},m_1,m_2,m_3,\text{~}_1,\text{~}_2,\text{~}_3\right)=0\\ \left(\text{«}_{21}=\text{«}_2/\text{«}_1\ ,\ \text{«}_{31}=\text{«}_3/\text{«}_1\ \right)\ m_i=4\left(1-\text{¬}_i\right),\quad m_i=4/\left(1+\text{¬}_i\right)\end{gathered} \tag{1.9}$$

ν_i – коэффициент Пуассона.

С помощью комбинированных механических параметров

$$\begin{cases} a = \dfrac{\mu_2\left(m_1+1\right)-\mu_1}{\mu_2-\mu_1} \\ b = \dfrac{\mu_1\left(m_2-1\right)-\mu_1}{\mu_2-\mu_1} \end{cases}; \qquad \begin{cases} c = \dfrac{\mu_3\left(m_1+1\right)-\mu_1}{\mu_3-\mu_1} \\ d = \dfrac{\mu_1\left(m_2-1\right)-\mu_3}{\mu_3-\mu_1} \end{cases} \tag{1.10}$$

уравнение принимает следующий симметричный вид:

$$\begin{gathered} D\left(a,b,c,d\right)=K_1^{(4)}a^2d^2+K_2^{(4)}c^2b^2+K_3^{(4)}b^2d^2+K_4^{(4)}abd^2+K_5^{(4)}b^2cd+K_6^{(4)}abcd+ \\ +K_1^{(3)}a^2d+K_2^{(3)}bc^2+K_3^{(3)}b^2d+K_4^{(3)}bd^2+K_5^{(3)}b^2c+K_6^{(3)}ad^2+K_7^{(3)}abd+ \\ +K_8^{(3)}abc+K_9^{(3)}bcd+K_{10}^{(3)}acd+K_1^{(2)}a^2+K_2^{(2)}b^2+K_3^{(2)}c^2+K_4^{(2)}d^2+K_5^{(2)}ab+K_2^{(6)}ac+ \\ +K_7^{(2)}ad+K_8^{(2)}bc+K_9^{(2)}bd+K_{10}^{(2)}cd+K_1^{(1)}a+K_2^{(1)}b+K_1^{(1)}c+K_4^{(1)}+K_0=0 \end{gathered} \tag{1.11}$$

где введенные функции $K_i^{(j)}=K_i^{(j)}\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$ выражаются через тригонометрические функции. При этом эти новые механические параметры существенно сокращают объем вычислительной части при построении решения задачи. В случаях, когда $\mu_1=\mu_2$ или $\mu_1=\mu_3$, количество независимых механических параметров уменьшается и исходная система принимает более простой вид. Эти случаи можно рассмотреть отдельно. Однако уравнение, определяющее характер поля напряжений в окрестности соединения, можно получить из (1.11) после соответствующего преобразования и предельного перехода. В частности, когда $\mu_1=\mu_3,\ m_3=m_1$, получается известное уравнение для двух материалов, написанное в следующем симметричном виде $\left[6\right]$:

$$\begin{gathered} K\left(s,\alpha_2\right)\alpha^2+K\left(s,\alpha_1\right)\beta^2+\left[K\left(s,\alpha_1+\alpha_2\right)-K\left(s,\alpha_1\right)-K\left(s,\alpha_2\right)\right]\alpha\beta- \\ -4K\left(s,\alpha_2\right)\mathrm{Sin}^2\left(s\alpha_1\right)\alpha++4K\left(s,\alpha_1\right)\mathrm{Sin}^2\left(s\alpha_2\right)b+4K\left(s,\alpha_2\right)K\left(s,\alpha_1\right)=0 \end{gathered} \tag{1.12}$$

Введенная функция $K\left(s,x\right)$ и новые параметры α и β имеют следующий вид:

$$K\left(s,x\right)=\mathrm{Sin}^2\left(sx\right)-s^2\mathrm{Sin}x \quad \alpha=\frac{\mu_2 m_1}{\mu_2-\mu_1}, \quad \beta=\frac{\mu_1 m_2}{\mu_2-\mu_1};\ \left(a=\alpha+1, \quad b=\beta-1\right) \tag{1.13}$$

Параметры α и β меняются в неограниченных областях.

При $\alpha_1=\left(\alpha-1\right)/\left(\alpha+1\right)$, $\beta_1=\left(\beta-1\right)/\left(\beta+1\right)$ область изменения параметров α_1, β_1 на плоскости $\left(\alpha_1,\beta_1\right)$ представляет собой квадрант с центром в начале координат и со стороной, равной двум, что облегчает исследования характерных механических величин как функций зависящих от нескольких аргументов $\left[7\right]$.

В случае, когда $\mu_{12}=\mu_{13}=1$ из (1.11), получим следующее уравнение относительно неизвестного параметра s,

$$\begin{gathered} K\left(s,\alpha_2\right)n^2+K\left(s,\alpha_3\right)m^2+K\left(s,2\alpha_1\right)+ \\ \left[K\left(s,2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)+K\left(s,2\alpha_1\right)-K\left(s,2\alpha_1+\alpha_2\right)-K\left(s,2\alpha_1+\alpha_3\right)\right]mn+ \\ +\left[K\left(s,2\alpha_1+\alpha_2\right)-K\left(s,2\alpha_1\right)-K\left(s,\alpha_2\right)\right]n+\left[K\left(s,2\alpha_1+\alpha_3\right)-K\left(s,2\alpha_1\right)-K\left(s,\alpha_3\right)\right]m=0 \end{gathered} \tag{1.14}$$

где $n=m_1/m_2$, $m=m_1/m_3$;

В случаях 1) $2\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2,\ \alpha_3 = \pi;$ 2) $2\alpha_1 = \pi,\ \alpha_2 = \alpha_3 = \pi/2,$ 3) $2\alpha_1 = \pi/2,\ \alpha_2 + \alpha_3 = \pi,$ получим, соответственно, уравнения, обобщающие известные результаты. В общем случае уравнение (1.11) имеет довольно сложный вид, поэтому рассматривая частный случай в предположении, что раствор угла среднего клина принимается бесконечно малым и заменяя $\mathrm{Sin}\vartheta \approx \vartheta, \mathrm{Cos}\vartheta \approx 1$, получим более простое уравнение. Сравнивая полученное уравнение с уравнением для составных тел, состоящих из двух материалов, можно выяснить количественное и качественое влияние геометрических и механических параметров среднего клина (шва) на асимптотическое поведение напряжений в вершине соединения. Подставляя $s = 1$ $[4]$, получим уравнение предельной поверхности в трехмерном геометрическом пространстве, которая отделяет область концентрации от области малонапряженности. Для каждого фиксированного значения α_i поверхность превращается в кривую, что дает возможность сделать непосредственное сравнение соответствующей предельной кривой для двух клиньев. Численные результаты позволяют сделать вывод, что существует довольно широкий класс геометрических и механических параметров, при которых более ярко проявляется явление малонапряженности. На основе численного анализа основных механических величин для некоторых серий механических и геометрических величин можно сделать практически важные выводы для прочностных свойств в окрестности соединения составного тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.–Л.: Изд. АН СССР, 1967.
2. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. //J. of Appl. Mech. 1951. V .19. №4. С.526-531.
3. Боджи Д. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора. //ПМ. 1972. Т.38. №2. С.87–97.
4. Чобанян К. С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд. АН Арм.ССР, 1987.
5. Аксентян О. К., Лущик О. И. Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины стыкового соединения. //ПМ. 1982.Т.7. №2. С.67–73.
6. Агаларян О. Б. Напряженно-деформированное состояние составного тела изготовленного из двух упругих клиньев различного раствора. Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1990.
7. Агаларян О. Б. К плоской задаче составного клина с радиальной трещиной конечной длины. // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №3.

Сведения об авторе:

Агаларян Оганес Бегларович
Кандидат физ.-мат.наук, старший научный сотрудник,
Институт механики НАН РА
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна $24^{б}$,
Тел: (+37410) 52-48-90.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Агаловян Л. А. , Закарян Т. В.

Асимптотическим методом решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений найдено решение динамической первой краевой задачи для ортотропной полосы-прямоугольника. Решение складывается из решений внутренней задачи и пограничных слоев. Построены итерационные процессы для определения всех компонент тензора напряжений и вектора перемещения. Доказано, что во внутренней области возникают сдвиговые и продольные колебания. Изучены вынужденные колебания в области пограничного слоя, показано, что эти колебания убывают экспоненциально при удалении от торцов. Выведено характеристическое уравнение для определения показателей экспонент. Определены корни этого уравнения для пластин из стеклопластиков. Определены показатели экспонент. Проведено сопряжение решений внутренней задачи и пограничного слоя.

1. **Решение внутренней задачи**. Для определения напряженно-деформированных состояний тонких тел (балки, пластины, оболочки), на основе уравнений теории упругости, в последние десятилетия широко используется асимптотический метод. Первыми являются работы Фридрихса К., Гольденвейзера А. Л., Грина А., Воровича И. И. [1-4]. Первая статическая краевая задача тонких тел асимптотическим методом рассмотрена в [5,6]. Асимптотический метод оказался особенно эффективным для решения второй и смешанной краевых задач тонких тел [7]. Собственные и вынужденные колебания тонких тел этим методом изучены в [8,9]. Обзор работ этого направления содержится в [10].

Ставится задача: найти решение уравнений теории упругости для плоской деформации в области $D=\{(x,y):\ \ 0\le x\le l,\ \ |y|\le h,\ h<<l\}$

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\beta_{11}\sigma_{xx}+\beta_{12}\sigma_{yy}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}=\beta_{12}\sigma_{xx}+\beta_{22}\sigma_{yy}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=a_{66}\sigma_{xy} \tag{1.1}$$

где
$$\beta_{ij}=\frac{1}{a_{33}}\left(a_{ij}a_{33}-a_{i3}a_{j3}\right),\qquad i,j=1,2,\ a_{66}=\frac{1}{G_{12}} \tag{1.2}$$

При граничных условиях

$$\sigma_{yy}(y=h)=Y^{+}(\xi)\exp(i\omega t),\ \sigma_{xy}(y=h)=X^{+}(\xi)\exp(i\omega t),\ \xi=x/l \tag{1.3}$$
$$\sigma_{yy}(y=-h)=-Y^{-}(\xi)\exp(i\omega t),\ \sigma_{xy}(y=-h)=-X^{-}(\xi)\exp(i\omega t)$$

где $X^{\pm}(¶)$, $Y^{\pm}(¶)$ – заданные функции, ω – частота вынуждающего воздействия. Ниже убедимся, что граничными условиями при $x=0,l$ обусловлены появления пограничных слоев, поэтому они будут конкретизированы позже.

Решение задачи (1.1),(1.3) будем искать в виде [8]

$$\sigma_{xx}(x,y,t)=\sigma_{11}(x,y)\exp(i\omega t),\ \sigma_{xy}(x,y,t)=\sigma_{12}(x,y)\exp(i\omega t)$$
$$\sigma_{yy}(x,y,t)=\sigma_{22}(x,y)\exp(i\omega t)\ ,\ u(x,y,t)=u_x(x,y)\exp(i\omega t) \tag{1.4}$$
$$v(x,y,t)=u_y(x,y)\exp(i\omega t)$$

Подставив (1.4) в уравнения (1.1), затем перейдя к безразмерным координатам и перемещениям $\xi=x/l$, $\zeta=y/h$, $U=u_x/l$, $V=u_y/l$, получим сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon=h/l$ систему

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\omega_*^2U=0,\quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\omega_*^2V=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial\xi}=\beta_{11}\sigma_{11}+\beta_{12}\sigma_{22},\quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\zeta}=\beta_{12}\sigma_{11}+\beta_{22}\sigma_{22} \tag{1.5}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial \zeta}+\frac{\partial V}{\partial \xi}=a_{66}\sigma_{12}\ ,\qquad \omega_*^2=\rho h^2\omega^2$$

Решение системы (1.5) состоит из решений внутренней задачи (I^{int}) и пограничных слоев при $x=0,l\quad (I_b^I, I_b^{II})$. Решение внутренней задачи имеет вид

$$\sigma_{jk}^{\text{int}}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{jk}^{(s)}(\xi,\zeta)\ ,\qquad (U,V)=\varepsilon^s(U^{(s)},V^{(s)})\ ,\qquad s=\overline{0,N} \tag{1.6}$$

Подставив (1.6) в (1.5), из полученной системы $\sigma_{jk}^{(s)}$ выразятся через $U^{(s)}$, $V^{(s)}$ по формулам

$$\sigma_{11}^{(s)}=\frac{1}{\Delta_1}\left(-\beta_{12}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta}+\beta_{22}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi}\right),\ \sigma_{22}^{(s)}=\frac{1}{\Delta_1}\left(\beta_{11}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta}-\beta_{12}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi}\right) \tag{1.7}$$

$$\sigma_{12}^{(s)}=\frac{1}{a_{66}}\left(\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}\right),\qquad \Delta_1=\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}^2$$

Функции $U^{(s)}$, $V^{(s)}$ определяются из уравнений

$$\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2}+a_{66}\omega_*^2U^{(s)}=f_u^{(s)},\ \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2}+\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}\mu_*^2V^{(s)}=f_v^{(s)} \tag{1.8}$$

$$f_u^{(s)}=-a_{66}\left(\frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi}+\frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \xi\,\partial \zeta}\right),\qquad f_v^{(s)}=\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}\frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi\,\partial \zeta}-\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}\frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi}$$

Следовательно, будем иметь

$$U^{(s)}=C_1^{(s)}(\xi)\sin\sqrt{a_{66}}\,\omega_*\zeta+C_2^{(s)}(\xi)\cos\sqrt{a_{66}}\,\omega_*\zeta+\bar{u}^{(s)} \tag{1.9}$$

$$V^{(s)}=C_3^{(s)}(\xi)\sin\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_*\zeta+C_4^{(s)}(\xi)\cos\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_*\zeta+\bar{v}^{(s)}$$

где $\bar{u}^{(s)}$, $\bar{v}^{(s)}$ – частные решения уравнений (1.8). Удовлетворив условиям (1.3), определим функции $C_j^{(s)}(\xi)$ и окончательное решение внутренней задачи:

$$U^{(s)}=-\frac{\sqrt{a_{66}}}{\omega_*\sin 2\sqrt{a_{66}}\,\omega_*}\Big[\Big(X^{+(s)}-f_{\sigma_{12}}^{(s)}(\xi,1)\Big)\cos\sqrt{a_{66}}\,\omega_*(1+\zeta)+ \tag{1.10}$$

$$+\Big(X^{-(s)}+f_{\sigma_{12}}^{(s)}(\xi,-1)\Big)\cos\sqrt{a_{66}}\,\omega_*(1-\zeta)\Big]+\bar{u}^{(s)}(\xi,\zeta)$$

$$V^{(s)}=-\frac{1}{\omega_*\sin 2\sqrt{\Delta_1/\beta_{11}}\,\omega_*}\sqrt{\Delta_1/\beta_{11}}\Big[\Big(Y^{+(s)}-f_{\sigma_{22}}^{(s)}(\xi,1)\Big)\cos\sqrt{\Delta_1/\beta_{11}}\,\omega_*(1+\zeta)+$$

$$+\Big(Y^{-(s)}+f_{\sigma_{22}}^{(s)}(\xi,-1)\Big)\cos\sqrt{\Delta_1/\beta_{11}}\,\omega_*(1-\zeta)\Big]+\bar{v}^{(s)}(\xi,\zeta)$$

$$f_{\pm_{12}}^{(s)}=\frac{1}{a_{66}}\left(\frac{\partial \bar{u}^{(s)}}{\partial \zeta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}\right),\ f_{\pm_{22}}^{(s)}=\frac{1}{\Delta_1}\left(\beta_{11}\frac{\partial \bar{v}^{(s)}}{\partial \zeta}-\beta_{12}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi}\right)$$

$$X^{\pm(0)}=\pm\varepsilon X^{\pm},\ Y^{\pm(0)}=\pm\varepsilon Y^{\pm},\ X^{\pm(s)}=0,\quad Y^{\pm(s)}=0,\ s\neq 0$$

Из (1.10) следует, что, в отличие от первой статической краевой задачи [6,11], решение динамической внутренней задачи полностью определяется из условий на продольных кромках $y=\pm h$. Коренным образом различны и асимптотические порядки соответствующих компонент тензора напряжений и вектора перемещения, т. е. динамический процесс коренным образом меняет характер напряженно-деформированного состояния. Если функции $X^{\pm}$, $Y^{\pm}$ являются многочленами от ξ , итерационный процесс обрывается и получается математически точное решение внутренней задачи. В частности, когда

$$X^+ = a_1\xi + b_1\ ,\quad X^- = a_2\xi + b_2\ ,\quad Y^+ = a_3\xi + b_3\ ,\quad Y^- = a_4\xi + b_4 \tag{1.11}$$

Итерационный процесс обрывается при $s = 2$ и получаем точное решение внутренней задачи:

$$u = \left\{ \frac{-h\sqrt{a_{66}}}{\omega_* \sin 2\sqrt{a_{66}}\,\omega_*}\Big[(X^+ - f^{(1)}_{\sigma_{12}}(\xi,1))\cos\sqrt{a_{66}}\,\omega_*(1+\zeta) + \right.$$

$$\left. +(X^- + f^{(1)}_{\sigma_{12}}(\xi,-1))\cos\sqrt{a_{66}}\,\omega_*(1-\zeta)\Big] + \bar{u}^{(1)}(\xi,\zeta) \right\}\exp(i\omega t)$$

$$\sigma_{xy} = \left\{ \frac{1}{\sin 2\sqrt{a_{66}}\,\omega_*}\Big[(X^+ - f^{(1)}_{\sigma_{12}}(\xi,1))\sin\sqrt{a_{66}}\,\omega_*(1+\zeta) - \right.$$

$$\left. -(X^- + f^{(1)}_{\sigma_{12}}(\xi,-1))\sin\sqrt{a_{66}}\,\omega_*(1-\zeta)\Big] + f^{(1)}_{\sigma_{12}}(\xi,\zeta) \right\}\exp(i\omega t)$$

$$v = \left\{ -\sqrt{\Delta_1/\beta_{11}}\,\frac{h}{\omega_* \sin 2\sqrt{\Delta_1/\beta_{11}}\,\omega_*}\Big[(Y^+ - f^{(1)}_{\sigma_{22}}(\xi,1))\cos\sqrt{\Delta_1/\beta_{11}}\,\omega_*(1+\zeta) + \right.$$

$$\left. +(Y^- + f^{(1)}_{\sigma_{22}}(\xi,-1))\cos\sqrt{\Delta_1/\beta_{11}}\,\omega_*(1-\zeta)\Big] - \bar{v}^{(1)}(\xi,\zeta) \right\}\exp(i\omega t) \tag{1.12}$$

$$\sigma_{yy} = \left\{ \frac{1}{\sin 2\sqrt{\Delta_1/\beta_{11}}\,\omega_*}\Big[(Y^+ - f^{(1)}_{\sigma_{22}}(\xi,1))\sin\sqrt{\Delta_1/\beta_{11}}\,\omega_*(1+\zeta) - \right.$$

$$\left. -(Y^- + f^{(1)}_{\sigma_{22}}(\xi,-1))\sin\sqrt{\Delta_1/\beta_{11}}\,\omega_*(1-\zeta)\Big] + f^{(1)}_{\sigma_{22}}(\xi,\zeta) \right\}\exp(i\omega t)$$

$$\sigma_{xx} = \left\{ -\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}\ \frac{1}{\sin 2\sqrt{\Delta_1/\beta_{11}}\,\omega_*}\left[(Y^+ - f^{(1)}_{\sigma_{22}}(\xi,1))\sin\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_*(1+\zeta) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -(Y^- + f^{(1)}_{\sigma_{22}}(\xi,-1))\sin\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_*(1-\zeta)\right] - f^{(1)}_{\sigma_{11}}(\xi,\zeta) \right\}\exp(i\omega t)$$

где

$$f^{(1)}_{\sigma_{11}} = -\frac{\sqrt{a_{66}}}{\Delta_1}\left\{ \left(\beta_{12}\omega_* c_3 + \frac{\varepsilon\beta_{22}a_1}{\omega_* \sin 2\sqrt{a_{66}}\,\omega_*} \right)\cos\sqrt{a_{66}}\,\omega_*(1+\zeta) + \right.$$

$$\left. + \left(\beta_{12}\omega_* c_4 + \frac{\varepsilon\beta_{22}a_2}{\omega_* \sin 2\sqrt{a_{66}}\,\omega_*} \right)\cos\sqrt{a_{66}}\,\omega_*(1-\zeta) \right\}$$

$$f^{(1)}_{\sigma_{22}} = \frac{\sqrt{a_{66}}}{\Delta_1}\left\{ \left(\beta_{11}\omega_* c_3 + \frac{\varepsilon\beta_{12}a_1}{\omega_* \sin 2\sqrt{a_{66}}\,\omega_*} \right)\cos\sqrt{a_{66}}\,\omega_*(1+\zeta) + \right.$$

$$\left. + \left(-\beta_{11}\omega_* c_4 + \frac{\varepsilon\beta_{12}a_2}{\omega_* \sin 2\sqrt{a_{66}}\,\omega_*} \right)\cos\sqrt{a_{66}}\,\omega_*(1-\zeta) \right\} \tag{1.13}$$

$$f^{(1)}_{\sigma_{12}} = \frac{1}{a_{66}}\sqrt{\Delta_1/\beta_{11}}\left\{ \left(\omega_* c_1 - \frac{\varepsilon a_3}{\omega_* \sin 2\sqrt{\Delta_1/\beta_{11}}\,\omega_*} \right)\cos\sqrt{\Delta_1/\beta_{11}}\,\omega_*(1+\zeta) - \right.$$

$$-\left(\omega_* c_2+\frac{\varepsilon a_4}{\omega_*\sin 2\sqrt{\Delta_1/\beta_{11}}\,\omega_*}\right)\cos\sqrt{\Delta_1/\beta_{11}}\,\omega_*(1-\zeta)\Bigg\}$$

$$\overline{u}^{(1)}=c_1\sin\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_*(1+\zeta)+c_2\sin\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_*(1-\zeta),\ \overline{v}^{(1)}=c_3\sin\sqrt{a_{66}}\,\omega_*(1+\zeta)+c_4\sin\sqrt{a_{66}}\,\omega_*(1-\zeta),$$

$$c_1=-\overline{\beta_{11}}a_3d,\ c_2=a_4\overline{\beta_{11}}d,\ c_3=\overline{\beta_{22}}a_1d\ ,\ c_4=-\overline{\beta_{22}}a_2d$$

$$\overline{\beta_{11}}=-\frac{\varepsilon a_{66}(\Delta_1-\beta_{12})}{\beta_{11}\sin 2\sqrt{\Delta_1/\beta_{11}}\,\omega_*}\ ,\ \overline{\beta_{22}}=-\frac{\varepsilon(\Delta_1-\beta_{12}a_{66})}{\beta_{11}\sin 2\sqrt{a_{66}}\,\omega_*}\ ,\ d=\frac{\beta_{11}}{\omega_*^2(\Delta_1-\beta_{11}a_{66})}$$

2. **Решение пограничного слоя.** Решение внутренней задачи (1.6), (1.10) или (1.12), как правило, не удовлетворяет граничным условиям на кромках $x=0,l$ прямоугольника, что косвенным образом подтверждает сингулярную возмущенность исходной краевой задачи. Возникшая невязка устраняется решением пограничного слоя. Для построения этого решения в уравнениях (1.5) вводится замена переменной $\gamma=\xi/\varepsilon$, приписав всем искомым величинам индекс ,,b” (boundary). Решение вновь полученной системы ищем в виде [6,10]

$$\sigma_{jkb}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{jkb}^{(s)}(\zeta)\exp(-\lambda\gamma),\qquad (u_b,v_b)=\varepsilon^s(u_b^{(s)}(\zeta),v_b^{(s)}(\zeta))\exp(-\lambda\gamma)\tag{2.1}$$

Для определения ± $_{jkb}^{(s)}$, $u_b^{(s)}$, $v_b^{(s)}$ получим систему

$$-\lambda\sigma_{11b}^{(s)}+\frac{d\sigma_{12b}^{(s)}}{d\zeta}+\omega_*^2u_b^{(s)}=0,\quad -\lambda\sigma_{12b}^{(s)}+\frac{d\sigma_{22b}^{(s)}}{d\zeta}+\omega_*^2v_b^{(s)}=0\ ,$$

$$-\lambda u_b^{(s)}=\beta_{11}\sigma_{11b}^{(s)}+\beta_{12}\sigma_{22b}^{(s)},\qquad \frac{du_b^{(s)}}{d\zeta}-\lambda v_b^{(s)}=a_{66}\sigma_{12b}^{(s)}\ ,\tag{2.2}$$

$$\frac{dv_b^{(s)}}{d\zeta}=\beta_{12}\sigma_{11b}^{(s)}+\beta_{22}\sigma_{22b}^{(s)}$$

Из системы (2.2) следуют

$$\sigma_{11b}^{(s)}=-\frac{1}{\lambda(\Delta_1-\beta_{12}a_{66})}\left[\beta_{12}\frac{d^2u_b^{(s)}}{d\zeta^2}+(\lambda^2\beta_{22}+a_{66}\beta_{12}\omega_*^2)u_b^{(s)}\right]$$

$$\sigma_{12b}^{(s)}=\frac{1}{(a_{66}\omega_*^2+\lambda^2)(\Delta_1-\beta_{12}a_{66})}\left(\beta_{11}\frac{d^3u_b^{(s)}}{d\zeta^3}+b_1\frac{du_b^{(s)}}{d\zeta}\right)\tag{2.3}$$

$$\sigma_{22b}^{(s)}=\frac{1}{\lambda(\Delta_1-\beta_{12}a_{66})}\left(\beta_{11}\frac{d^2u_b^{(s)}}{d\zeta^2}+b_2u_b^{(s)}\right)$$

$$v_b^{(s)}=\frac{1}{\lambda(a_{66}\omega_*^2+\lambda^2)(\beta_{12}a_{66}-\Delta_1)}\left\{\beta_{11}a_{66}\frac{d^3u_b^{(s)}}{d\zeta^3}+\left[\lambda^2(a_{66}^2+2\beta_{12}a_{66}-\Delta_1)+a_{66}^2\omega_*^2\beta_{11}\right]\frac{du_b^{(s)}}{d\zeta}\right\}$$

$$b_1=\lambda^2(a_{66}+\beta_{12})+\omega_*^2(\Delta_1+a_{66}(\beta_{11}-\beta_{12}))\ ,\qquad b_2=\lambda^2(a_{66}+\beta_{12})+a_{66}\beta_{11}\omega_*^2$$

а также следующее уравнение для определения $u_b^{(s)}$:

$$\frac{d^4u_b^{(s)}}{d\zeta^4}+\frac{1}{\beta_{11}}\left[\lambda^2(a_{66}+2\beta_{12})+\omega_*^2(a_{66}\beta_{11}+\Delta_1)\right]\frac{d^2u_b^{(s)}}{d\zeta^2}+$$
$$+\frac{1}{\beta_{11}}(\lambda^2\beta_{22}+\Delta_1\omega_*^2)(\lambda^2+a_{66}\omega_*^2)u_b^{(s)}=0\tag{2.4}$$

Решение пограничного слоя должно удовлетворять условиям

$$\sigma_{12b}(\zeta=\pm1)=0\ ,\quad \sigma_{22b}(\zeta=\pm1)=0\qquad 2.5)$$

Решив уравнение (2.4), получим

$$u_b^{(s)} = A_1^{(s)}\psi_1(\zeta) + A_2^{(s)}\psi_2(\zeta) + A_3^{(s)}\psi_3(\zeta) + A_4^{(s)}\psi_4(\zeta) \tag{2.6}$$

где

$$\psi_1 = \mathrm{ch} z_1\zeta\ ,\quad \psi_2 = \mathrm{sh} z_1\zeta\ ,\quad \psi_3 = \mathrm{ch} z_3\zeta\ ,\quad \psi_4 = \mathrm{sh} z_3\zeta$$

$$z_{1,3} = \sqrt{\frac{-\left[\lambda^2(a_{66}+2\beta_{12}) + \omega_*^2(a_{66}\beta_{11}+\Delta_1)\right] \pm \sqrt{D}}{2\beta_{11}}} \tag{2.7}$$

$$D = \lambda^4(a_{66}^2 + 4a_{66}\beta_{12} - 4\Delta_1) + 2\lambda^2\omega_*^2\left[(a_{66}+2\beta_{12})(a_{66}\beta_{11}+\Delta_1) - \right.$$

$$\left. -2\beta_{11}(a_{66}\beta_{22}+\Delta_1)\right] + \omega_*^4(a_{66}\beta_{11}-\Delta_1)^2$$

По формулам (2.3), определив $\pm_{12b}^{(s)}, \pm_{22b}^{(s)}$ и удовлетворив условиям (2.5), для определения пока неизвестного показателя ª получим трансцендентное уравнение

$$(a_1a_4 - a_2a_3)^2\,\mathrm{ch}2(z_1+z_3) - (a_1a_4 + a_2a_3)^2\,\mathrm{ch}2(z_1-z_3) + 4a_1a_2a_3a_4 = 0 \tag{2.8}$$

где

$$a_1 = \beta_{11}z_1^3 + b_1z_1\ ,\quad a_2 = \beta_{11}z_3^3 + b_1z_3\ ,\quad a_3 = \beta_{11}z_1^2 + b_2\ ,\quad a_4 = \beta_{11}z_3^2 + b_2 \tag{2.9}$$

В силу свойства пограничного слоя, должны определить корни ª$_n$ уравнения (2.8) с Re ª$_n > 0$.
В табл. 1 приведены значения первых нескольких корней для пластинки из стеклопластика ($E_1 = 55.917\cdot 10^9$ Па, $E_2 = 13.734\cdot 10^9$ Па, $E_3 = 13.734\cdot 10^9$ Па, $G_{12} = 5.592\cdot 10^9$ Па, $G_{23} = 4.905\cdot 10^9$ Па, $G_{13} = 5.592\cdot 10^9$ Па, $\nu_{12} = 0.277$, $\nu_{23} = 0.4$, $\nu_{31} = 0.068$, $\rho = 1925$ кг/м^3)

Таблица 1

$\omega = 10$ $h = 0,1$	$\omega = 10$ $h = 0,5$	$\omega = 100$ $h = 0,1$	$\omega = 100$ $h = 0,5$	$\omega = 500$ $h = 0,5$	$\omega = 1000$ $h = 0,1$	$\omega = 1000$ $h = 0,5$
0.0178356	0.0398263	0.0562252	0.12398	0.258083	0.172273	0.332416
1.10224	1.10224	1.10224	1.10221	1.10144	1.10211	1.09905
1.52009	1.52009	1.52009	1.52008	1.51997	1.52007	1.51953
2.42138 +0.268995 I	2.42138 +0.269 I	2.42138 +0.269001 I	2.42121 +0.269141 I	2. 2.4171 +0.272583 I	2.42069 +0.269576 I	2.40454 +0.282756 I
2.61995	2.61995	2.61995	2.61994	2.61968	2.61991	2.61886
2.89955	2.89955	2.89955	2.89966	2.9022	2.89998	2.90955
3.72524	3.72524	3.72524	3.72523	3.7251	3.72521	3.72471
4.14189	4.14189	4.14189	4.14189	4.14179	4.14187	4.14147
4.9572 +0.331228 I	4.9572 +0.33128 I	4.9572 +0.33123 I	4.95713 + 0.331268 I	4.95544 +0.33222 I	4.95691 +0.331387 I	4.95018 +0.335136 I
5.23993	5.23993	5.23993	5.23992	5.23979	5.23991	5.23939

В силу (2.8) в алгебраической системе из четырех однородных уравнений, вытекающих из условий (2.5), независимыми будут три, например,

$$\begin{aligned} a_1\psi_{21}A_1^{(s)} + a_1\psi_{11}A_2^{(s)} + a_2\psi_{41}A_3^{(s)} &= -a_2\psi_{31}A_4^{(s)} \\ -a_1\psi_{21}A_1^{(s)} + a_1\psi_{11}A_2^{(s)} - a_2\psi_{41}A_3^{(s)} &= -a_2\psi_{31}A_4^{(s)} \\ a_3\psi_{11}A_1^{(s)} + a_3\psi_{21}A_2^{(s)} + a_4\psi_{31}A_3^{(s)} &= -a_4\psi_{41}A_4^{(s)} \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $\psi_{11} = \mathrm{ch} z_1\ ,\ \psi_{21} = \mathrm{sh} z_1\ ,\ \psi_{31} = \mathrm{ch} z_3\ ,\ \psi_{41} = \mathrm{sh} z_3$ (2.11)

Из системы (2.10) следует

$$A_i^{(s)} = \frac{¢_i}{\Delta_2} A_4^{(s)}, \quad i = 1,2,3 \tag{2.12}$$

где Δ_2 – определитель системы (2.10), а δ_i получается заменой в Δ_2 i-того столбца столбцом из свободных членов при $A_4^{(s)}$. В результате решение (2.6) примет вид

$$u_b^{(s)} = \left[\delta_1\psi_1 + \delta_2\psi_2 + \delta_3\psi_3 + \Delta_2\psi_4\right] A^{(s)} \tag{2.13}$$

где $A^{(s)}$ – новая произвольная постоянная.

Уравнение (2.8) имеет корни типа $\pm ª_n$, $\pm \overline{ª_n}$. В силу свойства пограничного слоя должны ограничиться корнями с $\mathrm{Re}\, ª_n > 0$. Учитывая это, решение (2.13) можно преобразовать к такому виду, чтобы оно содержало лишь вещественные величины. Принимая $A^{(s)} = \frac{1}{2}\left(A_{1n}^{(s)} - iA_{2n}^{(s)}\right)$, $\tilde{u}_{bn} = u_{bn} \exp(-ª_n ¥)$, будем иметь

$$\tilde{u}_b^{(s)} = A_{1n}^{(s)} \mathrm{Re}\, \tilde{u}_{bn} + A_{2n}^{(s)} \mathrm{Im}\, \tilde{u}_{bn}, \qquad n = \overline{1,k} \tag{2.14}$$

где k – число выбранных пограничных функций, $A_{1n}^{(s)}$, $A_{2n}^{(s)}$ –вещественные постоянные, соответствующие $ª_n$. Имеют место аналогичные (2.14) формулы для напряжений и перемещения $\tilde{v}_b^{(s)}$.

3. Сопряжение решений внутренней задачи и пограничного слоя. Пусть при $x = 0$ заданы условия свободного края:

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0 \ \text{ при } x = 0 \tag{3.1}$$

Общее решение для вышеуказанных напряжений имеет вид

$$\sigma_{\alpha\beta} = (\varepsilon^{-1+s}\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}(\xi,\zeta) + \varepsilon^{-1+s}\sigma_{\alpha\beta b}^{(s)}(\gamma,\zeta))\exp(i\omega t), \quad \alpha,\beta = x, y \tag{3.2}$$

Удовлетворив условиям (3.1), получим

$$\sigma_{xx}^{(s)}(0,\zeta) + \sigma_{xxb}^{(s)}(0,\zeta) = 0, \quad \sigma_{xy}^{(s)}(0,\zeta) + \sigma_{xyb}^{(s)}(0,\zeta) = 0 \tag{3.3}$$

В условиях (3.3) $\pm_{xx}^{(s)}$, $\pm_{xy}^{(s)}$ являются известными функциями, как решения внутренней задачи. Они вычисляются по формулам (1.7), (1.10). Для определения величин пограничного слоя из (3.3) вытекают условия

$$\sigma_{xxb}^{(s)}(0,\zeta) = -\sigma_{xx}^{(s)}(0,\zeta), \quad \sigma_{xyb}^{(s)}(0,\zeta) = -\sigma_{xy}^{(s)}(0,\zeta) \tag{3.4}$$

Согласно (2.14)

$$\sigma_{\alpha\beta b}^{(s)} = A_{1n}^{(s)} \cdot \mathrm{Re}\, \tilde{\sigma}_{\alpha\beta bn} + A_{2n}^{(s)} \cdot \mathrm{Im}\, \tilde{\sigma}_{\alpha\beta bn}, \qquad \alpha,\beta = x, y, \quad n = \overline{1,m} \tag{3.5}$$

Подставив (3.5) в (3.4), получим следующую систему:

$$\begin{gathered} A_{1n}^{(s)} \cdot \mathrm{Re}\, \tilde{\sigma}_{xxbn}(0,\zeta) + A_{2n}^{(s)} \cdot \mathrm{Im}\, \tilde{\sigma}_{xxbn}(0,\zeta) = -\sigma_{xx}^{(s)}(0,\zeta) \\ A_{1n}^{(s)} \cdot \mathrm{Re}\, \tilde{\sigma}_{xybn}(0,\zeta) + A_{2n}^{(s)} \cdot \mathrm{Im}\, \tilde{\sigma}_{xybn}(0,\zeta) = -\sigma_{xy}^{(s)}(0,\zeta), \qquad n = \overline{1,m} \end{gathered} \tag{3.6}$$

Из системы (3.6) определяются постоянные $A_{1n}^{(s)}, A_{2n}^{(s)}$. Их значения можно определить методом коллокаций, Фурье, наименьших квадратов и др.

Если при $x = 0$ заданы условия жесткой заделки

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{ при } x = 0 \tag{3.7}$$

имеем

$$\begin{gathered} u = l\varepsilon^s\left[U^{(s)}(\xi,\zeta) + \tilde{u}_b^{(s)}(\gamma,\zeta)\right]\exp(i\omega t), \qquad s = \overline{0,N} \\ v = l\varepsilon^s\left[V^{(s)}(\xi,\zeta) + \tilde{v}_b^{(s)}(\gamma,\zeta)\right]\exp(i\omega t) \end{gathered} \tag{3.8}$$

где $U^{(s)}, V^{(s)}$– известные функции и вычисляются по формулам (1.10). Подставив (3.8) в условия (3.7), для определения постоянных $A_{1n}^{(s)}$, $A_{2n}^{(s)}$ в решении пограничного слоя получим систему

$$\begin{aligned} &A_{1n}^{(s)}\operatorname{Re}\tilde{u}_{bn}(0,\text{¸}\,)+A_{2n}^{(s)}\operatorname{Im}\tilde{u}_{bn}(0,\text{¸}\,)=-U^{(s)}(0,\text{¸}\,)\,, \qquad n=\overline{1,m} \\ &A_{1n}^{(s)}\operatorname{Re}\tilde{v}_{bn}(0,\text{¸}\,)+A_{2n}^{(s)}\operatorname{Im}\tilde{v}_{bn}(0,\text{¸}\,)=-V^{(s)}(0,\text{¸}\,) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Система (3.9) решается одним из вышеуказанных методов. Аналогичным образом рассматриваются другие варианты граничных условий при $x=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Friedrichs K. O. and Dressler R. F. A Boundary-Layer Theory for Elastic Plates // Comm.Pure and Appl.Math. 1961.Vol.14. №1.
2. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668-686.
3. Green A.E. On the Linear Theory of Thin Elastic Shells//Proc. Roy.Soc.Ser.A. 1962.Vol.266, №1325.
4. Ворович И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. II Всесоюзного съезда по теор. и прикл. механике, вып. 3. М.: Наука, 1966. С. 116-136.
5. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510 с.
6. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит. 1997. 414с.
7. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд.“Гитутюн” НАН РА, 2005. 468 с.
8. Агаловян Л.А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин. // Изв.ВУЗов РФ. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. №3. С. 8-11.
9. Агаловян Л. А, Агаловян М. Л. К определению частот и форм собственных колебаний ортотропной полосы. // Докл.НАН РА. 2003. Т. 103. №4. С. 296-301.
10. Агаловян Л. А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел. // Междунар. научн. журнал Прикл. Механика. 2002. Т. 38. №7. С. 3-24.
11. Агаловян Л. А. О характере взаимодействия погранслоя с внутренним напряженно-деформированным состоянием полосы. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1977. Т. 30. №5. С.48-62.

Сведения об авторах:

Агаловян Ленсер Абгарович,
академик НАН РА, зав. отделом, советник директора
Институт механики НАН РА.
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б},
Тел: (+37410) 52-58-35, E-mail: aghal@mechins.sci.am

Закарян Татевик Владиковна,
аспирант, младший научный сотрудник.
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}
Тел: (+37410) 63-88-82, E-mail: tatevik83@rambler.ru

О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН НА АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ

Агаловян М. Л.

На основе уравнений пространственной динамической задачи теории упругости рассмотрены вынужденные колебания анизотропных прямоугольных пластин, закрепленных по одной из лицевых поверхностей с абсолютно жестким основанием. Анизотропия общая (21 постоянная упругости), на противоположную лицевую поверхность действуют нормальные или тангенциальные нагрузки, которые во времени меняются гармонически. Получены асимптотические решения сформулированных задач. Показано, что в отличие от изотропных и ортотропных пластин, колебания не являются чисто сдвиговыми и продольными. Установлены условия возникновения резонанса.

1. Общий интеграл внутренней задачи. Требуется найти решение трехмерной динамической задачи теории упругости анизотропного тела (21 постоянная упругости) в области $D=\{(x,y,z):\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b,\ \min(a,b)=l,\ -h\le z\le h,\ h<<l\}$, занятой пластиной, при граничных условиях на лицевых поверхностях $z=\pm h$:

1) $$\begin{aligned}&w(x,y,h)=-w^{+}(x,y)\exp(i\Omega t),\quad \sigma_{xz}(x,y,h)=\sigma_{yz}(x,y,h)=0\\&u(x,y,-h)=\mathrm{v}(x,y,-h)=w(x,y,-h)=0\end{aligned}\tag{1.1}$$

2) $$\begin{aligned}&\sigma_{zz}(x,y,h)=-\sigma_{zz}^{+}(x,y)\exp(i\Omega t),\quad u(x,y,h)=\mathrm{v}(x,y,h)=0\\&u(x,y,-h)=\mathrm{v}(x,y,-h)=w(x,y,-h)=0\end{aligned}\tag{1.2}$$

3) $$\begin{aligned}&u(x,y,h)=u^{+}(x,y)\exp(i\Omega t),\quad (u,\mathrm{v}),\quad \sigma_{zz}(x,y,h)=0\\&u(x,y,-h)=\mathrm{v}(x,y,-h)=w(x,y,-h)=0\end{aligned}\tag{1.3}$$

4) $$\begin{aligned}&u(x,y,h)=u^{+}(x,y)\exp(i\Omega t),\quad (u,\mathrm{v},w)\\&u(x,y,-h)=\mathrm{v}(x,y,-h)=w(x,y,-h)=0\end{aligned}\tag{1.4}$$

и условиях на боковой поверхности, которые пока не конкретизируем. Для решения сформулированных задач эффективным оказался асимптотический метод решения сингулярно возмущенных краевых задач тонких тел [1-3]. Решение динамических уравнений теории упругости:

уравнения движения

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad (x,y,z;\,u,\mathrm{v},w)\tag{1.5}$$

соотношения состояния (обобщенный закон Гука)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a_{11}\sigma_{xx}+a_{12}\sigma_{yy}+a_{13}\sigma_{zz}+a_{14}\sigma_{yz}+a_{15}\sigma_{xz}+a_{16}\sigma_{xy}$$

- -

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=a_{14}\sigma_{xx}+a_{24}\sigma_{yy}+a_{34}\sigma_{zz}+a_{44}\sigma_{yz}+a_{45}\sigma_{xz}+a_{46}\sigma_{xy}\tag{1.6}$$

- -

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}=a_{16}\sigma_{xx}+a_{26}\sigma_{yy}+a_{36}\sigma_{zz}+a_{46}\sigma_{yz}+a_{56}\sigma_{xz}+a_{66}\sigma_{xy}$$

при граничных условиях (1.1)-(1.4) будем искать в виде:

$$\begin{aligned}&\sigma_{\alpha\beta}(x,y,z,t)=\sigma_{jk}(x,y,z)\exp(i\Omega t),\quad (\alpha,\beta=x,y,z;\ j,k=1,2,3)\\&(u,\mathrm{v},w)=(u_x,u_y,u_z)\exp(i\Omega t)\end{aligned}\tag{1.7}$$

где Ω – частота вынуждающего воздействия, затем, перейдя к безразмерным координатам и перемещениям $\xi=x/l$, $\eta=y/l$, $\zeta=z/h$, $U=u_x/l$, $V=u_y/l$, $W=u_z/l$, получим сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon=h/l$ систему. Решение этой системы (I) складывается из решений внутренней задачи (I^{int}) и пограничного слоя (I^{b}). Решение внутренней задачи отыскивается в виде

$$\begin{gathered}\sigma_{jk}^{int}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{jk}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\quad s=\overline{0,N}\\ (U^{int},V^{int},W^{int})=\varepsilon^{s}(U^{(s)},V^{(s)},W^{(s)})\end{gathered}\tag{1.8}$$

Подставив (1.8) в преобразованную вышеуказанным образом систему (1.6) и приравняв в каждом уравнении коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим рекуррентную систему, откуда компоненты тензора напряжений однозначно выражаются через перемещения [4], в частности, имеем:

$$\begin{gathered}\sigma_{13}^{(s)}=\frac{1}{\Delta}\left[A_{55}\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}+A_{45}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}+A_{35}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}+\sigma_{13*}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)\right]\\ \sigma_{23}^{(s)}=\frac{1}{\Delta}\left[A_{54}\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}+A_{44}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}+A_{34}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}+\sigma_{23*}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)\right]\\ \sigma_{33}^{(s)}=\frac{1}{\Delta}\left[A_{53}\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}+A_{43}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}+A_{33}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}+\sigma_{33*}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)\right]\\ \sigma_{13*}^{(s)}=\frac{\partial}{\partial\xi}(A_{15}U^{(s-1)}+A_{65}V^{(s-1)}+A_{55}W^{(s-1)})+\\ +\frac{\partial}{\partial\eta}(A_{65}U^{(s-1)}+A_{25}V^{(s-1)}+A_{45}W^{(s-1)})\end{gathered}\tag{1.9}$$

$\left(A_{15},A_{14},A_{13};\ A_{65},A_{64},A_{63};\ A_{55},A_{54},A_{53};\ A_{25},A_{24},A_{23};\ A_{45},A_{44},A_{43};\ \sigma_{13*}^{(s)},\sigma_{23*}^{(s)},\sigma_{33*}^{(s)}\right)$

где Δ – определитель алгебраической системы (1.6) относительно шести компонент тензора напряжений, A_{jk} – алгебраическое дополнение элемента определителя Δ, стоящего на пересечении j-ой строки и k-ого столбца. Компоненты же вектора перемещения определяются из уравнений

$$\begin{gathered}A_{55}\frac{\partial^2U^{(s)}}{\partial\zeta^2}+A_{45}\frac{\partial^2V^{(s)}}{\partial\zeta^2}+A_{35}\frac{\partial^2W^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\Delta\Omega_*^2U^{(s)}=R_u^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)\\ A_{54}\frac{\partial^2U^{(s)}}{\partial\zeta^2}+A_{44}\frac{\partial^2V^{(s)}}{\partial\zeta^2}+A_{34}\frac{\partial^2W^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\Delta\Omega_*^2V^{(s)}=R_{\mathrm{v}}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)\\ A_{53}\frac{\partial^2U^{(s)}}{\partial\zeta^2}+A_{43}\frac{\partial^2V^{(s)}}{\partial\zeta^2}+A_{33}\frac{\partial^2W^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\Delta\Omega_*^2W^{(s)}=R_w^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)\end{gathered}\tag{1.10}$$

где $\Omega_*^2=\rho h^2\Omega^2$; $R_u^{(s)}$, $R_{\mathrm{v}}^{(s)}$, $R_w^{(s)}$ – известные для каждого s функции, если построены предыдущие приближения [4], в частности, $R_u^{(0)}=R_{\mathrm{v}}^{(0)}=R_w^{(0)}=0$. Для ортотропных пластин $A_{45}=A_{35}=A_{54}=A_{43}=A_{34}=A_{53}=0$ и система (1.10) распадается на три, независимые при $s=0$, уравнения. Соответствующие динамические задачи рассмотрены в [5, 6]. Будем считать анизотропию общей, тогда вышеприведенные коэффициенты $A_{jk}\neq0$ и уравнения системы (1.10) должны быть решены совместно. Решение системы (1.10) можно свести к решению уравнения

$$B_1\frac{\partial^6U^{(s)}}{\partial\zeta^6}+B_2\Delta\Omega_*^2\frac{\partial^4U^{(s)}}{\partial\zeta^4}+B_3\Delta^2\Omega_*^4\frac{\partial^2U^{(s)}}{\partial\zeta^2}+B_4\Delta^3\Omega_*^6U^{(s)}=\psi_u^{(s)}\tag{1.11}$$

Следовательно,

$$U^{(s)}=D_j^{(s)}(\xi,\eta)\varphi_j(\zeta)+u_\tau^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\quad j=\overline{1,6} \tag{1.12}$$

где первое слагаемое – решение однородного, второе – частное решение неоднородного уравнения (1.11).

Функции $V^{(s)}$, $W^{(s)}$ выражаются через $U^{(s)}$ по формулам

$$\begin{gathered}
V^{(s)}=\psi_j D_j^{(s)}+\psi\left(u_\tau^{(s)}\right)+\bar{R}_v^{(s)},\quad j=\overline{1,6}\\
W^{(s)}=\phi_j D_j^{(s)}+\phi\left(u_\tau^{(s)}\right)+\bar{R}_w^{(s)},\quad j=\overline{1,6}\\
\psi_j=C_1B_1\varphi_j^{IV}+C_3\varphi_j''-C_4\varphi_j\\
\phi_j=C_5\varphi_j^{IV}+C_6\varphi_j''+C_7\varphi_j
\end{gathered} \tag{1.13}$$

Значения C_j, B_j, $\bar{R}_v^{(s)}$, $\bar{R}_w^{(s)}$, $\psi_u^{(s)}$ приведены в [4], $\psi\left(u_\tau^{(s)}\right)$, $\phi\left(u_\tau^{(s)}\right)$ получаются от ψ_j, ϕ_j формальной заменой φ_j на $u_\tau^{(s)}$.

2. Удовлетворение граничным условиям. Общее решение (1.7)-(1.9), (1.12), (1.13) внутренней задачи содержит шесть произвольных функций $D_j^{(s)}(\xi,\eta)$, достаточных для удовлетворения граничных условий на лицевых поверхностях $z=\pm h$. Удовлетворив условиям (1.1), получим алгебраическую систему

$$D_j^{(s)}c_{kj}=d_k^{(s)},\quad j=\overline{1,6};\ \ k=1,2,\ldots,6 \tag{2.1}$$

где

$$\begin{gathered}
c_{1j}=\phi_j(1),\qquad c_{2j}=\left(A_{55}\varphi_j'+A_{45}\psi_j'+A_{35}\phi_j'\right)\Big|_{\zeta=1}\\
c_{3j}=\left(A_{54}\varphi_j'+A_{44}\psi_j'+A_{34}\phi_j'\right)\Big|_{\zeta=1},\qquad c_{4j}=\varphi_j(-1)\\
c_{5j}=\psi_j(-1),\qquad c_{6j}=\phi_j(-1)\\
d_1^{(s)}=-W^{+(s)}-\left[\phi\left(u_\tau^{(s)}\right)+\bar{R}_w^{(s)}\right]_{\zeta=1},\qquad W^{+(0)}=w^+/l,\quad W^{+(s)}=0,\ s\neq 0\\
d_2^{(s)}=-\sigma_{13*}^{(s)}(\xi,\eta,1)-\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(A_{55}u_\tau^{(s)}+A_{45}\left(\psi\left(u_\tau^{(s)}\right)+\bar{R}_v^{(s)}\right)+A_{35}\left(\phi\left(u_\tau^{(s)}\right)+\bar{R}_w^{(s)}\right)\right)\right]_{\zeta=1}\\
d_3^{(s)}=-\sigma_{23*}^{(s)}(\xi,\eta,1)-\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(A_{54}u_\tau^{(s)}+A_{44}\left(\psi\left(u_\tau^{(s)}\right)+\bar{R}_v^{(s)}\right)+A_{34}\left(\phi\left(u_\tau^{(s)}\right)+\bar{R}_w^{(s)}\right)\right)\right]_{\zeta=1}\\
d_4^{(s)}=-u_\tau^{(s)}(\xi,\eta,-1),\ d_5^{(s)}=-\left[\psi\left(u_\tau^{(s)}\right)+\bar{R}_v^{(s)}\right]_{\zeta=-1},\ d_6^{(s)}=-\left[\phi\left(u_\tau^{(s)}\right)+\bar{R}_w^{(s)}\right]_{\zeta=-1}
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Решением системы (2.1) является

$$D_j^{(s)}=\frac{\delta_j^{(s)}}{\delta} \tag{2.3}$$

где δ – определитель системы (2.1), $\delta_j^{(s)}$ получается заменой в δ j-ого столбца столбцом из свободных членов $d_k^{(s)}$. Решение (2.3) справедливо, если $\delta\neq 0$. Значение Ω, при котором $\delta=0$, совпадает со значением частоты собственных колебаний. При этих значениях наступает резонанс.

В случаях условий (1.2)-(1.4) последние три уравнения системы (2.1) остаются неизменными, меняются первые три уравнения. Например, условиям (1.3) соответствуют такие c_{kj} и $d_k^{(s)}$:

$$c_{1j} = \varphi_j(1), \quad d_1^{(s)} = U^{+(s)} - u_\tau^{(s)}(\xi,\eta,1), \quad U^{+(0)} = u^+ / l, \quad U^{+(s)} = 0, \; s \neq 0$$

$$c_{2j} = \psi_j(1), \; d_2^{(s)} = V^{+(s)} - \left[\psi\left(u_\tau^{(s)}\right) + \overline{R}_v^{(s)}\right]_{\zeta=1}, \; V^{+(0)} = \mathrm{v}^+ / l, \; V^{+(s)} = 0, \; s \neq 0$$

$$c_{3j} = A_{55}\varphi'_j(1) + A_{43}\psi'_j(1) + A_{33}\phi'_j(1)$$

$$d_3^{(s)} = -\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(A_{53}u_\tau^{(s)} + A_{43}\left(\psi\left(u_\tau^{(s)}\right) + \overline{R}_v^{(s)}\right) + A_{33}\left(\phi\left(u_\tau^{(s)}\right) + \overline{R}_w^{(s)}\right)\right) + \sigma_{33*}^{(s)}\right]_{\zeta=1}$$

Несложно выписать коэффициенты при неизвестных и свободные члены алгебраических систем, соответствующих условиям (1.2), (1.4). Таким образом, в динамических задачах решение внутренней задачи полностью определяется после удовлетворения граничным условиям на лицевых поверхностях. Отсюда следует, что условиям на боковой поверхности соответствует решение пограничного слоя, которое строится изложенным в [1, 3] способом, что является предметом отдельного рассмотрения.

Характерной особенностью колебаний пластин с общей анизотропией является то, что они не являются чисто сдвиговыми или продольными, что имеет место для изотропных и ортотропных пластин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. "Гитутюн" НАН РА, 2005. 468с.
3. Агаловян Л.А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел // Прикл. механика. 2002. Т.38. №7. С.3-24.
4. Агаловян М.Л. Пространственная задача о вынужденных колебаниях пластин с общей анизотропией. /В сб.: Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести. Ереван. Изд."Гитутюн" НАН Армении, 2006. С.42-49.
5. Агаловян Л.А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин // Изв. Вузов РФ. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. №3. С.8-11.
6. Агаловян М.Л. Асимптотика решения пространственной динамической задачи для анизотропных пластин. /В сб.: Механика оболочек и пластин (Тр. XX международной конф. по теории оболочек и пластин). Изд. Нижегородского госуниверситета. Нижний Новгород, РФ. 2002. С.78-82.

<u>Сведения об авторе:</u>

Агаловян Мгер Ленсерович
кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник, Институт механики НАН Армении
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24[б]
Тел.: (+37410) 52-48-90, E-Mail: aghal@mechins.sci.am

ИЗГИБ БАЛКИ НА ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Гулян К.Г.

В работе новым подходом, предложенным в [1-3], построено решение контактной задачи об изгибе балки конечной длины на крае упругой полуплоскости. При помощи преобразования Фурье и метода Винера–Хопфа решение задачи получено в виде степенного ряда с отдельно выделенными особенностями. Для определения неизвестных коэффициентов разложения получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений простой структуры.

Пусть на конечном отрезке $[-a,a]$ границы упругой полуплоскости, отнесенной к декартовой системе координат xoy (ox направлена по краю полуплоскости, oy–вовнутрь), изгибается балка с жесткостью D_0. К ее концам приложены сосредоточенные силы P_0 и изгибающие моменты M_0. Как обычно, предполагается, что в контактной зоне касательные напряжения отсутствуют и контактирование происходит без отрыва балки от края полуплоскости [2,4,5]. Требуется определить закон распределения интенсивности нормальных контактных напряжений, возникающих под балкой. Предположим также, что сосредоточенные силы и моменты (внешние нагрузки) приложены таким образом, что под балкой возникают симметрично распределенные относительно оси oy, контактные напряжения, т.е. рассмотрим четную задачу. Тогда дифференциальное уравнение изгиба балки можно представить в виде

$$\mathrm{V}_0'''(x) = -D_0^{-1} q_0(x), \quad -a < x < a \tag{1}$$

где $\mathrm{V}_0(x) = d\mathrm{v}_0/dx$, $\mathrm{v}_0(x)$ –вертикальные перемещения (прогиб) балки, $q_0(x)\left(q_0(-x) = q_0(x)\right)$ – интенсивность контактных напряжений. Граничные условия при уравнении (1) запишутся в виде:

$$D_0 \mathrm{V}_0'(x)\Big|_{x=\mp a} = -M_0, \quad D_0 \mathrm{V}_0''(x)\Big|_{x=\mp a} = \pm P_0 \tag{2}$$

а условия равновесия балки:

$$\int_{-a}^{a} q_0(x)\,dx = 2P_0, \quad \int_{-a}^{a} xq(x)\,ds = 0 \tag{3}$$

Решение уравнения (1) при условиях (2) имеет вид

$$\mathrm{V}_0(x) = -\frac{1}{4D_0}\int_{-a}^{a}(x-s)|x-s|\,q_0(s)\,ds + \frac{aP_0 - M_0}{D_0}x \tag{4}$$

С другой стороны, для граничных точек полуплоскости имеем [6]

$$\mathrm{V}_1(x) = \frac{d\mathrm{v}_1(x,0)}{dx} = \frac{2\left(1-\nu_1^2\right)}{\pi E_1}\int_{-a}^{a}\frac{q_0(s)\,ds}{s-x}, \quad -\infty < x < \infty \tag{5}$$

где $\mathrm{v}_1(x,y)$ –вертикальные перемещения точек полуплоскости, ν_1, E_1–соответственно, коэффициент Пуассона и модуль упругости материала полуплоскости.

Решение поставленной задачи будет точным при принятых допущениях, если установленный закон распределения контактных напряжений $q(x)$ обеспечивает как выполнения условий равновесия (3), так и контактного условия, выражаемого равенством

$$\mathrm{V}_1(x) = \mathrm{V}_0(x), \qquad -a < x < a \tag{6}$$

Подставляя (4) и (5) в (6), для определения неизвестных контактных напряжений $q_0(x)$ получим сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Коши

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1\left[\frac{1}{s-x} + \frac{1}{s+x}\right]q_0(as)\,ds = -\lambda\int_0^1\left[(x+s)^2 + (x-s)|x-s|\right]q_0(as)\,ds + 4\lambda Bx$$

$$0 < x < 1 \tag{7}$$

$$\lambda = a^3 E \big/ 8D_0\left(1-\nu^2\right), \quad B = aP_0 - M_0 \big/ a^2 \tag{8}$$

Таким образом, задача сводится к решению сингулярного интегрального уравнения (7) с условиями (3).

Для решения (7) проведем замену переменных $s=e^u$, $x=e^{\text{v}}$ и рассмотрим ее и при $\text{v}\in(0,\infty)$. В итоге получим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{1-e^{\text{v}-u}}+\frac{1}{1+e^{\text{v}-u}}\right]q^-(u)\,du=-\lambda\vartheta(\text{v})\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\left(e^{\text{v}-u}-1\right)\left|e^{\text{v}-u}-1\right|+\left(e^{\text{v}-u}+1\right)^2\right]\times$$
$$\times e^{2u}q^-(u)\,du+4\lambda Be^{\text{v}}+g^+(\text{v})\qquad(-\infty<\text{v}<\infty)\tag{9}$$

где $q^-(u)=\vartheta(-u)q_0(ae^u)$, $\quad g^+(\text{v})=\vartheta(\text{v})\dfrac{E}{2(1-\nu^2)}\dfrac{\partial\text{v}_1(x)}{\partial x}\bigg|_{x=e^{\text{v}}}$

$\vartheta(\text{v})$ – функция Хевисайда.

Применив к (9) комплексное преобразование Фурье, после некоторых выкладок приходим к функционально–разностному уравнению

$$\operatorname{th}\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\bar{q}^-(\alpha)+\frac{4\lambda\bar{q}^-(\alpha-3i)}{\alpha(\alpha-i)(\alpha-2i)}+\frac{2\lambda\bar{q}^-(-3i)}{\alpha}+\frac{2\lambda\bar{q}^-(-i)}{\alpha-2i}=$$
$$=4\lambda B/(\alpha-i)+i\bar{g}^+(\alpha),\qquad(-1<\operatorname{Im}\alpha<0)\tag{10}$$

где $\alpha=\sigma+i\tau$, а функции $\bar{q}^-(\alpha)$ и $\bar{g}^+(\alpha)$ являются преобразованиями Фурье функций $\bar{q}^-(u)$ и $\bar{g}^+(u)$ соответственно. Функция $\bar{q}_2^-(\alpha)$ регулярна при $\tau<0$, а $\bar{g}^+(\alpha)$ – при $\tau>-1$, поскольку $q^-(u)=O(1)$, $g^+(u)=O\left(e^{-u}\right)$ при $|u|\to\infty$. Кроме того, так как $q_0(ax)\sim(1-x)^{-1/2}$ при $x\to1-0$, а $g^+(ax)\sim(x-1)^{-1/2}$ при $x\to1+0$ [4,5,6], то $\bar{q}^-(\alpha)\sim\alpha^{-1/2}$, $\bar{g}^+(\alpha)\sim\alpha^{-1/2}$ при $|\alpha|\to\infty$ – в своих областях регулярности. Заметим еще, что первое условие из (3) теперь запишется в виде

$$\bar{q}^-(-i)=P_0/a\tag{11}$$

Переходим к построению решения функционального уравнения (10) методом Винера–Хопфа [7]. Для этого сначала исследуем аналитические свойства функции $\bar{q}^-(\alpha)$ при помощи уравнения (10). Вспомним, что $\bar{q}^-(\alpha)$ регулярна при $\operatorname{Im}\alpha<0$, а $\bar{g}^+(\alpha)$ –при $\operatorname{Im}\alpha>-1$, и заметим, что левая и правая части равенства (10) являются аналитическими продолжениями друг друга. Теперь рассмотрим аналитическое продолжение $\bar{q}^-(\alpha)$ в дополнении к области $\operatorname{Im}\alpha<0$ и исследуем ее полюса с помощью уравнения (10). Поскольку, согласно (11), $\bar{q}^-(-i)$ конечна, $\bar{g}^+(\alpha)$ регулярна при $\operatorname{Im}\alpha>-1$, а $\operatorname{th}(\pi\alpha/2)=0$ при $\alpha=0$, то из (10) следует, что точка $\alpha=0$ может быть простым полюсом для $\bar{q}^-(\alpha)$. Далее, точка $\alpha=i$ является простым полюсом для $\operatorname{th}(\pi\alpha/2)$, а величина B и $\bar{g}^+(i)$ конечны, и опять из (10) следует, что $\bar{q}^-(i)$ конечна. Поскольку $\bar{g}^+(2i)$ конечна, а $\operatorname{th}(\pi\alpha/2)=0$ в точке $\alpha=2i$, то точка $\alpha=2i$ может быть простым полюсом для $\bar{q}^-(\alpha)$. Далее рассмотрим точку $\alpha=3i$. В этой точке $\bar{g}^+(\alpha)$ конечна, $\operatorname{th}(\pi\alpha/2)$ имеет простой полюс, а $\bar{q}(\alpha-3i)$ может иметь простой полюс. Тогда из (10) следует, что $\bar{q}^-(3i)$ конечна. Так продолжая, нетрудно убедиться, что точки $\alpha=2ni$ $(n=0,1,2,\ldots)$ могут быть полюсами для функции $\bar{q}^-(\alpha)$ и притом простыми.

Приступим к решению функционального уравнения (10) при условии (11), предполагая $\bar{q}^-(\alpha-3i)$ известным. Для этого, факторизуем $\operatorname{th}(\pi\alpha/2)$, представляя ее в виде:

$$\operatorname{th}(\pi\alpha/2)=\bar{K}(\alpha)=\bar{K}^+(\alpha)\cdot\bar{K}^-(\alpha)\tag{12}$$

где $\bar{K}^+(\alpha)=\alpha\Gamma((1+i)/2)\Big/\sqrt{2}\Gamma((2+i)/2)$ регулярна при $\operatorname{Im}\alpha>-1$ и там не имеет нулей, а

$\bar{K}^{-}(\alpha)=\Gamma((1-i)/2)\big/\sqrt{2}\Gamma((2-i)/2)$ регулярна при $\operatorname{Im}\alpha<0$ и там не имеет нулей ($\Gamma(\alpha)$– известная гамма-функция Эйлера). При этом, $\bar{K}^{+}(\alpha)=O(\alpha^{-1/2})$, $\bar{K}^{-}(\alpha)=O(\alpha^{1/2})$ при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности.

Подставляя (12) в (10), представим ее в виде

$$\begin{gathered}\bar{K}^{-}(\alpha)\bar{q}^{-}(\alpha)+\lambda\bar{\phi}^{-}(\alpha)+\lambda\bar{F}^{-}(\alpha)=\\=-\lambda\bar{\phi}^{+}(\alpha)+\lambda\bar{F}^{+}(\alpha)+i\bar{g}^{+}(\alpha)\big/\bar{K}^{+}(\alpha)\end{gathered}\tag{13}$$

где $(-1<\operatorname{Im}\alpha<0)$, а

$$\bar{\phi}(\alpha)=\frac{4\bar{q}^{-}(\alpha-3i)}{\alpha(\alpha-i)(\alpha-2i)\bar{K}^{+}(\alpha)}=\bar{\phi}^{+}(\alpha)+\bar{\phi}^{-}(\alpha)\tag{14}$$

$$\bar{\phi}^{-}(\alpha)=\int_{-\infty}^{0}\phi(u)e^{i\alpha u}\,du,\qquad \bar{\phi}^{+}(\alpha)=\int_{0}^{\infty}\phi(u)e^{i\alpha u}\,du$$

$$\operatorname{Im}\alpha<0\qquad\qquad \operatorname{Im}\alpha>-1$$

$$\phi(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\bar{\phi}(\alpha)e^{-i\alpha u}\,d\alpha,\qquad -1<\tau<0$$

$$\begin{gathered}\bar{F}^{-}(\alpha)=\frac{2\bar{q}^{-}(-3i)}{\alpha\bar{K}^{+}(0)}-\frac{4B_2}{(\alpha-i)\bar{K}^{+}(i)}+\frac{2\bar{q}^{-}(-i)}{(\alpha-2i)\bar{K}^{+}(2i)}\\
\bar{F}^{+}(\alpha)=\frac{2\bar{q}^{-}(-3i)}{\alpha}\left[\frac{1}{\bar{K}^{+}(0)}-\frac{1}{\bar{K}^{+}(\alpha)}\right]+\frac{4B_2}{\alpha-i}\left[\frac{1}{\bar{K}^{+}(\alpha)}-\frac{1}{\bar{K}^{+}(i)}\right]+\\
+\frac{2\bar{q}^{-}(-i)}{\alpha-2i}\left[\frac{1}{\bar{K}^{+}(2i)}-\frac{1}{\bar{K}^{+}(\alpha)}\right]\end{gathered}\tag{15}$$

Здесь $\bar{\phi}^{-}(\alpha)$ и $\bar{F}^{-}(\alpha)$ регулярны при $\operatorname{Im}\alpha<0$, а $\bar{\phi}^{+}(\alpha)$ и $\bar{F}^{+}(\alpha)$ регулярны при $\operatorname{Im}\alpha>-1$. При этом, имея указанные выше оценки для $\bar{K}^{+}(\alpha)$ и $\bar{q}^{-}(\alpha)$ при $|\alpha|\to\infty$, из (14) нетрудно получить [2,3], что $\bar{\phi}^{\pm}(\alpha)=0(\alpha^{-1})$ при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности.

С другой стороны, из представления (14) и из сказанного выше о возможных полюсах $\bar{q}^{-}(\alpha)$ следует, что точки $\alpha=0,\ \alpha=i,\ \alpha=2i$ и $\alpha=(2n+1)i$ $(n=1,2,...)$ могут быть простыми полюсами для $\bar{\phi}^{-}(\alpha)$. Следовательно, $\bar{\phi}^{-}(\alpha)$ можно представить в виде разложения на простейшие дроби:

$$\bar{\phi}^{-}(\alpha)=\frac{C_{-1}^{(0)}}{\alpha}+\frac{C_{-1}^{(i)}}{\alpha-i}+\frac{C_{-1}^{(2i)}}{\alpha-2i}+2i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{-1}^{(2n-2)}\left(\bar{K}^{+}((2n+1)i)\right)^{-1}}{n(4n^2-1)(\alpha-(2n+1)i)}$$

$$C_{-1}^{(0)}=2\bar{q}^{-}(-3i)\big/\bar{K}^{+}(0),\ C_{-1}^{(i)}=4\bar{q}^{-}(-2i)\big/\bar{K}^{+}(i),\ C_{-1}^{(2i)}=-2\bar{q}^{-}(-3i)\big/\bar{K}^{+}(2i)$$

$$A_{-1}^{(2n-2)i}=\text{Выч}\ \bar{q}^{-}(\alpha-3i)\Big|_{\alpha=(2n+1)i}=\lim_{\alpha\to(2n-2)i}(\alpha-(2n-2)i)\bar{q}^{-}(\alpha)\tag{16}$$

Теперь, имея в виду асимптотические свойства функций, входящие в (13), по обычной процедуре метода Винера–Хопффа, с учетом (15) и (16) получим решение уравнения (10) в виде:

$$\bar{q}^-(\alpha)=\frac{4\lambda\bar{K}^+(\alpha)}{\bar{K}(\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{iA_{-1}^{(2n)}\left[\bar{K}^+\left((2n+3)i\right)\right]^{-1}}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)\left(\alpha-(2n+3)i\right)}+$$
$$+\frac{4\lambda\left[\bar{q}^-(-2i)-B\right]}{\bar{K}^+(i)\bar{K}(\alpha)(\alpha-i)}=\frac{c_0\bar{K}^+(\alpha)}{\bar{K}(\alpha)} \qquad (17)$$

где постоянная c_0 определяется из условия (11). Теперь имея в виду, что $A_{-1}^{(2n)}$ представляет вычет функции $\bar{q}^-(\alpha)$ в точках $\alpha=2ni\,(n=0,1,2,\ldots)$, то из (17) получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов–вычетов разложения:

$$X_m=4\lambda\beta_m\sum_{n=0}^{\infty}R_{mn}X_n=\frac{4i\lambda\beta_m\left[\bar{q}_2^-(2i)-B_2\right]}{\bar{K}^+(i)(2m-1)}+c_0\beta_m \qquad (18)$$
$$X_m=A_{-1}^{(2m)}\Big/\bar{K}^+\left((2m+3)i\right),\quad m=0,1,2,\ldots$$

$$R_{mn}=\frac{(2m-2n-3)^{-1}}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)},\quad \beta_m=\begin{cases}3/2, & m=0\\ \left[1-3/4m(m+1)\right]\beta_{m-1}, & m=1,2\end{cases} \qquad (19)$$

Из (17) при помощи обратного преобразования для контактных напряжений получим

$$q_0(x)=c_0^{(2)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}+$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m+1)}\left[c_0^{(2)}+\frac{c_0^{(1)}Y_m^{(1)}-c_0^{(2)}Y_m^{(2)}}{\beta_m}\right]\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} \qquad (20)$$

$$c_0^{(2)}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[(3-4\lambda+3\pi\lambda)\frac{P_0}{a}-3\lambda\frac{M_0}{a^2}\right]\Big/\left[(3+2\lambda)\left(1+4\lambda S_4^{(2)}\right)-24\lambda^2S_5^{(2)}\right] \qquad (21)$$
$$c_0^{(1)}=6\sqrt{2\pi}\left[\frac{\pi-1}{\pi}\frac{P_0}{a}+\frac{M_0}{a^2}\right]\Big/\left[3+2\lambda-48S_5^{(1)}\right]$$

$$S_k^{(j)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Y_m^{(j)}}{(2n+i)(2n+2)\ldots(2n+k)},\quad j=1,2 \qquad (22)$$

В (20) коэффициенты $Y_m^{(1)}$ и $Y_m^{(2)}$ определяются из бесконечных систем

$$Y_m^{(j)}+4\lambda\beta_m\sum_{n=0}^{\infty}R_{m,n}Y_n^{(j)}=b_m^{(j)}\qquad\begin{pmatrix}j=1,2\\ m=0,1,2,\ldots\end{pmatrix} \qquad (23)$$
$$b_m^{(1)}=\lambda\beta_m\big/(2m-1),\quad b_m^{(2)}=\beta_m^{(2)} \qquad (24)$$

$R_{m,n}$ и β_m даются формулами (19).

Регулярность бесконечных систем (18) и (23) следует из оценки

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|R_{m,n}\right|=(2\ln 2-1)\big/4m+O\left(m^{-2}\right)\ \text{при}\quad m\to\infty \qquad (25)$$

Отметим, что из (23)-(25) следует, что $\left(\beta_m-Y_m\right)=O\left(m^{-1}\right)$ при $m\to\infty$. Следовательно, ряд в (20) равномерно сходится при $0\le x\le a$, т.е. особенность $q_0(x)$ дается только первым слагаемым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Э.Х. О решении контактной задачи для упругой полуплоскости, граница которой усилена двумя полубесконечными накладками. //Межвуз. сб. науч. Трудов. Механика. Ереван: Изд ЕГУ. 1991. №8.
2. Григорян Э.Х. Изгиб двух полубесконечных балок, лежащих на границе упругой полуплоскости.//Изв. НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. №3-4.
3. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О решении контактной задачи для полуплоскости с упругим креплением. // Изв. НАН Армении. Механика. 2007 (в печати).
4. Попов Г.Я., Тихоненко Х.М. Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином. //ПММ. 1977. Т.38. № 2. С.
5. Клубин П.И. Расчет балочных и круглых плит на упругом основании. //Инж. сб. АН СССР. 1952. Т.XII. С.95-135.
6. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуполскости с упругим креплением. //ПММ. 1968. Т.32. Вып.4. С.632-646.
7. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Наука, 1962. 278с.

Сведения об авторах

Агаян Каро Леренцевич
Кандидат физ.-мат.наук, старший научный сотрудник Института механики
НАН РА
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б},
Тел: (+37410) 52-58-35; E-mail: karo-aga@mechins.sci.am

Григорян Эдуард
Доктор физ.-мат.наук, профессор ЕГУ, факультет механики
Адрес: Ереван, ул.Алека Манукяна 1, ЕГУ, факультет механики
Тел: (+37410) 23-03-89

Гулян Карлен
Кандидат физ.-мат.наук
Армянский государственный университет экономики

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ФОРМООБРАЗОВАНИЯ КОТАНГЕНЦИАЛЬНЫХ ПЕРЕХОДОВ МЕЖДУ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ И ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ОРБИТАМИ

Адамян В.Г., Манандян Л.Т., Заимцян Г.М., Адамян Л.В.

Главной целью работы является способ разработки конструирования котангенциальных траекторий перелетов между заданными орбитами, при котором возможно было бы пользоваться только построениями с помощью циркуля и линейки.

Заданы непересекающиеся эллиптическая и параболическая орбиты с общим фокусом $F_{1.}$,

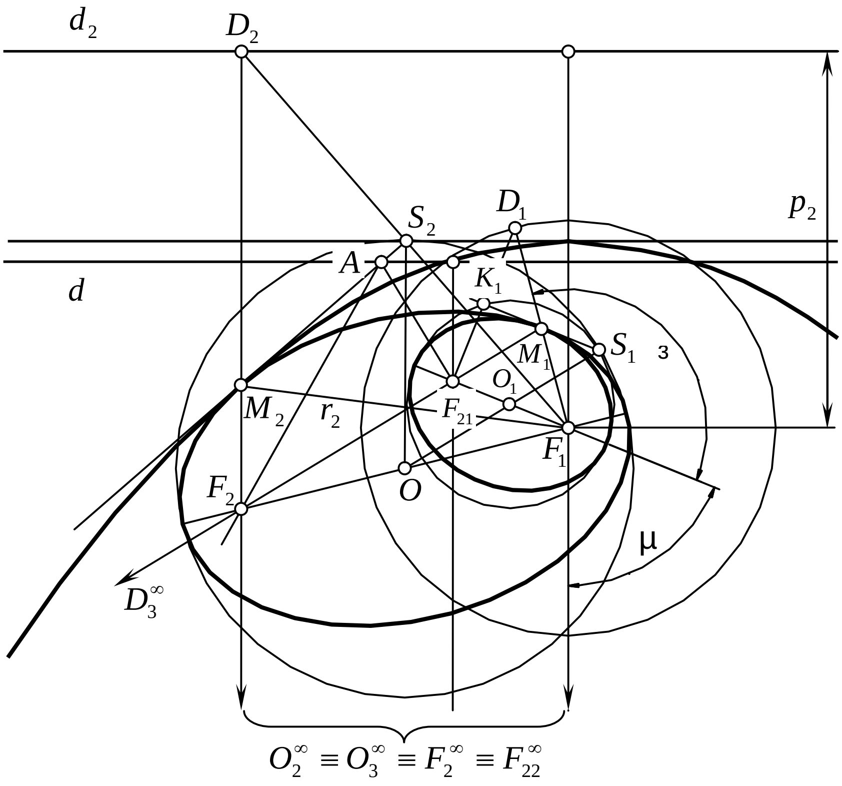


Рис. 1

являющиеся притягивающими центрами (рис. 1).

Эллиптическая орбита задана величинами большой полуоси a_1 и линейного эксцентриситета c_1, а параболическая орбита – параметром p_2. Точки F_{21} и F_{22}^∞ являются их вторыми фокусами. Известен также угол ω между их фокальными осями.

Так как вторые фокусы F_{21} и F_{22}^∞ заданных орбит являются также фокусами фокальной кривой семейства котангенциальных переходов между заданными орбитами, то можно заключить, что фокальная кривая в рассмотренном здесь случае является параболой. Очевидно, что ось фокальной параболы параллельна заданной параболической орбите и проходит через второй фокус заданной эллиптической орбиты. Параметр p фокальной параболы зависит от начальных условий и определяется формулой, которую даем без доказательств

$$p = p_2 - 2(a_1 + c_1 \cos \mu) \tag{1}$$

Для построения нужных нам точек на заданных орбитах и фокальной параболе необходимо заранее провести некоторые прямые и окружности. Для эллиптической орбиты проведем две окружности (O_1, a_1) и $(F_1, 2a_1)$ – ее эксцентр и деферент. Далее проведем директрису d_2 (деферент) заданной параболической орбиты и касательную прямую в ее вершине (эксцентр), которая параллельна директрисе d_2 и переходит через середину фокального расстояния p_2. Для определения фокальной параболы проведем директрису d параллельной прямой d_2 и удаленной от фокуса F_{21} на расстояние p, определяемой формулой (1).

Дальнейшие построения начинаем с выбора начальной точки M_1. Для этого проведем прямую F_1D_1 через притягивающий центр F_1 под углом з, отсчитываемым от радиуса-вектора перигея начальной эллиптической орбиты. Определим точку D_1 пересечения этой прямой с окружностью $(F_1, 2a_1)$. Далее проведем прямую D_1F_{21} и через точку K_1 ее пересечения с окружностью (O_1, a_1) – прямую, перпендикулярную к прямой D_1F_{21}. Последняя прямая, пересекаясь с прямой F_1D_1, дает искомую точку M_1 на начальной орбите.

Затем перейдем к определению положения второго фокуса F_2 орбиты перелета. Для этого точка M_1 начальной орбиты соединим с ее вторым фокусом F_{21}, восстановим в точке F_{21} перпендикуляр к прямой M_1F_{21} и найдем точу A, в которой этот перпендикуляр пересекается с директрисой d фокальной параболы. Касательная прямая к фокальной параболе в искомом фокусе F_2 проходит через точку A и является биссектрисой угла со сторонами d и AF_{21}. Эта биссектриса, пересекаясь с прямой $F_{21}M_1$, определяет искомый фокус F_2 орбиты котангенциального перелета, выходящей из точки M_1 начальной орбиты.

Точка соприкосновения M_2 орбиты перелета с параболической орбитой определяется следующим образом. Сначала соединим второй фокус F_2 орбиты перелета со вторым фокусом F_{22}^{∞} параболической орбиты и построим точку D_2 пересечения этой прямой с директрисой d_2 заданной параболы. Далее точку D_2 соединим прямой линией с притягивающим центром $F_{1.}$ и через точку S_2 его пересечения с вершиной касательной проведем прямую, перпендикулярную к прямой F_1D_2. Последняя прямая, пересекаясь с прямой F_2D_2, определяет искомую точку M_2 касания параболической и переходной орбит. Проведем прямые F_1F_2 и $OS_2 \parallel F_2D_2$, которые при пересечении определяют искомый центр O орбиты перелета и величину ее большой полуоси $a = OS_2$. Затем соединим прямой линией центр O_1 начальной орбиты с центром O орбиты перелета и определим точку ее пересечения S_1 с эксцентром эллиптической орбиты – точку касания окружностей (O_1, a_1) и $(O, a = OS_1 = OS_2)$.

Таким образом, пользуясь циркулем и линейкой, нам удалось построить искомую орбиту котангенциального перехода и точки ее касания с заданными орбитами. Из конструктивной геометрии известно, что теперь мы можем определить параметры заданных орбит, т.е. вывести все необходимые формулы в явном виде [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Аргунов Б.И., Балк М.Б. Геометрические построения на плоскости. М.: Учпедгиз, 1955. 270с.

Сведения об авторах

Адамян Ваник Григоревич

Д.т.н., зав. кафедрой прикладной механики, профессор, Гюмрийский филиал государственного инженерного университета Армении
Адрес: 3103, Гюмри, ул. М.Мкртчяна 2
Тел. 0312-36583 факс: 0312-31528
E-mail: vgadamyan@mail.ru

Заимцян Геворг Микаелович
К.т.н., доцент кафедры прикладной механики

Манандян Левон Туманович
К.т.н., доцент кафедры прикладной механики

Адамян Лилит Ваниковна
лаборант кафедры прикладной механики

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ УПРУГИХ И РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОЛИМЕРКОМПОЗИТНОГО ЛОНЖЕРОНА ЛОПАСТИ НЕСУЩЕГО ВИНТА ВЕРТОЛЕТА НА ОСНОВЕ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

Акопьян В.А., Баранов И.В., Бычков А.А., Рожков Е.В., Соловьев А.Н., Стрельникова А.В., Чинчян Л.В., Шевцов С.Н.

Введение. Лонжероны лопасти несущего и рулевого винтов (ЛНВ) вертолета Ми-28 изготавливаются из полимеркомпозита, получаемого способом намотки стеклонитей в эпоксидном связующем с дальнейшим термическим отверждением в пресс-формах. Кроме проблем длительной прочности этих конструкций, в частности, при учете атмосферного воздействия, важным аспектом является оптимизация формы и размеров с учетом их динамического поведения, например, существующей опасностью изгибно-крутильного флаттера. Для адекватного математического моделирования динамики лопасти необходима идентификация механических свойств материалов, входящих в состав ее конструкции. Существует ряд отечественных и зарубежных методик определения механических свойств композитов (ASTM, AGATE, SACMA и др.), однако их прямое применение ограничено в связи с тем, что образцы для испытаний приходится вырезать из готового изделия, форма которого определена разработчиком (рис.1).

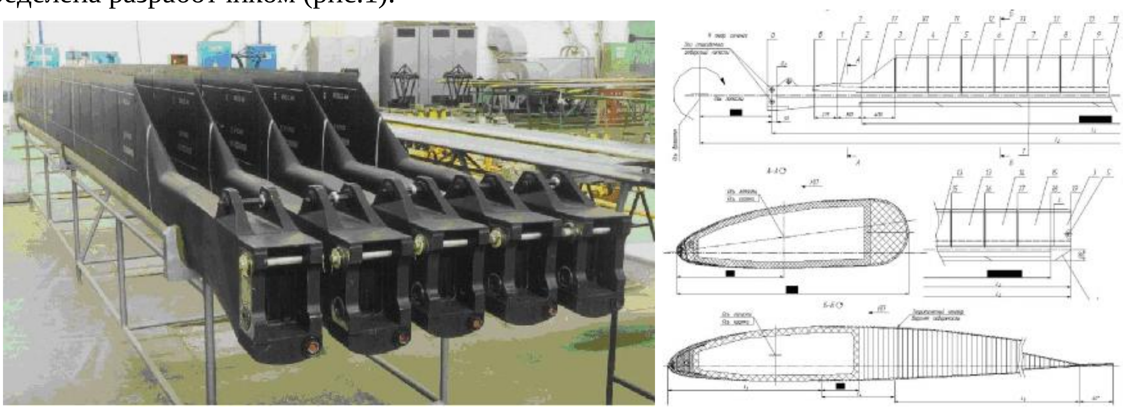
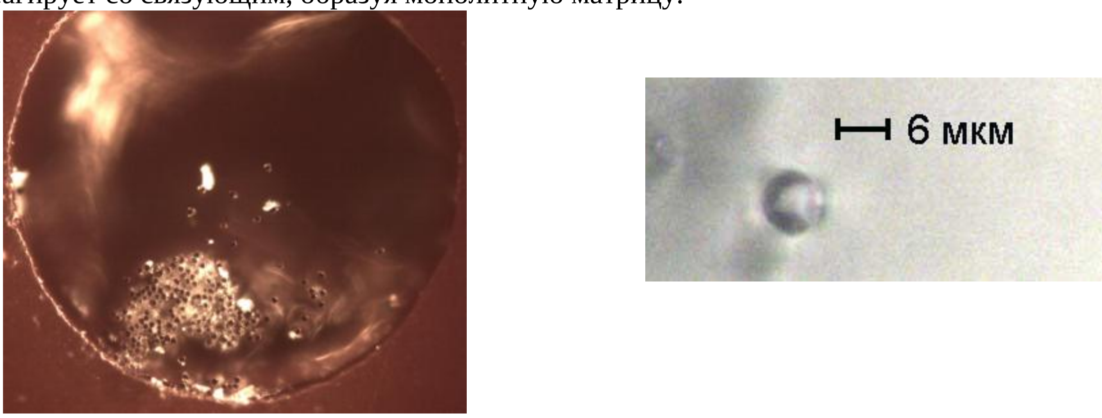


Рис.1. Комплект ЛНВ и их геометрические характеристики

Микроструктура и статические испытания.

Армирующая нить полимеркомпозита, из которого изготовлен лонжерон (рис. 1, справа) сплетена из одиночных моноволокон, количество которых в одной нити составляет 200. Фотографии нити в сечении и моноволокна представлены на рис.2.

Поверхности волокон покрыты веществом из группы парафинов, предотвращающим адсорбцию влаги с поверхности стекла. При полимеризации органическое покрытие волокон реагирует со связующим, образуя монолитную матрицу.



а) б)

Рис.2. Микрофотографии стекловолоконной армирующей нити (а) и моноволокна (б) (Изображение на рисунке (а) дано частично резким из-за большого оптического увеличения)

Механические испытания нитей длиной 50 см, приклеенных к бумажным захватам, производились на машине TiraTest 2750. Деформация нити измерялась по смещению траверсы. На диаграммах нагружения (рис.3) выделяли прямолинейный участок и определяли угловой коэффициент его наклона.

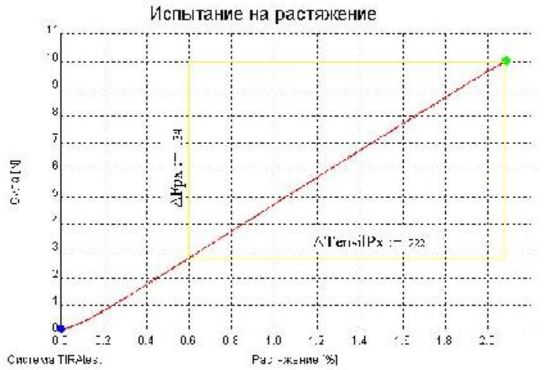


Рис.3. Диаграмма нагружения стеклонити

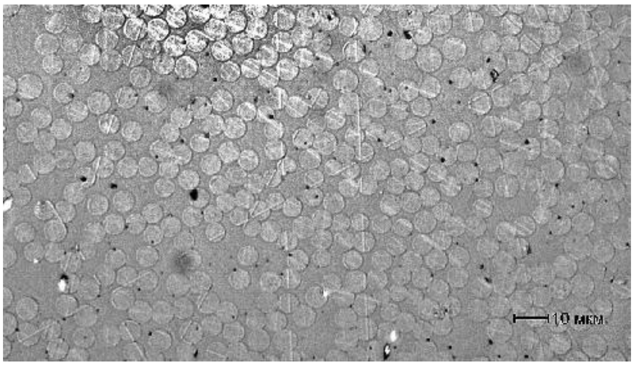
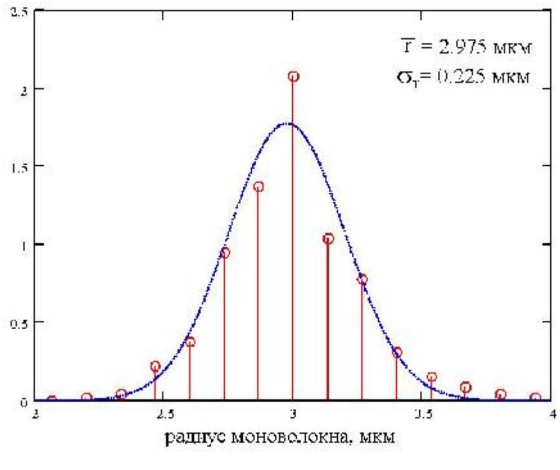
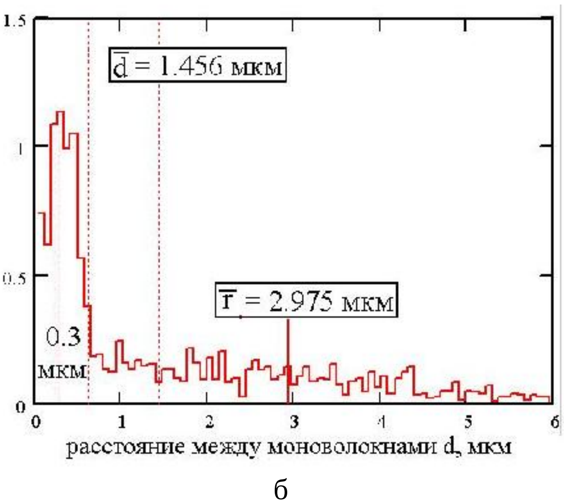


Рис.4. Микрофотография поперечного среза композиционного материала, армированного стеклянными волокнами стеклонити

Для дальнейшего расчета модуля упругости стеклянных нитей необходимо было располагать данными о распределении по диаметру моноволокон. В связи с тем, что наличие органического покрытия на нитях и невозможность получения резкого изображения пучка волокон не позволяли выполнить такую оценку, из полимеризованного композиционного материала были вырезаны образцы с гранями, ориентированными точно поперек и вдоль волокон. Поперечный срез композита был сфотографирован при увеличении x1000, и фотография (рис.4) оцифрована в графический формат. Дальнейшая обработка включала в себя распознавание кругов средствами Image Processing системы MATLAB, определение координат их центров и радиусов, а также статистическую обработку, включавшую построение распределений радиусов моноволокон и расстояний между ними. Соответствующие распределения, построенные для сечения с 460 моноволокнами, представлены на рис.5. Распределение радиусов близко к нормальному (рис.5а) с центром 2.98 мкм и дисперсией 0.23 мкм. Распределение расстояний между ближайшими волокнами имеет характер вейбулловского (рис.5б), но с более «тяжелым хвостом».





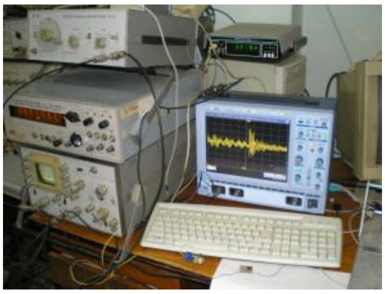
а б

Рис.5. Распределение диаметров и расстояний между ближайшими моноволокнами

В результате проведенных статических испытаний (растяжение, кручение сдвиг) с помощью модифицированных установок и их конечноэлементной поддержки [1], получена полная матрица **C** – упругих констант в рамках эффективного ортотропного тела

$$
\mathbf{C} = \begin{pmatrix}
8.378255\times10^{10} & 3.939698\times10^{10} & 3.357698\times10^{10} & 0 & 0 & 0 \\
3.939698\times10^{10} & 3.348744\times10^{10} & 1.899497\times10^{10} & 0 & 0 & 0 \\
3.357698\times10^{10} & 1.899497\times10^{10} & 2.414344\times10^{10} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 5\times10^{9} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1.3\times10^{9} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5\times10^{10}
\end{pmatrix}
$$

Динамические испытания. Для уточнения матрицы упругих постоянных и определения коэффициентов демпфирования разработана лабораторная установка (рис.6), в которой исследуется колебание образца полимеркомпозитного материала с наклеенными пьезоэлементами (рис. 7).



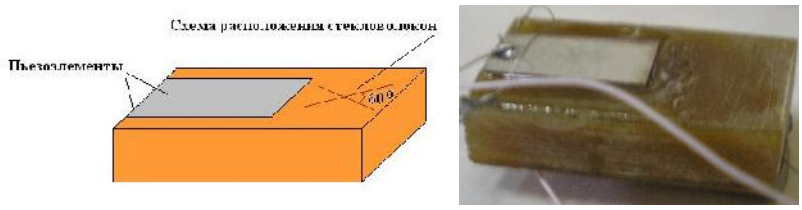


Рис.6. Лабораторная установка. Рис.7. Испытуемый образец.

В результате, для различных электрических схем включения пьезоэлементов экспериментально получен спектр собственных частот (рис.8, схема **а**). Проведена КЭ идентификация в ACELAN [2] соответствующих мод колебаний (рис.9).

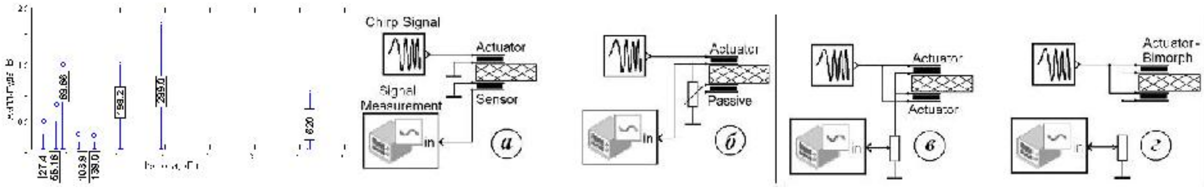


Рис.8 Спектр частот и электрические схемы включения.

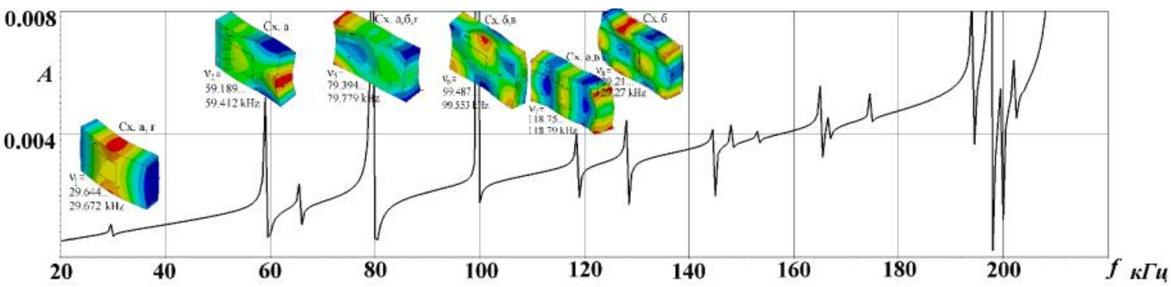


Рис.9 АЧХ адмитанса и некоторые формы колебаний.

Данные этих натурных и численных экспериментов являются входной информацией для обратной коэффициентной задачи теории вязкоупругости, которая решалась с помощью оригинального генетического алгоритма (ГА) [3]. При решении обратных задач теории упругости, в частности, геометрических по реконструкции дефектов (полостей, включений) в твердых телах или коэффициентных по идентификации механических свойств упругих тел дополнительной информацией может служить $u_{ik}^{(0)}$ – поле смещений, измеренное на границе области (позиционное зондирование), $\psi_1,\ldots\psi_n$ – набор измеренных собственных частот (частотное зондирование) или же данные частотного и позиционного зондирования одновременно. Возможная структура целевых функционалов в этих трех случаях соответственно имеет вид

$$F_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} h_{ik}(a_{ik} - u_{ik})^2 \quad (1)$$

$$F_2 = \sum_{i=1}^{n} k_i (\frac{\omega_i - \psi_i}{\psi_i})^2 \quad (2)$$

$$F_3 = \sum_{i=1}^{n} k_i (\frac{\omega_i - \psi_i}{\psi_i})^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} h_{ik}(a_{ik} - u_{ik})^2 \quad (3)$$

где $\omega_1,...,\omega_n$ – набор численно найденных частот, k_i, h_{ik} – некоторые весовые коэффициенты, a_{ik} – полученное из численного эксперимента смещение k-й точки i-ой собственной формы. Использование второго слагаемого соотношения (3) в модифицированном виде, в котором роль a_{ik} играют характерные смещения точек поверхности образца на соответствующих собственных формах, представляется существенным и может быть выполненным в виде идентификатора формы на основе нейросетевой технологии [4].

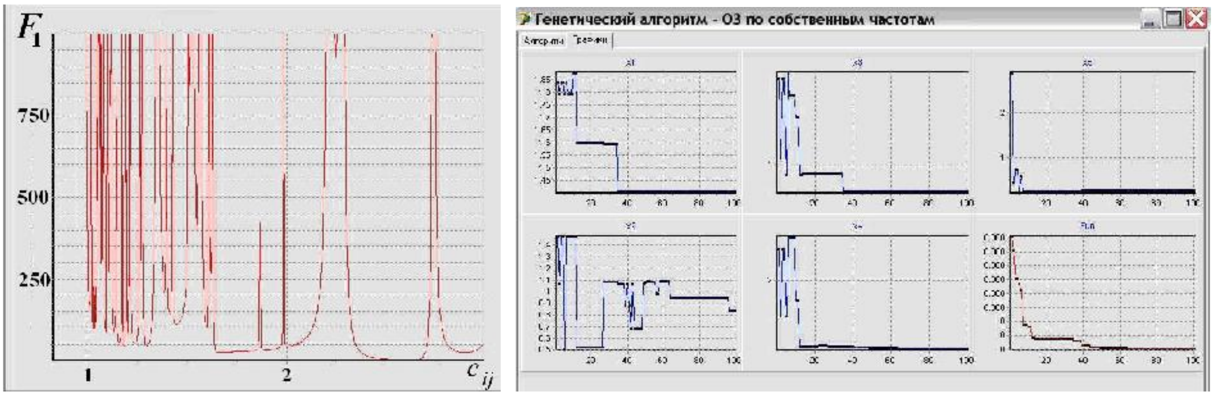


Рис.10. Срез целевой поверхности в обратной коэффициентной задаче и результаты работы ГА в ACELAN (плоская деформация).

Как показывает опыт решения обратных коэффициентных задач [5] целевые поверхности, построенные на основе соотношения (1) или второго слагаемого (3) имеют весьма сложную структуру, один из срезов которой представлен на рис.10. Это обстоятельство определило выбор ГА в качестве инструмента минимизации функционалов (1)-(3).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 05-01-00690, 05-01-00734, 06-01-08041).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бычков А.А., Соловьев А.Н., Шевцов С.Н., Фомин А.В., Паханьян О.Д. Определение упругих характеристик полимеркомпозитных материалов на основе модифицированных методик. Теоретический и численный анализ. //Вестник ДГТУ. 2006. Т.6. №2(29). С. 89-102.
2. Белоконь А.В., Наседкин А.В., Соловьев А.Н. Новые схемы конечно-элементного динамического анализа пьезоэлектрических устройств. //ПММ, 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 491-501.
3. Баранов И.В., Ватульян А.О., Соловьев А.Н. Об одном генетическом алгоритме и его применении в обратных задачах идентификации упругих тел. //Вычислит. технологии. 2006. Т. 11. № 3. С. 14-26.
4. Галушкин А.И. Теория нейронных сетей. Кн.1. – М.: ИПРЖР. 2000. – 416 с.

5. Баранов И.В., Бычков А.А., Надолин Д.К., Соловьев А.Н., Стрельникова А.В. Генетические алгоритмы решения обратных задач теории упругости и их реализация в конечноэлементном комплексе ACELAN. //IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Н.Новгород. ННГУ. 2006. Т.3. С.29.

Сведения об авторах

Акопьян Владимир Акопович
Кандидат техн.наук, с.н.с. Научно-исследовательского института механики и прикладной математики имени И.И.Воровича
Адрес: Россия, 344090, г.Ростов-на-Дону, пр.Стачки 200/1
Тел: (863)2975249; E-mail: ppr@math.rsu.ru

Баранов Игорь Витальевич
Кандидат физ.-мат.наук, доцент Донского государственного технического университета
Адрес: Россия, 344010, г.Ростов-на-Дону, пл.Гагарина 1
Тел: (863)2738354

Бычков Антон Алексеевич
Аспирант Научно-исследовательского института механики и прикладной математики имени И.И.Воровича
Адрес: Россия, 344090, г.Ростов-на-Дону, пр.Стачки 200/1
Тел: (863)2975282; E-mail: Lost_Guadelenn@Mail.ru

Рожков Евгений Васильевич
Н.с. Научно-исследовательского института механики и прикладной математики имени И.И.Воровича
Адрес: Россия, 344090, г.Ростов-на-Дону, пр.Стачки 200/1
Тел: (863)2975249; E-mail: ppr@math.rsu.ru

Соловьев Аркадий Николаевич
Доктор физ.-мат.наук, проф., зав. каф. Донского государственного технического университета, Южный федеральный университет
Адрес: Россия, 344010, г.Ростов-на-Дону, пл.Гагарина 1
Тел: (863)2975282 (863)2738551; E-mail: soloviev@math.rsu.ru

Стрельникова Анна Викторовна
М.н.с. Донской государственный технический университет
Адрес: Россия, 344010, г.Ростов-на-Дону, пл.Гагарина 1
Тел: (863)2738551; E-mail: A.Strelnikova@audit-nt.ru

Чинчян Левон Вартанович
Ст. преп. Донского государственного техническиого университета, ОАО «Роствертол»
Адрес: Россия, 344010, г.Ростов-на-Дону, пл.Гагарина 1
Тел: (863)2738712; E-mail: aeroengdstu@list.ru

Шевцов Сергей Николаевич
Доктор техн.наук, зав. лаб., проф., Южный научный центр РАН , Донской государственный технический университет
Адрес: Россия, 344010, г.Ростов-на-Дону, пл.Гагарина 1
Тел: (863)2738712; E-mail: aeroengdstu@list.ru

НАПРЯЖЕНИЯ ВОЗЛЕ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОГО МОНЕТООБРАЗНОГО ВКЛЮЧЕНИЯВ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Акопян В. Н.

Вопросам исследований концентрации напряжений возле абсолютно жестких тонких включений посвящено много работ и монографий. В этой связи укажем на работы [1-4], которые непосредственно связаны с нижеисследуемой задачей.

В настоящей работе рассмотрено осесимметричное напряженное состояние бесконечного упругого составного пространства из двух различных полупространств, когда на плоскости их стыка имеется абсолютно жесткое, тонкое монетообразное включение. При различных моделях контактирования включения с полупространствами построены замкнутые решения и определены поведения контактных напряжений возле граничной окружности включения.

1. Пусть кусочно-однородное бесконечное пространство, состоящее из двух разнородных полупространств с коэффициентами Ламэ μ_j, λ_j $(j=1,2)$ на плоскости стыка полупространств содержит монетообразное, абсолютно жесткое включение радиуса a и деформируется под воздействием равномерно распределенных на бесконечности, перпендикулярных к плоскости стыка нормальных сжимающих нагрузок интенсивности P_0 и параллельных к плоскости стыка растягивающих нормальных напряжений интенсивности q_1 и q_2. Требуется определить контактные напряжения в зоне стыка включения с матрицей, их коэффиценты интенсивности, а также жесткое смещение включения в случаях, когда

а) лицевые поверхности включения спаяны с полупространствами,

б) одна из лицевых поверхностей спаяна с одним из полупросранств, а другая гладко контактирует со вторым полупространством.

Построим решение поставленных задач в цилиндрической системе координат, начало которой находится в центре монетообразного включения, а ось Oz направлена перпендикулярно к плоскости стыка полупространств. Снабдив индексами 1 и 2 характерные величины соответственно верхнего $(z \geq 0)$ и нижнего $(z \leq 0)$ полупространств, заметим, что во всех трех случаях на плоскости стыка полупространств вне области включения напряжения и смещения непрерывны,

$$\begin{gathered}\sigma_z^{(1)}(r,0)=\sigma_z^{(2)}(r,0);\quad \tau_{rz}^{(1)}(r,0)=\tau_{rz}^{(2)}(r,0); u_z^{(1)}(r,0)=u_r^{(2)}(r,0);\\ u_z^{(1)}(r,0)=u_z^{(2)}(r,0)\end{gathered}\quad (a<r<\infty) \tag{1.1}$$

$\sigma_з^{(j)}(r,z)$ и $\tau_{rz}^{(j)}(r,z)$ $(j=1,2)$ – компоненты напряжения, действующи**х** в соответствующих полупространствах, а $u_r^{(j)}(r,z)$ и $u_z^{(j)}(r,z)$ $(j=1,2)$ - смещения точек этих полупространств. В области же включения, в соответствии с условиями контакта, будут иметь место следующие соотношения:

$$\begin{cases} U_z^{(1)}(r,0)=U_z^{(2)}(r,0)=\delta \\ U_r^{(1)}(r,0)=U_r^{(2)}(r,0)=0 \end{cases} \tag{1.2а}$$

$$\begin{cases} \tau_{rz}^{(1)}(r,0)=U_r^{(2)}(r,0)=0 \\ U_z^{(1)}(r,0)=U_z^{(2)}(r,0)=\delta \end{cases} \tag{1.2б}$$

где δ – жесткое смещение включения по направлению оси Oz. Чтобы решить поставленные задачи, решения уравнений Ламэ представим в виде интегралов [1]

$$U_r^{(j)}(r,z)=\int_0^\infty\left\{B_j-\frac{\lambda_j+\mu_j}{\lambda_j+3\mu_j}\left[B_j+(-1)^j C_j\right]s|z|\right\}e^{-s|z|}sJ_1(rs)ds+U_0^{(j)}r$$

$$U_z^{(j)}(r,z)=\int_0^\infty\left\{C_j+\frac{\lambda_j+\mu_j}{\lambda_j+3\mu_j}\left[B_j+(-1)^j C_j\right]s|z|\right\}e^{-s|z|}sJ_0(rs)ds+W_0^{(j)}z \tag{1.3}$$

где $J_1(x)$ $(j=0,1)$ - функции Бесселя действительного аргумента, $B_j(\mathrm{s})$ и $C_j(\mathrm{s})$ $(j=1,2)$ - неизвестные коэффициенты, подлежащие определению

$$U_0^{(j)}=\frac{\lambda_j P_0+(\lambda_j+2\mu_j)q_j}{2\mu_j(2\mu_j+3\lambda_j)}\quad W_0^{(j)}=-\frac{(\lambda_j+\mu_j)P_0+\lambda_j q_j}{\mu_j(2\mu_j+3\lambda_j)}\quad (j=1,2) \tag{1.4}$$

Отметим, что последние слагаемые, входящие в (1.3), являются смещениями, возникающими в полупространствах вследствие действий нагрузок на бесконечности. Причем, в силу равенства в плоскости стыка полупространств радиальных смещений при $r\to\infty$ имеет место равенство $U_0^{(1)}=U_0^{(2)}=U_0$, т.е. нагрузки P_0, q_1 и q_2, действующие на бесконечности, связаны соотношением

$$\frac{\lambda_1 P_0+(\lambda_1+2\mu_1)q_1}{2\mu_1(2\mu_1+3\lambda_1)}=\frac{\lambda_2 P_0+(\lambda_2+2\mu_2)q_2}{2\mu_2(2\mu_1+3\lambda_1)}$$

Введем в рассмотрение функции скачков напряжений и смещений

$$\begin{aligned}&\sigma_з^{(1)}(r,0)-\sigma_з^{(2)}(r,0)=\sigma(r);\quad \tau_{rz}^{(1)}(r,0)-\tau_{rz}^{(2)}(r,0)=\tau(r)\\&U_z^{(1)}(r,0)-U_z^{(2)}(r,0)=W(r);\quad U_r^{(1)}(r,0)-U_r^{(2)}(r,0)=U(r)\end{aligned}\qquad (0<r<a) \tag{1.5}$$

Используя представление (1.3), вычислим напряжения, удовлетворим условиям (1.1), (1.5) и определим неизвестные коэффициенты $B_j(s)$, $C_j(s)$ $(j=1,2)$ при помощи функций скачков. Далее вычислим значения напряжений верхней лицевой поверхности монетообразного включения и смещения контактирующих с нижней лицевой поверхностью включения. Затем, удовлетворив условиям (1.2а) – (1.2б), в итоге придем к следующим системам определяющих уравнений:

$$\begin{cases} d_1L_{0,0}^0[\sigma]-d_0L_{0,1}^0[\tau]=\Delta\delta\\ d_0L_{1,0}^0[\sigma]-d_1L_{1,1}^0[\tau]=\Delta U_0 r\end{cases} \tag{1.6а}$$

$$\begin{cases} b_1L_{0,1}^1[U]+d_1L_{0,0}^0[\sigma]-d_0L_{0,1}^1[\tau]=\Delta\delta\\ b_0L_{1,1}^1[U]-d_0L_{1,0}^0[\sigma]+d_1L_{1,1}^0[\sigma]=-\Delta U_0 r\\ b_3L_{1,1}^2[U]+b_1L_{1,0}^1[\sigma]+b_0L_{1,1}^1[\tau]=0\end{cases} \tag{1.6б}$$

Заметим, что эти системы уравнений нужно рассматривать при условиях

$$\int_0^a r\sigma(r)dr=0,\qquad \int_0^a r\tau(r)dr=0 \tag{1.7}$$

Отметим, что здесь и в дальнейшем будут сохранены обозначения работы [2]. Для решений системы интегральных уравнений (1.7а) – (1.7б), следуя работам [1-3], введем функции

$$\{W_*(t);\sigma_*(t)\}=\frac{2}{\pi}\int_t^a\frac{\xi\{W(\xi);\sigma(\xi)\}}{\sqrt{\xi^2-t^2}}d\xi;\quad \{U_*(t);\tau_*(t)\}=\frac{2t}{\pi}\int_t^a\frac{\{U(\xi);\tau(\xi)\}}{\sqrt{\xi^2-t^2}}d\xi$$

и продолжим первых два из них на интервал $(-a,0)$ четным образом, а остальные две функции – нечетным образом, после чего применим к обеим сторонам первых уравнений систем (1.7а)-(1.7б) оператор I, а к остальным – оператор I_1 [5]

$$I_1\left[\varphi(x)\right]=\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}\int_0^y\varphi(x)dr;\qquad I\left[\varphi(x)\right]=\int_0^x\frac{\varphi(r)rdr}{\sqrt{x^2-r^2}}$$

В итоге придем соответственно к следующим системам сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi d_1}{2}\sigma_*(x) - \dfrac{d_0}{2}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{\tau_*(t)}{t-x}dt = \Delta\delta \\ \dfrac{\pi d_1}{2}\tau_*(x) - \dfrac{d_0}{2}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{\sigma_*(t)}{t-x}dt = 2\Delta U_0 x \end{cases} \tag{1.8а}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\pi b_1}{2}U_*(x) + \dfrac{\pi d_1}{2}\sigma_*(x) - \dfrac{d_0}{2}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{\tau_*(x)}{t-x}dt = \Delta\delta \\ \dfrac{\pi d_1}{2}\tau_*(x) - \dfrac{b_0}{2}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{U_*(t)dt}{t-x} + \dfrac{d_0}{2}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{\sigma_*(t)dt}{t-x} = 2\Delta U_0 x \\ \dfrac{\pi b_1}{2}\sigma_*(x) + \dfrac{\pi b_3}{2}U_*(x) + \dfrac{b_0}{2}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{\tau_*(t)dt}{t-x} = -\Delta C_* \end{cases} \tag{1.8б}$$

2. Приступим к решению системы интегральных уравнений (1.8а) при условиях (1.7). Вводя комплексную комбинацию приведенных напряжений, систему можно свести к решению следующего интегрального уравнения:

$$\varphi(x) - \frac{iq}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)}{s-x}ds = f(x) \quad (-a < x < a; \quad i = 1, 2) \tag{2.1}$$

где

$$\varphi(x) = \sigma_*(x) - i\tau_*(x); \quad f(x) = \frac{2\Delta}{\pi d_1}(\delta - 2iU_0 x); \quad q = (\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)})/(\vartheta_2^{(2)} + \vartheta_2^{01})$$

Условия (1.7) при этом можно записать в следующей форме:

$$\int_{-a}^{a}\varphi(x)dx = 0 \tag{2.2}$$

Решение уравнения (2.1) дается формулой [6]

$$\varphi(x) = \frac{2\Delta q\omega(x)}{\pi d_1(1-q^2)\sin\pi\beta}\left[\delta + 4aqU_0 - 2iU_0 x\right]$$

где

$$\omega(x) = \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{-i\beta}; \ \beta = \frac{1}{2\pi}\ln|g| \tag{2.3}$$

Из условий (2.2) для жесткого смещения δ получим выражение

$$\delta = -2aU_0(2q+\beta) \tag{2.4}$$

Подставляя это значение δ в (2.4), для функции $\varphi(x)$ окончательно получим

$$\varphi(x) = -\frac{4\Delta U_0(a\beta + ix)}{\pi d_1(1-q^2)\sin\pi\beta}\omega(x) \tag{2.5}$$

отсюда

$$\sigma_*(x) = -\frac{4\Delta U_0}{\pi d_1(1-q^2)\sin\pi\beta}\left[a\beta\omega s\left(\beta\ln\frac{a-x}{a+x}\right) - x\sin\left(\beta\ln\frac{a-x}{a+x}\right)\right]$$

$$\tau_*(x) = -\frac{4\Delta U_0}{\pi d_1(1-q^2)\sin\pi\beta}\left[a\beta\sin\left(\beta\ln\frac{a-x}{a+x}\right) - x\cos\left(\beta\ln\frac{a-x}{a+x}\right)\right]$$

Скачки истинных контактных напряжений даются формулами обращения операторов Абеля. Нетрудно убедиться, что они на окружности $r = 0$ имеют корневую особенность с осцилляцией.

3. Теперь обратимся к задаче б). Из первого и последнего уравнений (1.8б) находим $U_*^{/}\left(x\right) = -\dfrac{\sigma_*\left(x\right)}{2\vartheta_1^{(2)}} - \dfrac{2\left(b_0\delta - d_0C_*\right)}{\vartheta_2^{(1)}\vartheta_1^{(2)}}$. Интегрируя полученное соотношение на интервале $(-a,a)$ и учитывая самоуравновешенность действующих на включение напряжений, а также равенство нулю скачков смещений в точках $\pm a$, получим $\delta = d_0C_*/b_0$; $U_*^{/}\left(x\right) = -\sigma_*\left(x\right)/2\vartheta_1^{(2)}$. Подставляя полученное выражение для $U_*^{/}\left(x\right)$ во второе и третье уравнения (1.8б), для определения скачков приведенных контактных напряжений получим систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_*\left(x\right) + \dfrac{\alpha_1}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{\tau_*\left(t\right)}{t-x}dt = C_*^{(1)} \\ \tau_*\left(x\right) + \dfrac{\beta_1}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{\sigma_*\left(t\right)}{t-x}dt = U_0^* x \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь $$\alpha_* = \vartheta_1^{(2)}/\vartheta_2^{(2)};\;\; \beta_1 = \frac{\vartheta_2^{(1)}\left(\vartheta_2^{(2)} + \vartheta_2^{(1)}\right) - \left(\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)}\right)^2}{\vartheta_1^{(2)}\left(\vartheta_2^{(2)} + \vartheta_2^{(1)}\right)}$$

$$C_*^{(1)} = -\frac{2\Delta\vartheta_1^{(2)}}{\pi\vartheta_2^{(2)}b_0}C_*;\;\; U_0^* = \frac{8\Delta U_0}{\pi\left(\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}\right)}$$

Вводя функции $\phi_j\left(x\right) = \sigma_*\left(x\right) + \lambda_j\tau_*\left(x\right)$ $\left(j = 1,2\right)$, систему уравнений (3.1) можно свести к решению следующих сингулярных интегральных уравнений:

$$\varphi_j\left(x\right) + \frac{q_j}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi_j\left(s\right)}{s-x}ds = g_j\left(x\right)\;\; (-a < x < a;\;\; j = 1,2)$$

$$\lambda_j = \left(-1\right)^{j+1}\sqrt{\alpha_1/\beta_1};\;\; q_j = \left(-1\right)^{j+1}\sqrt{\alpha_1\beta_1} = \left(-1\right)^{j+1}q;\;\; g_j\left(x\right) = C_*^{(1)} + \lambda_j U_0^* x \tag{3.2}$$

Сначала рассмотрим случай, когда q действительное положительное число. В этом случае решения уравнений (3.2) даются формулами [6]

$$\varphi_j\left(x\right) = \frac{1}{1+q_j^2}\left[g_j\left(x\right) + \frac{q_jX_j^*\left(x\right)}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{g_j\left(s\right)ds}{X_j^+\left(s\right)\left(s-x\right)}\right]\;\left(-a < x < a;\;\; j = 1,2\right) \tag{3.3}$$

$$X_1\left(z\right) = \left(\frac{z+a}{z-a}\right)^{1-\gamma_1};\; X_2\left(z\right) = \left(\frac{z-a}{z+a}\right)^{\gamma_2};\gamma_j = \frac{1}{2\pi i}\left|G_j\right| + \frac{\vartheta_j}{2\pi} = \frac{\vartheta_1}{2\pi}$$

$$0 < \vartheta_j = \arg G_j < 2\pi;\quad G_j = (1 - iq_j)/(1 + iq_j);\quad \left|g_j\right| = 1$$

Отметим, что здесь учтено то обстоятельство, что операторы вращения, использованные при получении сингулярных уравнений, понижают порядок особенности в концевой точке на $1/2$ и, следовательно, в концевых точках интервала $\left(-a,a\right)$ искомые функции не могут иметь особенности больше, чем $1/2$ ввиду энергетических соображений. Поэтому в тех концевых точках, где показатель особенности больше $1/2$, взято ограниченное решение.Подставляя значения функции $g_j\left(x\right)$ в (3.3) и удовлетворяя условиям $\int\limits_{-a}^{a}\varphi_j\left(x\right)dx=0,$ для постоянных $C_*^{(1)}$, δ и приведенных контактных напряжений получим выражения

$$C_* = -\frac{\pi\vartheta_2^{(2)}\lambda\gamma a U_0^* b_0}{2\vartheta_1^{(2)}\Delta};\ \delta = \frac{2\vartheta_2^{(2)}\left(\vartheta_1^{(2)}-\vartheta_1^{(1)}\right)}{\vartheta_1^{(2)}\left(\vartheta_2^{(2)}+\vartheta_2^{(1)}\right)}\lambda a U_0 \quad \left(\gamma = 1-\gamma_1 = -\gamma_2\right)$$

$$\sigma_*\left(x\right)=\frac{qU_0x\left[\omega\left(x\right)-\omega\left(-x\right)\right]}{2\left(1+q^2\right)\sin\pi\gamma}$$

$$\tau_*\left(x\right)=\frac{qU_0x\left[\omega\left(x\right)+\omega\left(-x\right)\right]}{2\left(1+q^2\right)\sin\pi\gamma};\quad \omega\left(x\right)=\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\gamma} \tag{3.4}$$

Скачки истинных контактных напряжений опять-таки будут определяться формулами обращения операторов Абеля. Очевидно, что в рассматриваемом случае на окружности $r=a$ они будут иметь степенную особенность, показатель которой будет изменяться в интервале $\left(1/2,1\right)$. Приведем также формулы для определения контактных напряжений на плоскости стыка разнородных полупространств вне области включения

$$\sigma_z^{(1)}\left(r,0\right)=-\frac{b_1}{r\Delta}\frac{d}{dr}\int\limits_0^a\frac{t\tau_*\left(t\right)dt}{\sqrt{r^2-t^2}};\ \tau_{zr}^{(1)}\left(r,0\right)=\frac{\left(2\vartheta_1^2b_1-b_3\right)}{2\Delta\vartheta_1^{(2)}}\frac{d}{dr}\int\limits_0^a\frac{\sigma_*\left(t\right)dt}{\sqrt{r^2-t^2}} \tag{3.5}$$

Отметим, что в случае, когда q чисто мнимое число $q=iq^*$, то G_j – $\left(j=1,2\right)$– действительные положительные числа и, следовательно, точки $\pm a$ являются концами автоматической ограниченности. В этом случае решения рассмотренной задачи будут даваться формулами (3.6), если в этих формулах заменить ¥ на $i\beta$ $\left(2\pi\beta=\ln(1+q^*)-\ln(1-q^*)\right)$. Причем, как и в первой задаче, напряжения на окружности $r=a$ будут иметь корневую особенность с осцилляцией.

Теперь обратимся к случаю $q=0$, который возможен лишь при $\beta_1=0$. В этом случае из системы (3.1) с учетом условий (3.2) сразу находим

$$\sigma_*\left(x\right)=\frac{\alpha_1U_0^*}{\pi}\left(a-x\ln\frac{a-x}{a+x}\right);\ \tau_*\left(x\right)=U_0^*x\,;\ \delta=-\frac{3d_0aU_0^*}{2\Delta} \tag{3.6}$$

Для истинных контактных напряжений, действующих вне области включения, по формулам (3.5) получим

$$\sigma_z^{(j)}\left(r,0\right)=\frac{U_0^*b_1}{\Delta}\left[\frac{a}{\sqrt{r^2-a^2}}-\arcsin\frac{a}{r}\right]$$

$$\tau_{rz}^{(j)}\left(r,0\right)=-\frac{\alpha_1U_0^*b_0}{2\pi\vartheta_1^{(2)}\Delta}\left\{\frac{a^2}{r\sqrt{r^2-a^2}}+\frac{2\ln 2a\ln 2\sqrt{r-a}}{\sqrt{r^2-a^2}}+F_1\left(r\right)\right\} \tag{3.7}$$

где $F_1\left(r\right)$–функция, ограниченная в точке $r=a$. Таким образом, в рассматриваемом случае нормальные контактные напряжения имеют обычную корневую особенность, а касательные напряжения, помимо корневой особенности, имеют также логарифмическую особенность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я. О концентрации упругих напряжений возле тонкого отслоившегося включения. //В сб.: "Современные проблемы механики и авиации", посвящ. И.Ф. Образцову. 1980, с. 156-162.
2. Акопян В.Н., Мирзоян С.Е., Даштоян Л.Л. Об одной осесимметричной смешанной задаче для составного пространства с монетообразной трещиной. //«Проблемы механики деформируемых тел», Ереван: 2003. С.68-76.
3. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л. Об одной осесимметричной задаче для составного пространства, ослабленного полубесконечной кольцеобразной трещиной // Изв. НАН Армении. Механика. 2006. Т.59. №1. С.3-10.
4. Ильина И.И., Сильвестров В.В. Задача о тонком жестком включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды. // Изв. РАН. МТТ. 2005. №3. С.153–166.
5. Попов Г.Я. Осесимметричная контактная задача для упругого неоднородного полупространства при наличии сцепления. //ПММ. 1973. Т.37. С.1109-1116.
6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708с.

Сведения об авторе:

Акопян Ваграм Наследникович
Доктор физ.-мат. наук, директор Института механики НАН РА
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б ,
Тел: (+37410) 52-48-90, E-mail: vhakobyan@sci.am

КРУЧЕНИЕ КРУГЛЫМ ШТАМПОМ УПРУГОГО СЛОЯ СО СВОБОДНОЙ НИЖНЕЙ ГРАНЬЮ

Александров В.М.

Рассматривается осесимметричная контактная задача о кручении круглым штампом упругого слоя конечной, но достаточно большой толщины, со свободной нижней гранью. Штамп жестко закреплен на верхней грани слоя и к нему приложен крутящий момент. Построено интегральное уравнение относительно неизвестного контактного касательного усилия под штампом. Найдено решение этого интегрального уравнения с помощью регулярного асимптотического метода в виде разложения контактного касательного усилия по обратным степеням безразмерной толщины слоя.

1. Свяжем со слоем цилиндрическую систему координат r, φ, z, где ось z перпендикулярна граням слоя и проходит через центр круглого штампа радиуса a. Начало координат находится на нижней грани слоя. Толщина слоя h.

Решим сначала вспомогательную задачу, когда вместо штампа слой нагружен по кругу радиуса a распределенным касательным усилием $\tau(r)$. Имеем исходные уравнения:

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon}{\partial r} - \frac{\upsilon}{r^2} + \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2} = 0 \tag{1.1}$$

$$\tau_{r\varphi} = G\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial r} - \frac{\upsilon}{r}\right), \qquad \tau_{\varphi z} = G\frac{\partial \upsilon}{\partial r}$$

и граничные условия:

при $$z = 0 \quad \tau_{\varphi z} = 0 \tag{1.2}$$

при $$z = h \quad \tau_*(r) = \left\{\begin{matrix} \tau(r) & (r \le a) \\ 0 & (r > a) \end{matrix}\right\} = G\frac{\partial \upsilon}{\partial z} \tag{1.3}$$

Будем искать функцию перемещения υ в форме интеграла Ханкеля ($J_n(x)$ – функции Бесселя).

$$\upsilon(r,z) = \int_0^\infty V(\gamma,z)\gamma J_1(\gamma r)d\gamma \;, V(\gamma,z) = \int_0^\infty \upsilon(\rho,z)\rho J_1(\gamma\rho)d\rho \tag{1.4}$$

и введем интеграл Ханкеля для разрывной функции $\tau_*(r)$

$$\tau_*(r) = \int_0^\infty T(\gamma)\gamma J_1(\gamma r)d\gamma, \qquad T(\gamma) = \int_0^a \tau(\rho)\rho J_1(\gamma\rho)d\rho \tag{1.5}$$

заметим кроме того, что крутящий момент

$$M = 2\pi\int_0^a \tau(\rho)\rho^2 d\rho \tag{1.6}$$

С помощью формул (1.4), (1.5) решим краевую задачу (1.2), (1.3) для уравнения (1.1). В частности, получим

$$\tau_{r\varphi} = -\int_0^\infty \frac{T(\gamma)\operatorname{ch}\gamma z}{\operatorname{sh}\gamma h} J_2(\gamma r)\gamma d\gamma \tag{1.7}$$

$$T_{r\varphi} = \int_0^h \tau_{r\theta} dz = -\int_0^a \tau(\rho)\rho d\rho \int_0^\infty J_1(\gamma\rho) J_2(\gamma r) d\gamma = -\frac{1}{r^2}\int_0^a \tau(\rho)\rho^2 d\rho \qquad (1.8)$$

Здесь использован интеграл [1] (6.512.1). Далее найдем

$$M_1 = 2\pi r^2 T_{r\varphi} = -2\pi \int_0^a \tau(\rho)\rho^2 d\rho \qquad (1.9)$$

что с точностью до знака совпадает с (1.6). Следовательно, слой находится в равновесии.

Приведем еще один важный результат решения вспомогательной задачи

$$\upsilon(r,h) = \frac{1}{G}\int_0^a \tau(\rho)\rho d\rho \int_0^\infty \operatorname{cth}\gamma h J_1(\gamma\rho) J_1(\gamma r) d\gamma \qquad (1.10)$$

2. Перейдем к решению контактной задачи. Используя условие контакта

$$\upsilon(r,h) = \varepsilon r \qquad (r \le a) \qquad (2.1)$$

где ε – угол поворота штампа вокруг оси z, и формулу (1.10) получим интегральное уравнение для определения контактного касательного усилия $\tau(r)$

$$\int_0^a \tau(\rho)\rho d\rho \int_0^\infty \operatorname{cth}\gamma h J_1(\gamma\rho) J_1(\gamma r) d\gamma = G\varepsilon r \qquad (r \le a) \qquad (2.2)$$

Далее, используя разложение функции Бесселя [1] (8.441.2), представим интегральное уравнение (2.2) в виде

$$\int_0^a \tau(\rho)\rho d\rho \int_0^\infty J_1(\gamma\rho) J_1(\gamma r) d\gamma = G\varepsilon r + \sum_{k=0}^\infty \sum_{l=0}^\infty \frac{b_{kl} r^{2l+1}}{h^{2k+2l+3}} \int_0^a \tau(\rho)\rho^{2k+2} d\rho \qquad (2.3)$$

где коэффициенты b_{kl} имеют вид

$$b_{kl} = \frac{(-1)^{k+l}}{(2k)!(2k+2)!(2l)!(2l+2)!}\int_0^\infty (1-\operatorname{cth} u) u^{2k+2l+2} du \qquad (2.4)$$

Теперь очевидно, что решение интегрального уравнения (2.3) при достаточно больших значениях безразмерного геометрического параметра $\lambda = h/a$ надо искать в виде [2]

$$\tau(r) = \sum_{n=0}^\infty \tau_n(\rho) h^{-n} \qquad (2.5)$$

Подставляя (2.4) в (2.3) и приравнивая слева и справа члены при одинаковых степенях h^{-1}, получим

$$\int_0^a \tau_0(\rho)\rho d\rho \int_0^\infty J_1(\gamma r) J_1(\gamma\rho) d\gamma = G\varepsilon r\ , \quad \tau_1(\rho) = \tau_2(\rho) = 0$$

$$\int_0^a \tau_3(\rho)\rho d\rho \int_0^\infty J_1(\gamma r) J_1(\gamma\rho) d\gamma = b_{00} r \int_0^a \tau_0(\rho)\rho^2 d\ , \quad \tau_4(\rho) = 0 \qquad (2.6)$$

$$\int_0^a \tau_5(\rho)\rho d\rho \int_0^\infty J_1(\gamma r) J_1(\gamma\rho) d\gamma = b_{10} r \int_0^a \tau_0(\rho)\rho^4 d\rho + b_{01} r^3 \int_0^a \tau_0(\rho)\rho^2 d\rho$$

$$\int_0^a \tau_6(\rho)\rho d\rho \int_0^\infty J_1(\gamma r) J_1(\gamma\rho) d\gamma = b_{00} r \int_0^a \tau_3(\rho)\rho^2 d\rho \quad \text{и т.д.}$$

Используя решение

$$\tau(r) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{dr}\int_r^a \frac{p(t)dt}{\sqrt{t^2-r^2}}, \qquad p(t) = \frac{d}{dt}t\int_0^t \frac{f(r)dr}{\sqrt{t^2-r^2}} \tag{2.7}$$

интегрального уравнения

$$\int_0^a \tau(\rho)\rho d\rho \int_0^\infty J_1(\gamma\rho)J_1(\gamma r)d\gamma = f(r) \qquad (r \le a) \tag{2.8}$$

можем последовательно из (2.6) с желаемой точностью найти

$$\tau_N(r) = \sum_{n=0}^N \tau_n(\rho)h^{-n} \tag{2.9}$$

Затем по формуле (1.6) можем найти с той же точностью связь между крутящим моментом M и углом закручивания £ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-00002).

ЛИТЕРАТУРА

1. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1962. 1100с.
2. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456с.

<u>Сведения об авторе</u>

Александров Виктор Михайлович

Д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник Института проблем механики Российской академии наук

Адрес: 119607, Москва. ул. Раменки 25, корп. 3, кв. 588

Тел: (495)932-04-66, (495)434-21-59

E-mail: alexand@ipmnet.ru

О РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ СИЛОВЫХ НАГРУЗОК ПО ГРАНИЦЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Амирджанян А. А.

Изучению напряженно-деформированного состояния упругих однородных и составных тел, по границе которых с постоянной скоростью движутся силовые нагрузки или абсолютно жесткий штамп, посвящено много работ отечественных и зарубежных ученых [1-3].

В настоящей работе рассмотрено плоское деформированное состояние составной полуплоскости, состоящей из бесконечной упругой полосы и упругой полуплоскости с различными упругими характеристиками под воздействием равномерно движущихся сосредоточенных нормальных и касательных нагрузок, когда на линии контакта полосы с полуплоскостью имеют место условия полного сцепления или гладкого контакта.

Пусть по границе составной полуплоскости, состоящей из бесконечной упругой полосы с толщиной h с коэффициентами Ламэ λ_1, μ_1 и упругой полуплоскости с коэффициентами λ_2, μ_2 со скоростью v_0, равномерно движутся нормальная и касательная сосредоточенные нагрузки интенсивности p и q, соответственно. Считается, что скорость движения нагрузок v_0 меньше, чем наименьшая из скоростей движения упругих волн в полосе и полуплоскости.

Ставится задача выявить закономерности изменения контактных напряжений, действующих на линии стыка полосы с полуплоскостью в случаях полного и гладкого контактов. Граничные условия и условия контакта в случае полного контакта записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\sigma_y^{(1)}(x_1,h) = -p\delta(x_1 - v_0 t) && \tau_{xy}^{(1)}(x_1,0) = \tau_{xy}^{(2)}(x_1,0)\\
&\tau_{xy}^{(1)}(x_1,h) = -q\delta(x_1 - v_0 t) && u_1(x_1,0) = u_2(x_1,0)\\
&\sigma_y^{(1)}(x_1,0) = \sigma_y^{(2)}(x_1,0) && v_1(x_1,0) = v_2(x_1,0)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\sigma_y^{(i)}, \tau_{xy}^{(i)} (i = 1,2)$ – компоненты напряжений, действующих в полосе и полуплоскости соответственно, а $u_i, v_i (i = 1,2)$ – смещения точек полосы и полуплоскости по направлениям осей Ox_1, Oy_1, соответственно, и удовлетворяющие в своей области определения уравнениям движения Ламэ.

Заметим, что при гладком контакте полосы с полуплоскостью первые три и последнее из уравнений (1.1) остаются в силе, предпоследнее условие выбрасывается, а четвёртое принимает вид

$$\tau_{xy}^{(j)}(x_1,0) = 0 \ \ (j = 1,2) \tag{1.2}$$

Чтобы построить решение поставленной задачи, с помощью замены переменных $x = x_1 - v_0 t \quad y = y_1$ перейдём к подвижной системе координат Oxy, в которой уравнения Ламэ примут вид

$$\begin{aligned}
&\mu_i \Delta u_i + (\lambda_i + \mu_i)\frac{\partial \vartheta_i}{\partial x} = \rho_i v_0^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\\
&\mu_i \Delta v_i + (\lambda_i + \mu_i)\frac{\partial \vartheta_i}{\partial y} = \rho_i v_0^2 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\vartheta_i = \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \quad (i = 1,2)$$

Общие решения уравнений (1.3) представим в виде интегралов Фурье

$$u_1(x,y)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{k_{21}(A_1\text{ch}(sk_{21}y)+B_1\text{sh}(sk_2y))-(C_1\text{ch}(sk_1y)+D_1\text{sh}(sk_1y))\}e^{isx}ds$$
$$v_1(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{(A_1\text{sh}(sk_2y)+B_1\text{ch}(sk_2y))-k_{11}(C_1\text{sh}(sk_1y)+D_1\text{ch}(sk_1y))\}e^{isx}ds \tag{1.4}$$

$$u_2(x,y)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{k_{22}A_2\exp(sk_{22}y)-C_2\exp(sk_{12}y)\}e^{isx}ds$$
$$v_2(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\text{sgn}\, s\{A_2\exp(sk_{22}y)-k_{12}C_2\exp(sk_{12}y)\}e^{isx}ds \tag{1.5}$$

Здесь $k_{ij}=\sqrt{1-\dfrac{v_0^2}{c_{ij}^2}}$; $c_{1i}=\sqrt{\dfrac{\lambda_i+2\mu_i}{\rho_i}}$; $c_{2i}=\sqrt{\dfrac{\mu_i}{\rho_i}}$; ρ_i – плотность материалов полосы и полуплоскости соответственно, $A_j, C_j, B_1, D_1\,(j=1,2)$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

В этом случае напряжения задаются следующими формулами:

$$\sigma_y^{(1)}(x,y)=\frac{1}{\pi}\mu_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{k_{21}(A_1\text{ch}(sk_{21}y)+B_1\text{sh}(sk_2y))-\alpha_1(C_1\text{ch}(sk_1y)+D_1\text{sh}(sk_1y))\}e^{isx}sds$$
$$\tau_{xy}^{(1)}(x,y)=\frac{i}{\pi}\mu_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{\alpha_1(A_1\text{sh}(sk_2y)+B_1\text{ch}(sk_2y))-k_{11}(C_1\text{sh}(sk_1y)+D_1\text{ch}(sk_1y))\}e^{isx}sds \tag{1.6}$$

$$\sigma_y^{(2)}(x,y)=\frac{1}{\pi}\mu_2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{k_{22}A_2\exp(|s|k_{22}y)-\alpha_2C_2\exp(|s|k_{12}y)\}e^{isx}sds$$
$$\tau_{xy}^{(2)}(x,y)=\frac{i}{\pi}\mu_2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{\alpha_2A_2\exp(|s|k_{22}y)-k_{12}C_2\exp(|s|k_{12}y)\}e^{isx}\,|s|ds \tag{1.7}$$

Используя представления (1.4)-(1.7), удовлетворим условиям (1.1) и определим неизвестные коэффициенты. Далее вычислим контактные напряжения на линии стыка полосы с полуплоскостью. Получим следующие выражения:

$$\sigma_y^{(2)}(x,0)=-\mu\frac{p}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{f_1(\text{sh})}{\Delta(\text{sh})}\cos sxds+\mu\frac{q}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{g_1(\text{sh})}{\Delta(\text{sh})}\sin sxds$$
$$\tau_y^{(2)}(x,0)=-\mu\frac{p}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{g_2(\text{sh})}{\Delta(\text{sh})}\sin sxds+\mu\frac{q}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{f_2(\text{sh})}{\Delta(\text{sh})}\cos sxds$$

Здесь $\Delta(s)=\mu^2R_2^-+R_1^-\left(d_1^-\left(\text{ch}\,k_+s-1\right)+d_2^+\,\text{sh}\,k_+s\right)+R_1^+\left(d_1^+\left(\text{ch}\,k_-s-1\right)+d_2^-\,\text{sh}\,k_-s\right)$

$$f_i(s)=\mu R_2^-\,\text{ch}\frac{k_+s}{2}\text{ch}\frac{k_-s}{2}-\left(-1\right)^i b_2\,\text{sh}\frac{k_+s}{2}\text{sh}\frac{k_-s}{2}+$$
$$+\frac{1}{c}\frac{k_{j2}}{k_{j1}}\left(R_1^-\,\text{sh}\frac{k_+s}{2}\text{ch}\frac{k_-s}{2}+\left(-1\right)^i R_1^+\,\text{sh}\frac{k_-s}{2}\text{ch}\frac{k_+s}{2}\right)$$

$$g_i(s)=2\frac{\alpha_1}{c}k_{j2}\,\text{sh}\frac{k_+s}{2}\text{sh}\frac{k_-s}{2}+$$
$$+\left(-1\right)^i\frac{1}{k_{i1}}\left(b_1^-\,\text{sh}\frac{k_+s}{2}\text{ch}\frac{k_-s}{2}-\left(-1\right)^i b_1^+\,\text{sh}\frac{k_-s}{2}\text{ch}\frac{k_+s}{2}\right)$$
$$\left(i,j=1,2;\ i\neq j\right)$$

$$b_1^{\pm} = \frac{\mu R_2^- C_1^{\pm} - C_2^- R_1^{\pm}}{1-\alpha_1}; \quad b_2 = \frac{\mu\left(1+\alpha_1\right) R_2^- - 2\alpha_1 C_2^-}{1-\alpha_1}$$

$$\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}; \qquad \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}; \quad c = \frac{c_{22}^2}{c_{21}^2} = \frac{\mu}{\rho}\ ; \ \left(\alpha_j = 1 - v_0^2 / 2c_{2j}^2; \quad j = 1,2\right)$$

$$k_{\pm} = k_{11} \pm k_{21}; \quad R_i^{\pm} = \alpha_i^{\ 2} \pm k_{1i}k_{2i}; \quad C_i^{\pm} = \alpha_i \pm k_{1i}k_{2i}; \quad L_i^{\pm} = 1 \pm k_{1i}k_{2i}$$

$$d_1^{\pm} = \pm\frac{1}{2}\frac{1}{k_{11}k_{21}(1-\alpha_1)^2}\left(R_1^{\pm}L_2^- - 2\mu C_1^{\pm}C_2^- + \mu^2 L_1^{\pm}R_2^-\right); \quad d_2^{\pm} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{k_{12}}{k_{11}} \pm \frac{k_{22}}{k_{21}}\right)$$

Приведем также выражение для нормальных смещений точек верхней границы полосы, по которой движутся силовые нагрузки. Они имеют вид

$$v_1(x,h) = -\frac{p}{2\pi\mu_1}\frac{(\alpha_1 - 1)k_{11}}{R_1^-}\left(\ln x + \int_0^{\infty}\frac{F(sh)}{\Delta(sh)s}\cos sxds\right) +$$

$$+\frac{q}{2\pi\mu_1}\frac{C_1^-}{R_1^-}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x + \int_0^{\infty}\frac{G(sh)}{\Delta(sh)s}\sin sxds\right)$$

$$F(s) = R_1^-\left(d_2^+ - d_1^-\right)\exp\left(-k_+ s\right) + \left(R_1^- d_2^- - R_1^+ d_1^+\right)\operatorname{ch} k\_s +$$

$$+\left(R_1^- d_1^+ - R_1^+ d_2^-\right)\operatorname{sh} k\_s + \mu^2 R_2^- - R_1^- d_1^- - R_1^+ d_1^+$$

$$G(s) = \frac{1}{C_1^-}\left(\left(R_1^- C_1^+ - R_1^+ C_1^-\right)\left(d_1^+\left(\operatorname{ch} k\_s - 1\right) + d_2^- \operatorname{sh} k\_s\right) + \mu\left(R_1^- C_2^- - \mu R_2^- C_1^-\right)\right)$$

В частном случае, когда полоса и полуплоскость состоят из одного и того же материала, имеем $F(s) = G(s) = 0$ и для перемещений получаются известные соотношения [2]:

$$v_1(x,h) = -\frac{p}{2\pi\mu_1}\frac{(\alpha_1 - 1)k_{11}}{\alpha_1^2 - k_{11}k_{21}}\ln x + \frac{q}{4\mu_1}\frac{\alpha_1 - k_{11}k_{21}}{\alpha_1^2 - k_{11}k_{21}}\operatorname{sgn} sx$$

Заметим, что уравнение $\Delta\left(|s|h\right) = 0$ является уравнением типа Релея для кусочно-однородной полуплоскости. В этом уравнении, устремляя толщину полосы h к нулю или принимая в нем $\mu = \rho = 1$, придем к уравнению Релея для полуплоскости. Если же считать толщину слоя малой по сравнению с длиной волны $(|s|h)^2 << 1$, то получим уравнение

$$\frac{\mu^2}{4}\left(4R_2^- + \left(k_{12}\frac{1}{\rho}\frac{v^2}{c_{22}^{\ 2}} + k_{22}\left(\frac{1}{\rho}\frac{v^2}{c_{22}^{\ 2}} - \frac{1}{\mu}\frac{2}{1-\nu_1}\right)\right)\frac{v^2}{c_{22}^{\ 2}}\operatorname{sh}\right) = 0 \qquad (1.8)$$

которое в точности совпадает с уравнением, полученным в работе [3].
В случае, когда толщина слоя достаточно велика относительно длины волны $|s|h >> 1$, уравнение (1.8) принимает вид

$$\Delta(s) = R_1^-\left(d_1^- + d_2^+\right) = 0$$

Последнее распадается на два уравнения, одно из которых $R_1^- = 0$ является уравнением Релея для полуплоскости, изготовленной из материала полосы, а другое $d_1^- + d_2^+ = 0$ является уравнением типа Релея для составной плоскости.
Анализ уравнения (1.8), в общем случае, очень сложен из-за входящих в него большого количества параметров. Однако, численный анализ показывает, что в достаточно большом диапазоне изменения соотношений модулей сдвигов $\Delta\left(|s|h\right) \neq 0$ при $v_0 < 0.8\min(c_{21}, c_{22})$.

Проведен численный анализ и вычислены нормальные контактные напряжения, действующие на линии стыка полосы с полуплоскостью при различных скоростях движения нормальной силовой нагрузки. Часть результатов приведена в виде графиков (рис.1-2). Они показывают, что при увеличении скорости движения увеличиваются также зона и величина растягивающих контактных напряжений, которые могут привести к отрыву полосы от полуплоскости.
В случае же движения касательной нагрузки на линии контакта полосы с полуплоскостью

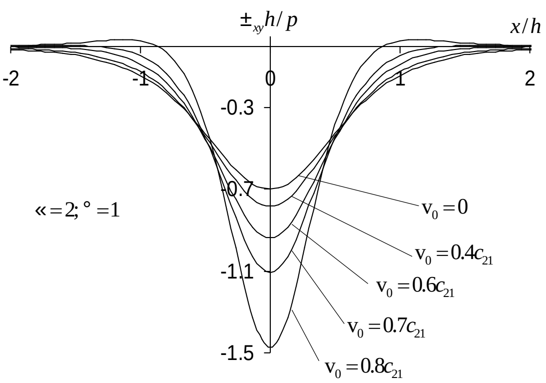


Рис.1

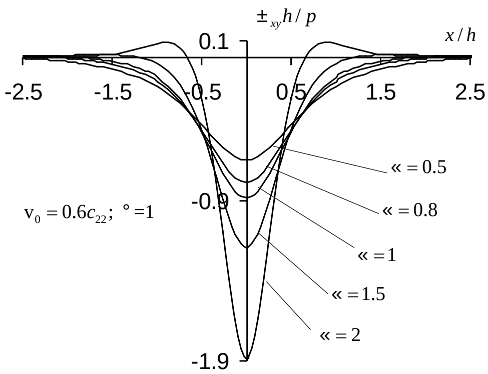


Рис.2

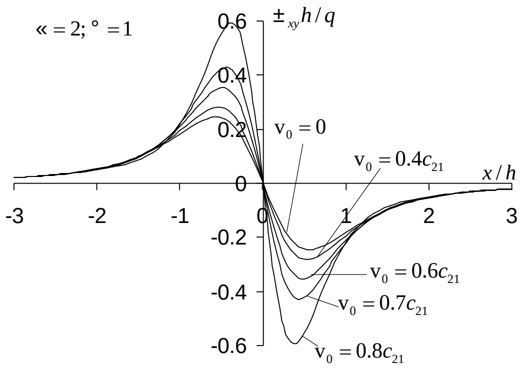


Рис.3

возникают зоны растягивающих напряжений при любых скоростях (рис. 3).

В случае гладкого контакта для нормальных контактных напряжений, действующих на линии стыка полосы с полуплоскостью, имеем

$$\pm_y^{(2)}(x,0) = -\text{«}\,\frac{p}{\text{®}}\int_0^\infty \frac{f_1(\text{sh})}{\Delta'(\text{sh})}\cos sxds + \text{«}\,\frac{q}{\text{®}}\int_0^\infty \frac{g_1(\text{sh})}{\Delta'(\text{sh})}\sin sxds$$

где

$$f_1(s) = \frac{R_2^-}{\sim_1 k_{12}}(\sim_1^2 \text{sh}(k_{21}s) - k_{11}k_{21}\text{sh}(k_{11}s)); \quad g_1(s) = R_2^- \frac{k_{21}}{k_{12}}(\text{ch}(k_{11}s) - \text{ch}(k_{21}s))$$

$$\Delta'(s) = \frac{1}{c\sim_1 k_{11}}\frac{1}{2}\left(2\Delta_s(s/2)\Delta_a(s/2) + \text{«}c\frac{k_{11}}{k_{12}}R_2^-\Delta_s(s)\right)$$

$$\Delta_s(s) = R_1^-\text{sh}(k_{11}+k_{21})s - R_1^+\text{sh}(k_{11}-k_{21})s \ ;$$

$$\Delta_a(s) = R_1^-\text{sh}(k_{11}+k_{21})s + R_1^+\text{sh}(k_{11}-k_{21})s$$

Здесь уравнение $\Delta'\left(\left|s\right|h\right)=0$ также является уравнением типа Релея для кусочно-однородной полуплоскости в случае гладкого контакта. Считая толщину слоя сравнительно малой по отношению к длине волны $(\left|s\right|h)^2 << 1$, получим уравнение

$$\left(4R_2^- + k_{12}\frac{1}{\circ}\left(\frac{v^2}{c_{22}{}^2}\right)^2 \mathrm{sh}\right)\frac{\text{«}}{c\sim_1}\frac{1}{4}\frac{k_{21}}{k_{12}}\left(\sim_1{}^2 - k_{11}{}^2\right)\mathrm{sh} = 0$$

которое в точности совпадает с уравнением, полученным в работе [3]. Для сравнительно больших значений толщины слоя относительно длины волны $\left|s\right|h >> 1$ имеем

$$\Delta'(s) = \frac{1}{c\sim_1 k_{11}}\frac{1}{2}R_1^-\left(R_1^- + \text{«}c\frac{k_{11}}{k_{12}}R_2^-\right)$$

Как в случае полного контакта, так и в этом случае имеются два множителя, один из которых является уравнением Релея для полуплоскости, а второй уравнением типа Релея для составной плоскости из двух полуплоскостей, на линии стыка которых касательные напряжения отсутствуют.

Отметим, что в этом случае, как зона действий, так и величина растягивающих контактных напряжений увеличиваются по сравнению со случаем полного контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. Саакян А.В. Построение функций влияния для упругой полосы от движущихся по её краям с постоянной скоростью сосредоточенных сил и тепловых источников. // ДАН Арм. ССР. 1978. Т. 67. №2. С.78-85.
3. Белубекян М.В. Волны типа Релея в системе тонкий слой полупространство.// Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №2. С. 9-15.

<u>Сведения об авторе</u>

Амирджанян Арутюн Арменович
Магистр ЕГУ
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б
Тел: (+37410) 52-48-90

ХРУПКАЯ ПРОЧНОСТЬ РЕЖУЩИХ ПЛАСТИН В ПАРАМЕТРОУПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССАХ ОБРАБОТКИ

Арзуманян А.М.

При обработке цветных металлов и сплавов анизотропность режущих плстин из синтетического корунда обуславливает различную хрупкую прочность режущей части инструмента.

Проведены результаты исследований режущих частей пластин, вдоль которых, в зависимости от внутренних напряжений и режимов обработки, происходит хрупкое скалывание и выкрашивание частиц материала.

Известно, что при недостаточной прочности режущей части пластины ее разрушение происходит путем хрупкого скалывания и выкрашивания или в результате пластической деформации и последующего среза [1]. На практике, воизбежание разрушения режущей части пластины применяют ряд предотвращающих нежелательные последствия мероприятий: снижение режимов обработки, изменение геометрических параметров режущих пластин и т.д.

Прочность рабочей части режущей пластины из синтетического корунда зависит от физико-механических свойств, правильно выбранных геометрических параметров, а также ориентации кристалла и внутренних напряжений в режущих пластинах.

Прочность режущих пластин изучалась при обработке цветных металлов и сплавов.

Эксперименты проводились торцевой однозубой фрезой, имеющей следующую геометрию: $\alpha = 6^0$; $\gamma = -6^0$; $\lambda = 6^0$; $\varphi = \varphi_1 = 45^0$; $\beta = 90^0$; r = 0,5 мм.

Режущие пластины имели форму прямоугольного параллелепипеда размерами 21х 21х7 мм и 10х10х5мм и крепились на державках механическим путем [2] .

Процесс резания осуществлялся при отрицательных передних углах, при некоторых условиях которого характеристикой хрупкой прочности режущей части пластины является предел прочности на сжатие, величина которого составляет $\pm_{-в}$ = 50÷ 200 МПа.

Оценка хрупкой прочности режущей пластины стандартными характеристиками $\sigma_{в}$ и $\sigma_{-в}$ очень затруднительна из-за сложности их определения. В исследованиях использован метод определения предельной подачи при несвободном резании, сущность которого заключается в том, что определение подачи резания осуществляется до образования сколов на режущем лезвии инструмента. При некоторой величине подачи, называемой экономической, среднее время работы режущих пластин до поломки равно периоду стойкости. Коэффициент запаса хрупкой прочности определяется по формуле $n = S_{пр.} / S_{эк}$. Для средних и маломощных станков n = 2,5. При тонком фрезеровании плоскостей оптимальными режимами резания (V=120-250м/мм;t=0,02-0,15мм и S=0,007-0,02 мм/зуб) режущие пластины могут выдерживать (05-1,3)х 10^7 ударов до достижения износа по задней поверхности h=0,10÷0,12 мм.

Анизотропность синтетического корунда обуславливает различную хрупкую прочность режущей части пластин.

Предел прочности на растяжение синтетического корунда приблизительно можно определить по формуле

$$\sigma_{в} = (0{,}5 \div 0{,}7)\ \sigma_{из} \qquad (1)$$

где $\sigma_{из}$ – предел прочности при изгибе

$$\sigma_{в} = 180 \div 350 \text{ МПа.}$$

Расчет прочности режущей части пластины производят методом допускаемых напряжений [1]:

$$\sigma_{экв.max} \le [\sigma] = \frac{\sigma_L}{n_L} \qquad (2)$$

где σ_L – предельное напряжение для данного материала; n_L – коэффициент запаса прочности; $\sigma_{экв.мак}$ – максимальное эквивалентное одноосное растягивающее напряжение, заданное сложному напряженному состоянию некоторой, так называемой, опасной точке.

Для хрупких и малопластичных материалов за σ_L принимают предел прочности при одноосном растяжении $\sigma_в$ или сжатии $\sigma_в$. Коэффициент n_L в этих случаях обозначается через $n_в$ и является коэффициентом запаса хрупкой прочности.

Для расчета эквивалентных напряжений в опасных точках применяют следующую формулу:

$$\sigma_{экв} = \sigma_{1,3} = \frac{2P}{b \cdot K_0 \cdot C}\left\{\frac{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\left[\vartheta_0 - \left(\frac{\beta}{2}+\gamma\right)\right]}{\beta - \sin\beta} - \frac{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\left[\left(\vartheta_0 - \left(\frac{\beta}{2}+\gamma\right)\right)\right]}{\beta + \sin\beta}\right\} \qquad (3)$$

где P – равнодействующая сила на передней поверхности; ϑ_0 – угол действия равнодействующей силы P; b – ширина среза; C – ширина контакта стружки с передней поверхностью; K_0 – коэффициент, определяющий расстояние от режущей кромки до опасной точки.

Коэффициент запаса хрупкой прочности принимается в зависимости от стоимости и ответственности конструкций с учетом однородности, хрупкости материалов и т.п. $n_в = 1,2 \div 1,5$.

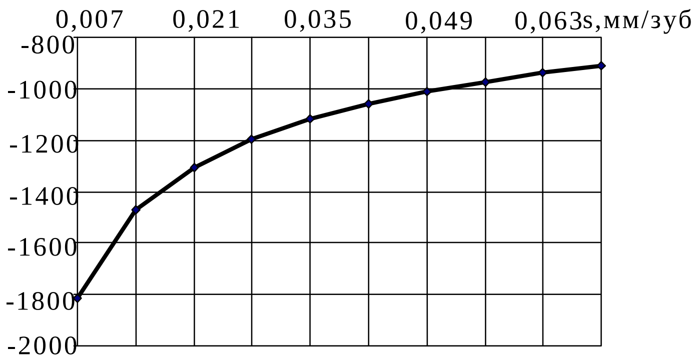


Рис. 1. Изменение эквивалентного напряжения в зависимости от подачи резания при обработке латуни ЛС59-1.

В процессе обработки режущие пластины, ориентированные $\theta = 90 \div 120^0$ [3], иногда подвергались скалыванию, причем хрупкость режущих пластин зависит от внутренних напряжений, величины которых, в свою очередь, зависят от процентного содержания добавок: больше у рубина “Роза” и меньше у лейкосапфировых пластин.

При травлении поверхности скалывания наблюдались дислокации (рис.2), характерные для плоскости механического двойникования синтетического корунда. Механическое двойникование синтетического корунда происходит при температуре 600-900^{0}С.

Учитывая вышесказанное, можно полагать, что причинами быстрого выхода режущей пластины из строя являются высокие давления и температура на контактных слоях рабочей части пластины.

Скалывание режущих пластин наблюдается при тонкой обработке цветных металлов и сплавов при различных ориентационных схемах: значительно меньше по плоскости пинакоиды (0001).

Установлено, что при заданной форме режущей части сколы наступают при определенных толщинах среза. При увеличении угла заострения увеличивается величина предельной толщины среза. Форма режущих пластин из синтетического корунда, благодаря большим значениям углов заострения $\left(\beta = \beta_1 = 90^0\right)$, обеспечивает высокую хрупкую прочность и способствует осуществлению точения при

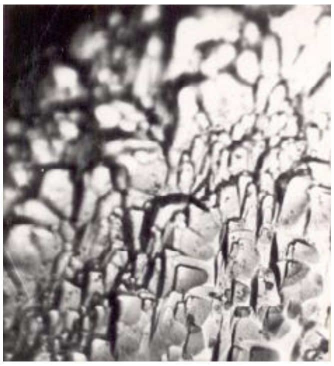


Рис.2.Следы дислокаций на поверхности скалывания режущей части пластины при $\theta = 120^0$ (ув 300^x)

сравнительно значительных толщинах среза. При обработке дуралюминия Д16 предельная подача получается меньшей, что объясняется нами свойствами синтетического корунда дюралюминия Д16. В этом случае наблюдается интенсивное схватывание с резцом, стружка затормаживается передней поверхностью(рис. 3), что вызывает скол резца. Это явление особенно усиливается при меньших скоростях (V$\leq$70 м/мин).

Например, при скоростях $\nu = 140 \div 280 м / мин$ предельная подача составляет $S_{перед} = 0,16$; $0,22 мм / зуб$.

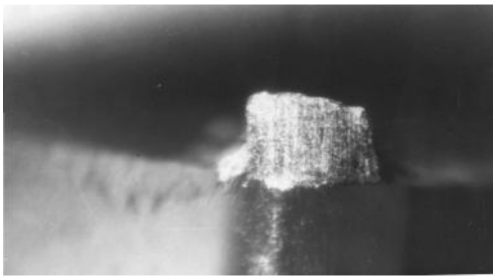


Рис.3.Налипший слой на передней поверхности пластины при обработке дуралюминия Д16.

Разрушение режущих пластин происходит следующим образом. За небольшой промежуток времени, порядка нескольких десятков секунд, на режущей части пластины появляются мелкие сколы или трещины– очаги последующих аварийных сколов и поломок пластин. Эти скалывания охватывают более крупные частицы режущего материала, при этом поверхность скалывания получает характерный для хрупкого разрушения кристаллический излом, меняющийся в зависимости от условий резания.

В результате проведенных исследований были получены величины предельных подач (табл.), при которых происходит хрупкое разрушение режущих пластин.

Исходя из того, что при тонком точении применение больших подач ограничивается величиной микронеровностей обработанной поверхности, тонкая обработка цветных сплавов и металлов режущими пластинами из синтетического корунда осуществляется при подачах более низких, нежели рассчетные за экономические.

Таблица

Значения $S_{пр}$ и $S_{экв.}$ в зависимости от σ при t = 0,1 мм и v = 140 м/мин.

Обрабатываемый материал	Режущий материал	Предельная подача $S_{пр}$, мм/зуб	Экономическая подача $S_{эк}$, мм/зуб
Латунь ЛС 59-1, $\sigma_в = 370 МПа$ $\delta = 18\%$; $\tau_ф = 150 МПа$	Лейкосапфир $\sigma_{вн} = 34 МПа$	0,14	0,057
Дуралюминий Д16, $\sigma_в$ =320МПа $\delta = 11\%$; $\tau_ф = 16 МПа$	Рубин “Роза” $\sigma_{вн} = 30 МПа$	0,35	0,14

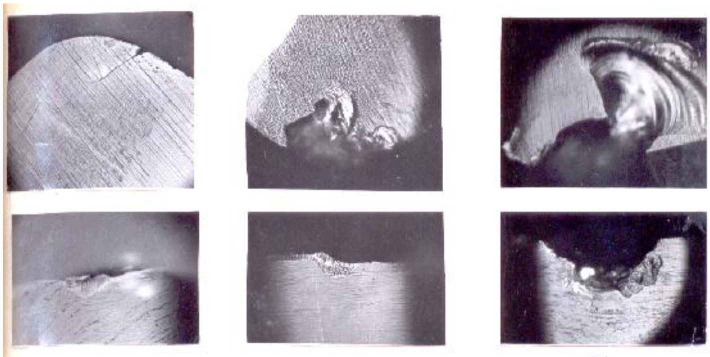


Рис. 4. Микрофотография режущих пластин после хрупкого разрушения (ув. 120^x) при обработке латуни ЛС59-1.

Это означает, что режущие пластины из синтетического корунда при подачах $S_{пр}$= 0,01÷0,06 мм/зуб имеют большую хрупкую прочность. При глубинах t=0,03÷0,2мм режущие пластины имеют хрупкую прочность.

Из вышеуказанного следует, что режущие пластины из синтетического корунда при применяемых режимах резания имеют высокую хрупкую прочность.

Причиной быстрого выхода из строя режущих пластин из синтетического корунда во время обработки являются возникающие высокие давления и температуры на контактных слоях рабочей части пластины. На рис.4 приведены микрофотографии режущих пластин после хрупкого разрушения (ув. 120^x) при обработке латуни ЛС59-1, после длины пути резания: а)3,4 км, б)6,7 км и в)13,1 км при t=0,1мм; $\nu = 330 м/мин; t = 0,21 мм/об$.

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Режущая часть резцов из синтетического корунда при тонком точении цветных сплавов и металлов в диапазонах принятых нами в качестве оптимальных диапазонов режимов резания имеют высокую прочность.
2. Предельная толщина среза увеличивается с уменьшением внутренних напряжений в корунде на величину сопротивления сдвигу в зоне стружкообразования обрабатываемого материала.
3. Режущие пластины из синтетического корунда иногда подвергаются скалыванию при более низкой подаче, чем предельная, что объясняется наличием разнообразных макроскопических и микроскопических дефектов кристаллов корунда и связанных с ними остаточных напряжений. Интенсивность скалывания режущих пластин убывает соответственно по следующим плоскостям: плоскость ромбоэдра ($10\bar{1}1$), плоскость призмы ($1\bar{2}10$), плоскость пинакоиды (0001) и плоскость гексагональной дипирамиды ($22\bar{4}3$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лоладзе Т.Н. Прочность и износостойкость режущего инструмента М.: Машиностроение, 1982. 320 с.
2. Хачатрян Г.Г., Арзуманян А.М., Хачатрян Г.Б. Хрупкая прочность резцов и фрез из синтетического корунда. Прогрессивные инструменты и методы обработки резанием авиационных материалов. /Сборник м/т, Куйбышев, КуАИ. 1989.С.4-8.
3. Арзуманян А.М. Режущая пластинка из синтетического корунда. **А.С.** 1183303 **(СССР) БИ** 37, 1985.

Сведения об авторе

Арзуманян Алексан Мкртычевич

Канд. техн. наук, доцент, зав. департамента профессиональной подготовки, Гюмрийский филиал Государственного Инженерного Университета Армении

Адрес: 3103, Армения, г. Гюмри, ул. М. Мкртчяна 2

Тел:(312) 3-40-60; E-mail: arzal@yandex.ru

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ОПТИКО-АКУСТИЧЕСКОЙ СПЕКТРОСКОПИИ К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТАЛОСТИ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Арутюнян А.Р., Зимин Б.А., Судьенков Ю.В.

В работе представлены результаты исследований изменения механических характеристик плоских образцов, изготовленных из конструкционных материалов, в процессе циклических испытаний на изгиб. Изменения свойств материалов определялись через каждые 50000 циклов методом оптико-акустической спектроскопии. Метод позволяет проводить измерения частотных зависимостей скорости звука и затухания, и анализировать их изменения в полосе частот до 100 МГц от количества циклов нагружения. Исследования показали, что изменения механических свойств материалов, обусловленные структурными перестройками в процессе циклических испытаний, носят немонотонный характер. Наблюдается корреляция найденных зависимостей – скорости звука, затухания, дисперсии спектрального распределения передаточной функции, а также остаточного прогиба пластины от числа циклов нагружения.

Применение оптико-акустической спектроскопии материалов и элементов конструкций позволяет разработать экспресс-метод контроля их работоспособности и дает возможность определять предел усталости материалов с высокой точностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (проект № 06-01-00202) и Научной Школы (проект № 4518.2006.1).

Большинство современных технических систем подвергается воздействию циклических нагрузок различной частоты. Такие нагрузки приводят к усталостным разрушениям, которые, согласно мировой статистике, составляют от 80% до 90% всех разрушений. Явление усталости проявляется уже при сравнительно низких напряжениях и объясняется постепенным накоплением повреждений. Зависимость накопления повреждений от числа циклов нагружения обычно принимается линейной.

В течение последних 30 лет проводились исследования оптико-акустического (ОА) эффекта [1,2]. Эти исследования определили возможность применения ОА эффекта для решения ряда важных научно-исследовательских и технических задач, в том числе для неразрушающего контроля материалов.

Применение лазерных методов возбуждения акустических импульсов имеет ряд преимуществ по сравнению с методами традиционной акустической микроскопии. Анализ коротких акустических импульсов, прошедших через образец, дает возможность получить информацию о внутренней структуре материала в частотном диапазоне до $100 - 200\,МГц$. Разрешающая способность оптико-акустической дефектоскопии определяется минимальной длительностью возбуждаемых акустических импульсов, которая довольно легко реализуется в диапазоне $\sim(1-3)\cdot 10^{-8}\,с$. Возможность повышения амплитуды акустических импульсов делает этот метод наиболее перспективным для исследования свойств и дефектоскопии сильнопоглощающих материалов. В приложении к циклическим нагружениям возможно получение значительной информации об эволюции структуры материала и, соответственно, о его циклической работоспособности.

Взаимосвязь процессов пластической деформации материалов и перестройки их структуры хорошо известна. Однако информация о характерных масштабах структурных уровней, которые определяют процесс деформирования при различных условиях нагружения, в зависимости от исходной структуры материала достаточно ограничена. Это связано с отсутствием необходимого количества комплексных экспериментальных работ и недостаточным развитием методов исследования структурных перестроек в процессе деформирования.

В наших исследованиях развиваются оригинальные оптико-акустические методы усталостных исследований, которые базируются на определении упругих характеристик материала, связанных с изменением его структуры.

Были проведены испытания плоских образцов из инструментальной стали и ПММА на циклический изгиб с частотой $F = 15\ Гц$ и длительностью нагрузки $t = 12\ мс$. Схема нагружения показана на рис. 1.

Разработанная ОА–ячейка [3, 4] позволяет осуществлять диагностику материалов при одностороннем доступе к изучаемому объекту. Для возбуждения акустических сигналов используется лазер с модулированной добротностью на неодимовом стекле. Длительность импульса излучения – $15 \cdot 10^{-9}\ с$, энергия – $1\ мДж$.

Рис. 1. Схема нагружения.

На рис. 2 приведена блок-схема оптико-акустического дефектоскопа (ОАД). Основным элементом ОАД является оптико-акустическая ячейка, совмещающая функции оптического и акустического волноводов, а также эффективного термоакустического преобразователя свет-звук. ОАД позволяет проводить измерения при одностороннем доступе к исследуемому объекту или при одновременном контроле проходящих и отраженных акустических импульсов.

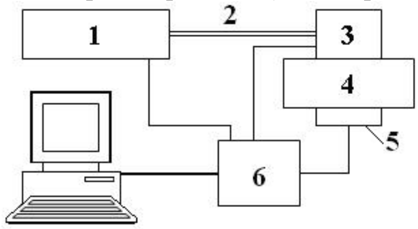


Рис 2. Блок-схема акустического дефектоскопа (ОАД): 1 – лазер, 2 – оптическое волокно, 3 – оптико-акустическая ячейка, 4 – образец, 5 – пьезодатчик, 6 – осциллограф.

Контроль изменения структуры образца проводился вблизи заделки в режиме на отражение через каждые $5 \cdot 10^4$ циклов. В данном эксперименте число циклов до разрушения образца из ПММА составило $\sim 8{,}5 \cdot 10^6$, а для инструментальной стали – $\sim 10^6$.

Общий вид экспериментальной установки и ОА-ячейки представлен на рис. 3. На рис. 4а показана осциллограмма отраженных акустических импульсов, полученных в опыте над образцом из инструментальной стали.

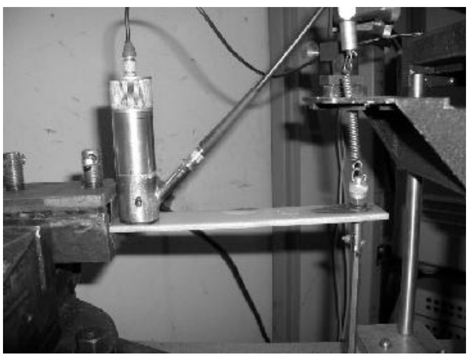


Рис. 3. Общий вид экспериментальной установки и ОА-ячейки.

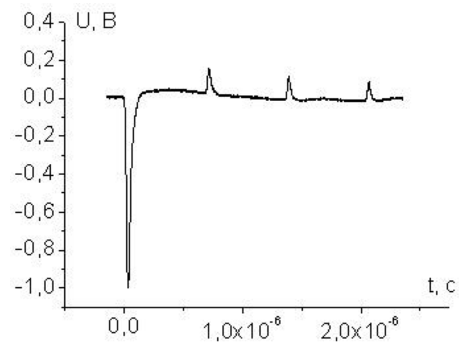


Рис. 4. Осциллограммы отраженных акустических импульсов для образца из инструментальной стали.

На основании полученных осциллограмм определялись следующие характеристики материалов: скорость звука, затухание, дисперсия спектрального распределения передаточной функции. Скорость звука в материале определялась по известной толщине образца и промежутку времени между двумя эхо-импульсами, снимаемому с осциллограмм.

Задавая амплитуду сигнала, прошедшего толщину образца x, соотношением $A_x = A_0 \cdot e^{-\alpha x}$ (A_0 – амплитуда зондового сигнала), можно найти величину амплитудного затухания $\sim$.

Дисперсия спектрального распределения передаточной функции определялась согласно соотношению $\frac{P(f)}{P_z(f)} f^2$, где $P(f)$ – спектральная мощность “донного” акустического импульса, $P_z(f)$ – спектральная мощность зондового акустического импульса, f – частота.

В процессе эксперимента производилось также измерение остаточного прогиба образца.

Рис. 5. Зависимости относительных изменений скорости звука $(1-c/c_0)\cdot 100,\%$ (1) и затухания акустических импульсов $(\sim/\sim_0)-1$ (2) от числа циклов нагружения для образца из инструментальной стали.

На рис. 5 и 6 представлены зависимости относительных изменений этих характеристик от числа циклов нагружения для образцов из инструментальной стали и ПММА.

Видно, что рассматриваемые характеристики квазипериодичны и коррелируют друг с другом. Хотя их аппроксимация прямыми линиями является достаточно грубой, однако она вполне приемлема для качественного описания характера изменения рассматриваемых характеристик. Заметим, что в некоторых характерных областях наблюдается изменение угла наклона аппроксимирующих прямых, то есть наблюдаются существенные изменения в поведении рассматриваемых характеристик. Это, по-видимому, обусловлено перестройкой дефектной структуры. Для ПММА эта область соответствует приблизительно $5\cdot 10^6$ циклам, а для инструментальной стали – $4\cdot 10^5$ циклам. Таким образом, модель линейного накопления повреждений не в состоянии описать адекватно изменения структуры материала при циклических нагружениях.

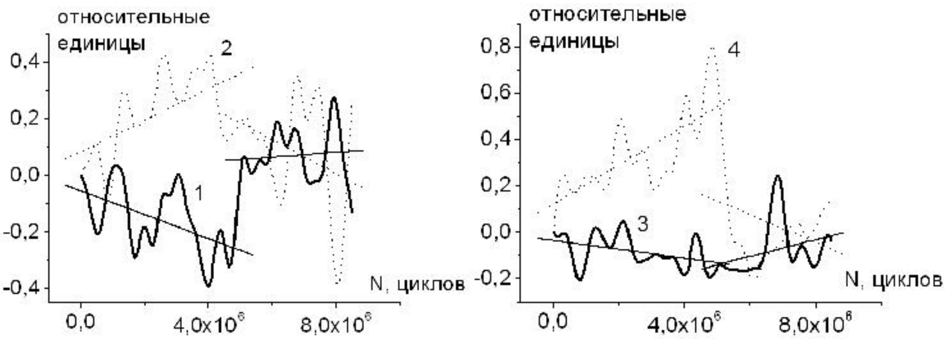


Рис. 6. Зависимости относительных изменений скорости звука $(1-c/c_0)\cdot 100,\%$ (1), затухания акустических импульсов $(\sim/\sim_0)-1$ (2), дисперсии спектрального распределения передаточной функции $(P-P_0)/P_{max}$ (3) и остаточного прогиба y/y_{max} (4) от числа циклов нагружения для образца из ПММА.

Значения скорости звука, полученные в экспериментах, позволили построить зависимость модуля упругости материала от числа циклов нагружения (рис. 7). Видно, что изменение модуля упругости носит немонотонный характер, а значительные изменения его величины соответствуют указанным выше областям.

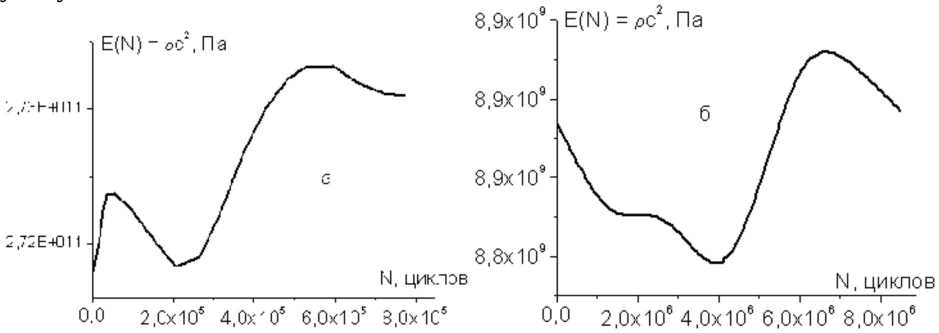


Рис. 7. Зависимость модуля упругости образцов из инструментальной стали (а) и ПММА (б) от числа циклов нагружения.

В результате анализа спектров акустических эхо-импульсов в характерных областях изменения представленных выше зависимостей были найдены частотные зависимости затухания (рис. 8 и 9). Наблюдается существенные изменения частотных зависимостей затухания для различных циклов нагружения.

В предположении, что затухание, главным образом, определяется величиной рассеяния на элементах структуры, его величина может быть найдена из соотношения [5]

$$\alpha(\lambda) \sim \frac{N(D)\ \ D^3}{\lambda^4}$$

где $N(D)$ – распределение дефектов, D – размер дефектов, λ – длина волны.

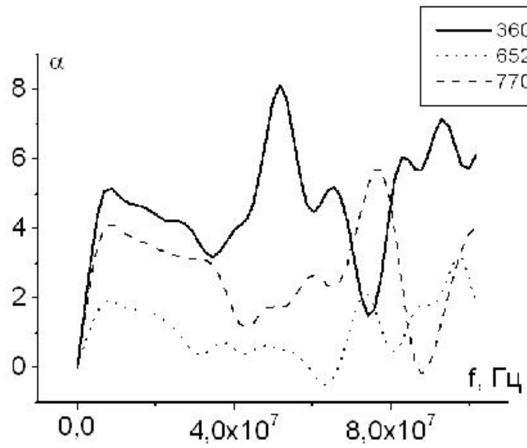


Рис. 8. Зависимость затухания от частоты для различного числа циклов нагружения для образца из инструментальной стали.

Задавая распределение дефектов в пределах от 0 до 100мкм, можно восстановить функцию распределения дефектов $N(D)$. Соответствующее распределение дефектов для образца из инструментальной стали при различных циклах нагружения показано на рис. 10.

Эти зависимости хорошо аппроксимируются функцией $N(D) \sim N_0\ e^{-D/D_0}$, которая обычно и используется для описания распределения дефектов в различных материалах [6].

В то же время более наглядным является относительное распределение дефектов $N_{отн}(D) = (N_N(D) - N_{БН}(D)) / N_{БН}(D)$, которое представлено на рис. 11 и 12.

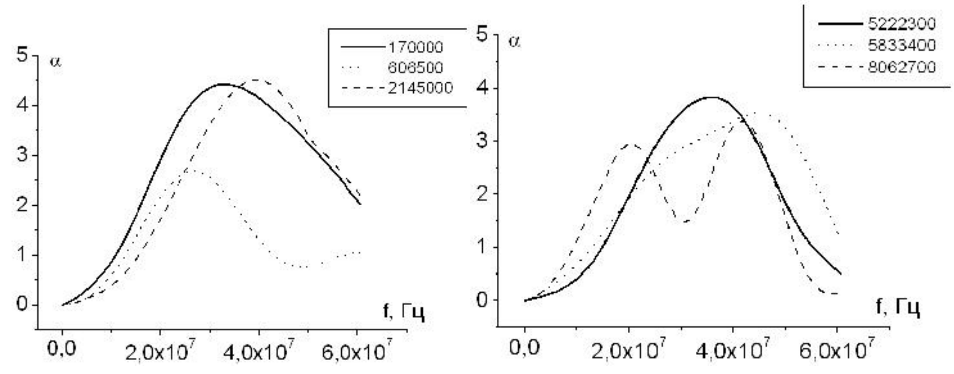


Рис. 9. Зависимость затухания от частоты для различного числа циклов нагружения для образца из ПММА.

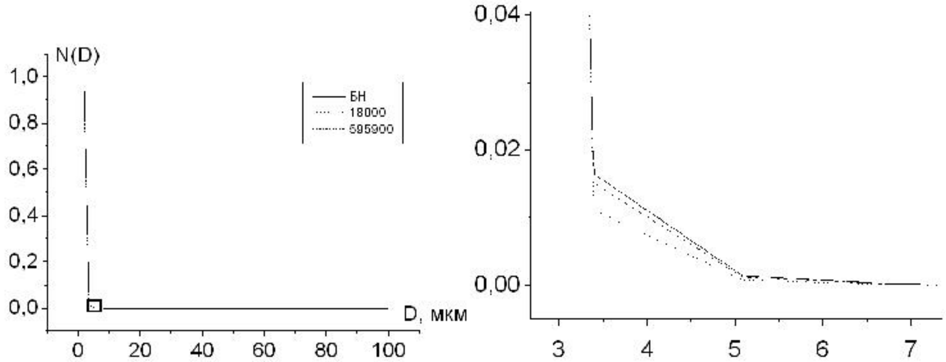


Рис. 10. Распределение дефектов от их размера при различных циклах нагружения для образца из инструментальной стали.

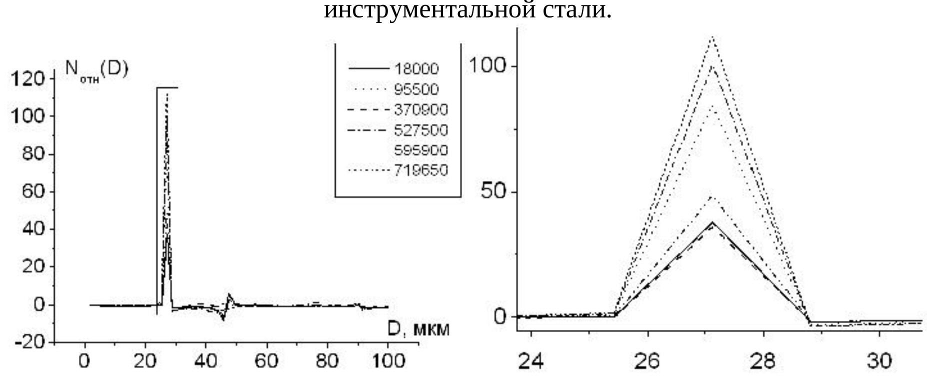


Рис. 11. Относительное распределение дефектов от их размера для различных циклов нагружения для образца из инструментальной стали.

Разный характер этих зависимостей для металлов и полимеров определяется значительным различием их структуры. В металлах пик зависимости наблюдается при $D \approx 27$ мкм, что сопоставимо со средним размером зерна. В полимерах же изменение зависимостей происходит практически на всем интервале размеров структурных элементов.

Выводы

1. Показано, что метод оптико-акустической спектроскопии позволяет с высоким разрешением отслеживать изменение интегральных характеристик свойств материалов. Частотные зависимости изменения затухания позволяют проследить перестройку масштабов дефектной структуры материалов при циклических исследованиях.
2. Наблюдается корреляция изменения независимых параметров: скорости звука, затухания, дисперсии спектрального распределения передаточной функции и остаточного прогиба пластины от числа циклов нагружения.

3. Показано, что изменение механических свойств материалов вследствие перестройки структуры при циклических испытаниях носит немонотонный характер. Таким образом, модель линейного накопления повреждений является довольно грубым приближением процесса усталостного разрушения.
4. Метод оптико-акустической спектроскопии дает возможность с достаточно высокой точностью определять предел усталости материалов и предсказывать ресурс работоспособности конструкций.

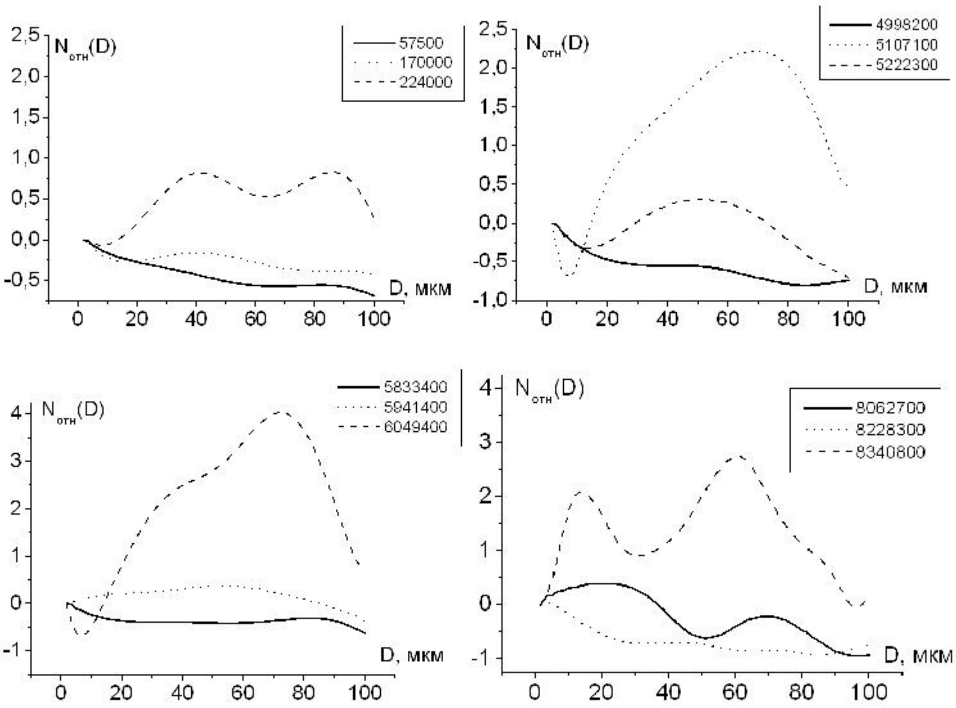


Рис. 12. Относительное распределение дефектов от их размера для различных циклов нагружения для образца из ПММА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Scruby C. B. Some applications of laser ultrasound. Ultrasonics, 1989, 27, № 4, pp. 195-208.
2. Бондаренко А. Х. Лазерные методы возбуждения и записи акустических сигналов. Москва. 1989.
3. Судьенков Ю. В., Иванов Э. В., Никитин Д. Ю. /Сб. трудов X сессии РАО. Москва. 2000. Т.2. С. 345-348.
4. Yu. V. Sud’enkov, Z. A. Valisheva, B. A. Zimin. Time-resolved optical-acoustic defectoscope. 34th International Conference and NDT Exposition, Defectoscopy 2004, November 3-5, 2004. Špindlerův Mlýn - Czech Republic.
5. Ультразвук. Маленькая энциклопедия / под ред. И. Л. Голямина. М.: Советская энциклопедия. 1979. 400с.
6. Shock compression of condensed matter. Proceedings of the Conference of the American Physical Society. Topical Group on Shock Compression of Condensed Matter held in Atlanta, Georgia, USA, June 24-29, 2001. Melville, New York. 2002. Part 1, part 2.

<u>Сведения об авторах</u>

Арутюнян Александр Робертович
Аспирант Санкт-Петербургский государственный университет, Россия
Адрес: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28
Тел: (812) 5266591;E-mail: Robert.Arutyunyan@paloma.spbu.ru

Судьенков Юрий Васильевич
Кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник
Тел: (812) 4284245; E-mail: sudenkov@niimm.spbu.ru

Зимин Борис Александрович
Кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник
E-mail: sudenkov@niimm.spbu.ru

ПРОБЛЕМА ДЕФОРМАЦИОННОГО И РАДИАЦИОННОГО СТАРЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ И УПРУГО-ВЯЗКИХ МАТЕРИАЛОВ

Арутюнян Р.А.

Упруговязкие уравнения Н.Х. Арутюняна [1], описывающие процессы старения бетона, получили всемирное признание и широко используются в инженерной практике. Имеются также работы, в которых уравнения Н.Х. Арутюняна применяются для описания ползучести и старения полимеров. Однако эти уравнения записываются в масштабе реального времени и проблема деформационного и радиационного старения в них не обсуждается. В работе рассматриваются эти вопросы в приложении к деформационному и радиационному старению пластических и упруговязких материалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (проект № 06-01-00593).

1. Уравнения теории пластического течения, учитывающие многостадийность процессов радиационного и деформационного старения

Проблема старения металлов исследована довольно подробно специалистами в области материаловедения [2-6] и охватывают, в основном, случаи старения после закалки. Вопросы деформационного старения усиленно развиваются в последние десятилетия специалистами в области механики. Обзор исследований по этой проблеме имеется в монографии [7]. В частности, значительное внимание уделяется экспериментальному изучению поверхностей текучести в условиях естественного и искусственного старения после предварительной пластической деформации. Результаты этих исследований показывают, что при старении поверхности текучести претерпевают изотропное расширение. Этот факт позволяет рассматривать один скалярный параметр при формулировке уравнений теории пластичности. Наиболее простой вариант подобных уравнений, базирующихся на соотношениях теории пластичности с трансляционным и изотропным упрочнением [8], был предложен в работе [9]. В этой работе вводится скалярный параметр упрочнения, описывающий как эффекты деформационного старения, так и старения после закалки. В качестве кинетического уравнения для этого параметра привлекаются уравнения типа уравнений реакций первого порядка, и процессы старения рассматривается как протекающие в одну стадию согласно следующему уравнению:

$$\frac{d\omega}{dt} = f(\omega, t) + \frac{d\lambda}{dt} \tag{1.1}$$

где $d\text{ª} = \sqrt{d\text{£}_{ij}^{P}\, d\text{£}_{ij}^{P}}$, ª – параметр Одквиста, $d\text{£}_{ij}^{P}$ – тензор приращений пластических деформаций.

Уравнение (1.1) применялось многими авторами (Аустин и Рикке, Мишима, Хасигути и Кимура, Верт, Зинер и др.) [2] для описания изменений состава среды после закалки, т.е. без учета процессов деформационного старения. При этом полагали, что µ – относительное количество фазы выделения из твердого раствора и что изменение свойств материалов (предел текучести, твердость и т. д.) при старении пропорционально µ. В соответствии с (1.1) для стабильной среды параметр µ идентичен параметру Одквиста ª.

Однако одностадийность процессов старения и упрочнения является первым приближением, так как во многих случаях процессы распада твердого раствора и, соответственно, деформационного упрочнения протекают многостадийно [2, 3].

Следует заметить, что влияние избыточной концентрации различных дефектов, внесенных закалкой и пластической деформацией, на распад твердых растворов исследовано довольно подробно. В то же время, как указывается многими авторами [5], более сложная проблема радиационного распада изучена довольно слабо. Эта проблема связана с процессами внедрения в материал различных радиационных повреждений и их влияние на кинетику распада твердых растворов с учетом стадий отжига дефектов, соответственно, изменения механических характеристик материалов, которые, как показывают опыты, могут быть довольно сложными. В процессе облучения возникают простые и сложные комплексы дефектов, в том числе вакансии и междоузельные или внедренные атомы. При этом часть дефектов способна аннигилировать на противоположных по типу дефектах, сливаясь с дислокациями или выходя на поверхность. Другая часть дефектов может объединиться в скопления, образуя поры внутри твердого тела. В свою очередь внедренные атомы могут также объединиться и образовать участки лишней атомной плоскости. Эти процессы способствуют ускорению распада твердого раствора и, соответственно, изменению его механических свойств. Для описания этих процессов, в частности, принимается химическая схема описания скоростей изучаемых процессов [10], что позволяет рассмотреть с единых позиций вопросы теории взаимодействия и отжига дефектов.

С учетом радиационных эффектов уравнение (1.1) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{d\omega}{dt} = f_1(\omega, \lambda, \phi, T, t) + f_2(\omega, \lambda, \phi, T, t)\frac{d\lambda}{dt} + f_3(\omega, \lambda, \phi, T, t)\frac{d\phi}{dt} \tag{1.2}$$

где ϕ – доза облучения, T – температура.

С учетом процессов деформационного и радиационного старения в соответствии с формулой (1.2) сформулируем вариант уравнений теории пластичности с изотропным и трансляционным упрочнением следующего вида

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{s_{ij} - \rho_{ij}}{\sqrt{J_2^0}} d\lambda\,, \ (s_{ij} - \rho_{ij})(s_{ij} - \rho_{ij}) = C^2(\omega, \lambda, \phi) \tag{1.3}$$

$$d\rho_{ij} = A_1(J_2^s, \omega, \phi)\, \mathrm{d}\omega\, \delta_{ij} + A_2(J_2^s, \omega, \phi)\, \mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{P}}$$

$$J_2^0 = (s_{ij} - \rho_{ij})(s_{ij} - \rho_{ij})\,, \ J_2^s = s_{ij}\ s_{ij}$$

где s_{ij} – девиатор напряжений, ρ_{ij} – тензор остаточных микронапряжений, A_1, A_2, C – функции, характеризующие упрочняющие свойства материала, δ_{ij} – единичный тензор.

Согласно системе уравнений (1.3) $d\ \varepsilon^P = d\ \varepsilon_{\alpha\beta}^P \delta_{\alpha\beta} \neq 0$. Таким образом, рассматривается сжимаемая среда, деформационное разрыхление и радиационное распухание которой определяются остаточными микронапряжениями.

Разрешая уравнение $J_2^0 = C^2(\omega, \lambda, \phi)$ относительно λ, будем иметь $\lambda = \varphi(J_2^0, \omega, \phi)$, $d\lambda = \partial\varphi / \partial J_2^0\ dJ_2^0 + \partial\varphi / \partial\omega\ d\omega + \partial\varphi / \partial\phi\ d\phi$. С учетом последнего соотношения связь между напряжениями и деформациями запишется в виде

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{s_{ij} - \rho_{ij}}{\sqrt{J_2^0}} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial J_2^0}\, dJ_2^0 + \frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\, d\omega + \frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\, d\phi\right) \tag{1.4}$$

Таким образом, сформулирована система уравнений теории пластичности с изотропным и трансляционным упрочнением для стареющей среды, когда процессы старения протекают в одну стадию согласно кинетическому уравнению (1.2). Перейдем к рассмотрению случая, когда процессы распада твердого раствора и, соответственно, деформационного упрочнения протекают многостадийно. В этом случае параметр ω, ответственный за изменения механических характеристик среды вследствие старения вводится следующим образом. Фиксируем некоторый момент времени t и рассматриваем выделения в единичном объеме материала. Обозначим через $\varphi(n, t)$ функцию распределения выделений по размерам. Тогда величина $\varphi(n, t)\, dn$ будет равна числу выделений, содержащих от n до $n + dn$ структурных единиц (например, атомов компоненты B в случае двухкомпонентной среды). Если $\beta(n)$ – некоторая весовая функция, учитывающая вклад выделений в общее упрочнение в зависимости от их размера, тогда параметр ω можно задать, например, следующим соотношением

$$\omega = \int \beta(n)\, \varphi(n, t)\, dn \tag{1.5}$$

Если $\beta(n) = m_n$, где m_n –масса выделения, содержащего n структурных единиц, то параметр ω будет равняться общей массе выделений в единице объема материала. В случае

$\beta(n) = m_n / M$, где M – общая масса растворенной компоненты в единице объема исходного твердого раствора, параметр ω определяет степень распада твердого раствора.

Учитывая отмеченные выше механизмы процесса деформационного старения, для определения функции распределения $\varphi(n,t)$, следовательно, параметра ω, воспользуемся моделью гетерогенного зародышеобразования [11-13].

Пусть в единице объема материала имеется ω_0 мест предпочтительных для начала процесса выделения. Назовем их потенциальными центрами. Единичным актом процесса считаем присоединение к потенциальному центру одного атома компоненты B, т.е. активацию потенциального центра. Вероятность активации с частотой k_0 предполагается одинаковой для всех потенциальных центров. Потенциальный центр, содержащий один атом, может быть вновь активирован с некоторой частотой k_1, затем частотой k_2 и т.д. вплоть до выделений, содержащих N атомов. Схематически, этот процесс можно представить в виде цепочки

$$\omega_0 \xrightarrow{k_0} \omega_1 \xrightarrow{k_1} \omega_2 \xrightarrow{k_2} \dots \xrightarrow{k_{N-1}} \omega_N$$

Соответствующие кинетические уравнения для описания таких процессов задаются в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_0}{dt} &= -k_0 \quad \omega_0, \\ \frac{d\omega_1}{dt} &= k_0 \quad \omega_0 - k_1 \quad \omega_1, \\ &\dots \\ \frac{d\omega_i}{dt} &= k_{i-1} \quad \omega_{i-1} - k_i \quad \omega_i, \\ &\dots \\ \frac{d\omega_N}{dt} &= k_{N-1}\omega_{N-1} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Система уравнений (1.6) используется в химической кинетике, например, для описания реакций термического разложения твердых веществ [13], а также в биологии, экономике и теории случайных процессов. Они известны под названием “схема гибели” [14]. В этих уравнениях μ_i интерпретируется как вероятность того, что система находится в i-ом состоянии. Применяется также схема “гибели и размножения” или “рождения или умирания”, согласно которой процесс может протекать и в обратную сторону [14, 17]. Схематически его можно записать в виде

$$\omega_0 \xleftrightarrow[k_0,\,\nu_1]{} \omega_1 \xleftrightarrow[k_1,\,\upsilon_2]{} \omega_2 \xleftrightarrow[k_2,\,\nu_3]{} \dots \xleftrightarrow[k_{N-1}\nu_N]{} \omega_N,$$

где $\neg_i$ - частота выхода одного атома из частицы, содержащей i атомов. Система кинетических уравнений, описывающих процесс “гибели и размножения”, записывается в виде [16, 17]

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_0}{dt} &= -k_0 \quad \omega_0 + \nu_1 \quad \omega_1 \\ \frac{d\omega_1}{dt} &= k_0 \quad \omega_0 - (k_1 + \nu_1) \quad \omega_1 + \nu_2 \quad \omega_2 \\ &\dots \\ \frac{d\omega_i}{dt} &= k_{i-1} \quad \omega_{i-1} - (k_i + \nu_i) \quad \omega_i + \nu_{i+1} \quad \omega_{i+1} \\ &\dots \\ \frac{d\omega_N}{dt} &= k_{N-1}\omega_{N-1} - \nu_N \quad \omega_N \end{aligned} \tag{1.7}$$

При $\neg_i = 0$ уравнения система (1.7) совпадают с (1.5).

Кинетические уравнения (1.5) или (1.7) могут быть использованы для описания процессов выделения в результате старения после закалки и облучения. В случае совместного деформационного и радиационного старения следует связать эти уравнения с пластической деформацией и с дозой облучения, тогда центрами выделений могут выступать дислокации, их скопления и другие дефекты кристаллической структуры, образующиеся в процессе активной пластической деформации и радиационного облучения. В качестве наиболее простой меры этих дефектов может быть рассмотрен параметр Одквиста [7], или более общий – некоторая функция от параметра Одквиста и дозы облучения

$$\Omega = \Omega(\lambda, \phi) \tag{1.8}$$

С учетом соотношения (1.8) система кинетических уравнений (1.7) запишется в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{d\omega_0}{dt} = -k_0 \quad \omega_0 + \nu_1 \quad \omega_1 + \frac{d\Omega}{dt} \\
&\frac{d\omega_1}{dt} = k_0 \quad \omega_0 - (k_1 + \nu_1) \quad \omega_1 + \nu_2 \quad \omega_2 \\
&\dots \\
&\frac{d\omega_i}{dt} = k_{i-1} \quad \omega_{i-1} - (k_i + \nu_i) \quad \omega_i + \nu_{i+1} \quad \omega_{i+1} \\
&\dots \\
&\frac{d\omega_N}{dt} = k_{N-1}\omega_{N-1} - \nu_N \quad \omega_N
\end{aligned} \tag{1.9}$$

В исходном состоянии имеем: $\phi = 0$, $^{a} = 0$, $\Omega = 0$, $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_N = 0$.

Пластической деформацией и облучением в среду вносится определенное число начальных дефектов согласно (1.8). Из системы (1.9) находим ω_0, ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_N$ для произвольного момента времени t и определяем функцию распределения $\varphi(i, t) = \omega_i(t)$. Согласно рассмотренной модели, распределение выделений дискретно, поэтому интеграл в соотношении (1.5) может быть представлен в виде суммы

$$\omega(t) = \beta_1 \ \omega_1 + \beta_2 \ \omega_2 + \ldots + \beta_N \ \omega_N \tag{1.10}$$

Таким образом, сформулирована замкнутая система уравнений теории пластичности с деформационным и радиационным старением. Функции $A_1(J_2^s, \omega, \phi)$, $A_2(J_2^s, \omega, \phi)$, $C(\lambda, \omega, \phi)$ и коэффициенты уравнения (1.9) должны определяться из опытов.

В качестве примера рассмотрим изменение предела текучести в процессе старения после пластической деформации (без учета влияния облучения). Считаем, что образец из стареющего материала растягивался до некоторого уровня пластической деформации, затем был разгружен и состарен в этом состоянии при комнатной или повышенной температуре. При этих условиях среду можно считать несжимаемой, тогда

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{11}^P = \varepsilon^P, \ \varepsilon_{22}^P = -1/2\,\varepsilon^P, \varepsilon_{11}^P = \varepsilon^P, \ \varepsilon_{33}^P = -1/2\,\varepsilon^P \\
&\varepsilon_{12}^P = \varepsilon_{21}^P = \varepsilon_{13}^P = \varepsilon_{31}^P = \varepsilon_{23}^P = \varepsilon_{32}^P = 0, \ \lambda = \sqrt{3/2}\,\varepsilon^P
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Для компонент тензора остаточных микронапряжений имеем

$$\begin{aligned}
&\rho_{11} = \rho, \ \rho_{22} = -1/2\,\rho, \ \rho_{33} = -1/2\,\rho \\
&\rho_{12} = \rho_{21} = \rho_{13} = \rho_{31} = \rho_{23} = \rho_{32} = 0
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Внося выражения (1.11), (1.12) в условие текучести, получим

$$3/2(2/3\,\sigma_{11} - \rho)^2 = C^2 \tag{1.13}$$

Согласно (1.13) при повторном нагружении предел текучести будет равен

$$\sigma_T = 3/2\,\rho + \sqrt{3/2}\,C \tag{1.14}$$

В соответствии с результатами опытов зависимость предела текучести от параметра ω в первом приближении можно считать линейной

$$C = C_1(\lambda) + C_2(\lambda)\,\omega \tag{1.15}$$

Из (1.11) и (1.15) следует

$$\sigma_T = a + b\,\omega \tag{1.16}$$

где $a = 3/2\,\rho + \sqrt{3/2}\,C_1, \quad b = \sqrt{3/2}\,C_2$.

Согласно опытам можно считать, что в процессе старения пластическая деформация остается постоянной, тогда будут постоянны и величины ρ, C_1, C_2. Соответственно, будет постоянной и число потенциальных центров выделений, следовательно, $d\omega/dt = 0$.

Начальные условия для системы (1.9) имеют вид

$$\omega_0(0) = \Omega(\lambda),\ \ \omega_1(0) = \omega_2(0) = \ldots = \omega_N(0) = 0 \tag{1.17}$$

Рассмотрим старение в две стадии по схеме “гибели”, т.е. $\omega_0 \xrightarrow{k_0} \omega_1 \xrightarrow{k_1} \omega_2$.

В этом случае система уравнений (1.7) и начальные условия запишутся в виде

$$\frac{d\omega_0}{dt} = -k_0\,\omega_0; \quad \frac{d\omega_1}{dt} = k_0\,\omega_0 - k_1\,\omega_1; \quad \frac{d\omega_2}{dt} = k_1\,\omega_1 \tag{1.18}$$

$$\omega_0(0) = \Omega(\lambda), \quad \omega_1(0) = \omega_2(0) = 0 \tag{1.19}$$

Решая (1.18), (1.19) при условии $k_0 \neq k_1$, получим

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \beta_1\,\omega_1 + \beta_2\,\omega_2 = \\ &= \omega_0(0)\frac{k_0}{k_1-k_0}\left[(\beta_1 - \beta_2\frac{k_1}{k_0})\,e^{-k_0 t} - (\beta_1-\beta_2)\,e^{-k_1 t} + \beta_2\,(\frac{k_1}{k_0}-1)\right]\end{aligned} \tag{1.20}$$

Анализируя формулы (1.14), (1.18), можно сделать следующие выводы. При $t \to \infty$ σ стремится к предельному значению $\sigma_{T\infty} = a + b\,\omega_0(0)\,\beta_2$.

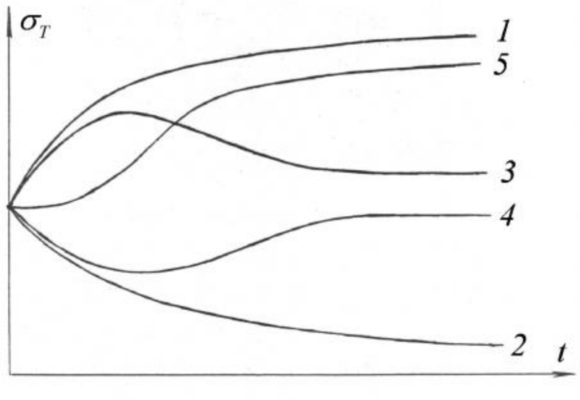


Рис. 1.1. Возможные случаи изменения предала текучести, наблюдаемые в опытах [2, 4].на старение металлических материалов.

Если $\left(\frac{k_0}{k_1}\beta_1 - \beta_2\right)/\left(\beta_1-\beta_2\right) < 0$, происходит монотонное изменение предела текучести со временем: при $b\beta_2 > 0$ – монотонное возрастание, при $b\beta_2 < 0$ – монотонное убывание (рис.1.1, кривые 1, 2, соответственно).

Если $\left(\frac{k_0}{k_1}\beta_1 - \beta_2\right)/\left(\beta_1-\beta_2\right) > 0$, то происходит немонотонное изменение предела текучести.

При условии $b\beta_1 > 0$ на кривой имеется максимум, при - $b\beta_1 < 0$ - минимум (рис.1.1, кривые 3, 4, соответственно). Если $\beta_1 = 0$, то кривая имеет сигмоидальную форму (рис.1.1, кривая 5).

2. Реология стареющих упруго-вязких сред в приложении к климатическому и деформационному старению полимеров

В мировой литературе выполнены значительные исследования по старению полимеров в различных климатических условиях [16-20]. Для описания опытов по старению, как правило, применяется принцип температурно-временного соответствия [21], который, как известно, приводит к горизонтальному смещению кривых податливости и к описанию простых откликов среды на внешнее воздействие. При этом описывается поведение реологически простых материалов. Для моделирования поведения стареющих материалов следует оперировать такими понятиями, которые способны учитывать как горизонтальный, так и вертикальный сдвиг. При описании старения полимеров будем рассматривать параметр эффективного времени (1.2), с помощью которого возможно описание процессов деформационного старения и старения после закалки. В случае старения полимерных материалов ограничимся рассмотрением простых вязкоупругих моделей Максвелла

$$E_2\sigma + \eta\dot{\sigma} = E_2\,\eta\,\dot{\varepsilon} \tag{2.1}$$

и Кельвина-Фойхта

$$\sigma + \tau\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} + \tau H\varepsilon,\ H = E_2,\ \tau = \frac{\eta}{E_1 + E_2},\ E = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \tag{2.2}$$

Для стабильных материалов коэффициенты вязкости и упругости (¦ , E_1, E_2) в (2.1), (2.2) предполагаются независимыми от времени. Для стареющей среды эти коэффициенты следует считать функциями времени и деформации.

Воспользуемся соотношением $\eta \approx E\tau$, которое связывает основные характеристики полимерной среды – вязкость ¦ , максимальное время релаксации ² и модуль упругости *E*. С учетом этого соотношения уравнение (2.1) запишется в следующем виде:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\sigma}{E(t)}\right] + \frac{\sigma}{E(t)\tau} \tag{2.3}$$

Принимая в (2.3) экспериментальную зависимость изменения модуля упругости при старении в виде

$$E = E_0(1 + (1 - e^{-kt})) \tag{2.4}$$

в работе [22] получено решение уравнения (2.3), которое описывает хорошо процессы теплового и климатического старения полимеров. При таком подходе не учитываются процессы деформационного старения. Для их описания воспользуемся параметром эффективного времени µ

$$d\omega = f_1(\omega, \varepsilon, \phi, T, t)dt + f_2(\omega, \varepsilon, \phi, T, t)d\varepsilon + f_3(\omega, \varepsilon, \phi, T, t)d\phi \tag{2.5}$$

Рассматривая случай простого растяжения, в уравнении (2.5) вместо параметра Одквиста использована величина деформации. Для упрощения дальнейших расчетов влияние радиационных повреждений не учитывается.

Для описания процессов деформационного старения будем исходить из кинетического уравнения (2.5) и рассмотрим следующую конкретизацию этого уравнения

$$d\omega = a\,e^{kt}dt + b\,d\varepsilon \tag{2.6}$$

где a, k, b – постоянные.

Записывая уравнения Максвелла и Кельвина-Фойхта с учетом формулы (2.6) и решая полученные уравнения при $\sigma = \text{const}$, $E_1, E_2, \eta = \text{const}$ и начальных условиях:

$\omega = 0,\ t = 0,\ \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E_2}$, получим следующие соотношения для деформации ползучести, соответственно, по модели Максвелла и Кельвина-Фойхта

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_2}\left[1 + \frac{a(e^{kt} - 1)}{k\tau\left(1 - \dfrac{\sigma b}{E_2\tau}\right)}\right] \tag{2.7}$$

$$t = \frac{1}{k}\ln\left(-\frac{\eta k}{aE_1}\ln(\sigma a (E_1 + E_2) - aE_1E_2\varepsilon) - \frac{bk}{a}\varepsilon + \frac{\eta k}{aE_1}\ln(\sigma a E_2) + \frac{b\sigma k}{aE_2} + 1\right) \tag{2.8}$$

На рис.2.1 показаны графики кривых ползучести по модели Максвелла (2.7) с учетом приведенного времени (2.6), при следующих значениях параметров: $E_2 = 1000 МПа$, $²_1 = 1$, $²_2 = 5$, $²_3 = 10$, $²_4 = 15$, $k = -0{,}001$, $± = 1{,}05$, $a = 0{,}5$, $b = 3$.

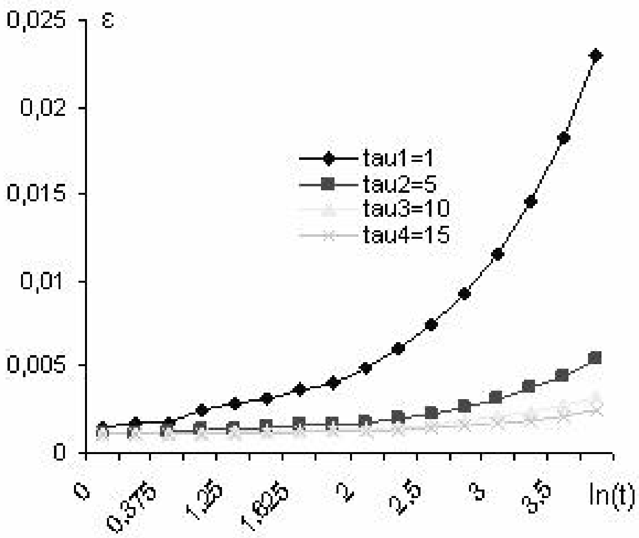


Рис. 2.1. Кривые ползучести по модели Максвелла ($d\omega = a\ e^{kt}dt + b\ d\varepsilon$).

Как видно из графиков, уравнение (2.7) описывает хорошо качественную картину ползучести и старения полимерных материалов.

Расчеты показывают, что при различных величинах параметров уравнений (2.7) и (2.8) кривые ползучести по модели Максвелла и Кельвина-Фойхта могут существенно отличаться друг от друга, в частности, могут и совпадать. Вариант таких расчетов представлен на рис. 2.2, на котором показаны кривые $t(£)$ при следующих значениях параметров: $E_1 = 200 МПа$, $E_2 = 1000 МПа$, $² = 5$, $k = -0{,}001$, $± = 1{,}05$, $a = 0{,}5$, $b = 3$.

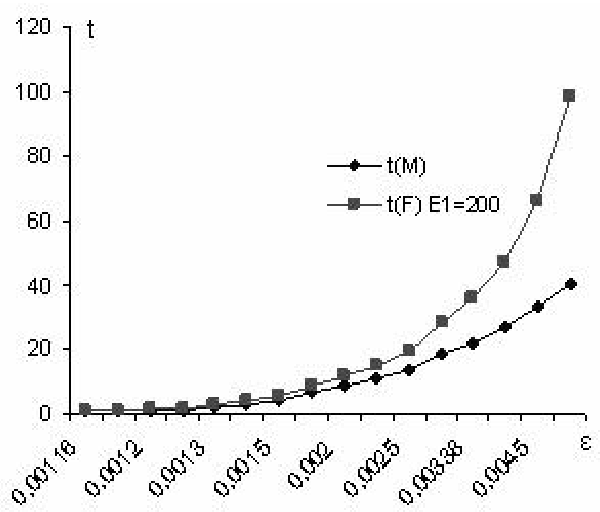


Рис. 2.2. Кривые ползучести, где $t(M)$ – по модели Максвелла, $t(F)$ – по модели Кельвина-Фойхта.

Как видно из этого рисунка, процесс старения по модели Кельвина-Фойхта протекает более интенсивно, чем по модели Максвелла. Так как достоверные экспериментальные данные по деформационному старению полимерных материалов в мировой литературе отсутствуют, поэтому при выборе оптимального варианта для параметров уравнений (2.7) и (2.8) требуются дополнительные экспериментальные исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.-Л.: Гостехиздат, 1953. 324с.
2. Старение сплавов / Под редакцией М.И. Захаровой. Металлургиздат, 1962. 493с.
3. Гинье А. Неоднородные металлические твердые растворы. М.: Изд-во ИЛ, 1962. 158с.
4. Бабич В.К., Гуль Ю.П., Долженков И.Е. Деформационное старение стали. М.: Металлургия.1972. 320с.
5. Паршин А.М., Тихонов А.Н., Бондаренко Г.Г., Кириллов Н.Б. Радиационная повреждаемость и свойства сплавов. СПб.: Политехника, 1995. 301с.
6. Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Часть 1.597с. Часть 2. 441с. М.: Наука, 1984.
7. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. С.-Петербург: Изд-во СПб университета, 2004. 253с.
8. Арутюнян Р.А., Вакуленко А.А. О многократном нагружении упруго- пластической среды // Изв. АН СССР. Механика. 1965. №4. С. 58-61.
9. Арутюнян Р.А. Теория пластичности для среды со старением // Проблемы прочности. 1987. №4. С. 7-10.
10. Дамаск А., Динс Дж. Точечные дефекты в металлах. М.: Мир, 1966. 292с.
11. Барре П. Кинетика гетерогенных процессов. М.: Мир, 1976. 399 с.
12. Хачатурян А.Г. Теория фазовых превращений и структура твердых растворов. М.: Наука, 1974. 384с.
13. Химия твердого состояния. М.: ИИЛ, 1961. 543с.
14. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965. 524с.
15. Екобори Т. Научные основы прочности и разрушения материалов. Киев: Наукова Думка, 1978. 352с.
16. Бочкарев Р.Н., Филатов И.С. Старение материалов на основе поливинилхлорида в условиях холодного климата. Новосибирск: 1990. 118с.
17. Мелкумов А.М., Татевосьян Г.О. Старение изделий из пластмасс в климатических условиях. Узбекистан: 1975. 176с.

18. Bruijn de J.C.M. The failure behavior of high density polyethylene with an embrittled surface layer due to weathering. Delft: Delft University press. 1992. 167p.
19. Kulich D.M., Gaggar S.K. Weathering of Acrylonitile Butadiene-Styrene Plastics: compositional effects on impact and color // Polymer durability. Advances in Chemistry. Series 249. American chemical society. Washington, DC. 1996. P. 483-501.
20. Struik L.C.E. Physical aging in amorphous polymers andother materials. Amsterdam, Oxford, New York: Elsevier Sci. Publ.Comp. 1978. 229p.
21. Уржумцев Ю.С. Прогнозирование длительного сопротивления полимерных материалов М.: Наука, 1982. 223с.
22. Арутюнян Р.А., Бражникова Н.В. Описание ползучести и релаксации напряжений по модели стареющей среды Максвелла и Кельвина-Фойхта // Труды XXI Международной конференции "Математическое моделирование в механике сплошной среды. Методы граничных и конечных элементов". С.-Петербург, 4-7 октября 2005 г.; Санкт-Петербург: 2006. Т. 2. С. 35-38.

Сведения об авторе

Арутюнян Роберт Ашотович
Доктор физ.-мат. наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия
Адрес: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28
Тел: (812) 5266591; E-mail: Robert.Arutyunyan@paloma.spbu.ru

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ БИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НАПРЯЖЕНИЙ

Баблоян А.А., Егиазарян Т.А., Макарян В.С.

На основе свойств δ – порождающих функций предлагается метод решения некоторых классических задач теории упругости связанных с бигармоническим оператором. Бигармонические функции напряжений представляются в явном виде через элементарные функции.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \lim_{y\to 0} \frac{y}{x^2+y^2}\, dx \tag{1}$$

где $\phi(x)$ – финитная функция.

Преобразуем (7) следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \lim_{y\to 0} \frac{y}{x^2+y^2}\, dx = \lim_{y\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\ d\,\mathrm{arctg}'\, \frac{x}{y} = \lim_{y\to 0} \phi(x)\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \\ - \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{y\to 0}\ \mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}\ \phi'(x)\, dx \tag{2}$$

Первое слагаемое в (8) равно нулю из условия финитности функции $\phi(x)$. Преобразуем второе слагаемое в (8)

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x) \lim_{y\to 0}\ \mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}\ dx = -\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \phi'(x)\ \lim_{y\to 0}\ \mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}\ dx - \int_{-\varepsilon}^{0} \phi'(x) \lim_{y\to 0}\ \mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}\ dx - \\ -\int_{0}^{\varepsilon} \phi'(x) \lim_{y\to 0}\ \mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}\ dx - \int_{\varepsilon}^{\infty} \phi'(x) \lim_{y\to 0}\ \mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}\ dx \tag{3}$$

Имея в виду значения предела $\lim\limits_{y\to 0} \mathrm{arctg}\,\frac{x}{y} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\, x$, вместо (9) будем иметь:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x) \lim_{y\to 0}\ \mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}\ dx = \frac{\pi}{2}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \phi'(x)\ dx + \int_{-\varepsilon}^{0} \phi'(x)\, dx - \int_{0}^{\varepsilon} \phi'(x)\, dx - \int_{\varepsilon}^{\infty} \phi'(x)\ dx \right) = \\ = \frac{\pi}{2}(\phi(-\varepsilon) - \phi(-\infty) + \phi(0) - \phi(-\varepsilon) - \phi(\varepsilon) + \phi(0) - \phi(\infty) + \phi(\varepsilon)) = \pi\,\phi(0) \tag{4}$$

Таким образом, мы получили, что для любой финитной функции $\phi(x)$ имеет место интегральное соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \lim_{y\to 0} \frac{y}{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x = \pi\,\phi(0) \tag{5}$$

Следовательно,

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{x^2+y^2} = \pi\,\delta(x) \tag{6}$$

Здесь мы получили хорошо известное из функционального анализа соотношение (12) в обход свойств интеграла Фурье.

Аналогично, в цилиндрической системе координат рассмотрим интеграл

$$\int_{0}^{\infty} r\,\phi(r) \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}\,\left(r^2+z^2\right)}\, dr = -\lim_{z\to 0} \int_{0}^{\infty} \phi(r)\ \mathrm{d}\,\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} = \phi(0) + \\ + \int_{0}^{\infty} \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\ \phi'(r)\ dr = \phi(0) \tag{7}$$

откуда следует что

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}\left(r^2+z^2\right)}=\frac{\pi\,\delta(r)}{r} \tag{8}$$

Имея в виду вышеизложенное и хорошо известную теорему о том, что если функция $\phi(x,y)$ является гармонической, то функции $x\,\phi(x,y)$ и $y\,\phi(x,y)$ будут бигармоническими функциями**,** решение уравнения Лапласа в декартовых координатах

$$\frac{\partial^2\,\Phi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\,\Phi(x,y)}{\partial y^2}=0 \tag{9}$$

ищем в следующем виде:

$$\Phi(x,y)=\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \tag{10}$$

Подставляя (2) в (1) после обозначения $\dfrac{x}{y}=z$, получим

$$\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}+\frac{2\,z}{z^2+1}=0 \quad \text{или} \quad \varphi(z)=c_1\mathrm{arctg}z,\quad \Phi(x,y)=c_1\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y} \tag{11}$$

Фактически функция (6) является функцией Грина для задачи Неймана.

На основе вышеизложенного построим бигармонические функции напряжений Эйри для некоторых базовых граничных задач теории упругости.

Задача 1. Две сосредоточенные нормальные силы на границе упругой полуплоскости

$$\Phi(x,y)=\frac{P}{\pi}\left((x-c)\,\mathrm{arctg}\frac{x-c}{y}+(x+c)\mathrm{arctg}\frac{x+c}{y}\right) \tag{12}$$

$$\sigma_y(x,y)=\frac{\partial^2\,\Phi(x,y)}{\partial x^2}=\frac{2P}{\pi}\left(-\frac{(x-c)^2\,y}{(y^2+(x-c)^2)^2}-\frac{(x+c)^2\,y}{(y^2+(x+c)^2)^2}+\frac{y}{y^2+(x-c)^2}+\frac{y}{y^2+(x+c)^2}\right) \tag{13}$$

$$\tau_{xy}(x,y)=-\frac{\partial^2\,\Phi(x,y)}{\partial x\,\partial y}=-\frac{2P}{\pi}\left(\frac{(x-c)^3}{(y^2+(x-c)^2)^2}+\frac{(x+c)^3}{(y^2+(x+c)^2)^2}-\frac{(x-c)}{y^2+(x-c)^2}-\frac{(x+c)}{y^2+(x+c)^2}\right) \tag{14}$$

$$\sigma_x(x,y)=\frac{\partial^2\,\Phi(x,y)}{\partial y^2}=\frac{2\mathrm{P}}{\pi}\left(\frac{(c-x)^2\,y}{(y^2+(x-c)^2)^2}+\frac{(x+c)^2\,y}{(y^2+(x+c)^2)^2}\right) \tag{15}$$

$$\begin{gathered}E\,u_x(x,y)=\int\frac{\partial^2\Phi}{\partial\,y^2}\mathrm{d}x-\nu\frac{\partial\Phi}{\partial\,x}=\\ =\frac{\mathrm{P}}{\pi}\left((1-\nu)\left(\mathrm{arctg}\frac{x-c}{y}+\mathrm{arctg}\frac{x+c}{y}\right)-(1+\nu)\left(\frac{(x-c)y}{y^2+(x-c)^2}+\frac{(x+c)y}{y^2+(x+c)^2}\right)\right)\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}E\,u_y(x,y)=\int\frac{\partial^2\Phi}{\partial\,x^2}\mathrm{d}y-\nu\frac{\partial\Phi}{\partial\,y}=\\ =\frac{P}{\pi}\Big((1+\nu)\left(\frac{(x-c)^2}{y^2+(x-c)^2}+\frac{(x+c)^2}{y^2+(x+c)^2}\right)+\ln(y^2+(x+c)^2)+\ln(y^2+(c-x)^2)+E\,V_0\end{gathered} \tag{17}$$

Выражения на границе $y=0$

$$\sigma_y(x,0)=\frac{P}{\pi}\Big(2\,\pi\,(\delta(x-c)+\delta(x+c))+(x-c)\lim_{y\to 0}\frac{\partial}{\partial\,x}\frac{y}{y^2+(x-c)^2}+$$

$$+(x+c)\lim_{y\to 0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{y^2+(x+c)^2}\Bigg)=\frac{P}{\pi}\big(2\pi(\delta(x-c)+\delta(x+c))+$$

$$+\pi((x-c)\delta'(x-c)+(x+c)\delta'(x+c))=$$

$$=\frac{P}{\pi}\big(2\pi(\delta(x-c)+\delta(x+c))-\pi(\delta(x-c)+\delta(x+c))=P(\delta(x-c)+\delta(x+c)) \quad (18)$$

$$\tau_{xy}(x,0)=0 \quad E\,u_x(x,0)=\frac{P(1-\nu)}{2}(\mathrm{sgn}(x+c)-\mathrm{sgn}(c-x)) \quad (19)$$

$$E\,v_y(x,0)=\frac{2P}{\pi}(\ln(x+c)+\ln(c-x))+\frac{2P(1+\nu)}{\pi}+V_0 \quad (20)$$

Задача 2. Две противоположные сосредоточенные нормальные силы на границе упругой полуплоскости.

$$\Phi(x,y)=\frac{p}{\pi}\left((x-c)\mathrm{arctg}\,\frac{x-c}{y}-(x+c)\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+c}{y}\right) \quad (21)$$

$$\sigma_y(x,y)=\frac{p}{\pi}\left(-\frac{2(x-c)^2y}{(y^2+(x-c)^2)^2}+\frac{2(x+c)^2y}{(y^2+(x+c)^2)^2}+\frac{2y}{y^2+(x-c)^2}-\frac{2y}{y^2+(x-c)^2}\right) \quad (22)$$

$$\tau_{xy}(x,y)=\frac{p}{\pi}\left(\frac{2(x-c)^3}{(y^2+(x-c)^2)^2}-\frac{2(x+c)^3}{(y^2+(x+c)^2)^2}-\frac{2(x-c)}{y^2+(x-c)^2}+\frac{2(x+c)}{y^2+(x+c)^2}\right) \quad (23)$$

$$\sigma_x(x,y)=\frac{p}{\pi}\left(\frac{2(x-c)^2y}{(y^2+(x-c)^2)^2}-\frac{2(x+c)^2y}{(y^2+(x+c)^2)^2}\right) \quad (24)$$

$$E\,u_x(x,y)=\frac{p}{\pi}\left((1-\nu)\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x-c}{y}\text{-}\mathrm{arctg}\,\frac{x+c}{y}\right)-(1+\nu)\left(\frac{(x-c)\,y}{y^2+(x-c)^2}-\frac{(x+c)\,y}{y^2+(c+x)^2}\right)\right) \quad (25)$$

$$E\,u_y(x,y)=\frac{p}{\pi}\left((1+\nu)\left(\frac{(x-c)^2}{y^2+(x-c)^2}-\frac{(x+c)^2}{y^2+(x+c)^2}\right)+\ln\left(y^2+(x+c)^2\right)+\right.$$

$$\left.+\ln\left(y^2+(c-x)^2\right)+EV_0 \right. \quad (26)$$

Выражения на границе y = 0

$$\sigma_y(x,0)=p\left(\delta(x-c)-\delta(x+c)\right) \qquad \sigma_x(x,0)=p\left(\delta(x-c)-\delta(x+c)\right) \quad (27)$$

$$E\,u_x(x,y)=-\frac{p(1-\nu)}{2}\left(\mathrm{sgn}(c+x)+\mathrm{sgn}(c-x)\right) \quad (28)$$

$$E\,u_y(x,0)=\frac{2p}{\pi}\left(-\ln(c+x)+\ln(c-x)\right)+\frac{2p(1+\nu)}{\pi}+V_0 \quad (29)$$

Задача 3. Сосредоточенный момент (сим.)

$$\Phi(x,y)=\frac{M}{\pi}\left(\frac{x\,y}{x^2+y^2}+\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}\right) \quad (30)$$

$$\tau_{xy}(x,y)=\frac{M(6x^2y^2-2y^4)}{\pi(x^2+y^2)^3};\ \sigma_y(x,y)=-\frac{8Mx\,y^3}{\pi(x^2+y^2)^3} \quad (31)$$

Задача 4. Две сонаправленные тангенциальные силы на границе упругой полуплоскости (задача Черути c$\to$0)

$$\Phi(x,y)=\frac{q}{\pi}\left(y\,\mathrm{arctg}\frac{x-c}{y}+y\,\mathrm{arctg}\frac{x+c}{y}\right) \tag{32}$$

$$\sigma_x(x,y)=-\frac{q}{\pi}\left(\frac{2(x-c)^3}{(y^2+(x-c)^2)^2}+\frac{2(x+c)^3}{(y^2+(x+c)^2)^2}\right) \tag{33}$$

$$\sigma_y(x,y)=-\frac{q}{\pi}\left(\frac{2(x-c)y^2}{(y^2+(x-c)^2)^2}+\frac{2(x+c)y^2}{(y^2+(x+c)^2)^2}\right) \tag{34}$$

$$\tau_{xy}(x,y)=-\frac{q}{\pi}\left(\frac{2(x-c)^2y}{(y^2+(x-c)^2)^2}+\frac{2(x+c)^2y}{(y^2+(x+c)^2)^2}\right) \tag{35}$$

$$\begin{gathered}E\,u_x(x,y)=-\frac{q}{\pi}\Big(\ln((c-x)^2+y^2)+\ln((c+x)^2+y^2)\Big)-\\-\frac{q(1+\nu)\,y^2}{\pi}\left(\frac{1}{(c-x)^2+y^2}+\frac{1}{(c+x)^2+y^2}\right)\end{gathered} \tag{36}$$

$$\begin{gathered}E\,u_y(x,y)=\frac{q}{\pi}\left((1+\nu)\left(\frac{(x-c)\,y}{(x-c)^2+y^2}+\frac{(x+c)\,y}{(x+c)^2+y^2}\right)-\nu\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{sgn}\left(\frac{x-c}{y}\right)+\mathrm{sgn}\left(\frac{x+c}{y}\right)\right)-\right.\\\left.-(1-\nu)\left(\mathrm{arctg}\frac{y}{c+x}+\mathrm{arctg}\frac{y}{x-c}\right)\right)\end{gathered} \tag{37}$$

Выражения на границе y = 0:

$$\tau_{xy}(x,0)=-q(\delta(x-c)+\delta(x+c)) \tag{38}$$

$$E\,u_x(x,0)=-\frac{q}{\pi}\left(\ln^2(c+x)+\ln^2(c-x)\right)\qquad E\,u_y(x,0)=\frac{q\,\nu}{2}\left(\mathrm{sgn}(c+x)+\mathrm{sgn}(x-c)\right) \tag{39}$$

Задача 5. Две противоположные сосредоточенные тангенциальные силы на границе упругой полуплоскости

$$\Phi(x,y)=\frac{q}{\pi}y\left(\mathrm{arctg}\frac{c-x}{y}+\mathrm{arctg}\frac{x+c}{y}\right) \tag{40}$$

$$\sigma_y(x,y)=\frac{2q}{\pi}y^2\left(\frac{(x-c)}{(y^2+(x-c)^2)^2}-\frac{(x+c)}{(y^2+(x+c)^2)^2}\right) \tag{41}$$

$$\sigma_x(x,y)=\frac{2q}{\pi}\left(\frac{(x-c)^3}{(y^2+(x-c)^2)^2}-\frac{(x+c)^3}{(y^2+(x+c)^2)^2}\right) \tag{42}$$

$$\tau_{xy}(x,y)=\frac{q}{\pi}\left(\frac{2(x-c)^2y}{(y^2+(x-c)^2)^2}-\frac{2(x+c)^2y}{(y^2+(x+c)^2)^2}\right) \tag{43}$$

$$E\,u_x(x,y)=-\frac{q}{\pi}\left(\ln\frac{(c+x)^2+y^2}{(c-x)^2+y^2}+(1+\nu)y^2\left(\frac{1}{(c+x)^2+y^2}-\frac{1}{(c-x)^2+y^2}\right)\right) \tag{44}$$

$$\begin{gathered}E\,u_y(x,y)=-\frac{q}{\pi}\left(-(1+\nu)\left(\frac{y(c-x)}{(c-x)^2+y^2}+\frac{y(c+x)}{(c+x)^2+y^2}\right)+\right.\\\left.+\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{sgn}\frac{y}{c-x}+\mathrm{sgn}\frac{y}{c+x}\right)-(1-\nu)\left(\mathrm{arctg}\frac{c-x}{y}+\mathrm{arctg}\frac{c+x}{y}\right)\right)+V_0\end{gathered} \tag{45}$$

Выражения на границе y = 0

$$\sigma_y(x,0) = -q\lim_{y\to 0}\Big(\delta\big(x+c\big)-\delta\big(x-c\big)\Big)=0 \qquad \tau_{xy}(x,0)=q\big(\delta(c-x)-\delta(x+c)\big) \tag{46}$$

$$E\,u_x(x,y) = -\frac{2q}{\pi}\ln\frac{c+x}{c-x} \qquad E\,u_y(x,0)=\frac{q(1-\nu)}{2}\big(\operatorname{sgn}(c-x)+\operatorname{sgn}(c+x)\big)+V_0 \tag{47}$$

Задача 6. Сосредоточенный момент на границе полубесконечной пластинки

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 W(x,y)=0, \qquad -\infty<x<\infty,\ 0<y<\infty \tag{48}$$

$$W(x,y)=-\frac{M}{\pi}x\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \qquad \lim_{y\to 0}W(x,y)=-\frac{N}{\pi}\lim_{y\to 0}x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=0 \tag{49}$$

$$\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial y^2}=\frac{N}{\pi}\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \qquad \lim_{y\to 0}\frac{N}{\pi}\frac{2yx^2}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{N}{\pi}\lim_{y\to 0}x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=N\,\delta(x) \tag{50}$$

Задача Буссинеска

$$\Delta\Phi(r,z)=\frac{\partial^2\Phi(r,z)}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\Phi(r,z)}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi(r,z)}{\partial r} \tag{51}$$

$$\sigma_z(r,z)=\frac{\partial}{\partial z}\left((2-\nu)\Delta\Phi(r,z)-\frac{\partial^2\Phi(r,z)}{\partial z^2}\right) \quad \sigma_r(r,z)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\Delta\Phi(r,z)-\frac{\partial^2\Phi(r,z)}{\partial r^2}\right) \tag{52}$$

$$\sigma_\varphi(r,z)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\Delta\Phi(r,z)-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi(r,z)}{\partial r}\right) \quad \tau_{rz}(r,z)=\frac{\partial}{\partial r}\left((1-\nu)\Delta\Phi(r,z)-\frac{\partial^2\Phi(r,z)}{\partial z^2}\right) \tag{53}$$

$$u_r(r,z)=-\frac{1}{2G}\frac{\partial^2\Phi(r,z)}{\partial r\,\partial z} \qquad u_z(r,z)=\frac{1}{2G}\left(2(1-\nu)\Delta\Phi(r,z)-\frac{\partial^2\Phi(r,z)}{\partial^2 z}\right) \tag{54}$$

Решение бигармонического уравнения в цилиндрических координатах ищем в следующем виде:

$$\Phi(r,z)=z\,\Psi\left(\frac{r}{z}\right) \tag{55}$$

После чего получим, что с учетом осевой симметрии задачи бигармоническую функцию Лява представим в следующем виде:

$$\Phi\big(r,z\big)=A\sqrt{z^2+r^2}+Bz\,\ln\Big(z+\sqrt{z^2+r^2}\Big) \tag{56}$$

$$\tau_{rz}\big(r,z\big)=\frac{-r(Ar^2+(4A+3B)z^2)+2(A+B)r\big(z^2+r^2\big)\nu}{\big(z^2+r^2\big)^{5/2}} \tag{57}$$

$$\sigma_z\big(r,z\big)=\frac{z(-4A-3B+2(A+B)\nu}{\big(z^2+r^2\big)\sqrt{z^2+r^2}}-\frac{r}{3}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{3(A+B)z}{\big(z^2+r^2\big)\sqrt{z^2+r^2}}\right) \tag{58}$$

$$\sigma_z\big(r,0\big)=\frac{-4A-3B+2(A+B)\nu}{r}\pi\delta(r)-\pi(A+B)\delta'(r) \quad A=-\frac{P\nu}{\pi},\ B=\frac{P(-1+2\nu)}{2\pi} \tag{59}$$

$$\tau_{rz}(r,z)=\frac{3Pr\,z^2}{2\pi(r^2+z^2)^{5/2}} \qquad \sigma_z(r,z)=\frac{3P\,z^3}{2\pi(r^2+z^2)^{5/2}} \tag{60}$$

$$u_r(r,z)=-\frac{\Pr\left(z\left(\sqrt{r^2+z^2}+2z\nu\right)-r^2(1-2\nu)\right)}{4G\pi(r^2+z^2)^{3/2}\left(\sqrt{r^2+z^2}+z\right)}\qquad u_z(r,z)=-\frac{\mathrm{P}(2r^2(1-\nu)+z^2\left(3-2\nu\right))}{4G\pi(r^2+z^2)^{3/2}} \tag{61}$$

$$\sigma_r\left(r,z\right)=\frac{P(4r^2\,z^2\,(1+\nu)\,(z+\sqrt{r^2+z^2})-(1-2\nu)\,z^4\,(z+\sqrt{r^2+z^2})}{2\pi\left(r^2+z^2\right)^{5/2}\left(z+\sqrt{r^2+z^2}\right)^2}+$$
$$+\frac{P\,r^4\,(2(1+\nu)z-(1-2\nu)\sqrt{r^2+z^2})}{2\pi\left(r^2+z^2\right)^{5/2}\left(z+\sqrt{r^2+z^2}\right)^2} \tag{62}$$

$$\sigma_\varphi\left(r,z\right)=-\frac{P(r^2+(1-2\nu)z\sqrt{r^2+z^2}))}{2\pi\left(r^2+z^2\right)^{3/2}\left(z+\sqrt{r^2+z^2}\right)} \tag{63}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Макарян В. С. Поведение трещины под сжимающей нагрузкой. //Докл. НАН РА, 2006. Т.106, N2, с 144-152.
2. Белубекян М.В., Егиазарян Т.А., Макарян В. С. Изгиб полубесконечной пластинки при действии на кромке сосредоточенного изгибающего момента. / В сб.: Проблемы механики деформируемого твердого тела. НАН РА, 2007. С.81-85.
3. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 369с.
4. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спец.курс. М.: Наука, 1965. 327с.

Сведения об авторах:

Баблоян Арамаис Арутюнович

Доктор физ.-мат наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики Ереванского Архитектурного университета

Адрес:375019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24б , Институт механики НАН Армении

Телефон: +37410524890 (сл)

Email ababloyan@yahoo.com

Егиазарян Татевик Айказовна

Кандидат физ.-мат наук Института механики НАН Армении

Адрес:375019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24б , Институт механики НАН Армении

Телефон: +37410524890 (сл)

Email: tatevik_ygh@yahoo.com

Макарян Ваагн Сисакович,

Доктор физ.-мат наук, ведущий научн.сотр.Института механики НАН Армении

Адрес: 375019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24б, Институт механики НАН Армении

Телефон: +37410524890 (сл)

Email: vmakaryan@yahoo.com

ОТРАЖЕНИЕ МАГНИТОУПРУГИХ (УПРУГОСПИНОВЫХ) ВОЛН ОТ ГРАНИЦЫ ФЕРРОМАГНИТНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А., Даноян Н.З.

В магнитоупорядоченных кристаллах, в частности, в ферромагнетиках, упругие волны сопровождаются спиновыми волнами и наоборот, так что в таких средах распространяются связанные упругоспиновые или магнитоупругие волны [1-3]. В вышеуказанных работах приведены результаты об объемных магнитоупругих и спиновых волнах, а также о поверхностных волнах, которые впервые были исследованы в работах [4-5]. Многие интересные результаты о поверхностных спиновых и магнитоупругих волнах в слоистых средах получены в работах [6] и др. В настоящей работе рассматривается отражение объемных магнитоупругих волн от границы ферромагнитного полупространства.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим задачу отражения объемной магнитоупругой волны от границы ферромагнитного полупространства в двумерной постановке.

Пусть полубесконечный ферромагнитный кристалл, ограниченный плоскостью $x_2 = 0$ в декартовой координатной системе $0x_1x_2x_3$ занимает область $x_2 > 0$ и находится во внешнем однородном магнитном поле с вектором напряженности $\vec{H}_0$, который направлен по оси $0x_3$. Объемная плотность начальной намагниченности среды $\vec{M}_0 = \rho_0\vec{\mu}_0$ (где ρ_0 – материальная плотность среды, $\vec{\mu}_0$ – намагниченность единицы массы) параллельна $\vec{H}_0$ и также направлена вдоль оси $0x_3$. В области $x_2 < 0$ предполагается вакуум, $\vec{n}_0$ – внешняя нормаль к поверхности ферромагнетика (рис.1).

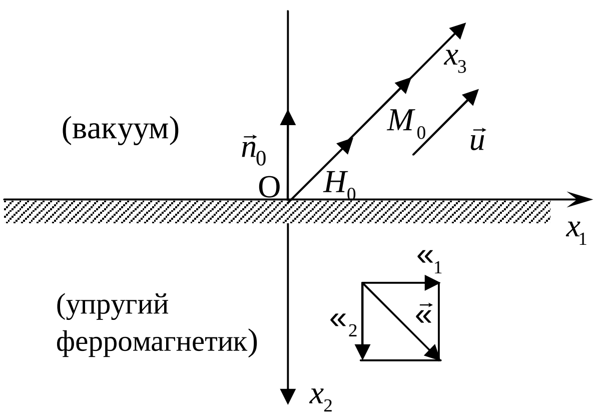


Рис.1

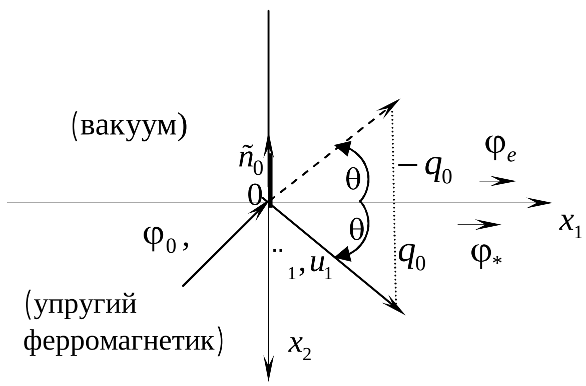


Рис.2

Предположим, что неизвестные возмущенные характеристики задачи удовлетворяют следующим условиям антиплоской деформации:

$$\vec{u} = \left\{0, 0, u_3\left(x_1, x_2, t\right)\right\},\ \vec{\mu} = \{\mu_1(x_1, x_2, t), \mu_2(x_1, x_2, t), 0\},$$
$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, t),\ \varphi_e = \varphi_e(x_1, x_2, t) \qquad (1.1)$$

где $\vec{u}$ – вектор упругого перемещения, $\vec{\mu}$ – вектор плотности намагничивания, $\varphi(\varphi_e)$ – магнитостатический потенциал среды (вакуума).

Вышеприведенные характеристики в абсолютной гауссовой системе единиц удовлетворяют следующим уравнениям и граничным условиям [1-6]:

1. Уравнения магнитоупругости в ферромагнетике (в области $x_2 > 0$):

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = S\Delta u_3 + \mathrm{M}_0 f\left(\dfrac{\partial \mu_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \mu_2}{\partial x_2}\right) \\
\Delta\varphi = \rho_0\left(\dfrac{\partial \mu_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \mu_2}{\partial x_2}\right) \\
\dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} = \Omega_M\left(\rho_0^{-1}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \hat{b}\mu_2 + \bar{b}\mu_0\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \lambda\Delta\mu_2\right) \\
\dfrac{\partial \mu_2}{\partial t} = \Omega_M\left(-\rho_0^{-1}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \hat{b}\mu_1 - \bar{b}\mu_0\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} + \lambda\Delta\mu_1\right)
\end{cases} \tag{1.2}
$$

2. Квазистатическое уравнение Максвелла в вакууме (в области $x_2 < 0$):

$$
\Delta\varphi_e = 0 \tag{1.3}
$$

3. Граничные условия на поверхности раздела $x_2 = 0$:

$$
S^2\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \bar{b}M_0\mu_2 = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \rho_0\mu_2 = \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_2}, \ \varphi = \varphi_e, \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \mu_2}{\partial x_2} = 0 \tag{1.4}
$$

Выше приняты следующие обозначения [2]:

$$
\begin{gathered}
\tilde{C}_2 = C_2 + C_4, C_2 = \mu_e, C_4 = \tilde{\alpha}_2 + \left(b + f\right)M_0^2, \ S^2 = \tilde{C}_2/\rho_0, \ M_0 = \rho_0\mu_0 \\
\tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 + fM_0^2, \ \hat{b} = b + \chi_0^{-1}, \ \chi_0 = M_0 \,|\, H_0, \Omega_M = \gamma_0 M_0, \ \bar{b} = b + f
\end{gathered} \tag{1.5}
$$

где «_e – модуль сдвига, α_2 – модуль упругости, b – постоянная магнитной анизотропии, f – коэффициент магнитной стрикции, λ – модуль обменного взаимодействия; $\gamma_0 = 1,76\cdot 10^7$ (Э·с)$^{-1}$ – гиромагнитное отношение, Δ – двумерный оператор Лапласа.

2. Решение задачи. Плоские магнитоупругие волны.

Рассмотрим решения системы (1.2) и уравнения (1.3) в виде плоских гармонических волн

$$
\left(u_3, \mu_1, \mu_2, \varphi, \varphi_e\right) = \left(\tilde{u}_3, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_e\right)e^{i(px_1 + qx_2 - \omega t)} \tag{2.1}
$$

где знаком «~» обозначены амплитуды соответствующих величин, ω – круговая частота, p и q – продольное и поперечное волновые числа, $\vec{k} = \{p, q, 0\}$ – волновой вектор, $|\vec{k}| = k = \sqrt{p^2 + q^2}$ – волновое число.

Подставляя (2.1) в (1.2) и (1.3), найдем следующие линейные однородные алгебраические уравнения для определения амплитуд $\tilde{u}_3, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_e$, точнее, приведенных амплитуд $\tilde{U}_3, \tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}_e$:

$$
\begin{cases}
\left(-\tilde{S}^2\tilde{k}^2 + \Omega^2\right)\tilde{U}_3 + i\bar{f}\tilde{p}\tilde{M}_1 + i\tilde{q}\bar{f}\tilde{M}_2 = 0, \ \ i\bar{b}\tilde{q}\tilde{U}_3 + i\Omega\tilde{M}_1 + \left(\hat{b} + \tilde{k}^2\right)\tilde{M}_2 + i\tilde{q}\tilde{\Phi} = 0 \\
i\bar{b}\tilde{p}\tilde{U}_3 + \left(\hat{b} + \tilde{k}^2\right)\tilde{M}_1 - i\Omega\tilde{M}_2 + i\tilde{p}\tilde{\Phi} = 0, \ i\tilde{p}\tilde{M}_1 + i\tilde{q}\tilde{M}_2 + \tilde{k}^2\tilde{\Phi} = 0
\end{cases} \tag{2.2}
$$

$$
\tilde{k}^2\tilde{\Phi}_e = 0 \tag{2.3}
$$

Здесь приняты следующие обозначения для безразмерных величин:

$$
\begin{gathered}
\tilde{u}_3 = \sqrt{\lambda}\,\tilde{U}_3, \ \tilde{\mu}_1 = \mu_0\tilde{M}_1, \ \tilde{\mu}_2 = \mu_0\tilde{M}_2, \ \tilde{\varphi} = \sqrt{\lambda}\,M_0\,\tilde{\Phi}, \tilde{\varphi}_e = \sqrt{\lambda}\,M_0\,\tilde{\Phi}_e \\
S^2 = \lambda\Omega_M^2\,\tilde{S}^2, \ f = \lambda\gamma_0^2\rho_0\bar{f}, \ \omega = \Omega_M\Omega, \ p = \lambda^{-1/2}\,\tilde{p}, \ q = \lambda^{-1/2}\tilde{q} \\
k^2 = \lambda^{-1}\tilde{k}^2, \ \tilde{k}^2 = \tilde{p}^2 + \tilde{q}^2
\end{gathered} \tag{2.4}
$$

Условие разрешимости системы (2.2) относительно амплитуд дает уравнение для определения волнового числа k (или $\tilde{k}$) в зависимости от частоты Ω или для определения поперечного волнового числа $\tilde{q}$ в зависимости от продольного волнового числа $\tilde{p}$ и Ω:

$$\tilde{k}^2\left\{\left(\Omega^2-S_2^2\tilde{k}^2\right)\left[\Omega^2-\left(\hat{b}+\tilde{k}^2\right)\left(1+\hat{b}+\tilde{k}^2\right)\right]-\varepsilon_p\left(\hat{b}+\tilde{k}^2\right)\tilde{k}^2\right\}=0 \qquad (2.5)$$

где ε_p называется коэффициентом магнитоупругого взаимодействия и определяется выражением [2]:

$$\varepsilon_p=\overline{f}\,\overline{b}=f\overline{b}\big/\lambda\gamma_0^2\rho_0 \qquad (2.6)$$

С другой стороны, из (2.3) для нетривиального решения в вакууме имеем:

$$\tilde{k}^2=0 \qquad (2.7)$$

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда обменным эффектом можно пренебречь. В этом случае формально следует в уравнениях (2.2) и (2.5) сумму $\hat{b}+\tilde{k}^2$ заменить на $\hat{b}$. Тогда из (2.2) и (2.5) получим связь между амплитудами парциальных волн и совокупность дисперсионных уравнений в ферромагнетике, соответственно:

$$\left\{\tilde{M}_1=\frac{i\overline{b}\left(i\tilde{q}\Omega+\hat{b}\tilde{p}\right)}{\Omega^2-2\tilde{b}^2}\tilde{U}_3,\quad \tilde{M}_2=-\frac{i\overline{b}\left(i\tilde{p}\Omega-\hat{b}\tilde{q}\right)}{\Omega^2-2\tilde{b}^2}\tilde{U}_3,\quad \tilde{\Phi}=\frac{\overline{b}\hat{b}}{\Omega^2-2\tilde{b}^2}\tilde{U}_3,\right. \qquad (2.8)$$

$$\left[\begin{array}{c}\tilde{k}^2=0\\ \left(\Omega^2-\tilde{S}^2\tilde{k}^2\right)\left(\Omega^2-\Omega_{SV}^2\right)-\varepsilon_p\hat{b}\tilde{k}^2=0\end{array}\right. \qquad (2.9)$$

где приведенные величины определяются по обозначениям (2.4), причем $\tilde{V}=\Omega/\tilde{k}$ – приведенная фазовая скорость распространения волны, Ω_{SV} – частота объемных чисто-спиновых волн, распространяющихся под прямым углом к внешнему магнитному полю, определяемая по формуле:

$$\Omega_{SV}=\sqrt{\hat{b}\left(1+\hat{b}\right)} \qquad (2.10)$$

Из второго уравнения (2.9) находим волновое число объемной магнитоупругой волны:

$$\tilde{k}^2=\Omega^2\left(\Omega^2-\Omega_{SV}^2\right)/\,\tilde{S}^2\left(\Omega^2-\overline{\Omega}_{SV}^2\right) \qquad (2.11)$$

где обозначено:

$$\overline{\Omega}_{SV}^2=\Omega_{SV}^2-\hat{b}\varepsilon_p\tilde{S}^{-2} \qquad (2.12)$$

В дальнейшем согласно [2] будем предполагать, что выполняется условие:

$$\overline{\Omega}_{SV}^2<\Omega_{SV}^2 \qquad (2.13)$$

3. Отраженные магнитоупругие волны.

Перейдем теперь к исследованию отражения объемных магнитоупругих волн.

Пусть из глубины ферромагнетика $x_2>0$ на его границу падает плоская магнитоупругая волна:

$$\left(u_{30},\mu_{10},\mu_{20},\varphi_0\right)=\left(\tilde{u}_{30},\tilde{\mu}_{10},\tilde{\mu}_{20},\tilde{\varphi}_0\right)e^{i\left(px_1-q_0x_2-\omega t\right)} \qquad (3.1)$$

где $\tilde{u}_{30},\tilde{\varphi}_{10},\tilde{\mu}_{20},\tilde{\varphi}_0$ – амплитуды, ω – частота, p – продольное, $q=-q_0$ – поперечное волновые числа падаюшей волны. Компоненты волнового вектора $\vec{k}$ падающей волны можно представить в виде:

$$k_1=p=k\cos\theta,k_2=q=-k\sin\theta=-q_0 \qquad (3.2)$$

Здесь θ – угол скольжения волны, т.е. угол между волновым вектором $\vec{k}$ и положительным направлением оси $0x_1$ (рис.2), k – волновое число, определяемое по $k^2 = \lambda^{-1}\tilde{k}^2$ и (2.11).

Связь между приведенными амплитудами падающей волны дается соотношениями (2.8) при $q = -q_0$, а p, q, k определяются по (3.2) и (2.11).

Решение для отраженной волны ищем в виде (2.1). Поскольку граничные условия должны выполняться в любой момент времени и в любой точке граничной плоскости $x_2 = 0$, то значения частоты ω и продольного волнового числа p должны быть одинаковыми во всех колебаниях и равными соответствующим значениям падающей воны. Это значит, что фазовый множитель $e^{i(px_1-\omega t)}$ является общим во всех парциальных волнах. Подставляя выражение отраженной волны в уравнения (1.2) и (1.3), получим уравнения (2.2), (2.3) для определения неизвестных амплитуд, условия разрешимости которых дают дисперсионные уравнения (2.7) и (2.9), из которых должны определяться неизвестные поперечные волновые числа парциальных отраженных волн q.

Дисперсионное уравнение (2.7) имеет вид $\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2 = 0$ и дает корни:

$$\tilde{q} = \pm i\left|\tilde{p}\right| \tag{3.3}$$

Этим корням соответствуют неоднородные магнитостатические волны в вакууме. Волны, соответствующие корню $\tilde{q} = i\,|\,\tilde{p}\,|$, должны быть отброшены, поскольку они нарастают вглубь вакуума при удалении от границы. Волны, соответствующие корню $q = -i\,|\,p\,|$, затухают при удалении от границы (при $x_2 \to -\infty$) и имеют вид:

$$\varphi_e = \tilde{\varphi}_e\, e^{|p|x_2}\, e^{i(px_1-\omega t)} \tag{3.4}$$

где $\tilde{\varphi}_e$ – неизвестная амплитуда.

Обратимся теперь к дисперсионным уравнениям (2.9).

Первое уравнение имеет корни, совпадающие с корнями (3.3). Они описывают магнитостатические колебания в ферромагнетике. Из этих корней в данном случае следует брать корень $q = +i\,|\,p\,|$, для того чтобы соответствующее возмущение затухало в ферромагнетике при удалении от границы. Этому корню соответствует неоднородная волна, которая распространяется в направлении оси Ox_1 (т.е. параллельно границе ферромагнетика) и экспоненциально убывает при удалении от границы. Эта волна является сопутствующей поверхностной волной (СПВ) и не является собственным колебанием магнитоупругой системы. Эта парциальная волна задается формулой:

$$\left(u_{3*}, \mu_{1*}, \mu_{2*}, \varphi_*\right) = \left(\tilde{u}_{3*}, \tilde{\mu}_{1*}, \tilde{\mu}_{2*}, \tilde{\varphi}_*\right) e^{-|p|x_2} e^{i(px_1-\omega t)} \tag{3.5}$$

где амплитуды $\tilde{u}_{31*}, \tilde{\mu}_{1*}, \tilde{\mu}_{2*}, \tilde{\varphi}_*$, точнее, их приведенные величины $\tilde{U}_{1*}, \tilde{m}_{1*}, \tilde{m}_{2*}, \tilde{\Phi}_*$, удовлетворяют соотношениям (2.8) при $q = +i\,|\,p\,|$.

Второе уравнение из (2.9) имеет решения $-q_0$ и $+q_0$, которым соответствуют падающая и зеркально отраженная магнитоупругие волны соответственно.

Падающая волна дается (3.1), а отраженная волна будет иметь выражение:

$$\left(u_{31}, \mu_{11}, \mu_{21}, \varphi_1\right) = \left(\tilde{u}_{31}, \tilde{\mu}_{11}, \tilde{\mu}_{21}, \tilde{\varphi}_1\right) e^{i(px_1+q_0x_2-\omega t)} \tag{3.6}$$

Из (2.11) имеем:

$$\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2 = \Omega^2\left(\Omega^2 - \Omega_{SV}^2\right) / \tilde{S}^2\left(\Omega^2 - \bar{\Omega}_{SV}^2\right) \tag{3.7}$$

откуда находим поперечное волновое число $\tilde{q}$ зеркально отраженной волны:

$$\tilde{q} = \tilde{q}_0 = \tilde{q}^*\left(\Omega,\ \tilde{p}\right),\ \tilde{q}^*\left(\Omega,\ \tilde{p}\right) = \tilde{S}^{-1}\sqrt{\tilde{D}_V} \tag{3.8}$$

где предполагается, что $\tilde{D}_V > 0$.

Дискриминант $\tilde{D}_V(\Omega,\ \tilde{p})$ определяется выражениями:

$$D_V(\Omega,\ \tilde{p}) = \Omega^2\left(\Omega^2 - \Omega_{SV}^2\right) - \tilde{\Omega}_T^2\left(\Omega^2 - \bar{\Omega}_{SV}^2\right),\ \tilde{\Omega}_T^2 = \tilde{p}^2\tilde{S}^2$$
$$D^*{}_V(\Omega,\ \tilde{p}) = \Omega^2 - \bar{\Omega}_{SV}^2,\ \tilde{D}_V = D_V(\Omega,\ \tilde{p})\big/D^*{}_V(\Omega,\ \tilde{p}) \quad (3.9)$$

Для определения знака выражения $D_V(\Omega,\ \tilde{p})$ в зависимости от частоты и продольного волнового числа решим уравнение $D_V(\Omega,\ \tilde{p}) = 0$ относительно $y \equiv \Omega^2$. Это уравнение квадратное и имеет вид: $D_V(\Omega,\ \tilde{p}) = D_V(y,\ x) = y^2 - (a+x)y + bx = 0$, где приняты обозначения: $x = \tilde{\Omega}_T^2 = \tilde{p}^2\tilde{S}^2, a = \Omega_{SV}^2,\ b = \bar{\Omega}_{SV}^2$. Дискриминантом этого уравнения является выражение $\Delta_1(x) = x^2 + 2(a-2b)x + a^2$. Дискриминант последнего трехчлена равняется $\Delta_2 = 4b(b-a)$, который всегда отрицателен, т.к. согласно (2.13) $a > b$. Следовательно, $\Delta_1(x)$ в зависимости от x всегда положителен. Следовательно, уравнение $D_V(y,\ x) = 0$ всегда имеет вещественные положительные корни:

$$y_{1,2} = 2^{-1}\left[a + x \pm \sqrt{(a+x)^2 - 4bx}\right] \quad (3.10)$$

Легко показать, что: 1) $y_2 = 0$ при $x = 0$; $y_2 \to b$ при $x \to +\infty$, 2) $y_1 = a$ при $x = 0$; $y_1 \to +\infty$ при $x \to +\infty$; 3) $y_1/x \to K = 1$ при $x \to +\infty$; $B = y_1 - Kx \to a - b$ при $x \to +\infty$. Следовательно, $y = b$ является горизонтальной асимптотой для функции $y_2(x)$, а $y = Kx + B = x + (a-b)$–наклонной асимптотой для функции $y_1(x)$ (рис.3). Определение знака величины тривиален. Из вышеприведенных рассуждений следует, что величина $\tilde{D}_V$ или $\tilde{q}_0 > 0$, если точка (y, x) или ($\Omega, \tilde{p}$) принадлежит заштрихованной области рисунка на рис. 3.

Следовательно, согласно вышеизложенному, волновые поля в ферромагнетике и в вакууме будут иметь вид:

$$u_3 = u_{30} + u_{31} + u_{3*}, \mu_1 = \mu_{10} + \mu_{11} + \mu_{1*},$$
$$\mu_2 = \mu_{20} + \mu_{21} + \mu_{2*}, \varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_*, x_1 > 0 \quad (3.11)$$

$$\ddot{} = \ddot{}_e,\ x_1 < 0 \quad (3.12)$$

Подставляя решения (3.11)-(3.12) в первые три граничных условия (1.4) (остальные граничные условия используются при учете обменного эффекта), получим соответствующие алгебраические уравнения для определения неизвестных амплитуд отраженной волны.

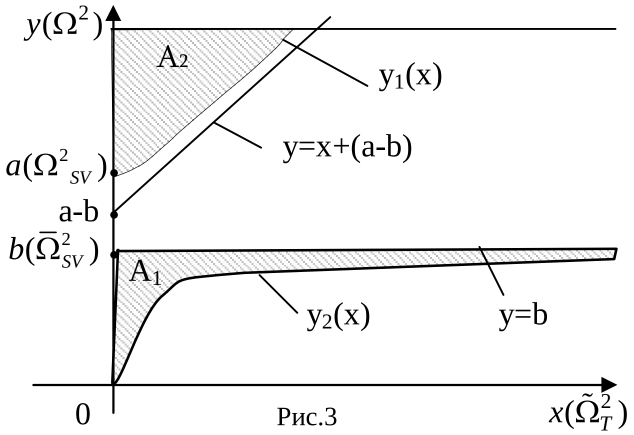


Рис.3

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер А.И., Барьяхтар Б.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 386с.
2. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560с.
3. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А. Отражение двумерных спиновых волн от границы ферромагнитного полупространства. /В кн.: «Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести», посвященной 75-летию академика НАН Армении М.А. Задояна. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2006. С. 75-81.
4. Damon R.W., Eshbach J.R. Magnetostatic modes of a ferromagnetic slab. //J. Phys. Chem. Solids. 1961. 1. P. 308-320.
5. Филиппов Б.Н.К теории поверхностных спиновых волн. //Физика твердого тела. 1967. Т.9. Вып.5. С. 1339-1344.
6. Багдасарян Г.Е., Асанян Д.Д., Саакян С.Л. Распространение взаимосвязанных упругих и спиновых волн в кусочно-однородной ферромагнитной среде. /В кн.: ,,Проблемы механики тонких деформируемых тел'', посвященной 80-летию академика НАН Армении С.А.Амбарцумяна. Ереван: Изд: НАН Армении, 2002. С.48-61.

<u>Сведения об авторах</u>

Багдасарян Геворг Ервандович
Академик НАН Армении, главный научный сотрудник, Институт механики НАН РА
Адрес: Армения, 375019 Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24б
Тел: (+37410)56-21-43
E-mail: mechins@sci.am

Даноян Завен Нерсесович
Доктор физ.-мат. наук, зав.оделом, Институт механики НАН РА
Адрес: Армения, 375019 Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24б
Тел: (+37410) 56-21-43
E-mail: mechins@sci.am

Манукян Гоар Аслановна
Кандидат физ.-мат.наук, ст.научный сотрудник, Институт механики НАН РА
Адрес:Армения. 375012 Ереван, ул.Гр.Арцруни, д.10.кв.4
Тел: (+37410) 22-88-17
E-mail: avetisus@yahoo.com

Даноян Нерсес Завенович
Научный сотрудник, Институт механики НАН РА
Адрес: Армения, 375019 Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24б
E-mail: mechins@sci.am

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ КОНЦЕНТРАТОРОВ НАПРЯЖЕНИЙ

Бардзокас Д.И., Мхитарян С.М.

Во многих областях прикладной механики, например, в горной механике, в механике композитов и других, часто встречаются задачи об определении напряженно–деформированного состояния однородных и неоднородных упругих тел, содержащих различные типы концентраторов напряжений. Чаще всего в роли различных концентраторов напряжений выступают трещины и абсолютно жесткие тонкие включения. Исследование вопросов взаимодействия таких концентраторов, а также качественная и количественная оценка концентрации напряжений возле них, представляет как теоретический, так и практический интерес. В этом направлении укажем на работы [1-7].

В настоящей работе, развивая идеи работ [8-11], при помощи известного метода [1] строится замкнутое решение смешанной граничной задачи для упругой плоскости с конечным разрезом при плоской или антиплоской деформации, когда на берегах разреза заданы смешанные краевые условия. Аналогичным методом и на основании результатов из [12] может быть исследована соответствующая осесимметричная смешанная задача для упругого пространства с круговым разрезом.

1. Пусть упругое пространство с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν отнесено к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, в плоскости $y=0$ содержит сквозной полосовой математический разрез $\Omega=\{y=0;\ -a<x<a;\ -\infty<z<\infty\}$ конечной ширины $2a$ и находится в условиях плоской деформации с базовой плоскостью Oxy. Предположим, что на верхнем и нижнем берегах разреза касательные напряжения равны нулю, а на участках $b<|x|<a$ нижнего берега нормальные напряжения также равны нулю. Пусть далее на верхнем берегу заданы нормальные напряжения $p_+(x)$, а на участке $|x|<b$ нижнего берега заданы вертикальные смещения $u_y^-(x,0)$ в виде функции $f(x)$. Таким образом, в базовой плоскости Oxy с разрезом $(-a;a)$ по оси Ox имеем следующие граничные условия:

$$\begin{gathered} u_y^-(x,0)=f(x) \quad (|x|<b,\ b<a);\ \tau_{yx}^{\pm}(x)=0 \quad (|x|<a) \\ \sigma_y^+(x,0)=-p_+(x) \quad (|x|<a); \qquad \sigma_y^-(x,0)=0 \quad (b<|a|<a) \end{gathered} \tag{1a,d}$$

Здесь σ_y и τ_{yx}– соответственно, нормальные и касательные напряжения, знаки $\pm$ относятся, соответственно, к верхнему и нижнему берегам разреза, а $f(x)$– заданная функция из достаточно общего класса.

Теперь введем обозначения

$$\sigma_y^-(x,0)=-p_-(x) \quad (|x|<a), \qquad \sigma_y^{\pm}(x,0)=-\sigma(x) \quad (|x|>a) \tag{2a,b}$$

где $p_-(x)$–неизвестные с обратным знаком нормальные напряжения на нижнем берегу разреза, подлежащие определению, причем $p_-(x)\equiv 0$ при $b<|x|<a$, а $\sigma(x)$–неизвестные с обратным знаком нормальные напряжения вне разреза на оси Ox. Будем считать, что система сил на берегах самоуравновешанная и положим

$$\int_{-b}^{b} p_-(x)dx=\int_{-a}^{a} p_+(x)dx=Q \tag{3}$$

Вполне аналогичным образом описывается соответствующая смешанная граничная задача для упругого пространства с разрезом Ω при антиплоской деформации [9].

Реализация граничных условий (1a,d) с учетом (2a) решение поставленной задачи сводит к решению следующего определяющего сингулярного интегрального уравнения (ОСИУ):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-k}^{k}\frac{p(\eta)d\eta}{\eta-\xi}+\frac{1}{2\pi}\int_{-k}^{k}K(\xi,\eta)p(\eta)d\eta=g(\xi)\quad(|\xi|<k)$$

$$K(\xi,\eta)=\frac{\sqrt{1-\eta^2}-\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-\xi^2}(\eta-\xi)}=-\frac{\eta+\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\left(\sqrt{1-\eta^2}+\sqrt{1-\xi^2}\right)}$$

$$g(\xi)=f_0(\xi)-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}K(\xi,\eta)p_0(\eta)d\eta \tag{4a,c}$$

где введены безразмерные координаты и величины

$$\xi=x/a,\quad \eta=s/a;\quad p(\xi)=p_-(a\xi)/\vartheta,\quad p_0(\xi)=p_+(a\xi)/\vartheta$$

$$x=b/a;\quad \vartheta=E\Big/2\left(1-\nu^2\right);\quad f_0(\xi)=f'(a\xi)$$

Здесь $f'(a\xi)=f'(x)$–производная функции $f(x)$, которую будем далее считать принадлежащией гельдеровскому классу функций.

При этом решение ОСИУ (4a,c) должно удовлетворять условию

$$\int_{-k}^{k}p(\xi)d\xi=Q_0;\ Q_0=Q/a\vartheta \tag{5a,b}$$

эквивалентному условию (3).

Решение ОСИУ (4a,c) построим методом его сведения к краевой задаче Римана для двух пар функций. С этой целью введем в рассмотрение кусочно голоморфные функции

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-k}^{k}\frac{p(\eta)d\eta}{\eta-z},\quad \Phi_2(z)=\int_{-k}^{k}\frac{\sqrt{1-\eta}p(\eta)d\eta}{\eta-z}$$

в комплексной плоскости $z=\xi+i\eta$, разрезанной вдоль интервала $(-k;k)$ веществеиой оси. Далее, используя известные формулы Племеля–Сохоцкого для функций $\Phi_p(z)$ $(p=1,2)$, ОСИУ (4a,c) сведем к следующей задаче Римана для двух пар функций на интервале $(-k;k)$:

$$\Phi_1^+(\xi)=-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\Phi_2^-(\xi)-ig(\xi)$$

$$\Phi_2^+(\xi)=-\sqrt{1-\xi^2}\Phi_1^-(\xi)-i\sqrt{1-\xi^2}g(\xi)\qquad(-k<\xi<k).$$

Введение функций

$$\psi_1(z)=i\Phi_1(z),\quad \psi_2(z)=i\Phi_2(z)$$

позволяет эту задачу преобразовать в матричную краевую задачу

$$\begin{aligned}&\psi_1^+(\xi)=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\psi_2^-(\xi)+g(\xi)\\&\psi_2(\xi)=\sqrt{1-\xi^2}\psi_1^-(\xi)-\sqrt{1-\xi^2}g(\xi)\end{aligned}\qquad \xi\in(-k;k) \tag{6}$$

Решение краевой задачи (6) построим развитым в [1] методом. Не останавливаясь на этом процессе, отметим, что в разбираемом случае удается при помощи методов теории функций комплексного пременного вычислить один из интегралов, входящих в общую формулу решения краевой задачи (6). В результате, после ряда преобразований решение ОСИУ (4a,c) при условии (5a,b) будет выражаться формулой

$$p(\xi)=-\frac{1}{4\pi k^2\sqrt{1-\xi^2}}\left[\Delta_+(\xi,k)\sqrt{k-\xi}-\Delta_-(\xi,k)\sqrt{k+\xi}\right]\times$$
$$\times\int_{-k}^{k}\left[\Delta_+(\eta,k)\sqrt{k-\eta}-\Delta_-(\eta,k)\sqrt{k+\eta}\right]\frac{g(\eta)d\eta}{\eta-\xi}-\frac{\Delta_+(\xi,k)\sqrt{k+\xi}+\Delta_-(\xi,k)\sqrt{k-\xi}}{4\pi k^2\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{k^2-\xi^2}}\times$$
$$\times\int_{-k}^{k}\sqrt{k^2-\eta^2}\left[\Delta_+(\eta,k)\sqrt{k+\eta}+\Delta_-(\eta,k)\sqrt{k-\eta}\right]\frac{g(\eta)d\eta}{\eta-\xi}+$$
$$+\frac{C_0}{2k\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{k^2-\xi^2}}\left[\Delta_+(\xi,k)\sqrt{k+\xi}+\Delta_-(\xi,k)\sqrt{k-\xi}\right]\quad(-k<\xi<k)$$
$$\Delta_\pm(\xi,k)=\sqrt{k\sqrt{1-\xi^2}\pm\sqrt{1-k^2}\xi}\quad(k=b/a;\ \ 0<k<1);\quad c(k)=2\Big/\left(\sqrt{1+k}+\sqrt{1-k}\right)$$
$$C_0=\frac{Q_0}{\pi c(k)}+\frac{1}{2\pi k}\int_{-k}^{k}\left[\Delta_+(\eta,k)\sqrt{k-\eta}-\Delta_-(\eta,k)\sqrt{k+\eta}\right]g(\eta)d\eta \qquad (7a,d)$$

Если в формулах (7a,d) совершить предельный переход $k\to 1$, т.е $b\to a$, то решение ОСИУ (4a,c)-(5a,b) при $k=1$ можно представить в виде

$$p(\xi)=-\frac{1}{2\pi}(1+\xi)^{-3/4}(1-\xi)^{-1/4}\int_{-1}^{1}(1-\eta)^{1/4}(1+\eta)^{3/4}\frac{g(\eta)d\eta}{\eta-\xi}-$$
$$-\frac{1}{2\pi}(1+\xi)^{-1/4}(1-\xi)^{-3/4}\int_{-1}^{1}(1-\eta)^{3/4}(1+\eta)^{1/4}\frac{g(\eta)d\eta}{\eta-\xi}+ \qquad (8)$$
$$+\frac{Q_0}{2\sqrt{2}\pi}\left[(1+\xi)^{-1/4}(1-\xi)^{-3/4}+(1+\xi)^{-3/4}(1-\xi)^{-1/4}\right]$$

Отметим, что формулу (8) можно получить также непосредственно решая краевую задачу (6) при $-1<\xi<1$.

Отметим еще, что после того как построено решение ОСИУ (4a,c)-(5a,b), распределение нормальных напряжений $\sigma(x)$ из (2b) вне разреза $(-a;a)$ на горизонтальной оси можно получить по известной формуле из [8,9].

Далее можно записать формулу для раскрытия трещины $\varphi(x)=\mathrm{v}_+(x,0)-\mathrm{v}_-(x,0)$ и коэффициентов интенсивности напряжений КИН [13].

Считая для простоты $p_+(-x)=p_+(x)$ для безразмерного КИН K_+ получим

$$K_+=\frac{2\sqrt{\pi}}{E\sqrt{a}}K_a=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}p_0(\eta)+\int_{-k}^{k}\sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}p(\eta)d\eta \qquad (9)$$
$$K_a=-\frac{E}{4\left(1-\nu^2\right)}\lim_{x\to a-0}\left[\sqrt{2\pi(a-x)}\varphi'(x)\right]$$

а другие обозначения приведены выше.

2. Рассмотрим частный случай, когда верхний берег разреза нагружен равномерно распределенными нормальными силами постоянной интенсивности т.е. $p_+(x)=p_+=\mathrm{const}$, а нижный берег разреза по отрезку $(-b;b)$ $(b<a)$ усилен абсолютно жестким тонким включением, которое под действием вертикальной сосредоточенной в его середине силы Q в вертикальным направлении совершает постоянное жесткое смещение δ, т.е. $f(x)=-\delta=\mathrm{const}$. В этом случае функция $g(x)$ из (4c) будет даваться формулой

$$g(\xi)=\frac{Q_0}{4\pi}\left(\ln\frac{1-\xi}{1+\xi}+\frac{\pi\xi}{1-\xi^2}\right)\quad(-k<\xi<k)$$

а безразмерный КИН – при помощи (9) формулами:

$$\tilde{K}=\frac{K_+}{Q_0}=\frac{2\sqrt{\pi a}K_a}{Q}=1+\tilde{P}_0(k)K(k)+\int_{-1}^{1}\frac{\tilde{\Lambda}_0(t)\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$$\tilde{P}_0(k)=\frac{k}{8\pi^2\sqrt[4]{1-k^2}}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\left[\Delta_+^0(u,k)\sqrt{1+u}+\Delta_-(u,k)\sqrt{1-u}\right]\tilde{g}_0(u)\,du+\frac{\tilde{C}}{\sqrt[4]{1-k^2}}$$

$$\Delta_\pm^0(t,k)=\sqrt{\sqrt{1-k^2t^2}\pm\sqrt{1-k^2}\,t};\quad \tilde{g}_0(t)=\frac{4\pi}{Q_0}g(kt)$$

$$\tilde{\Lambda}_0(t)=-\frac{k\sqrt{1-t^2}}{16\pi^2\sqrt{1-k^2t^2}}\left[\Delta_+^0(t,k)\sqrt{1-t}-\Delta_-^0(t,k)\sqrt{1+t}\right]\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}\left[\Delta_+^0(u,k)\sqrt{1-u}-\Delta_-^0(u,k)\sqrt{1+u}\right]\frac{\tilde{g}_0(u)\,du}{u-t}-$$

$$-\frac{k}{16\pi^2\sqrt{1-k^2t^2}}\left[\Delta_+^0(t,k)\sqrt{1+t}-\Delta_-^0(t,k)\sqrt{1-t}\right]\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\left[\Delta_+^0(u,k)\sqrt{1+u}+\Delta_-^0(u,k)\sqrt{1-u}\right]\frac{\tilde{g}_0(u)\,du}{u-t}+$$

$$+\frac{\tilde{C}}{2\sqrt{1-k^2t^2}}\left[\Delta_+^0(t,k)\sqrt{1+t}-\Delta_-^0(t,k)\sqrt{1-t}\right]$$

$$\tilde{C}=\frac{\sqrt{1+k}+\sqrt{1-k}}{2\pi}+\frac{k}{8\pi^2}\int_{-1}^{1}\left[\Delta_+^0(u,k)\sqrt{1-u}-\Delta_-^0(u,k)\sqrt{1+u}\right]\tilde{g}_0(u)\,du \qquad (10a,f\ )$$

Проведен численный анализ $\tilde{K}$ по формулам (10a,f) для различных значений параметра k, результаты которого приведены в таблице

Значения $\tilde{K}$

k	0,1	0,3	0,5	0,6	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	0,99
$\tilde{K}$	1,533	1,736	2,226	2,681	4,024	4,873	6,208	8,637	14,721	44,761

Как видно из таблицы и из дальнейшего анализа при приближении параметра k к единице, т.е. при $b\to a$, когда $f(x)=-\delta=\text{const}$, КИН, строго увеличиваясь, стремится к своему критическому значению, при котором трещина распространяется. В результате, трещина распространится раньше чем конец включения достигнет конца трещины, хотя с математической точки зрения, как указано выше, при $k\to 1$ решение задачи при частичном усилении нижнего берега стремится к решению этой же задачи при полном усилении этого берега. Это схоже с известным явлением в задачах о расклинивании упругих тел [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости. //ПММ. 1962. T.XXVI. Вып.5. С.907-912.
2. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
3. Selvadural A.P.S. and Singh B.M. On the expansion of a penny-shaped crack by a rigid circular disc.//Intern. J. of Fracture. Vol.25. 1984. Pp.69-74.
4. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982.
5. Попов Г.Я. О концентрации упругих напряжений возле тонкого частично отслоившегося включения. /В сб.: ″Современные проблемы механики и авиации″, посвящ. шестидесятилетию акад. И.Ф. Образцова. М.: Машиностроение, 1982. С.238-250.
6. Акопян В.Н., Мирзоян С.Е., Даштоян Л.Л. Об одной осесимметричной смешанной задаче для составного пространства с монетообразной трещиной. /В сб.: ″Проблемы механики деформируемых тел″, посвящен. девяностолетию акад. Н.Х. Арутюняна. Ереван: Изд.-во ″Гитутюн″ НАН Армении. 2003. С.68-76.
7. Мхитарян С.М. О двух смешанных задачах, связанных с вопросами взаимодействия концентратов различных типов с массивными телами при антиплоской деформации -В сб.: ″Механика деформируемого твердого тела″. Ереван: Изд-во НАН Армении. 1993. С.129-143.
8. Мхитарян С.М. Об одном классе задач контактного взаимодействия при наличии различных типов концентраторов напряжений. /В сб.: ″Современные проблемы теории контактных взаимодействий″. Ереван: Изд-во НАН Армении. 1996. С.203-214.
9. Манукян Э.А., Мкртчян М.С., Мхитарян С.М. О напряженном состоянии упругого пространства со сквозной трещиной при антиплоской или плоской деформации и при смешанных граничных условиях на ее берегах. / В сб.: Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести. Ереван: Изд.–во «Гитутюн» НАН Армении. С.189-198.
10. Gevorgyan S.Kh., Manukyan E.H., Mkhitaryan S.M. and Mkrtchyan M.S. On a mixed problem for an elastic space with a crack under antiplane and plane deformations. -In collection of papers “Modern Problems of deformable bodies Mechanics”, dedicated to the memory of Prof. P.S. Theocaris, Yerevan, published by “Gitutyun” NAS RA, 2005, pp.98-113.
11. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М. : Наука, 1983.
12. Бардзокас Д.И. Напряженное состояние упругого пространства с круговой дискообразной трещиной, когда на берегах трещины заданы смешанные граничные условия. /В сб.: Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести. Ереван: Изд.–во «Гитутюн» НАН Армении. С.82-91.
13. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Механика разрушения и прочность материалов. /Справочное пособие в четырех томах, т.2. Киев: Наукова думка, 1988.
14. Баренблатт Г.И., Черепанов Р.П. О расклиновании хрупких тел. //ПММ. 1960. Т.24. Вып.4. С.667-682.

Сведения об авторах:

Professor Bardzokas
National Technical University of Athens
Faculty of Applied Sciences, Department of Mechanics
Lab. Of Strength and Materials, Zografou Campus, Theocaris Bld.
Gr-157 73, Athens, Greece, E-mail: bardim@central.ntua.gr

Мхитарян Сурен Манукович
Доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник,
Институт механики НАН РА
Адрес: Армения, 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24[б], Имех. НАН
Тел: (37410)-62-10-25, E-mail: mechins@sci.am

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ, УСИЛЕННОЙ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ, ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ

Белубекян Э.В., Дарбинян А.З.

Для прямоугольной пластинки, свободно опертой по продольным краям и усиленной поперечными ребрами жесткости по свободным кромкам и в середине пролета, находящейся под действием поперечной изгибающей нагрузки, определяются оптимальные геометрические параметры конструкции, обеспечивающие ее наибольшую несущую способность.

Рассматривается прямоугольная пластинка, размерами a, b, h_2, свободно опертая по продольным краям $y = 0, y = b$ и усиленная по свободным краям $x = \pm a/2$ и в середине пролета $x = 0$ прямоугольными ребрами одинакого сечения ($\alpha h_1 \times h_1$). Предполагается, что на пластинку действует поперечная нагрузка q, симметрично распределенная относительно линии расположения среднего ребра.

Ставится задача определения оптимальных геометрических параметров конструкции h_1, h_2, α, обеспечивающих максимальное значение критической нагрузки при неизменном весе и заданных габаритных размерах конструкции $\xi = \left(a + 3\alpha h_1\right)/b$.

Задачи оптимального проектирования ребристой прямоугольной пластинки при изгибе рассмотрены в работах [1-3].

Постоянству веса конструкции соответствует условие

$$a\left(h_0 - h_2\right) = 3\alpha h_1\left(h_1 - h_0\right) \tag{1}$$

где h_0 – соответствующая толщина сплошной пластинки заданного веса.

Решается задача изгиба пластинки, удовлетворяющей условиям сопряжения с ребрами жесткости, работающими на изгиб и кручение. При этом, ввиду симметрии, рассматривается правая половина пластинки ($x \geq 0$).

Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки записывается в виде

$$D\Delta^2 w = q \tag{2}$$

где $D = Eh_2^3 \Big/ 12\left(1 - \nu^2\right)$ – цилиндрическая жесткость пластинки, E, ν - упругие постоянные материала пластинки.

Граничные условия имеют вид:

шарнирного опирания по продольным краям

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0, \quad y = b, \tag{3}$$

упругого опирания [4]:

– на среднее ребро жесткости

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \; B\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \alpha h_1 q = -2D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(2 - \nu\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) \text{ при } x = 0 \tag{4}$$

–на крайнее ребро жесткости

$$C\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}=D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$B\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\alpha h_1 q=D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(2-\nu\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right),\text{ при } x=\left(a+\alpha h_1\right)/2 \quad (5)$$

где: $B=E\alpha h_1^4/12$ – жесткость ребра на изгиб, C – жесткость ребра на кручение, определяемая по формуле

$$C=G\ \alpha h_1^4\beta,\quad \beta=\alpha^2\left[\frac{1}{3}-\frac{64}{\pi^5}\alpha\sum_{1,3,\ldots}\frac{1}{n^5}th\frac{\pi n}{2\alpha}\right] \quad (6)$$

$G=E/2\left(1+\nu\right)$ – модуль сдвига.

Решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям (3), принимается в виде

$$w=\sum_1^\infty\left(\frac{q_k}{D\lambda_k^4}+C_{1k}\text{ch}\lambda_k x+C_{2k}\text{sh}\lambda_k x+C_{3k}x\text{ch}\lambda_k x+C_{4k}x\text{sh}\lambda_k x\right)\sin\lambda_k y \quad (7)$$

где q_k – коэффициенты разложения функции нагрузки $q(y)$ в ряд Фурье

$$q(y)=\sum_1^\infty q_k\sin\lambda_k y,\qquad q_k=\frac{2}{b}\int_0^b q(y)\sin\lambda_k y dy,\qquad \lambda_k=\frac{\pi k}{b} \quad (8)$$

а коэффициенты C_{ik} $\left(i=1,2,3,4\right)$ определяются из граничных условий (4) и (5).

Напряжения в пластинке определяются по формулам:

$$\sigma_{xx}=-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\qquad \sigma_{yy}=-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad (9)$$

а в ребрах жесткости:

$$\Big|\quad \sigma_{r1}=-Ez\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\ _{x=0},\ \sigma_{r2}=\Big|-Ez\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\ _{x=\left(a+\alpha h\ \right)/2} \quad (10)$$

Условия прочности принимаются в виде:

– для пластинки

$$\Pi\left(\sigma\right)=\max_{x,y,z}\left(\sigma_{xx}^2-\sigma_{xx}\sigma_{yy}+\sigma_{yy}^2\right)=R^2 \quad (11)$$

– для ребер жесткости

$$\max_{y,z}\left|\sigma_{ri}\right|=R,\ \left(i=1,2\right) \quad (12)$$

где R – допускаемое напряжение.

При заданной функции нагрузки $q(y)$ из условий прочности (11) и (12) определятся параметры нагрузки q_{01},q_{02},q_{03}, характеризующие несущую способность конструкции. Наибольшее допустимое значение параметра нагрузки будет

$$q_0=\min\left\{q_{01},q_{02},q_{03}\right\} \quad (13)$$

Несущая способность конструкции, характеризуемая параметром нагрузки q_0, является функцией ее геометрических параметров $\sim,h_1,h_2$, оптимальным выбором которых, при неизменном весе и заданных габаритных размерах конструкции, следует добиться максимального значения q_0.

Поставленная задача оптимального проектирования сводится к следующей задаче нелинейного программирования:
найти:

$$Q = \max_{\bar{x}} q_0, \quad \bar{x} = \{\alpha, h_1, h_2\} \tag{14}$$

при ограничениях:

$$h_2 = h_0 - \frac{3\alpha h_1}{a}(h_1 - h_0) \tag{15}$$

$$h_0 \le h_1 \le 0.2b, \ 0.2 \le \alpha \le 5, \ \delta \le h_2 \le h_0 \tag{16}$$

Ограничение (15) следует из условия постоянства веса конструкции (1), ограничения в виде неравенств (16) обусловлены пределами применимости классической теории балок и пластин. Для δ принимается: $\delta = 0.01b$ при $a \ge b$, $\delta = 0.01a$ при $a \le b$.

Задача решается методом случайного поиска [5].

Числовые расчеты произведены для случая распределения нагрузки по закону $q = q_0 \sin \pi y/b$ при $\nu = 0.3$, $\xi = 0.5$, $1{,}0$ 1.5, $\bar{h}_0 = h_0/b = 0.01$, 0.02, 0.03.

В табл. 1 приведены оптимальные значения параметров α, $\bar{h}_1 = h_1/b$, $\bar{h}_2 = h_2/b$ и соответствующие значения параметра нагрузки $\bar{Q} = Q/R$. Там же приведены наименьшие значения параметра нагрузки $\bar{Q}_0 = Q_0/R$, соответствующие сплошной равновесной пластинке.

Сравнение значений $\bar{Q}$ и $\bar{Q}_0$ показывает, что оптимальное оребрирование пластинки приводит к значительному увеличению ее несущей способности (от 1.5 до 3 раз) по сравнению с равновесной сплошной пластинкой. Причем увеличение отношения сторон пластинки ξ приводит к уменьшению влияния оребрирования.

Таблица 1

ξ	$\bar{h}_0$	α	$\bar{h}_1$	$\bar{h}_2$	$\bar{Q}\cdot 10^3$	$\bar{Q}_0\cdot 10^3$
0.5	0.01	0.2	0.075	0.00357	0.548	0.161
	0.02	0.2	0.110	0.00631	1.797	0.643
	0.03	0.2	0.135	0.00970	3.373	1.448
1.0	0.01	0.2	0.085	0.00597	0.365	0.157
	0.02	0.2	0.125	0.01149	1.275	0.627
	0.03	0.2	0.160	0.01619	2.675	1.412
1.5	0.01	0.2	0.080	0.00769	0.232	0.155
	0.02	0.2	0.130	0.01397	0.987	0.621
	0.03	0.2	0.165	0.02046	2.032	1.399

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян Э.В., Дарбинян А.З. Проектирование оптимальной длинной ребристой пластинки //В межвузовском сб.: Инженерные проблемы строительной механики. Ереван: ЕрПИ, 1985. С. 77-81.
2. Белубекян Э.В., Дарбинян А.З. Оптимальное проектирование ребристой прямоугольной пластинки из композиционного материала при ограничении на прочность //Механика, межвузовский сборник научных трудов. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1989. Вып. 7. С. 91-97.
3. Белубекян Э.В., Дарбинян А.З. Оптимальное проектирование усиленной поперечным ребром прямоугольной пластинки по критерию жесткости //В сб. научных трудов конференции: Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем. Ереван: 2002. С. 29-33.
4. Тимпшенко С.П., Войновский – Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 636 с.
5. Белубекян Э.В., Дарбинян А.З. Применение метода случайного поиска к рещению оптимальных задач прочности тонкостенных конструкций //В сб.: Шестой Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Ташкент, 1986. С. 95.

Сведения об авторах

Белубекян Эрнест Вагаршакович
Доктор технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов,
Ереванский государственный университет архитектуры и строительства
Адрес: Ереван, ул. Таманяна 2, кв. 51
Тел.: (+37410) 56 81 58; E-mail: ebelubekyan@yahoo.com

Дарбинян Артавазд Завенович
Кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Институт механики НАН РА
Адрес: Ереван, ул. Сарьяна 38, кв. 23
Тел.: (+37410) 53 46 13

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ ЛЯВА В СЛОИСТЫХ СИСТЕМАХ С РОМБИЧЕСКОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОДЛОЖКОЙ КЛАССА 222 И ИЗОТРОПНЫМ ПРОВОДЯЩИМ СЛОЕМ

Берберян А.Х.

Работам исследования поверхностных акустических волн Лява в различных слоистых системах посвящено большое количество работ [1,2]. В частности, пьезоэлектрическим поверхностным волнам Лява посвящены работы [3,4]. В этой работе исследуется существование и поведение электроупругих волн Лява в слоистой системе из ромбической пьезоэлектрической подложки класса 222 и изотропного проводящего слоя.

Постановка задачи. Пусть пьезоэлектрический кристалл ромбической симметрии класса 222 граничит с изотропным проводящим слоем, находясь в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ в акустическом контакте вдоль плоскости $y=0$. Величины, характеризующие пьезоэлектрик, находящиеся при $y>0$, обозначим индексом α, а слой при $y<0$ – индексом β. Одна из осей симметрии второго порядка ромбического кристалла параллельна оси Oz и лежит в плоскости границы раздела (рис.1). Далее, пусть кристаллы находятся в антиплоском деформированном состоянии

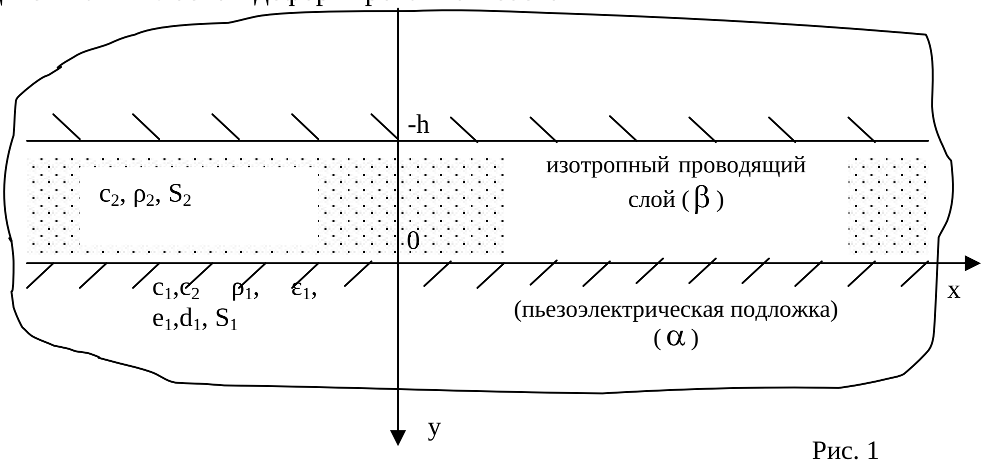


Рис. 1

$$
\begin{aligned}
&y>0:\bar{u}_{\alpha}=\left\{0,0,u_{\alpha}\left(x,y,t\right)\right\};\quad \varphi_{\alpha}=\varphi_{\alpha}\left(x,y,t\right)\\
&y<0:\bar{u}_{\beta}=\left\{0,0,u_{\beta}\left(x,y,t\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где $\bar{u}$ – вектор упругого перемещения точек среды, φ – потенциалы электрических полей в средах.

При сделанных предположениях из соотношений линейной теории электроупругости и квазистатического электрического поля получаются следующие уравнения и граничные условия для рассматриваемой задачи [5]:

1. В области $y>0$:

$$
\begin{aligned}
&c_{44}\left(\sim\frac{\partial^2 u_{\sim}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_{\sim}}{\partial y^2}\right)+e_{14}\left(1+\quad\right)\frac{\partial^2 \ddot{\ }_{\sim}}{\partial x\partial y}=\circ\,\frac{\partial^2 u_{\sim}}{\partial t^2}\\
&e_{14}\left(1+\quad\right)\frac{\partial^2 u_{\sim}}{\partial x\partial y}-\pounds_{22}\left(\yen\,\frac{\partial^2 \ddot{\ }_{\sim}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \ddot{\ }_{\sim}}{\partial y^2}\right)=0
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

где

$$
\alpha=c_{44}^{\alpha}/c_{55}^{\alpha},\quad \beta=e_{14}^{\alpha}/e_{25}^{\alpha},\quad \gamma=\varepsilon_{11}^{\alpha}/\varepsilon_{22}^{\alpha}
$$

2. В области $y < 0$

$$c_{44}^{\beta}\left(\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial y^2}\right)=\rho^{\beta}\,\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2} \tag{1.3}$$

Граничные условия при $y = 0$:

$$u^{\sim} = u \ ; \quad ^{\ddot{}\,\sim} = 0; \quad \pm_{zy}^{\sim} = \pm_{zy} \tag{1.4}$$

Граничные условия при $y = -h$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{1.5}$$

Здесь приняты обозначения: $c_{44,}^{\sim}$ $c_{55}^{\sim}$, c_{44}– упругие постоянные, $e_{14}^{\sim}$, $e_{25}^{\sim}$– пьезоэлектрические модули, $\varepsilon_{11}^{\alpha}$, $\varepsilon_{22}^{\alpha}$– диэлектрические проницаемости, $\rho^{\alpha}_{,}$ ρ^{β}– плотности пьезокристаллов кубической и изотропного слоя, соответственно. Здесь используется международная система измерения СИ.

Сначала рассмотрим решения уравнений (1.2) и (1.3) электроупругости, представляющих собой плоские гармонические волны

$$u = Ue^{i(px+qy-\omega t)}, \ \ \varphi = \Phi e^{i(px+qy-\omega t)} \tag{1.6}$$

где U и Φ – амплитуды перемещения и потенциала удовлетворяющие условию затухания (1.7), p и q – продольное и поперечное волновые числа относительно оси Ox, ω – частота колебаний.

Условию затухания по глубине полупространства следующие

$$u_{\sim} \to 0, \quad ^{\ddot{}}_{\sim} \to 0 \quad \text{при } y \to \infty \tag{1.7}$$

Для кристалла ромбической симметрии, подставляя решение (1.6) в систему уравнений (1.2), удовлетворяя условиям затухания (1.7) по глубине полупространства, из условия разрешимости этой системы получаем дисперсионное уравнение для поперечного волнового числа q и соотношение между амплитудами смещения U_α и потенциала $\hat{O}_\alpha$.

$$(p^2 + q_\alpha{}^2)(p^2 + q_\alpha{}^2 - S_0^{-2}\omega^2) + 4\chi_\alpha^2 p^2 q_\alpha{}^2 = 0 \tag{1.8}$$

$$[(p^2 + q_\alpha^2) - \rho\ \omega^2]U_\alpha + 2e_{14}pq_\alpha\Phi_\alpha = 0 \tag{1.9}$$

или

$$2e_{14}pq_\alpha U_\alpha - \varepsilon_{11}^{\alpha}(p^2 + q_\alpha^2)\Phi_\alpha = 0 \tag{1.10}$$

где

$$S_\alpha^2 = \frac{c_{44}^{\alpha}}{\rho^{\alpha}}, \ \ \chi_\alpha = \frac{e_{14}^2}{c_{44}^{\alpha}\varepsilon_{11}^{\alpha}} \tag{1.11}$$

Здесь S_α – скорость объемной упругой волны в кубическом кристалле в направлении оси Oy, χ_α – коэффициент электромеханической связи ромбического кристалла.

Таким образом, уравнения пьезокристалла (1.2), имеющие решения вида (1.5) и удовлетворяющие уравнениям (1.7), представляют неоднородные плоские волны:

$$q_1 = \sqrt{1 - f/2 + 2\chi^{\alpha} + \frac{1}{2}\sqrt{f^2 + 8\chi^{\alpha}(2-f) + 16\chi^{\alpha}}}, \quad f = \frac{\omega^2}{p^2\ S_\alpha^2}$$
$$q_2 = \sqrt{1 - f/2 + 2\chi^{\alpha} - \frac{1}{2}\sqrt{f^2 + 8\chi^{\alpha}(2-f) + 16\chi^{\alpha}}} \tag{1.12}$$

Перейдем к уравнению (1.3), описывающему квазистатическое поле в изотропном проводящем слое.

Ища решение в виде (1.6), получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$(p^2 + q_\beta^2)\left(p^2 + q_\beta^2 - k_\beta^2\right) = 0 \tag{1.13}$$

откуда одна пара корней описывает электростатические колебания: $q = \pm i\left|p\right|$, следовательно, получаем решения в виде неоднородных плоских волн.

Решение задачи. Итак, в ромбическом пьезокристалле при $y > 0$ имеем следующее решение:

$$\begin{aligned} u^\alpha &= (U_{11}\, e^{-p\ q_1\ y} + U_{12}\, e^{-p\ q_2\ y})\, e^{i(px-\omega t)} \\ \varphi^\alpha &= (A\, U_{11}(\frac{1-f}{q_1} - q_1)e^{-p\ q_1\ y} + AU_{12}\,(\frac{1-f}{q_2} - q_2)e^{-p\ q_2\ y})\, e^{i(px-\omega t)} \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $A = c_{44}^\alpha / 2\ i\ e_{14}^\alpha$

В изотропном проводящем слое при $y < 0$ поверхностные электроупругие (неоднородные) волны будут иметь решение:

$$u \ = (U_{21}\, e^{i\ p\quad y} + U_{22}\, e^{-i\ p\quad y})\, e^{i(px-\mu t)} \tag{2.2}$$

где $\beta = \sqrt{V_\beta^2 / (S^\beta)^2 - 1}, \quad S^\beta = c_{44}^\beta / \rho$

Вследствие удовлетворения граничным условиям, все волны имеют одинаковую частоту ω и продольное волновое число p, при этом предполагается, что $\mu > 0, \quad p > 0, \ V = \mu / p$, где V – фазовая скорость волны Лява.

Компоненты смещения для обеих сред даются следующими выражениями [5]:

$$\sigma_{zy}^\alpha = c_{44}^\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial y} + e_{14}^\alpha \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x}; \ \ \sigma_{zy}^\beta = c_{44}^\beta \frac{\partial u^\beta}{\partial y} \tag{2.3}$$

Подставляя решения (2.1) и (2.2) в граничные условия (1.4), получим однородную систему алгебраических уравнений относительно искомых амплитуд, условие существования нетривиального решения которой дает характеристическое уравнение волны Лява:

$$Ae^{-ik\beta}(q_1 - q_2)(-c_{44}^\alpha(1 + e^{2i\ k\beta})(-1 + f)(q_1 + q_2) - i\,c_{44}^\beta(-1 + e^{2i\ k\beta})(-1 + f - q_1 q_2)\beta) = 0 \tag{2.4}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян А.С. Распространение сдвиговых поверхностных волн в пьезоэлектрической среде.– Канд. дисс., Ереван. 1985. 126с.
2. Кесенних Г.Г. Поверхностные волны Лява для двух изотропных слоев на изотропной подложке. // Акуст. Журнал. 1984. Т.30. Вып.1. С.74-78
3. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А. Поведение мод сдвиговых волн Лява в пьезоэлектрических подложках с диэлектрическим слоем.// В кн.: "Актуальные проблемы неоднородной механики", Материалы Всесоюз. науч. Семинара. Ереван. 1991. С.49-54
4. Даноян З.Н. Электроупругие поверхностные волн Лява в пьезоэлектриках. // В кн.: Проблемы механики тонких деформируемых тел. (Посвящ. 80-летию академика НАН Армении С.А.Амбарцумяна). Ереван: 2002. С. 167-177
5. Багдасарян Г.Е., Берберян А.Х., Даноян З.Н. Отражение электроупругой сдвиговой волны от границы раздела пьезоэлектрического кристалла класса 222 и вакуума //Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №3. С. 42-48.

Сведения об авторе

Берберян Армен Хачатурович
Младший научный сотрудник, Институт механики НАН РА
Адрес: ул.Ширака 7/1, кв.10
Тел.: (+37410) 46-20-96, E-mail: slavia555@yahoo.com

ПОДХОДЫ К ПОСТРОЕНИЮ КЛАССИЧЕСКИХ И НЕКЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СПЛОШНЫХ СРЕД: АКСИОМАТИКА И КОНСТРУКТИВНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Бровко Г.Л., Иванова О.А., Кречко Л.М., Финошкина А.С.

Рассматриваются подходы к построению моделей сплошных сред классического и неклассического типов.

Обсуждаются аксиоматические подходы в классической механике сплошной среды. Предложена новая обобщенная теория для описания механических свойств сопротивления тел деформированию: введена система понятий и аксиом, представлена общая приведенная форма системы определяющих соотношений, включающей уравнение связей, а также определяющие уравнения для поля напряжений и поля внутренних массовых сил. Обсуждается произвол этих полей, обусловленный наличием внутренних кинематических связей.

Специальное внимание уделяется конечной предыстории тел и свойствам (неоднородного) старения, изученным в работах Н.Х.Арутюняна. Предложены общие приведенные формы определяющих соотношений Ильюшина—Арутюняна и Нолла—Арутюняна для сред с произвольной (конечной или бесконечной) предысторией.

Обсуждается аксиоматический подход к построению неклассической механики сплошной среды Коссера, основанный на обобщении классических понятий тел, движений, взаимодействий и соответствующем обобщении формулировок основных законов.

Рассматривается подход, основанный на предложенном А.А.Ильюшиным методе механического (конструктивного) моделирования, позволяющем учитывать сложную внутреннюю структуру тел, формы движений и взаимодействий. Приводятся примеры построенных с использованием метода моделей сред, показывающие принципиальную реализуемость конструктивных материалов со свойствами типа Коссера, в том числе на микро- и наноуровне, и выявляющие новые формы интерактивных взаимодействий в гетерогенных средах.

1. Аксиомы классической механики и основные гипотезы механики сплошной среды

Предполагается, что введены первичные понятия механики: тело, масса, система сил, движение — ориентированные на использование при построении классической механики сплошной среды, а также производные от них понятия, включая количество и момент количества движения, мощность работы сил. Предполагается, что введено понятие системы отсчета и выделен класс родственных систем отсчета.

1.1. *Аксиомы классической механики*

1. *Закон сохранения массы*.
2. *Закон соотнесенности сил конфигурациям взаимодействующих тел*.
3. *Закон независимости мощности работы результирующих сил от системы отсчета*.

Из этих законов следует свойство действия и противодействия (третий закон Ньютона) как в отношении сил, так и в отношении моментов сил взаимодействия тел.

Для формулировки законов инерции вводятся понятия большой системы тел (движения и взаимодействия которых подлежат изучению), сил активного взаимодействия между телами большой системы и сил инерции (сил воздействия остальной части вселенной на тела большой системы), а также понятие инерциальной системы отсчета.

4. *Первый закон инерции*: для выделенной большой системы тел инерциальная система отсчета существует.
5. *Второй закон инерции*: во всякой инерциальной системе отсчета скорость изменения количества движения любого тела большой системы противоположна силе инерции, воздействующей на это тело.

Эти законы с необходимостью приводят к выполнению известных законов движения Эйлера (законов баланса количества и момента количества движения в инерциальной системе отсчета), принимаемых в традиционных построениях механики в качестве первичных [1-4].

1.2. *Основные гипотезы классической механики сплошной среды*

1. *Гипотеза сплошности* (диффеоморфность движений относительно внутренностей тел).
2. *Гипотеза неразрывности* (распределенность массы по объему актуальной конфигурации тела).

Система сил в классической механике сплошной среды рассматривается как сумма систем массовых и контактных (поверхностных) сил, для которых принимается следующая гипотеза.

3. *Гипотеза распределенности массовых сил* по массе и *распределенности контактных сил* по площади поверхности контакта актуальных конфигураций тел.

Эти гипотезы приводят закон сохранения массы к известному полевому уравнению неразрывности (в форме Эйлера и Лагранжа), а законы движения Эйлера к известным интегральным уравнениям динамического равновесия сил и моментов сил — законам движения Коши—Эйлера. Приведение последних к полевым уравнениям основывается на следующем важном постулате [5].

4. *Постулат Коши*: в любой фиксированный момент времени вектор удельной силы (вектор напряжения) на элементарной площадке контакта тел одинаков для всех поверхностей контакта, включающих эту площадку (а значит, является функцией лишь точки положения площадки и вектора нормали к ней).

Этот постулат приводит к построению тензора напряжений Коши в точке тела как линейного отображения векторов единичных нормалей (к площадкам в данной точке) в векторы напряжений (на этих площадках). Наличие тензора напряжений позволяет переписать интегральные уравнения движения Коши—Эйлера равносильно (в предположениях гладкости силовых характеристик) в форме полевых уравнений движения сплошной среды Коши

$$\operatorname{div}\mathbf{S}+\rho\mathbf{b}=\rho\mathbf{w}, \qquad \mathbf{S}=\mathbf{S}^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

первое из которых выражает закон баланса количества движения, а второе (при наличии первого) — закон баланса момента количества движения. Здесь $\mathbf{S}$ — тензор напряжений Коши, ρ — плотность массы, $\mathbf{w}$ — вектор ускорения точки тела, $\mathbf{b}$ — вектор массовой силы (плотности массовых сил относительно массы), выражающий активное (в рамках тел большой системы) внешнее воздействие $\mathbf{b}^{(e)}$ со стороны других тел большой системы и воздействие $\mathbf{b}^{(i)}$ со стороны остальных частей данного тела: $\mathbf{b}=\mathbf{b}^{(e)}+\mathbf{b}^{(i)}$.

Подчеркнем, что в то время как величины $\mathbf{b}^{(e)}$ и $\mathbf{b}^{(i)}$ зависят от выбора тела большой системы (содержащего данную точку), их сумма $\mathbf{b}$, равно как и величина тензора $\mathbf{S}$, от выбора тела не зависят: в каждый момент времени полевые функции $\mathbf{S}$ и $\mathbf{b}$ едины для точек соединенного тела большой системы (и всех ее отдельных тел).

В предлагаемом здесь построении поле внешних массовых сил $\mathbf{b}^{(e)}$ будем для рассматриваемого тела большой системы традиционно считать заданным, а поле внутренних массовых сил $\mathbf{b}^{(i)}$ отнесем к числу внутренних параметров тела, определяемых наряду с полем тензора напряжений $\mathbf{S}$ механическими свойствами сопротивления тела деформированию. Тем самым, динамический процесс в теле (в лагранжевом описании) определим как тройку полевых функций в теле $\left(\mathbf{S},\mathbf{b}^{(i)},\mathbf{f}\right)$, где функция $\mathbf{f}$ выражает лагранжев закон движения $\boldsymbol{x}=\mathbf{f}\left(\mathbf{x},t\right)$ ($\boldsymbol{x}$ и $\mathbf{x}$ — положения точки тела в актуальной и в отсчетной конфигурациях соответственно, t — время).

В упрощенных подходах, предпринимаемых как в традиционных [1-4], так и в нетрадиционных [5] построениях, поле внутренних массовых сил $\mathbf{b}^{(i)}$ предполагают известным, как правило, тождественно равным нулю: $\mathbf{b}^{(i)}\equiv 0$, — и в состав динамического процесса не включают.

2. Основы обобщенной теории определяющих соотношений

2.1. *Основные принципы*

Достаточной основой для построения теории механических свойств сопротивления тел деформированию — теории определяющих соотношений — в классической механике сплошных сред (простых тел) при $\mathbf{b}^{(i)}\equiv 0$ служит постулат макроскопической определимости А.А.Ильюшина [1], или, равносильно ему, принципы У.Нолла [5]: принцип детерминизма и причинности, принцип локального действия и принцип материальной независимости от системы отсчета, — несложно (при $\mathbf{b}^{(i)} \equiv 0$) модифицируемые на случаи наличия внутренних кинематических связей.

Для рассматриваемого здесь более общего случая наличия внутренних массовых сил ($\mathbf{b}^{(i)} \neq 0$) и кинематических связей примем следующие основные принципы теории определяющих соотношений.

1. *Принцип локальной отделимости.* Для любого тела его определяющее соотношение сопротивления деформированию накладывает связи лишь на историю его собственного динамического процесса безотносительно к таковым в любых других отделенных от него телах или к внешним условиям процесса.
2. *Принцип структурно-энергетического детерминизма.* Для любого тела определяющее соотношение сопротивления деформированию эквивалентно системе соотношений, выполняющихся в любой момент времени t:

$$\varphi[\mathbf{f}(\mathbf{x}',\tau)]_{\mathbf{x}'\in\Omega_0,\,\tau\le t} = 0 \tag{2}$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{x},t) = \mathbf{F}([\mathbf{f}(\mathbf{x}',\tau)]_{\mathbf{x}'\in\Omega_0,\,\tau\le t};\mathbf{x},t) + \mathbf{S}^{ind}(\mathbf{x},t) \tag{3}$$

$$\mathbf{b}^{(i)}(\mathbf{x},t) = \mathbf{q}([\mathbf{f}(\mathbf{x}',\tau)]_{\mathbf{x}'\in\Omega_0,\,\tau\le t};\mathbf{x},t) + \mathbf{b}^{(i)ind}(\mathbf{x},t) \tag{4}$$

где φ, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{q}$ — определенные свойственные данному телу отображения, Ω_0 — область отсчетной конфигурации тела, а тензорное $\mathbf{S}^{ind}$ и векторное $\mathbf{b}^{(i)ind}$ поля удовлетворяют соотношению

$$\int_\Omega \mathbf{S}^{ind} : \mathbf{V}dV - \int_\Omega \rho\mathbf{b}^{i(ind)}\cdot\mathbf{v}dV = 0 \tag{5}$$

где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{V}$ — любые векторное поле скоростей и соответствующее ему тензорное поле скоростей деформаций, отвечающие решению уравнения (2) в момент t, Ω — область актуальной конфигурации тела.

Уравнения (2)-(4) определяют *физически допустимые* для тела (соответствующие механическим свойствам тела) динамические процессы $\left(\mathbf{S},\mathbf{b}^{(i)},\mathbf{f}\right)$, причем уравнение (2) выражает присущие телу внутренние кинематические связи, а $\mathbf{S}^{ind}$ и $\mathbf{b}^{(i)ind}$ суть неопределенные поля напряжений и внутренних массовых сил, наличие которых обусловлено кинематическими связями в теле.

3. *Принцип материальной независимости от системы отсчета.* Определяющие соотношения сопротивления деформированию всех тел не зависят от системы отсчета (т.е. определяют во всех системах отсчета одно и то же множество физически допустимых динамических процессов).

2.2. *Общая приведенная форма определяющих соотношений*

Сформулированные принципы в достаточно общих предположениях о внутренних массовых силах, кинематических связях и гладкости полей напряжений и скоростей деформаций позволяют представить систему определяющих соотношений (2)-(4) в следующей *общей приведенной форме*:

$$\varphi[\mathbf{C}^t(\mathbf{x}',s)]_{\mathbf{x}'\in\Omega_0,\,s\ge 0} = 0 \tag{6}$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{x},t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{G}([\mathbf{C}^t(\mathbf{x}',s)]_{\mathbf{x}'\in\delta\Omega_0,\,s\ge 0};\mathbf{x})\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x},t) + \mathbf{S}^{ind}(\mathbf{x},t) \tag{7}$$

$$\mathbf{b}^{(i)}(\mathbf{x},t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}_0,t)\cdot\mathbf{p}([\mathbf{C}^t(\mathbf{x}',s)]_{\mathbf{x}'\in\Omega_0,\,s\ge 0};\mathbf{x}) + \mathbf{b}^{(i)ind}(\mathbf{x},t) \tag{8}$$

где уравнение (6) выражает внутреннюю кинематическую связь тела, уравнения (7) и (8) определяют физически допустимые поля напряжений $\mathbf{S}$ и внутренних массовых сил $\mathbf{b}^{(i)}$. Здесь $\mathbf{C}^t$ — предыстория меры деформации Коши, $\mathbf{Q}$ — ортогональный тензор полярного разложения аффинора (градиента) деформации, $\delta\Omega_0$ — бесконечно малая окрестность точки $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_0$ — произвольная фиксированная точка тела, φ, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{p}$ — присущие данному телу отображения, не зависящие от системы отсчета, причем $\mathbf{G}$ локализовано в окрестности $\delta\Omega_0$, значения отображения $\mathbf{p}$ самоуравновешены по главному вектору и главному моменту в теле, а неопределенные поля $\mathbf{S}^{ind}$ и $\mathbf{b}^{(i)ind}$ удовлетворяют в каждый момент времени тождествам

$$\mathbf{S}^{ind} : \mathbf{V} \equiv 0, \qquad \int_{\Omega} \rho \mathbf{b}^{(i)ind} \cdot \mathbf{v} dV = 0 \tag{9}$$

с любым физически допустимыми (отвечающими уравнению (6)) полями скоростей $\mathbf{v}$ и скоростей деформаций $\mathbf{V}$.

В частном случае отсутствия кинематических связей уравнение (6) удовлетворяется тождественно на любых движениях, физически допустимые поля $\mathbf{v}$ и $\mathbf{V}$ произвольны в каждый момент времени, и потому в силу (9) поля $\mathbf{S}^{ind}$ и $\mathbf{b}^{(i)ind}$ принимают тождественно нулевые значения; тем самым, система определяющих соотношений (6)-(8) сводится лишь к системе уравнений (7), (8) с отброшенными членами $\mathbf{S}^{ind}$ и $\mathbf{b}^{(i)ind}$. Если к тому же внутренними массовыми силами можно пренебречь ($\mathbf{b}^{(i)} \equiv 0$), то остается лишь одно уравнение (8), принимающее для классических сред (простых тел) общую приведенную форму определяющего соотношения У.Нолла

$$\mathbf{S}(\mathbf{x},t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{G}_N([\mathbf{X}^t(\mathbf{x},s)]_{s\geq 0};\mathbf{x}) \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x},t) \tag{10}$$

или, равносильно, определяющего соотношения А.А.Ильюшина

$$\Sigma(\mathbf{x},t) = \mathbf{G}_I([\mathcal{E}^t(\mathbf{x},s)]_{s\geq 0};\mathbf{x}) \tag{11}$$

где $\mathbf{G}_N$ и $\mathbf{G}_I$ — присущие материалу в окрестности точки $\mathbf{x}$ не зависящие от системы отсчета отображения, Σ — тензор напряжений Ильюшина («энергетический»), $\mathbf{X}^t$ и $\mathcal{E}^t$ — предыстории правого положительно определенного тензора $\mathbf{x}$ полярного разложения аффинора деформации и тензора деформаций Грина $\mathcal{E}$.

2.3. *Произвол полей напряжений и внутренних массовых сил, обусловленный наличием внутренних кинематических связей*

Рассмотрим степень произвола полей $\mathbf{S}^{ind}$ и $\mathbf{b}^{(i)ind}$ в любом конкретном движении тела, допускаемую при выполнении всех соотношений, описывающих данное движение (соотношений соответствующей краевой задачи). Предполагая, что при заданных внешних нагрузках и граничных условиях (рассмотрим здесь лишь граничные условия в напряжениях) для данного тела существует движение, удовлетворяющее этой системе соотношений и сопровождаемое, однако, различными полями $\mathbf{S}^{ind}$ и $\mathbf{b}^{(i)ind}$, обозначим разности этих полей через $\Delta\mathbf{S}^{ind}$ и $\Delta\mathbf{b}^{(i)ind}$. Тогда для произвольного момента t рассматриваемого движения в качестве следствия указанной системы получаем уравнение и граничное условие ($\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности тела)

$$\mathrm{div}\Delta\mathbf{S}^{\mathrm{ind}} + \rho\Delta\mathbf{b}^{(i)ind} = 0, \qquad \Delta\mathbf{S}^{\mathrm{ind}} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (12)$$

а также вытекающие из (9) тождества

$$\Delta\mathbf{S}^{ind} : \mathbf{V} \equiv 0, \qquad \int_{\Omega} \rho\Delta\mathbf{b}^{(i)ind} \cdot \mathbf{v} dV = 0 \tag{13}$$

для любых физически допустимых в момент t полей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{V}$.

В тривиальном случае отсутствия кинематических связей поля $\mathbf{S}^{ind}$ и $\mathbf{b}^{(i)ind}$ с необходимостью нулевые, и их произвол отсутствует. В крайне противоположном случае абсолютной жесткости тела уравнения (13) удовлетворяются любым полем $\Delta\mathbf{S}^{ind}$ и любым сбалансированным в теле (по силам и моментам) полем $\Delta\mathbf{b}^{(i)ind}$, а соотношения (12) имеют нетривиальные решения относительно пары таких полей: однозначное относительно $\Delta\mathbf{b}^{(i)ind}$ при любом заданном $\Delta\mathbf{S}^{ind}$ (удовлетворяющем граничному условию $(12)_1$) и неоднозначное относительно $\Delta\mathbf{S}^{ind}$ при любом сбалансированном $\Delta\mathbf{b}^{(i)ind}$. В общем случае нетривиальных кинематических связей решение системы (12), (13) относительно пары полей $\Delta\mathbf{S}^{ind}$ и $\Delta\mathbf{b}^{(i)ind}$ нетривиально и неоднозначно.

В подавляющем большинстве практических задач поле внутренних массовых взаимодействий $\mathbf{b}^{(i)}$ согласно известным физическим представлениям считается вполне определенным полем, однозначно заданным конфигурацией тела и распределением в нем масс, электрических зарядов и других причин объемного силового взаимодействия, т.е. $\mathbf{b}^{(i)}$ однозначно и полностью определено первым слагаемым правой части (8), и $\mathbf{b}^{(i)ind} \equiv 0$. Тогда неопределенное поле напряжений $\mathbf{S}^{ind}$ традиционно считается единственной реакцией на наличие в теле кинематических связей и подлежит определению из полной системы соотношений краевой задачи (как это делается, например, в задачах для тел, обладающих свойством несжимаемости как кинематической связью).

2.4. *Конечная предыстория тел и свойства (неоднородного) старения*

Все наблюдаемые реальные тела, поддающиеся в принципе описанию в рамках механики сплошной среды, имеют конечную предысторию, зачастую лишь частично нам известную, так как физическое (экспериментальное) наблюдение осуществимо фактически лишь на конечных интервалах времени. В связи с этим весьма важными представляются вопросы описания свойств старения тел (и их частей). Эти вопросы получили глубокую теоретическую проработку и нашли воплощение в многочисленных конкретных исследованиях Н.Х.Арутюняна, его коллег, учеников и последователей.

В работе [6] в рамках классического рассмотрения проведен анализ вопроса «о принципиальной допустимости феноменологического рассмотрения стареющих сред» в свете принципа материальной независимости от системы отсчета [5], получен положительный ответ и, более того, с использованием этого принципа и введенной авторами концепции локального времени построена общая приведенная форма определяющего соотношения неоднородно стареющей среды.

Эта форма позволяет модифицировать определяющие соотношения сред, с одной стороны, конкретизируя их введением некоторого специального *физического* момента времени $t_{(in)}(\mathbf{x})$ свойственного материальной частице (в окрестности точки $\mathbf{x}$ отсчетной конфигурации), с другой стороны, обобщая их на случай любой (конечной или бесконечной) предыстории частицы. Так, определяющее соотношение А.А.Ильюшина (11) в свете построений работы [6] принимает вид

$$\Sigma(\mathbf{x},t) = \mathbf{G}_{IA}([\boldsymbol{\mathcal{E}}^t(\mathbf{x},s)]_{s\in D^t_{\mathbf{x}}}\ ;\mathbf{x}) \tag{14}$$

где $D^t_{\mathbf{x}}$ — физический интервал времени, являющийся областью определения предыстории $\boldsymbol{\mathcal{E}}^t(\mathbf{x},s)$ как функции от s в материальной частице (в окрестности точки $\mathbf{x}$). Для частиц с конечной предысторией, начинающейся с момента $t_{(in)}(\mathbf{x})$, имеем $D^t_{\mathbf{x}} = [0, t - t_{(in)}(\mathbf{x})]$ (величина $t - t_{(in)}(\mathbf{x})$ названа в [6] локальным временем частицы). Для частиц с бесконечной предысторией $D^t_{\mathbf{x}} = [0, +\infty)$, и определяющее соотношение Ильюшина—Арутюняна (14) в точности совпадает с (11). Аналогично из (10) получается определяющее соотношение Нолла—Арутюняна

$$\mathbf{S}(\mathbf{x},t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{G}_{NA}([\mathbf{X}^t(\mathbf{x},s)]_{s\in D^t_{\mathbf{x}}}\ ;\mathbf{x})\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x},t) \tag{15}$$

с тою же областью $D^t_{\mathbf{x}}$.

Заметим, что при замене системы отсчета предыстории $\boldsymbol{\mathcal{E}}^t(\mathbf{x},s)$, $\mathbf{X}^t(\mathbf{x},s)$ как функции аргумента s и область их определения $D^t_{\mathbf{x}}$ не изменяются, и соотношения (14), (15) удовлетворяют принципу материальной независимости от системы отсчета.

Таким образом, определяющее соотношение Н.Х.Арутюняна, выведенное в [6], является общей приведенной формой определяющего соотношения классической сплошной среды с *конечной или бесконечной предысторией.*

Применяя концепцию локального времени [6] к предложенной здесь выше теории определяющих соотношений сред, учитывающей наличие внутренних кинематических связей и нетривиальных полей внутренних массовых сил, можно прийти к обобщению последней на среды с конечной или бесконечной предысторией.

3. Аксиоматический подход к построению неклассической механики сплошной среды Коссера

Неклассические модели сред характеризуются дополнительными к классическим степенями свободы движений, видами взаимодействий и, как следствие, более сложными моделями тел и их атрибутов. Построение таких моделей требует более детального подхода к введению основных понятий и формулировке общих законов.

В отношении механики сред Коссера [7] отметим лишь основные моменты такого построения. Понятие тела включает тело-носитель, способное при движении подобно телу классической механики сплошной среды гомеоморфно занимать область трехмерного евклидова пространства, и континуум включений, распределенных по телу-носителю, перемещающихся вместе с точками носителя и способных испытывать вращения (стесненные или не стесненные телом-носителем) вокруг своих точек закрепления в теле-носителе. Таким образом, при движении область конфигураций точки носителя — трехмерное аффинное евклидово пространство, а область конфигураций включения — многообразие Штифеля [8] присоединенного трехмерного пространства (множество ориентированных трехгранников). Движение тела рассматривается как смена актуальных конфигураций обеих компонент (носителя и включений), диффеоморфная по отношению к внутренностям тел-носителей. Тело наделяется массой, распределенной по объему актуальной конфигурации, а континуум включений — тензором инерции, распределенным по массе. Взаимодействия тел характеризуются массовыми и контактными силами воздействия на тело-носитель, а также массовыми и контактными моментами воздействия на включения. Применение постулата Коши к контактным силам и моментам приводит к появлению классического тензора напряжений Коши, а также тензора моментных напряжений.

Важно отметить, что в силу комплексного характера первичных понятий взаимодействий (силы и моменты) формулировка законов инерции в механике сред Коссера приобретает более сложный вид, чем в классической механике сплошных сред, и приводит к интегральным условиям динамического равновесия сил и моментов, полевые аналоги которых имеют вид классического первого уравнения движения Коши и уравнения, включающего оба тензора напряжений; при этом оба тензора, вообще говоря, несимметричны [7,9].

Определяющие соотношения тел Коссера выражают зависимость тензоров напряжений (и полей внутренних массовых сил и моментов) от движения, а также присущие телу внутренние кинематические связи, обусловливающие появление неопределенных слагаемых в выражениях тензоров напряжений (и внутренних массовых сил и моментов). К числу специфических для сред Коссера кинематических связей относится стесненность вращений включений относительно частиц тела-носителя (модель псевдоконтинуума Коссера [9]).

Определяющие соотношения сред Коссера могут быть с использованием подхода Н.Х.Арутюняна [6] обобщены на случай произвольной (конечной или бесконечной) предыстории.

4. Метод механического (конструктивного) моделирования

Этот метод, предложенный А.А.Ильюшиным [10] для описания сред сложной структуры, состоит в детальном изучении элемента (представительного объема) тела, построении упрощенной (в частности, дискретной) модели элемента и распространении ее уравнений в континуальной форме (например, методом осреднения) на область тела в целом. Метод, рассматриваемый как альтернатива «дедуктивному» аксиоматическому подходу, как «физическое» («индуктивное») обоснование модели конкретной изучаемой среды, способен приводить к построению довольно общих моделей, в том числе отвечающих известной аксиоматике, давая тем самым возможность уяснить суть и рамки применимости этих аксиом.

С использованием такого подхода были построены достаточно общие модели перфорированных плит, решетчатых структур, каркасов с вращающимися элементами, оснащенных стержней, гетерогенных, пористых жидкогазонаполненных сред, в осредненном смысле отвечающие известным моделям классической и неклассической механики сплошной среды [10-14].

Так, осредненные свойства дискретных моделей, рассмотренных в [11,13, 14], воспроизводят в достаточно общем виде свойства сред Коссера и, благодаря наглядной структуре исходных дискретных моделей, ясно демонстрируют механический смысл кинематических и силовых (моментных) параметров общей континуальной коссератовской модели, показывают возможности применения частных теорий (несвязанной, безмоментной сред, псевдоконтинуума Коссера).

Применение метода механического моделирования не только показывает принципиальную возможность существования реальных конструктивных сред со свойствами типа Коссера, но и указывает возможные способы их натурального (лабораторного, промышленного) изготовления, в том числе на микро- и наноуровне [15, 16].

На примере построенных гетерогенных моделей сред [12, 14] показано, что применение общих законов инвариантности позволяет получить приведенные формы определяющих соотношений как для полей напряжений, так и для интерактивных силовых и моментных взаимодействий фаз, выявить новые формы таких взаимодействий. В частности, в наполненных пористых средах среди таких взаимодействий обнаружены силы фронтального сопротивления, подъемные силе, опрокидывающие и закручивающие (винтовые) моменты.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №06-01-00565а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973.
3. Жермен П. Механика сплошных сред. М.: Высшая школа, 1983.
4. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. М.: Физматлит, 2006.
5. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
6. Арутюнян Н.Х., Метлов В.В. О принципе инвариантности в теории неоднородно стареющих тел // Прикладная математика и механика. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 1034-1036.
7. Cosserat E, Cosserat F. Theory des corps deformables. Paris: Hermann, 1909.
8. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
9. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
10. Бровко Г.Л., Ильюшин А.А. Об одной плоской модели перфорированных плит // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1993. № 2. С. 83-91.
11. Бровко Г.Л. Моделирование неоднородных сред сложной структуры и континуум Коссера // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1996. № 5. С. 55-63.
12. Бровко Г.Л. Модель неоднородной жидкогазонаполненной среды с деформируемым твердым каркасом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1998. № 5. С. 45-52.
13. Бровко Г.Л. Об одной конструкционной модели среды Коссера // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 1. С. 75-91.
14. Brovko G.L., Grishayev A.G., Ivanova O.A. Continuum models of discrete heterogeneous structures and saturated porous media: constitutive relations and invariance of internal interactions // Journal of Physics: Conference Series 62 (2007) 1–22
15. Бровко Г.Л., Кречко Л.М. Об особенностях углеродных наноструктур. М.: МГУ, Ломоносовские чтения, 2007.

16. Бровко Г.Л., Финошкина А.С. Некоторые механические аспекты в исследованиях микро- и наносистем. М.: МГУ, Ломоносовские чтения, 2007.

<u>Сведения об авторах</u>

Бровко Георгий Леонидович
Д. ф.-м. н., профессор, мех.-мат.факультет, кафедра теории упругости
Адрес: РОССИЯ, 119992, Москва, Ленинские горы, МГУ
Тел: +7 (495) 939-55-39; E-mail: glb@dataforce.net

Иванова Ольга Алексеевна
Аспирант; E-mail: o.ivanova@tochka.ru

Кречко Людмила Михайловна
Кандидат физико-математических наук; E-mail: krechkolm@mail.ru

Финошкина Александра Сергеевна
Кандидат физико-математических наук

О ВЛИЯНИИ ЕСТЕСТВЕННОГО СТАРЕНИЯ НА МОДУЛЬ УПРУГОСТИ ГЕТИНАКСА С УЧЕТОМ ДАВЛЕНИЯ ТЕРМОПРЕССОВАНИЯ

Валесян С.Ш.

Приведены результаты по исследованию изменения модуля упругости и прочности гетинакса в зависимости от старения в лабораторных условиях. Получено, что естественное старение приводит к существенному уменьшению значения модуля упругости гетинакса. При этом, чем больше величина давления термопрессования при изготовлении, тем меньше изменение значения модуля упругости.

Работы, посвященные исслледованию влияния естественного старения (<возраста>) на способность к деформированию армированных полимерных композитов, в отличие от прочности, единичны [1-3]. Результаты таких исследований необходимы для правильной оценки напряженно-деформированного состояния эксплуатирующихся конструкционных элементов, изготовленных из указанных материалов.

В представленной работе приводятся результаты экспериментального исследования изменения модуля упругости гетинакса в зависимости от естественного старения с учетом давления термопрессования.

В качестве экспериментальных образцов служили двухсторонние лопатки, размеры которых соответствуют требованиям ГОСТ 11262-80 (рис.1).

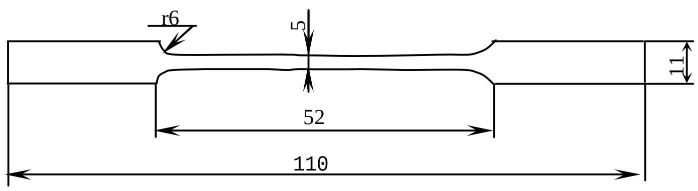


Рис.1. Образец в виде двухсторонней лопатки.

Образцы были вырезаны из листового гетинакса, полученного по технологии регулируемого термопрессования [4,5] при трех различных значениях давления термопрессования (1,9; 2,4 и 5,1 МПа соответственно). Указанные листы были изготовлены на основе препрега, полученного из пропитанной раствором фенол-формальдегидной смолы сульфат-целлюлозной бумаги и высушенной при температуре 100-140 ^{0}С согласно ГОСТ 2550-82. Во избежание возникновения температурных напряжений листовые гетинаксы после полимеризации остывали в выключенной печи, а затем хранились в лабораторном помещении при комнатной температуре 20-25 ^{0}С.

Испытания образцов, осуществленные согласно ГОСТу 9550-81, были проведены через 1 год и 4 года после их изготовления. В каждом случае были испытаны по 3 образца-близнеца. При этом максимальное отклонение измеренных механических характеристик по отношению к среднему их значению не превышало 11%.

Результаты исследований приведены на рис.2. Часть результатов, касающихся прочности, опубликованы в работе [6].

Из данных на рис.2 следует, что закономерность изменения модуля упругости гетинакса в зависимости от величины давления термопрессования при его изготовлении для рассматриваемых возрастов одна и та же. А именно, с увеличением давления термопрессования наблюдается начальное увеличение и дальнейшее уменьшение модуля упругости гетинакса. Так, в возрасте 1 года увеличение уровня давления термопрессования от 1,9 до 2,4 МПа приводит к росту модуля упругости на 26%. При дальнейшем увеличении значения давления прессования до 5,1 МПа наблюдается спад величины модуля упругости гетинакса приблизительно на 20%. Однако, значение модуля упругости гетинакса, полученного при давлении термопрессования 5,1 МПа все же остается больше величины модуля упругости гетинакса, полученного при давлении термопрессования 1,9 МПа.

Из сравнения данных, приведенных на рис. 2, можно заключить, что изменение значения модуля упругости гетинакса в возрасте 4 лет менее чувствительно к изменению давления термопрессования.

Согласно кривым рис.2 старение гетинакса от 1года до 4 лет приводит к существенному снижению значения модуля упругости, которое зависит от величины давления термопрессования. Значения вышеуказанного снижения модуля упругости при давлениях термопрессования 1,9; 2,4 и 5,1 МПа составляют приблизительно 21%; 26% и 12%, соответственно.

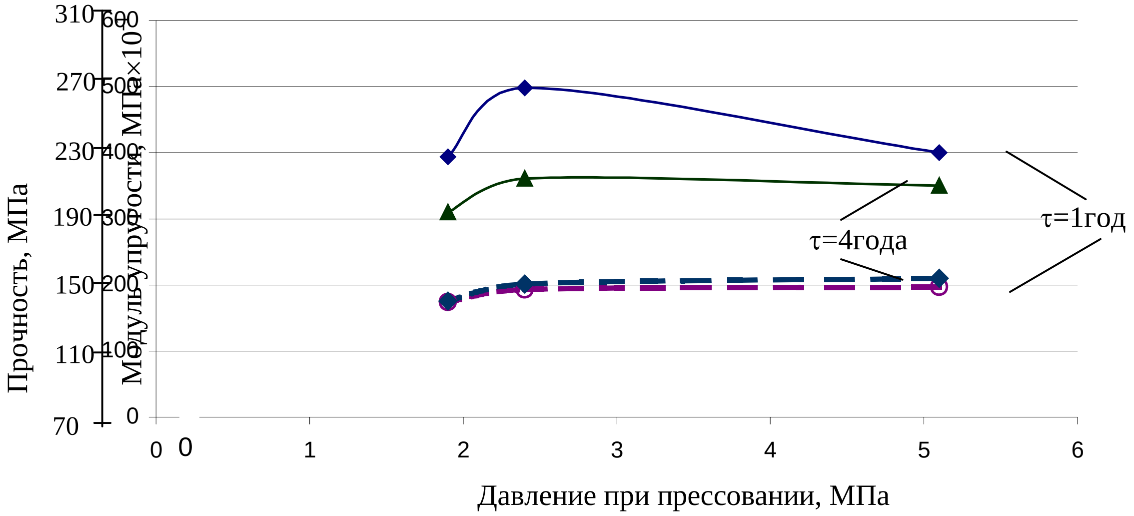


Рис.2. Кривые изменения модуля упругости (сплошные линии) и прочности (пунктирные линии) гетинакса в возрасте 1 и 4 года в зависимости от давления прессования.

Результаты исследования влияния старения при температуре 18-20 ^{0}C на упругие характеристики стеклопластиков КАСТ-В, СВАМ и стеклотекстолита, изготовленных на основе эпоксидной смолы, приводятся в работе [2]. Согласно данным этой работы у стеклопластика КАСТ-В в результате хранения в течение 10 лет в указанных выше условиях значение модуля упругости для угла армирования $\varphi=0^0$ осталось практически без изменения. Изменения же упругих свойств стеклопластика СВАМ и стеклотекстолита вследствие 6-летнего старения оказались несущественными.

Вышесказанное указывает на то, что результаты наших исследований и представленных в работе [2] противоречат друг другу. Это явление, по всей вероятности, можно объяснить видом связующих, использованных для изготовления гетинакса армированных полимерных композитов, упругие свойства которых были исследованы в вышеуказанной работе [2].

Таким образом, влияние старения на модуль упругости гетинакса, полученного технологией регулиуемого термопрессования, весьма чувствительно к возрасту материала. Увеличение возраста от 1 года до 4 лет приводит к уменьшению модуля упругости и полученная разница оказывается тем меньше, чем больше давление термопрессования при изготовлении гетинакса.

Автор выражает благодарность и признательность за содействие в работе начальнику Лаборатории Экспериментальных Исследований, доктору технических наук Карапетяну Корюну Ашотовичу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мощанский Н.А. Плотность и стойкость бетонов. М.:Госстройиздат, 1951. 175с.
2. Огибалов П.М., Тюнеев И.М. Влияние длительного хранения на механические свойства армированных пластиков. //Механика полимеров. 1969. №3. С.556-558.
3. Почтовик Г.Н., Буденьков Г.А., Школьник И.Э. Исследование анизотропии и напряженного состояния бетона с помощью поперечных ультразвуковых колебаний. // Сб.тр. Моск. инж-строит. ин-та. 1969. №64. С.9-24.
4. Симонян А.М., Валесян С.Ш. Конструкции оправок для регулируемого самопрессования композитов в процессе полимеризации //Изв. НАН Армении.Сер. техн.наук. 1999. №1. С.14-19.
5. Симонян А.М., Валесян С.Ш. Эффективная технология изготовления элементов конструкций из полимерного композиционного материала. // Сб. научн. трудов конференции, посвященной 90-летию со дня рождения профессоров Т.Т.Хачатряна и О.М.Сапонджяна. 1999. С.197-201.
6. Валесян С.Ш. Исследование влияния старения на прочностные и деформационные свойства гетинакса. // Изв. НАН Армении. Механика. 2006. №1. С.72-76.

Сведения об авторе:

Валесян Сона Шантовна
Кандитат технических наук, научный сотрудник,
Институт механики НАН РА
E-mail: svalesyan@mechins.sci.am

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАГНИТОУПРУГИХ И ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Варданян А.В., Сафарян Ю.С., Кевнаксзян Л.С.

Задача колебаний электропроводящих пластин и оболочек в осредненном подходе рассмотрена в [1-3]. В [4-6] рассмотрен пространственный подход получения дисперсионных соотношений для магнитоупругих. В настоящей работе рассматривается применение точного пространственного подхода к выводу дисперсионных соотношений для определения частот свободных колебаний тонких магнитоупругих и пьезоэлектрических пластин и оболочек. Вначале рассмотрена магнитоупругая пластина в поперечном магнитном поле. В силу того, что волновая задача для пластин является изотропной, достаточно рассмотреть плоскую задачу.

Пусть ось x направлена вдоль средней линии пластины, вдоль которой распространяется волна, ось z направлена по нормали к ней, невозмущенное поле H_0 направлено по оси z. u_x, u_z – компоненты перемещения, $\bar{H} = \bar{H}_0 + \bar{h}$ есть вектор магнитного поля, причем для индуцированного поля считается $h_x = H_0 H'_x,\ h_z = H_0 H'_z$. Для квазимонохроматической волны можно написать

$$u_{x,z} = \frac{1}{2} U_{x,z}(z) e^{i\tau} + k.c.,\ H'_{x,z} = \frac{1}{2} H_{x,z}(z) e^{i\tau} + k.c.,\ \tau = kx - \omega t \tag{1}$$

В пространственном подходе [4-6] решение уравнений движения магнитоупругой среды и уравнений индукции можно искать в виде

$$U_z = A_j \operatorname{ch}\nu_j z,\ U_x = B_j \operatorname{sh}\nu_j z,\ \ H_x = C_j \operatorname{ch}\nu_j z,\ \ H_z = D_j \operatorname{sh}\nu_j z \tag{2}$$

где по j проводится суммирование от 1 до 3.

Подставляя (1), (2) в указанные уравнения, можно получить связь между всеми константами через $B_{1,2,3}$ [5-8] и уравнение для ν_j в функции ω, k

$$\frac{b^2}{a^2}\nu_j^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} + \zeta^2 \frac{\nu_j^2 k^2}{\nu_j^2 - \frac{b^2}{a^2}k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}} = -\frac{a_1^2}{a^2}\frac{\nu_j^2 - k^2}{1 + i\frac{k^2 - \nu_j^2}{\omega}\nu_m} \tag{3}$$

a, b – скорости упругих волн, $\nu_m = \dfrac{c^2}{4\pi\sigma}$, σ – электропроводность, c – скорость света. Уравнение (3) является кубическим для ν_j^2, решение которого достаточно громоздкое. Поэтому принимается $\dfrac{a_1^2}{b^2} << 1$ и разлагается решение по степеням $\dfrac{a_1^2}{b^2}$. Тогда получится [8]

$$\begin{gathered}\nu_1^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{a^2} + \frac{a_1^2 k^2}{a^2} - \frac{a_1^4 k^4}{a^2\zeta\omega^2},\ \nu_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{b^2} + \frac{a_1^2 k^2}{b^2} + \frac{a_1^2\omega^2}{b^2} + \frac{a_1^4 k^4}{a^2\zeta\omega^2}\\ 1 - \frac{k^2 - \nu_3^2}{\vartheta} = \frac{a_1^2}{b^2}\frac{\zeta k^2 - \vartheta}{\vartheta},\ \vartheta = \frac{i\omega}{\nu_m}\end{gathered} \tag{4}$$

причем для конечного σ используется (4) только в порядке $\dfrac{a_1^2}{b^2}$. Для того, чтобы вывести дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$ для изгибных волн в пространственной задаче, нужно к (2) добавить граничные условия отсутствия напряжений на поверхности пластины $z = \pm\dfrac{h}{2}$ с диэлектриком вне ее

$$\sigma_x = \sigma_{xz} = 0 \tag{5}$$

и условия непрерывности $\bar{h} = \bar{h}^{(e)}$. Вне пластины в диэлектрике (воздухе) индуцированное магнитное поле записывается в виде

$$h_x^{(e)} = \frac{1}{2}\left(C_1^1 e^{i\vartheta_1} + k.c\right),\ h_z^{(e)} = \frac{1}{2}\left(C_2^1 e^{i\vartheta_1} + k.c\right), \vartheta_1 = i\tau \mp kz,\ h_x^{(e)} = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ h_z^{(e)} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{6}$$

и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$, причем (6) удовлетворяет этому уравнению. Тогда получим

$$\begin{gathered} C_j \operatorname{ch}\nu_j \frac{h}{2} = -kC_j\nu_j^{-1}\operatorname{sh}\nu_j \frac{h}{2},\ B_j\nu_j\operatorname{ch}\nu_j \frac{h}{2} + ikA_j\operatorname{ch}\nu_j \frac{h}{2} = 0, \\ A_j\nu_j\operatorname{sh}\nu_j \frac{h}{2} + \frac{a^2 - 2b^2}{a^2} ikB_j\operatorname{sh}\nu_j \frac{h}{2} = 0 \end{gathered} \tag{7}$$

где снова проведено суммирование по j=1,2,3 и куда следует подставить указанные [5-8] выражения C_j, A_j через B_j.

Детерминантное уравнение системы (7) для $B_{1,2,3}$ дает

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1+\frac{k}{\nu_1}\operatorname{th}\nu_1\frac{h}{2}}{X_1} & \dfrac{1+\frac{k}{\nu_2}\operatorname{th}\nu_2\frac{h}{2}}{X_2} & \dfrac{1+\frac{k}{\nu_3}\operatorname{th}\nu_3\frac{h}{2}}{X_3} \\ 1+\dfrac{\zeta}{\Delta_1}k^2 & 1+\dfrac{\zeta}{\Delta_2}k^2 & 1+\dfrac{\zeta}{\Delta_3}k^2 \\ \dfrac{\operatorname{th}\nu_1\frac{h}{2}}{\nu_1}\Gamma_1 & \dfrac{\operatorname{th}\nu_2\frac{h}{2}}{\nu_2}\Gamma_2 & \dfrac{\operatorname{th}\nu_3\frac{h}{2}}{\nu_3}\Gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

где $\Delta_j = \nu_j^2 - \frac{b^2}{a^2}k^2 + \frac{\omega^2}{a^2},\ \Gamma_j = \frac{a^2 - 2b^2}{a^2} - \frac{\zeta\nu_j^2}{\Delta_j}$.

Для получения аналитических формул $\omega = \omega(k)$ считаем $\frac{a_1}{b} << 1$ и проводим разложение (8) по параметрам $kh << 1,\ \frac{a_1}{b}$. Тогда с учетом (4) из (8) в случае $\sigma = \infty,\ \nu_m = 0$ с точностью до $\frac{a_1^4}{a^4}$ получится после громоздких выкладок

$$\omega^2 = \omega_{00}^2 - 2a_1^2k^2\frac{b^2}{a^2\zeta} + \frac{a_1^4k^4}{\zeta\omega_{00}^2}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) \tag{9}$$

где $\omega_{00}^2 = \frac{1}{3}\zeta h^2k^4b^2$. В осредненном подходе по гипотезе Кирхгофа получится $\omega^2 = \omega_{00}^2 + a_1^2k^2$, т.е. имеет место не только количественное, но и качественное несоответствие с решением (9), полученным по точному подходу. Следует отметить, что хотя с увеличением поля H_0, т.е. $\frac{a_1}{a}$, в отличие от значений, даваемых гипотезой, согласно точному подходу (9) вначале ω уменьшается, тем не менее из (9) можно получить, что всегда $\omega^2 > 0$. Для произвольных σ

или ϑ, из (4) и (8) получится в порядке $\frac{a_1^2}{a^2}$ после еще более сложных вычислений

$$\omega^2 = \omega_{00}^2 - \frac{a_1^2 k^2}{\zeta}\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right) + \frac{a_1^2 k^2}{\vartheta^2}\frac{\left(2\zeta k^2 - \vartheta\right)^2}{1+\frac{k}{\nu_3} th\nu_3 \frac{h}{2}}\left(1 - \frac{2th\nu_3 \frac{h}{2}}{h\nu_3}\right) \tag{10}$$

Для безразмерных параметров $\omega' = \frac{\omega}{ak}$, $\nu_j' = \frac{\nu_j}{k}$, $\vartheta' = \frac{\vartheta}{k^2}$, $\frac{a_1}{a} = \alpha$ были проведены расчеты, результаты которых для $10^3\omega'(k)$ отражены в табл. 1

Таблица 1

α \ k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	2,72	5,44	8,16	10,9	13,6
0,001	2,34	5,13	5,63	6,87	7,42
0,01	0,012	0,019	0,02	0,03	0,04
0,1	0,019	0,05	0,067	0,089	0,098

причем выбраны $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}$, $h = 0{,}1 см$, $\nu_m = 1000 см^2/сек$, $b = 4*10^4 1/сек$ размерность k $1/см$. Приведем теперь расчеты $\omega'(k)$ для произвольных H_0 по точным формулам (3), (8) в табл.2

Таблица 2

α \ k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	2,72	5,44	8,16	10,9	13,6
0,001	2,43	5,39	8,05	9,99	11,6
0,01	0,374	0,699	0,912	1,08	1,25
0,1	023	0,301	0,851	0,97	0,996

Как видно из табл. 1 и 2, по крайней мере, для полей до $\frac{a_1}{a} < 0{,}001$ имеется соответствие расчетов по точной пространственной теории [4-6], даваемой уравнениями (3), (8) для любых $\frac{a_1}{a}$, и асимтотической формуле (10). В то же время по гипотезе Кирхгофа получается уравнение [6]

$$\omega^2 = \omega_{00}^2 - \frac{2a_1^2 k^2}{h}\frac{\omega^2}{\nu_m^2 \lambda_1^5}\frac{\lambda_1 \frac{h}{2}\operatorname{ch}\lambda_1 \frac{h}{2} - \operatorname{sh}\lambda_1 \frac{h}{2}}{\operatorname{ch}\lambda_1 \frac{h}{2} + \frac{k}{\lambda_1}\operatorname{sh}\lambda_1 \frac{h}{2}}, \quad \lambda_1 = \sqrt{k^2 - \frac{i\omega}{\nu_m}} \tag{11}$$

после решения которого, для безразмерных переменных составлена табл. 3

Таблица 3

α \ k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	2,72166	5,4433	8,165	10,887	13,6083
0,001	2,7214	5,4431	8,164	10,886	13,6081
0,01	2,7212	5,4426	8,163	10,885	13,604
0,1	2,666	5,333	8,001	10,668	13,335

Здесь оставлено большее число знаков после запятой, поскольку изменение $10^3\omega'(k)$ в зависимости от $\alpha=\frac{a_1}{a}$ весьма мало, в то время как, согласно точному пространственному подходу табл. 1 и 2, уменьшение $10^3\omega'(k)$ в зависимости от α весьма большое. Отсюда следует, что для всех σ в поперечном магнитном поле точный пространственный подход дает частоты изгибных колебаний магнитоупругих пластин в несколько раз отличающихся от значений по гипотезе Кирхгофа. Те же аналитические и численные рассмотрения были проведены и для продольного магнитного поля [5], и кроме случая $\sigma=\infty$ решение по точному подходу и гипотезе сильно различались. Для магнитоупругих цилиндрических оболочек в осевом поле был применен указанный пространственный точный подход, причем в цилиндрических координатах r,z,t по r были уже не гиперболические функции (2), а функции Бесселя мнимого аргумента и для множителей ν_j снова получались соотношения (3), (4). Граничные условия на внешней и внутренней поверхностях оболочки $r=R\pm\frac{h}{2}$ снова привели к дисперсионному уравнению уже в виде детерминанта шестой степени [7], численные результаты расчетов для радиусов оболочки $R=10^8$см, $R=10^3$см показали, что в первом случае имеется совпадение с соответствующими расчетами детерминантного уравнения третьего порядка для магнитоупругой пластины в продольном поле. Во всех случаях с ростом $\frac{a_1}{a}$, ω сначала уменьшается, а затем возрастает. Качественно имеется тот же характер монотонности кривой $\omega'(k)$ от $\frac{a_1}{a}$ расчетов частоты из дисперсионного уравнения, полученного по гипотезе Кирхгофа, однако количественное различие точного подхода и гипотезы весьма значительны. В частности, отношение частот по этим подходам примерно равно 3, в точном подходе частота не достигает нулевого значения, а в решении по гипотезе равна нулю в целом отрезке $\frac{a_1}{a}$. Те же исследования, аналитические и численные, проведены для пьезоэелктрических пластин, для которых дисперсионное уравнение по точному подходу ранее получено [8], где даны графики частот, однако сравнение с гипотезой Кирхгофа не проведено для частотных кривых, для малых kh, и, мало того, далее утверждается, что расчеты перемещений при решении задачи вынужденных колебаний в дальней зоне дают согласие с теорией Кирхгофа-Лява. Наши расчеты, выполненные по точному подходу, а далее по полученным нами формулам, по гипотезе Кирхгофа, дают снова полное несоответствие значений частот по точной теории и по гипотезе. Кроме того, нами выведено дисперсионное уравнение пьезоэлектрической оболочки в виде детерминанта шестого порядка, и численные расчеты частот дали значения, сильно отличающиеся от расчетов по гипотезе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е. Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М.: Физматлит. 1996. 286с.
2. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Колебания и устойчивость токонесущих пластин. Ереван: Ереван: Изд. НАН Армении. 1992. 124с.
3. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А.Модуляция термомагнитоупругих волн в нелинейной пластине //Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т.52. №1.С.25-30.
4. Багдоев А.Г., Саакян С.Г. Устойчивость нелинейных волн модуляции в магнитном поле для пространственной и осредненной задачи// Изв. РАН. МТТ. 2001. №5. С. 35-42.
5. Багдоев А.Г., Варданян А.В. Устойчивость нелинейных изгибных волн модуляции в

магнитоупругих пластибах в пространственном подходе. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №4. С. 22-32.
6. Сафарян Ю.С. Исследование колебаний магнитоупругих пластин в пространственном и осредненном подходе // Информационные технологии и управление. 2001. №2. С.17-49.
7. Bagdoev A.G., Vardanyan A.V., Vardanyan S.V. The Definition of linear frequencies of bending vibrations of magnetoelastic cylindrical shells by exact space treatment// Multidiscipline Modeling in Mat. and Str., Vol. 3, №. 1, pp. 107-120 (2007).
8. Бардзокас Д.И., Фильштинский М.Л. Электроупругость кусочно-однородных тел. Университетская книга. Сумы: 2000. 309 с.
9. Bagdoev A.G., Vardanyan A.V., Vardanyan S.V. On determination of linear frequencies of bending vibrations of piezoelectric shells and plates by exact and averaged treatment// Vestnik Samara State University. Estestvennonauchnaya seria. №2 (52). PP.80-99. 2007.

Сведения об авторах

Юрий Сергеевич Сафарян
Доктор физ.-мат. наук, ректор Горисского гос. университета,
E mail: bagdoev@mechins.sci.am
Адрес: Армения, 3204, Сюникский марз, г. Горис, ул. Авангарди 4; Тел: (374-284)22767

Варданян Анна Ваниковна
Аспирант; Институт механики НАН РА
E-mail: vardanyan_a@yahoo.com

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ОТРЫВЕ

Варданян С.В.

Исследуется предельное состояние конечного тела при отрыве. Определены соответствующие поля напряжений и скоростей деформаций.

Рассмотрим связь между главными компонентами напряжений σ_i и компонент напряжений σ_{ij} в сферической системе координат (r, ϑ, φ) [1]

$$\begin{aligned}
&\sigma_r = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2, \quad \tau_{r\vartheta} = \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2 \\
&\sigma_\vartheta = \sigma_1 l_2^2 + \sigma_2 m_2^2 + \sigma_3 n_2^2, \quad \tau_{r\varphi} = \sigma_1 l_1 l_3 + \sigma_2 m_1 m_3 + \sigma_3 n_1 n_3 \\
&\sigma_\varphi = \sigma_1 l_3^2 + \sigma_2 m_3^2 + \sigma_3 n_3^2, \quad \tau_{\vartheta\varphi} = \sigma_1 l_2 l_3 + \sigma_2 m_2 m_3 + \sigma_3 n_2 n_3
\end{aligned} \tag{1}$$

где l_i, m_i, n_i – направляющие косинусы, определяющие ориентацию компонент главных напряжений в сферической системе координат (r, ϑ, φ).

	1	2	3
r	l_1	m_1	n_1
ϑ	l_2	m_2	n_2
φ	l_3	m_3	n_3

Для направляющих косинусов имеют место соотношения ортогональности

$$\begin{aligned}
&l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \; l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = 0, \quad l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1, \; l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0, \\
&l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1, \; m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0, \; m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1, \; l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0, \\
&l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1, \; l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3 = 0, \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \; l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0,
\end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}
&l_1 = m_2 n_3 - m_3 n_2, \; m_1 = n_2 l_3 - n_3 l_2, \; n_1 = l_2 m_3 - l_3 m_2, \\
&l_2 = m_3 n_1 - m_1 n_3, \; m_2 = n_3 l_1 - n_1 l_3, \; n_2 = l_3 m_1 - l_1 m_3, \\
&l_3 = m_1 n_2 - m_2 n_1, \; m_3 = n_1 l_2 - n_2 l_1, \; n_3 = l_1 m_2 - l_2 m_1,
\end{aligned} \quad \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 1$$

Пусть при предельном сопротивлении рассматриваемого тела имеет место явление отрыва. Условие отрыва в случае предельного сопротивления имеет вид [2] $\sigma_1 = d, \; \sigma_2 = \sigma_3, \; d = \mathrm{const}$.

Предположим $l_3 = 0$. Тогда условие (1) можно записать в форме:

$$\begin{aligned}
&\sigma_r = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2, \quad \tau_{r\vartheta} = \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2 \\
&\sigma_\vartheta = \sigma_1 l_2^2 + \sigma_2 m_2^2 + \sigma_3 n_2^2, \quad \tau_{r\varphi} = \sigma_2 m_1 m_3 + \sigma_3 n_1 n_3 \\
&\sigma_\varphi = \sigma_2 m_3^2 + \sigma_3 n_3^2, \qquad \tau_{\vartheta\varphi} = \sigma_2 m_2 m_3 + \sigma_3 n_2 n_3
\end{aligned} \tag{2}$$

учитывая условие (2) и $3\sigma = \sigma_r + \sigma_\vartheta + \sigma_\varphi = \sigma_1 + 2\sigma_2$, получаем:

$$\begin{aligned}
&\sigma_r - \sigma_\vartheta = (d - \nu)\left(l_1^2 - l_2^2\right), \; \sigma_r - \sigma_\varphi = (d - \nu) l_1^2 \\
&\sigma_\vartheta - \sigma_\varphi = (d - \nu) l_2^2, \qquad \tau_{r\vartheta} = (d - \nu) l_1 l_2
\end{aligned} \tag{3}$$

условие пластичности Губера–Мизеса имеет вид:

$$(\sigma_r - \sigma_\vartheta)^2 + (\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\vartheta - \sigma_\varphi)^2 + 6\tau_{r\vartheta}^2 = 6k^2 \tag{4}$$

подставляя соотношения (3) в (4), имеем $d - \nu = \pm\sqrt{3}k = \alpha = \mathrm{const}$, следовательно, получаем:

$$\sigma_r = d - \alpha + \alpha\xi,\ \sigma_\vartheta = d - \alpha\xi,\ \sigma_\varphi = d - \alpha,\ \tau_{r\vartheta} = \alpha\sqrt{\xi(1-\xi)},\ \xi = l_1^2 \tag{5}$$

Уравнения равновесия в осесимметричном $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(r,\vartheta),\ i,j = \overline{r,\vartheta}$ случае имеют вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\vartheta}}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r}\left(2\sigma_r - \sigma_\vartheta - \sigma_\varphi + \tau_{r\vartheta}\operatorname{ctg}\vartheta\right) = 0\\ \frac{\partial\tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r}\left(\left(\sigma_\vartheta - \sigma_\varphi\right)\operatorname{ctg}\vartheta + 3\tau_{r\vartheta}\right) = 0\end{gathered} \tag{6}$$

Подставляя выражения (5) в (6), получаем:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\xi}{\partial r} + \frac{1-2\xi}{2r\sqrt{\xi(1-\xi)}}\frac{\partial\xi}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r}\left(3\xi - 1 + \sqrt{\xi(1-\xi)}\operatorname{ctg}\vartheta\right) = 0\\ \frac{1-2\xi}{2\sqrt{\xi(1-\xi)}}\frac{\partial\xi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\xi}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r}\left((1-\xi)\operatorname{ctg}\vartheta + 3\sqrt{\xi(1-\xi)}\right) = 0\end{gathered} \tag{7}$$

решая систему уравнений (7) относительно $\dfrac{\partial\xi}{\partial r},\ \dfrac{\partial\xi}{\partial\vartheta}$, получаем:

$$\frac{\partial\xi}{\partial r} + \frac{2(1-\xi)}{r}\left(\xi + \sqrt{\xi(1-\xi)}\operatorname{ctg}\right) = 0,\quad \frac{\partial\xi}{\partial\vartheta} + 2(1-\xi)\left(\sqrt{\xi(1-\xi)} - \xi\operatorname{ctg}\right) = 0 \tag{8}$$

вводя обозначения $f = \dfrac{\xi}{1-\xi}$ для (8), будем иметь:

$$\frac{\partial\sqrt{f}}{\partial r} + \frac{1}{r}\sqrt{f} + \frac{1}{r}\operatorname{ctg}\vartheta = 0,\quad \frac{\partial\sqrt{f}}{\partial\vartheta} + 1 - \sqrt{f}\operatorname{ctg}\vartheta = 0 \tag{9}$$

эти уравнения можно интегрировать методом вариации постоянных, соответственно по r и ϑ. Решая оба уравнения (9) и возвращаясь к ξ, получаем:
из первого уравнения

$$\xi(r,\vartheta) = \frac{\left(r\Theta(\vartheta)\operatorname{ctg}\vartheta - 1\right)^2}{\left(r\Theta(\vartheta)\operatorname{ctg}\vartheta - 1\right)^2 + r^2\Theta^2(\vartheta)} \tag{10}$$

из второго уравнения

$$\xi(r,\vartheta) = \frac{\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} - R(r)\right)^2\sin^2\vartheta}{\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} - R(r)\right)^2\sin^2\vartheta + 1} \tag{11}$$

Приравнивая (10) и (11), получаем

$$R(r) = \frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{\sin\vartheta} + \frac{1}{\Theta(\vartheta)r\sin\vartheta} + \ln\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}$$

Рассмотрим тело с геометрическими размерами $r_0 \le r \le R,\quad 90^0 - \vartheta_0 \le \vartheta \le 90^0 + \vartheta_0$ (рис. 1.): В качестве граничных условий рассмотрим:

$$\sigma_r\Big|_{\substack{r=R,\\ \vartheta=\frac{\pi}{2}}} = p,\ v\Big|_{\substack{r=r_0,\\ \vartheta=\frac{\pi}{2}}} = \delta,\ p,\delta = \mathrm{const} \tag{12}$$

Предположим, что угол раствора ϑ_0 достаточно мал, тогда имеем $\dfrac{\operatorname{ctg}\vartheta}{\sin\vartheta} + \ln\operatorname{tg}\dfrac{\vartheta}{2} \approx -\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{\pi}{2} - \vartheta\right)^3$ и в выражении $R(r)$ этим слагаемым можно пренебречь. Таким образом, получаем $R(r)=\dfrac{1}{\Theta(\vartheta)\,r\sin\vartheta}$, а для $R(r)$ и $\Theta(\vartheta)$ будем иметь:

$$R(r)=\frac{1}{Cr},\quad \Theta(\vartheta)=\frac{C}{\sin\vartheta},\quad C=\mathrm{const} \tag{13}$$

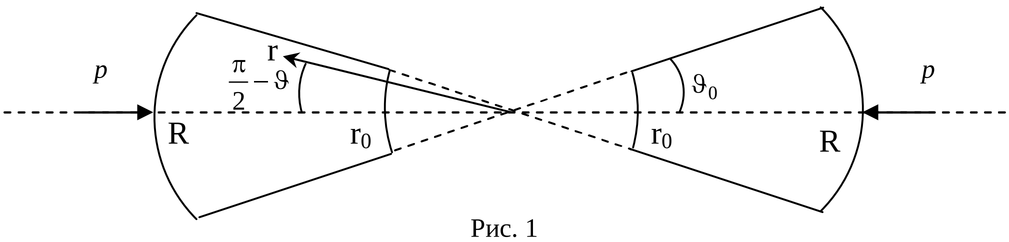


Рис. 1

из (10), (11), (13) получаем:

$$\xi(r,\vartheta)=\frac{\left(Cr\ln\operatorname{tg}\dfrac{\vartheta}{2}-1\right)^2\sin^2\vartheta}{\left(Cr\ln\operatorname{tg}\dfrac{\vartheta}{2}-1\right)^2\sin^2\vartheta+C^2r^2} \tag{14}$$

Из (5) и (14) получаем поле напряжений

$$\sigma_r=d\mp\frac{\sqrt{3}k\,C^2r^2}{\left(Cr\ln\operatorname{tg}\dfrac{\vartheta}{2}-1\right)^2\sin^2\vartheta+C^2r^2},\quad \sigma_\vartheta=d\mp\frac{\sqrt{3}k\left(Cr\ln\operatorname{tg}\dfrac{\vartheta}{2}-1\right)^2\sin^2\vartheta}{\left(Cr\ln\operatorname{tg}\dfrac{\vartheta}{2}-1\right)^2\sin^2\vartheta+C^2r^2},$$

$$\tau_{r\vartheta}=\pm\frac{\sqrt{3}k\,Cr\left(Cr\ln\operatorname{tg}\dfrac{\vartheta}{2}-1\right)\sin\vartheta}{\left(Cr\ln\operatorname{tg}\dfrac{\vartheta}{2}-1\right)^2\sin^2\vartheta+C^2r^2},\quad \sigma_\varphi=d\mp\sqrt{3}k \tag{15}$$

Постоянная C определяется из граничного условия (12) $C^2R^2=\dfrac{p-d}{d\mp\sqrt{3}k-p}$.

Для определения поля скоростей перемещений будем использовать условия изотропии [1,3]:

$$\begin{aligned}
&\sigma_r\varepsilon_{r\vartheta}+\tau_{r\vartheta}\varepsilon_\vartheta+\tau_{r\varphi}\varepsilon_{\vartheta\varphi}=\tau_{r\vartheta}\varepsilon_r+\sigma_\vartheta\varepsilon_{r\vartheta}+\tau_{\vartheta\varphi}\varepsilon_{r\varphi}\\
&\tau_{r\vartheta}\varepsilon_{r\varphi}+\sigma_\vartheta\varepsilon_{\vartheta\varphi}+\tau_{\vartheta\varphi}\varepsilon_\varphi=\tau_{r\varphi}\varepsilon_{r\vartheta}+\tau_{\vartheta\varphi}\varepsilon_\vartheta+\sigma_\varphi\varepsilon_{\vartheta\varphi}\\
&\tau_{r\varphi}\varepsilon_r+\tau_{\vartheta\varphi}\varepsilon_{r\varphi}+\sigma_\varphi\varepsilon_{r\varphi}=\sigma_r\varepsilon_{r\varphi}+\tau_{r\vartheta}\varepsilon_{\vartheta\varphi}+\tau_{r\varphi}\varepsilon_\varphi
\end{aligned} \tag{16}$$

Учитывая условие несжимаемости и принимая $w=0,\ u=u(r,\vartheta),\ v=v(r,\vartheta)$ из (16), получим

$$\tau_{r\vartheta}\left(\varepsilon_r-\varepsilon_\vartheta\right)=\varepsilon_{r\vartheta}\left(\sigma_r-\sigma_\vartheta\right),\quad \varepsilon_r+\varepsilon_\vartheta+\varepsilon_\varphi=0 \tag{17}$$

Вводя потенциальную функцию течения $\Phi(r,\vartheta)$ при помощи представлений [4] $u=\dfrac{1}{r^2\sin\vartheta}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\vartheta},\ v=-\dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}$, условие несжимаемости тождественно удовлетворяется, а для соотношений скоростей деформаций будем иметь:

$$\varepsilon_r = -\frac{2}{r^3 \sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\vartheta}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{1}{r^3 \sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} + \frac{\mathrm{ctg}\vartheta}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\vartheta}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r^3 \sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} - \frac{\mathrm{ctg}\vartheta}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial r}$$

$$2\varepsilon_{r\vartheta} = \frac{2}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{1}{r \sin\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - \frac{\mathrm{ctg}\vartheta}{r^3 \sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^3 \sin\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\vartheta^2} \tag{18}$$

Подставляя (18) в первое соотношение (17), получаем:

$$(2\xi-1)\left(2r\frac{\partial\Phi}{\partial r} - r^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - \mathrm{ctg}\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\vartheta^2}\right) = 2\sqrt{\xi(1-\xi)}\left(-3\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} + 2r\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\vartheta} - r\mathrm{ctg}\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)$$

Функцию $\Phi(r,\vartheta)$ представим в форме $\Phi(r,\vartheta) = r^\lambda\varphi(\vartheta)$, где λ – произвольная постоянная, принадлежащая к определению и тогда получим:

$$(2\xi-1)\left(\varphi'' - \mathrm{ctg}\vartheta\varphi' + \lambda(3-\lambda)\varphi\right) = 2\sqrt{\xi(1-\xi)}\left((2\lambda-3)\varphi' - \lambda\mathrm{ctg}\vartheta\varphi\right) \tag{19}$$

т.к. $\varphi = \varphi(\vartheta)$, то для удовлетворения условию (19) следует полагать:

$$\varphi'' - \mathrm{ctg}\vartheta\varphi' + \lambda(3-\lambda)\varphi = 0, \quad (2\lambda-3)\varphi' - \lambda\mathrm{ctg}\vartheta\varphi = 0 \tag{20}$$

Решение второго дифференциального уравнения (20) имеет вид:

$$\varphi(\vartheta) = D\sin^{\frac{\lambda}{2\lambda-3}}\vartheta, \quad D = \mathrm{const} \tag{21}$$

Подставляя решение (21) в первое дифференциальное уравнение (35), получаем $\lambda_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, и соответственно, для поля скоростей перемещений получим:

$$u = Dr^{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}\cos\vartheta\sin^{\frac{3\mp\sqrt{5}}{\pm2\sqrt{5}}}\vartheta, \ v = -Dr^{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}\sin^{\frac{3\mp\sqrt{5}}{\pm2\sqrt{5}}}\vartheta \tag{22}$$

Значение D определяется из граничного условия $-Dr_0^{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}} = \delta$.

Таким образом, в рассматриваемом теле поле напряжений и скоростей деформаций, соответствующее предельному состоянию с условием отрыва, полностью определено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 702с.
2. Ивлев Д.Д., Матченко Н.М. О предельном состоянии при отрыве // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород / Сб. статей, посвященный 75-летию академика Е.И. Шемякина. С.288-290.
3. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д., Максимова Л.А. К теории изотропных сред // Проблемы механики деформируемых тел / Сб. статей, посвященный 75-летию академика Н.Х. Арутюняна. С.190-198.
4. Задоян М.А. Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992. 382с.

Сведения об авторе:

Варданян Седрак Ваникович
К.ф.-м.н., научный сотрудник института механики НАН РА
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24[б],
Тел: (+37410) 52-58-35, (+37410) 93 288 421
E-mail: vardanyan_s@yahoo.com, sedrak@mechins.sci.am

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Ватульян А. О.

Ряд новых задач естествознания и техники требует отказа от гипотезы однородности при изучении динамического поведения тел в рамках линейной теории упругости. При этом физические свойства (модули Ляме или компоненты тензора упругих постоянных, а также плотность среды) уже не являются постоянными, а задаются при помощи функциональных зависимостей. Отметим, что в теории упругости неоднородного тела имеется достаточное количество решенных задач при некоторых заданных законах неоднородности [1]. Однако законы неоднородности должны быть предварительно определены из некоторых макроэкспериментов, а одним из распространенных способов определения таких законов является регистрация и анализ колебаний границ исследуемого тела при варьировании способа нагружения и частоты колебаний, и приводящий к исследованию сложных нелинейных некорректных задач [2]-[5].

Отметим, также что многие из исследуемых искусственных и природных конструкций находятся в условиях неоднородного предварительного напряженного состояния, которое может значительно изменить их динамические реакции, например, при идентификации биологических тканей и органов. Кроме того, задача контроля предварительного напряженного состояния сооружений является одной из важнейших технических проблем, имеющей приложения в совершенствовании методик неразрушающего контроля, в горной механике и геофизике, в биомеханике, а также в определении уровня предварительных напряжений в аварийных конструкциях [6]-[8]. При этом акустические методы исследования являются одним из главных источников получения информации о внутренних напряжениях и являются основой современных технических устройств по определению однородного предварительного напряженного состояния в рамках модели акустоупругости. Колебания неоднородных упругих тел или находящихся в условиях неоднородного предварительного напряженного состояния в линеаризованной постановке описываются краевой задачей для системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которая может быть решена лишь с использованием современных вычислительных технологий.

Настоящая работа посвящена реализации некоторых подходов на пути решения важной проблемы идентификации модулей или предварительного напряженного состояния в рамках обратных коэффициентных задач теории упругости, построению интегральных уравнений, позволяющих решать сформулированные задачи.

Отметим, что к коэффициентным обратным задачам теории упругости, в которых требуется определить коэффициенты дифференциальных операторов по информации о граничных полях смещений, приводят три типа задач, подробно описанных в [9].

Основная трудность при исследовании коэффициентных обратных задач, которые являются нелинейными, состоит в достаточно сложной процедуре построения операторных соотношений, связывающих искомые и измеряемые функции, что обусловлено переменностью коэффициентов дифференциальных операторов и невозможностью построения в явном виде их решений.

Постановка обратных задач об определении предварительного напряженного состояния

Рассмотрим установившиеся колебания с частотой ω ограниченной области V с границей $S = S_u \cup S_\sigma$, n_j - компоненты единичного вектора внешней нормали к S.

Одна из обратных коэффициентных задач состоит в определении компонент тензора предварительного напряженного состояния σ^0_{ij} из следующей краевой задачи:

$$T_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0 \tag{1}$$

$$T_{ij} = \sigma_{ij} + u_{i,m}\sigma^0_{mj}, \quad \sigma_{ij} = c_{ijkl}u_{k,l} \tag{2}$$

$$u_i\big|_{S_u} = 0, \;\; T_{ij}n_j\big|_{S_\sigma} = p_i, \;\; u_i\big|_{S_\sigma} = f_i(x,\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \tag{3}$$

Здесь c_{ijkl} - компоненты тензора упругих модулей, являющиеся кусочно-непрерывными функциями координат и удовлетворяющие обычным условиям симметрии и положительной определенности, p_i -заданная нагрузка, $f_i(x,\omega)$ -измеренные на части границы тела компоненты вектора смещений. Такая формулировка граничных условий соответствует измерению поля перемещений на части границы S_σ, на которой осуществляется нагружение, и моделирует эхо-режим в акустических методах диагностики. Вместе с тем отметим, что, если носитель нагрузки занимает часть S_σ, то на этой части и необходимо измерять смещения.

Так, например, обратная задача об определении предварительного напряжения $\sigma_{11}^0 = E_0 p_*$ в задаче для стержня при продольных колебаниях описывается следующей краевой задачей ($E(x) = E_0\eta(x)$):

$$((\eta(x) + p_*)u')' + k^2 u = 0\,,\; k \;= \omega\sqrt{\frac{\rho}{E_0}} \tag{4}$$

$$u(0) = 0\,,\; \eta(l)\frac{\partial u}{\partial x}(l) = -p_0 = -P/FE_0\,, u(l,k) = f(k)\;\; k \in [k_1, k_2] \tag{5}$$

Формулировка операторных соотношений

В [9], [12] получено соотношение взаимности для двух различных решений задачи(1)-(3), которое имеет вид

$$\int_V \left(\sigma_{mj}^{(02)} - \sigma_{mj}^{(01)}\right) u_{i,j}^{(1)} u_{i,m}^{(2)} dV + \int_{S\sigma} p_i \left(u_i^{(2)} - u_i^{(1)}\right) dS = 0, \qquad \omega \in \left[\omega_1, \omega_2\right] \tag{6}$$

Это соотношение взаимности позволяет сразу формулировать итерационный процесс, минуя процедуру решения задач первого приближения, которая получается традиционным способом, описанным, например, в [11].
Полагая в соотношении (6)

$$\sigma_{ij}^{(01)} = t_{ij}^{(n-1)}, \quad \sigma_{ij}^{(02)} = t_{ij}^{(n-1)} + t_{ij}^{(n)}, \quad u_i^{(1)} = u_i^{(n-1)}, \quad u_i^{(2)} = u_i^{(n-1)} + u_i^{(n)}$$

и сохраняя в нем линейные относительно возмущений слагаемые, получим

$$\int_V t_{mj}^{(n)} u_{i,j}^{(n-1)} u_{i,m}^{(n-1)} dV + \int_{S\sigma} p_i \left(f_i - u_i^{(0)}\right) dS = 0$$
$$\omega \in \left[\omega_1, \omega_2\right] \tag{7}$$

Это уравнение можно использовать для определения поправок компонент тензора предварительных напряжений $t_{mj}^{(n)}$ по отношению к некоторому выбранному начальному состоянию, которое также может быть выбрано простейшим образом, например, однородным.
Замечание. В общем случае отыскания предварительного напряженного состояния требуется определить 6 компонент симметричного тензора $t_{mj}\left(x\right)$ и одного интегрального уравнения типа (7) недостаточно, чтобы осуществить процедуру реконструкции; для формулировки дополнительных интегральных уравнений такого же вида необходимо либо изменить структуру функций нагружения p_i, либо область приложения нагрузки S_σ; при этом получатся аналогичные уравнения с другими ядрами и правыми частями.

Уравнение типа (7) порождает операторное уравнение Фредгольма 1-го рода с вполне непрерывным оператором, при обращении которого необходимо использовать регуляризующую процедуру в той или иной форме при наличии априорной информации о том, что искомые функции неотрицательны. Множество поиска можно сузить также при наличии дополнительной информации о характере предварительного напряженного состояния или при наличии ограничения, что его компоненты зависят лишь от одной координаты, что часто встречается в приложениях. Как правило, интегральное уравнение или система сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно узловых переменных на основе одной из проекционных схем, в частности, и конечноэлементной аппроксимации [11]. При численной реализации процедуры обращения был использован метод регуляризации А. Н. Тихонова [13].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00734) и Института прикладной математики и информатики ВНЦ РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. М.: МГУ, 1976. 368 с.
2. Яхно В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука, 1990. 304с.
3. Isakov V. Inverse problems for PDE.- Springer-Verlag, 2005. -284 pp.
4. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач.М.:МГУ1994.206с
5. Ватульян А. О.Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.:Физматлит, 2007.220с.
6. Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г. Волны в слое с начальными напряжениями. Киев: Наукова думка, 1976. 104 с.
7. Гузь А.Н. Упругие волны в сжимаемых материалах с начальными напряжениями и неразрушающий ультразвуковой метод определения двухслойных остаточных напряжений. // Прикладная механика. 1994. Т. 30. № 1. с. 3-17.
8. Чернышев Г.Н., Попов А.Л., Козинцев В.М., Пономарев И.И. Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах. М.: Наука, 1996.
9. Ватульян А. О. Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел //Вестник Самарского государственного университета. 2007. №4. С.93-104.
10. Ватульян А. О. Интегральные уравнения в обратных задачах определения коэффициентов дифференциальных операторов теории упругости //Доклады Российской АН. 2005. Т.405 (3). С.343-345.
11. Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Об итерационном подходе в обратных задачах теории упругости // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2006. №1. С. 23-29.
12. Ватульян А. О. К формулировке интегральных уравнений в проблеме идентификации предварительного напряженного состояния// Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2006. №2. С. 23-25.
13. Тихонов А.Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.

Сведения об авторе

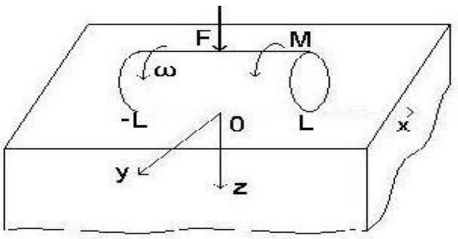
Ватульян Александр Ованесович
Доктор физ.-мат. наук, зав. кафедрой теории упругости, Южный федеральный университет, Россия
Адрес: г. Ростов н/Д , ул.Зорге 28/3, кв.48
Тел.: 2-20-46-52; E-mail: vatulyan@math.rsu.ru

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ И ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ НАЛИЧИЙ ФАКТОРА ИЗНОСА

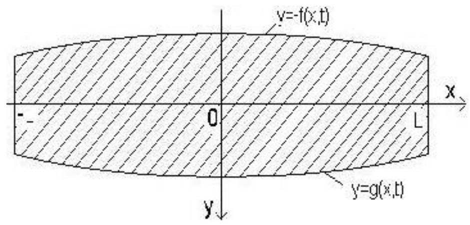
Верлинский С. В., Шекян А. Л., Шекян Л. А.

Контактная задача о сжатии упругих тел, первоначально соприкасающихся по прямолинейному отрезку, была рассмотрена И. Я. Штерманом [1]. С использованием результатов работы [1], в рамках наследственной теории ползучести Н. Х. Арутюняна получено также решение пространственной контактной задачи о сжатии жестким цилиндром конечной длины в упругоползучее полупространство [2].

1.Пусть жесткий цилиндр 1 радиусом R и длиной 2L соприкасается с упругим неподвижным полупространством 2 вдоль отрезки $\Delta=[-L,L]$ оси OX (фиг.1.). Пусть далее, с момента времени t=0, на цилиндр действуют центральная сжимающая сила F(t) и вращающий момент M(t), которые вдавливают цилиндр в полупространство и равномерно вращают вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Вследствие упругих деформаций полупространства и износа его поверхности, область соприкасания тел 1 и 2, на отрезке Δ превращается в зависищую от времени некоторую двухмерныю область Ω(t), ограниченной линиями x=±L и кривыми y=-f(x,t), y=g(x,t) плоскости z=0 (фиг.2.).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Требуется определить положительные и четные функции f(x,t) и g(x,t) по x и t, характеризующие форму контактной области Ω(t), закон распределения контактных напряжений, величину погружения цилиндра в полупространство, а также мощность энергии, израсходованной на вращение цилиндра.

Перемещение $W_{упр}(x,y,t)$, которое получает граничная точка полупространства (x,y) в момент времени t в направлении вертикальной оси OZ, обусловленное упругими деформациями полупространства от действия контактных напряжений, определяется формулой [3]

$$W_{упр}\left(x,y,z\right)=\frac{1-\nu^2}{\pi E}\iint\limits_{\Omega(t)}\frac{p\left(\xi,\eta,t\right)}{\sqrt{\left(x-\xi\right)^2+\left(y-\eta\right)^2}}+ \\ +\frac{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}{2\pi E}\iint\limits_{\Omega(t)}\frac{\left(y-\eta\right)\tau\left(\xi,\eta,t\right)}{\left(x-\xi\right)^2+\left(y-\eta\right)^2}d\xi d\eta \tag{1}$$

где E и ν – упругие постоянные полупространства, $p\left(x,y,t\right)$ и τ(x, y, t), - соответственно контактное давление и контактное касательное напряжение, которые связаны между собой законом Кулона

$$\tau\left(x,y,t\right)=fp\left(x,y,t\right),\qquad \left(x,y\right)\in\Omega\left(t\right) \tag{2}$$

где f - коэффициент трения.

Вследствие износа полупространства, его каждая граничная точка $(x,y) \in \Omega(t)$ получает дополнительное вертикальное перемещения $W_{из}(x,y,t)$, скорость которого определяется из формул [4,5]

$$\frac{\partial}{\partial t}W_{из}(x,y,t) = K_1\omega R[p(x,y,t)]^n \ , \quad (x,y)\in\Omega(t)\ , \ \ t > 0 \tag{3}$$

где K_1 и n - постоянные, при том n≥1. Пренебрегая инерциальными членами, условие контакта тел 1 и 2 выражается соотношением

$$W_{упр}(x,y,t) \ + \ W_{из}(x,y,t) \ = \ \delta(t) - R + \sqrt{R^2 - y^2} \ , \ \ (x,y)\in\Omega(t) \tag{4}$$

где δ(t)-мера погружения цилиндра в полупространство.

Учитывая (1)- (3), из условия контакта (4) получим

$$\begin{gathered}\theta\int_{-L}^{L}\left[K(x-\xi,y-\eta)p(\xi,\eta,t)d\eta\right]d\xi + \\ +\omega RK_1\int_{-f(x,t)}^{g(x,t)}[p(x,y,\tau)]^n d\tau = \delta(t) - R + \sqrt{R^2-y^2}\ , \quad (x,y)\in\Omega(t)\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$K(u,v) = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}[1 + f_0\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}]\ , \quad \theta = \frac{1-v^2}{\pi E}\ , \quad f_0 = \frac{1-2v}{2(1-v)}f \tag{6}$$

При решении задачи воспользуемся также условием непрерывности контактных напряжений на точках линий y=-f(x,t) и y=g(x,t) на границе контактной области Ω(t)

$$p[x,-f(x,\tau),\tau] = p[x,g(x,\tau),\tau] = 0\ , \quad (0<\tau\le t, \quad -L\le x\le L) \tag{7}$$

и из условий равновесия цилиндра

$$\iint\limits_{\Omega(\tau)} p(x,y,t)dxdy = F(t) \tag{8}$$

$$R\iint\limits_{\Omega(\tau)} \tau(x,y,t)dxdy = M(t) \tag{9}$$

Отметим, что на основе (2), (8) и (9) непосредственно определяются вращающий момент M(t) и мощность энергии N(t), израсходованной при вращении цилиндра.

$$M(t) = \ fRF(t), \qquad N(t) = \omega fRF(t) \tag{10}$$

Таким образом, задача сводится к определению $p(x,y,t),\ f(x,t),\ g(x,t)$ и $\delta(t)$ из (5), (7) и (8), которые, как показывается ниже, образуют замкнутую систему уравнений относительно этих неизвестных.

2. Исследование системы уравнений (5), (7) и (8), следуя разработанной в [6] методике, проводим на основе принципа сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций. Аналогично [6] можно доказать, что контактное давление $p(x,y,t)$ удовлетворяющее уравнению (5) и условиям (7) и (8), является непрерывной функцией в замкнутой области Ω(t). Введя новые неизвестные безразмерные функции

$$q(\xi,\eta,t)=K_1\omega\int_0^{\tau}[\,p(\xi R,\eta R,\tau)]^n\ d\tau \tag{11}$$

$$\Delta(t)=\frac{\delta(t)}{R}<1,\quad \varphi(\xi,t)=\frac{f(\xi R,t)}{R}<1,\quad \psi(\xi,t)=\frac{g(\xi R,t)}{R}<1 \tag{12}$$

и считая, что изменение функции $p(x,y,t)$ со временем невелико, из (11) можно получить

$$p(x,y,t)=[\frac{1}{K_1\omega t}q(\frac{x}{R},\frac{y}{R},t)]^{1/n} \tag{13}$$

Тогда уравнение (5) можно представить в виде

$$q(\xi,\eta,t)=\Delta(t)-\frac{1}{2}\eta^2-\theta_0\int_{-\alpha}^{\alpha}[\int_{-\varphi(u,\tau)}^{\varphi(u,\tau)}K(\xi-u,\ \eta-v)[q(u,v,t)]^{1/n}\,dv]\,du \tag{14}$$

$$(\xi,\eta)\in\Omega_0(t)$$

где

$$\theta_0=\theta(K_1\omega t)^{-1/n}\ ,\quad \alpha=L/R\ ,$$
$$\Omega_0(t)=(-\alpha\le\xi\le\alpha,\ -\varphi(\xi,t)\le\eta\le\psi(\xi,t)) \tag{15}$$

Из соотношений (7), на основе (11)-(14) получим

$$\varphi(\xi,t)=\sqrt{2}\{\delta_0(t)-\theta_0\int_{-\alpha}^{\alpha}[\int_{-\varphi(\xi,\tau)}^{\varphi(\xi,\tau)}K(\xi-u,\ \text{-}\varphi(\xi,t)\text{-}v)[q(u,v,t)]^{1/n}dv]\,du\}^{1/2}$$

$$\psi(\xi,t)=\sqrt{2}\{\delta_0(t)-\theta_0\int_{-\alpha}^{\alpha}[\int_{-\psi(\xi,\tau)}^{\psi(\xi,\tau)}K(\xi-u,\ \ \psi(\xi,t)\text{-}v)[q(u,v,t)]^{1/n}dv]\,du\}^{1/2} \tag{16}$$

а условие равновесия (8), на основе (11), (13) и (15), принимает вид

$$\iint_{-\Omega_0(t)}[q(\xi,\eta,t)]^{1/n}d\xi d\eta=F_0(t),\quad F_0(t)=F(t)R^2(\omega k_1 t)^{1/n} \tag{17}$$

Уравнения (14), (16) и (17) образуют замкнутую систему уравнений относительно $q(\xi,\eta,t)$, $\varphi(\xi,t)$, $\psi(\xi,t)$ и $\Delta(t)$, при этом система имеет наиболее удобную форму для применения метода последовательного приближения в пространстве непрерывных функций с чебышевской метрикой. Временно считая неизвестным также $F_0(t)$, для каждого конкретного $\Delta(t)$ можно из (14) и (16) методом последовательных приближений определить $q(\xi,\eta,t)$, $\varphi(\xi,t)$, $\psi(\xi,t)$ а затем из (17) определить $F_0(t)$ таким же способом установить зависимость $\Delta(t)$ от $F_0(t)$. Доказательство сходимости последовательных приближений обосновано принципом сжимающих отображений [6]. Принимая $q_0(\xi,\eta,t)\equiv 0$ в качестве нулевого приближения, из (14), (16) и (17) в первом приближении получим

$$q_1(\xi,\eta,t)=\Delta(t)-\frac{1}{2}\eta^2\ ,\qquad \varphi_1(\xi,t)=\ \psi_1(\xi,t)=\sqrt{2\Delta(t)} \tag{18}$$

$$\Delta(t) = \{\frac{F_0(t)}{4\alpha}[\int_0^1 (1-x^2)^{1/n}]^{-1}\}^{\frac{2n}{n+1}} \qquad (19)$$

которое соответствует решению задачи, когда упругие деформации полупространства пренебрегаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штаерман И. Я. Сжатие упругих тел, соприкасающихся по прямолинейному отрезку / Проблемы механики сплошной среды. М.: Изд. Ан СССР, 1961. С. 564 – 571.
2. Шекян Л. А. Контактное взамодейсвие жесткого цилиндра конечной длины и упругоползучего полупространства / Годичная научная конференция Государственного инженерного университета Армении. Сб. материалов. 2002. Т.1. С. 195–197.
3. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492с.
4. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение , 1977. 576 с.
5. Механика контактных взаимодействий. Под ред. И. И. Воровича и В. М. Александрова. М.: 2001. 672с.
6. Мхитарян С. М., Шекян Л. А. Плоская контактная задача для двух шероховатых твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов // Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. Т. 30. № 3. С. 15 – 32.

Сведения об авторах

Верлинский Сергей Витальевич
Канд.физ.-мат. наук, преподаватель Государственнго инженерного университета Армении, кафедра “Машиноведения”
Адрес: Ереван, ул. Терьяна 105
Тел: 44-83-62 E-mail: sergeyverl@mail.ru

Шекян Лаврентий Арамович
Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Прикладная механика”
Адрес: Ереван, ул. Терьяна 105
Тел: 39-89-01; E-mail: mrtiko@mail.ru

Шекян Артем Лаврентьевич
Аспирант

УЧЕТ УСЛОВИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Геворкян Г. А., Мартиросян А. Б.

Для решения плоской задачи теории упругости предлагается модифицированный метод конечных элементов четырехугольной формы, при котором учитываются условия межэлементной непрерывности деформаций и напряжений.

Рассмотрим двумерную область, которая разделена на $s \in \overline{N} = \{1, 2, ..., \overline{n}\}$ конечных элементов прямоугольной формы. Узловые значения функции напряжения U, а также ее производных $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ для s-ого конечного элемента зададим вектором $q_s = (q_1^s, q_2^s, ..., q_{16}^s)^T$.

Рассмотрим прямоугольный элемент в плоскости xy, показанный на фиг.1. Перемещения точек срединной поверхности элемента аппроксимируем следующим бикубическим полиномом, содержащим 16 неизвестных параметров:

$$U^s(x,y) = \alpha_1^s + \alpha_2^s x + \alpha_3^s y + \alpha_4^s x^2 + \alpha_5^s xy + \alpha_6^s y^2 + \alpha_7^s x^3 + \alpha_8^s x^2 y + \\ + \alpha_9^s xy^2 + \alpha_{10}^s y^3 + \alpha_{11}^s x^3 y + \alpha_{12}^s xy^3 + \alpha_{13}^s x^2 y^2 + \alpha_{14}^s x^2 y^3 + \alpha_{15}^s x^3 y^2 + \alpha_{16}^s x^3 y^3 \quad (1)$$

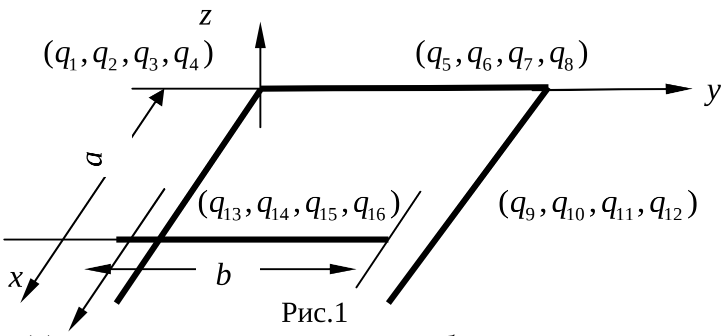


Рис.1

Выражение (1) заменим следующим удобным для практического использования выражением:

$$U^s(x,y) = \sum_{i=1}^{12} q_i^s \Psi_i(x,y) \quad (2)$$

где $\Psi_i(x,y) -$ функции Эрмита [3]. При $\xi = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{y}{b}$, по аналогии работ [1,5], имеем

$$\Psi_1^s(\xi,\eta) = 1 - 3\xi^2 - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 2\eta^3 + 9\xi^2\eta^2 - 6\xi^2\eta^3 - 6\xi^3\eta^2 + 4\xi^3\eta^3$$

$$\Psi_2^s(\xi,\eta) = a(\xi - 2\xi^2 + \xi^3 - 3\xi\eta^2 + 2\xi\eta^3 + 6\xi^2\eta^2 - 4\xi^2\eta^3 - 3\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3)$$

$$\Psi_3^s(\xi,\eta) = b(\eta - 2\eta^2 - 3\xi^2\eta + \eta^3 + 2\xi^3\eta + 6\xi^2\eta^2 - 3\xi^2\eta^3 - 4\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta)$$

$$\Psi_4^s(\xi,\eta) = ab(\xi\eta - 2\xi^2\eta - 2\xi\eta^2 + \xi^3\eta + \xi\eta^3 + 4\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3)$$

$$\Psi_5^s(\xi,\eta) = 3\eta^2 - 2\eta^3 - 9\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^3 + 6\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3$$

$$\Psi_6^s(\xi,\eta) = a(3\xi\eta^2 - 2\xi\eta^2 - 6\xi^2\eta^2 + 4\xi^2\eta^3 + 3\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3)$$

$$\Psi_7^s(\xi,\eta) = b(-\eta^2 + \eta^3 + 3\xi^2\eta^2 - 3\xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3)$$

$$\Psi_8^s(\xi,\eta) = ab(-\xi\eta^2 + \xi\eta^3 + 2\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3)$$

$$\Psi_9^s(\xi,\eta) = 9\xi^2\eta^2 - 6\xi^2\eta^3 - 6\xi^3\eta^2 + 4\xi^3\eta^3 \quad (3)$$

$$\Psi_{10}^s(\xi,\eta) = a(-3\xi^2\eta^2 + 2\xi^2\eta^3 + 3\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3)$$

$$\Psi_{11}^s(\xi,\eta) = b(-3\xi^2\eta^2 + 3\xi^2\eta^3 + 2\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3)$$
$$\Psi_{12}^s(\xi,\eta) = ab(\xi^2\eta^2 - \xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3)$$
$$\Psi_{13}^s(\xi,\eta) = 3\xi^2 - 2\xi^3 - 9\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^3 + 6\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3$$
$$\Psi_{14}^s(\xi,\eta) = a(-\xi^2 + \xi^3 + 3\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - 3\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3)$$
$$\Psi_{15}^s(\xi,\eta) = b(3\xi^2\eta - 2\xi^3\eta - 6\xi^2\eta^2 + 3\xi^2\eta^3 + 4\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3)$$
$$\Psi_{16}^s(\xi,\eta) = ab(-\xi^2\eta + \xi^3\eta + 2\xi^2\eta^2 - \xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3)$$

Потенциальная энергия деформации $s-$го элемента определяется выражением [5]

$$\bar{\Omega}_s = \frac{1-\nu^2}{2E}\int_0^a\int_0^b\{(\nabla^2 U)^2 + \frac{2}{1-\nu}[(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y})^2 - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}]\}dxdy \qquad (4)$$

где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона.

Подставляя значения $U^s(x,y)$ из (1) в выражение (4), с учетом связей (3), потенциальную энергию деформации представим в виде:

$$\bar{\Omega}_s = \frac{1}{2}(q_s)^T k_s q_s \qquad (5)$$

где $k_s = \dfrac{1-\nu^2}{2E}\left\|k_{ij}^s\right\|$ – матрица жесткости, компоненты которой определяются формулой

$$k_{ij}^s = \int_0^a\int_0^b\{\nabla^2 U_i \nabla^2 U_j + \frac{2}{1-\nu}[\frac{\partial^2 U_i}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 U_j}{\partial x\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2}\frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2}]\}dxdy \qquad (6)$$

Пусть для s-го конечного элемента P_x^s и P_y^s – эквивалентные внешней нагрузке векторы узловых значений функции U и ее производных в направлении соответствующих осей. Работа этих сил определится по формуле

$$\hat{\Omega}_s = (P_x^s)^T q_s + (P_y^s)^T q_s \qquad (7)$$

Общая потенциальная энергия (дополнительная работа) s-го конечного элемента равна разности потенциальной энергии деформации и работы заданных внешних сил [4]

$$\Omega^s = \bar{\Omega}^s - \hat{\Omega}^s$$

откуда, принимая во внимание формулы (5) и (7), находим

$$\Omega^s = \frac{1}{2}(q_s)^T k_s q_s - (P_x^s)^T q_s - (P_y^s)^T q_s \qquad (8)$$

Учитывая, что рассматриваемая двумерная область представлена в виде совокупности $\bar{n}$ конечных элементов прямоугольной формы, для общей дополнительной работы имеем

$$\Omega = \sum_{s=1}^{\bar{n}}\Omega^s = \sum_{s=1}^{\bar{n}}[\frac{1}{2}(q^s)^T k_s q_s - (P_x^s)^T q_s - (P_y^s)^T q_s] \qquad (9)$$

Исходя из принципа минимума дополнительной работы системы [4], для определения искомых векторов $q_s, s\in\{1,2,...,\bar{n}\}$ получим следующую задачу квадратичного программирования:

$$\min\left\{\sum_{s=1}^{\bar{n}}[\frac{1}{2}(q^s)^T k_s q_s - (P_x^s)^T q_s - (P_y^s)^T q_s] \mid \text{краевые условия}\right\} \qquad (10)$$

Пусть n – общее число узлов всей области, $q = (q_1^1, q_2^1, q_3^1, q_4^1, .., q_1^n, q_2^n, q_3^n, q_4^n)^T$ – вектор узловых функций, $K = \dfrac{1-\nu^2}{2Eab}\left\|K_{ij}\right\|$ – матрица для всей области,

$$P_x = (P_{1,x}^1, P_{2,x}^1, P_{3,x}^1, P_{4,x}^1, P_{1,x}^2, P_{2,x}^2, P_{3,x}^2, P_{4,x}^2, ..., P_{1,x}^n, P_{2,x}^n, P_{3,x}^n, P_{4,x}^n)^T$$

$$P_y = (P^1_{1,y}, P^1_{2,y}, P^1_{3,y}, P^1_{4,y}, P^2_{1,y}, P^2_{2,y}, P^2_{4,y}, P^2_{3,y}, ..., P^n_{1,y}, P^n_{2,y}, P^n_{3,y}, P^n_{4,y})^T$$

– эквивалентные внешней нагрузке векторы узловых значений функции U и ее производных.

Обозначим

$$\begin{gathered}
q_1^1 + K_{12}^{(0)} q_1^2 + K_{13}^{(0)} q_1^3 + K_{14}^{(0)} q_1^4 + ... + K_{1(4n-1)}^{(0)} q_n^3 + K_{1(4n)}^{(0)} q_n^4 = -r_1 \\
q_1^2 + K_{23}^{(1)} q_1^3 + K_{24}^{(1)} q_2^1 + +K_{24}^{(0)} q_1^4 ... + K_{2(4n-1)}^{(1)} q_n^3 + K_{2(4n)}^{(1)} q_n^4 = -r_2 \\
.... \\
q_n^3 + K_{(4n-1)(4n)}^{(4n-3)} q_n^4 = -r_{4n-1}
\end{gathered} \tag{11}$$

в котором

$$K_{ii}^{(0)} = -K_{ii}, i \in M = \{1, 2, ..., 4n\}\,; \quad K_{1j}^{(0)} = -K_{1j},\, j \in \{2, 3, ..., 4n\}$$

$$K_{ij}^{(r)} = -K_{ij}^{(r-1)} - K_{i(j-1)}^{(r-1)} K_{ij}^{(r-1)}, r \in \bar{M} = \{1, 2, ..., 4n-1\}$$

$$i \in \{r, ..., 4n\},\; j \in \{r+1, ..., 4n\}$$

$$d_{ii} = K_{ii}^{(0)} - \sum_{s=1}^{i-1} (K_{si}^{(s)})^2 - 1, i \in \bar{M}\}\,; \;\; d_{(4n)4n} = K_{(4n)4n}^{(0)} - \sum_{i=1}^{4n-1} (K_{i(4n)}^{(4n)})^2$$

Тогда, принимая во внимание, что r является вектором дополнительных переменных, из задаяи (10) для определения искомых векторов q получим следующую задачу квадратичного программирования

$$\min\{0{,}5 q^T D q + C^T q \mid Aq < 0 \text{, краевые условия}\} \tag{12}$$

Здесь $D = \dfrac{Eh}{4ab(1-\nu^2)} \left\| d_{ij} \right\|$ – диагональная матрица порядка $4n$, $C = -P_x - P_y$ – вектор-столбец порядка $4n$, $A = (A_1, A_2, ..., A_{4n})$ – матрица коэффициентов обозначений (11), $A_J = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{4n-1,j})^T$, $j \in \{1, 2, ..., 4n\}$.

Функция U^s, задаваемая формулой (1), обеспечивает совместность величин $q_s = (q_1^s, q_2^s, ..., q_{16}^s)^T$, но не обеспечивает непрерывности напряжений σ_x и σ_y, которые определяются формулами

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \tag{13}$$

Условия непрерывности напряжений в i-ом узле, соответствующие рис. 2, задаются соотношениями

$$\sigma_x^s = \sigma_x^{s+1}, \quad \sigma_x^{s+2} = \sigma_x^{s+3}, \quad \sigma_x^s = \sigma_x^{s+2}$$

$$\sigma_y^s = \sigma_y^{s+1}, \quad \sigma_y^{s+2} = \sigma_y^{s+3}, \quad \sigma_y^s = \sigma_y^{s+2}$$

откуда, принимая во внимание формулы (2) и (3), а также

$$\frac{\partial^2 U^s(x,y)}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^{16} q_j^s \frac{\partial^2 \Psi_j(x,y)}{\partial x^2}\;;\; \frac{\partial^2 U^s(x,y)}{\partial y^2} = \sum_{j=1}^{16} q_j^s \frac{\partial^2 \Psi_j(x,y)}{\partial y^2} \tag{14}$$

находим

$$3q_1^{i+1} - aq_2^{i+1} - 4aq_2^i - 3q_1^{i-1} - aq_2^{i-1} = 0\,, \quad i \in N \tag{15}$$

$$3q_1^j - bq_3^j - 4bq_3^i - 3q_1^k - bq_3^k = 0\,, \quad i \in N \tag{16}$$

Условия непрерывности напряжений σ_x и σ_y вдоль границы разделов смежных сечений $i+1, i$ и j, i, параллельных осям x и y (рис.2), зададим соотношениями

$$\sigma_x(\xi, b) = \sigma_x(\xi, 0)\,, \quad \sigma_y(a, \eta) = \sigma_y(0, \eta)$$

$$\sigma_y(\xi, b) = \sigma_y(\xi, 0)\,, \quad \sigma_x(a, \eta) = \sigma_x(0, \eta)$$

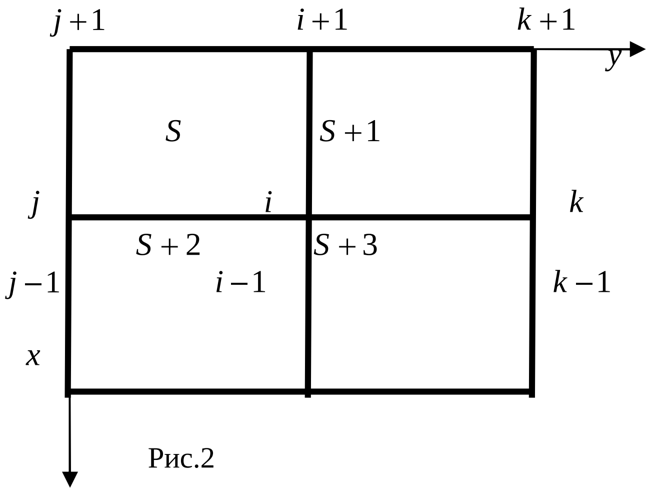


Рис.2

откуда, с учетом связей (14) и (15) получаем

$$-3q_2^j + bq_4^j + 4bq_4^i + 3q_2^k + bq_4^k = 0\,, \qquad i \in N$$

$$-3q_3^{i+1} + aq_4^{i+1} + 4aq_4^i + 3q_3^{i-1} + aq_4^{i-1} = 0 \;\;, \; i \in N$$

Исключая из этих уравнений переменную w_4^i, имеем

$$-3aq_2^j + abq_4^j + 3aq_2^k + abq_4^k + 3bq_3^{i+1} - abq_4^{i+1} - 3bq_3^{i-1} - abq_4^{i-1} = 0\,, \quad i \in N \tag{17}$$

Перепишем условия (15), (16) и (17) в виде системы уравнений. Имеем

$$Hq = 0 \tag{18}$$

где $H-$ матрица порядка $3(n-\tilde{n})\times 4n$, $\tilde{n}$ – количество граничных узлов.

Принимая во внимание уравнения (18), задачу (12) перепишем в виде

$$\min\{0{,}5q^T Dq + C^T q \mid Aq < 0\,,\; Hq = 0\,, \text{краевые условия}\}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Азарян Н. А., Геворкян Г. А. Учет условия непрерывности при решении задач изгиба пластин методом конечных элементов. //Изв.НАН Армении. Механика. 2007. Т. 60. № 2. С.21-28.
2. Галлагер Р. Г., Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
3. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Ленинград: Судостроение, 1974. 384 с.
4. Лурье А. И., Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
5. Bogner F. K., Fox R. L., Schmit L. A., The Generation of Interelement – Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulae, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, Oct. 1965.

Сведения об авторах:

Геворкян Гагик Аршалуйсович
Доктор физ.-мат.наук, профессор, зав. кафедрой информатики
Ереванский государственный университет архитектуры и строительства
Тел.: (093)22-92-53, (03741)25-44-33, 27-48-55

Мартиросян Арсен Борисович,
E-mail: arsenc@rambler.ru

ЗАДАЧА ОРТОТРОПНОЙ ГИБКОЙ ПЛАСТИНЫ-ПОЛОСЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПО УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ

Геворкян Г. З., Киракосян Р.М.

Решена задача для ортотропной пластины-полосы линейно-переменной толщины при учете поперечного сдвига по геометрически нелинейной теории. Рассматриваются некоторые варианты отдельного и совместного действий вертикальной и горизонтальной поверхностных нагрузок. Обсуждается вопрос неприменимости суперпозиции решений.

1. В прямоугольной системе координат $Oxyz$ рассмотрим ортотропную пластину-полосу переменной толщины h, симметричную относительно срединной плоскости. Координатную плоскость xOy совместим со срединной плоскостью пластины-полосы, а ось z направим перпендикулярно к ней. Главные направления анизотропии материала параллельны координатным осям.

Пусть толщина пластины-полосы вдоль оси Oy не изменяется, а вдоль оси Ox изменяется по линейному закону

$$h = h_0 + h_1 x \tag{1.1}$$

где h_0, h_1 – постоянные.

Краевые условия будем считать произвольными. Пластина-полоса несет равномерно распределенные вертикальную и горизонтальную поверхностные нагрузки, приложенные к верхней лицевой поверхности

$$X\Big|_{z=-h/2} = p,\ \ Z\Big|_{z=-h/2} = q \tag{1.2}$$

Здесь X и Z интенсивности нагрузок. На рис. 1 показан случай, когда край пластины-полосы

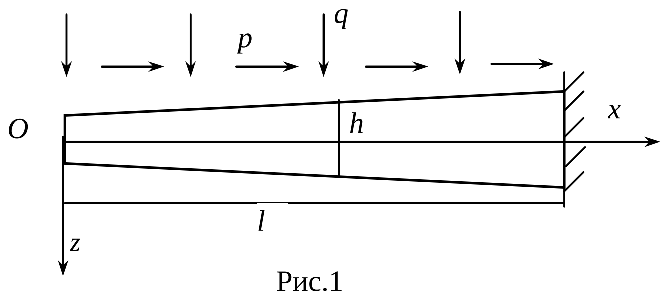


Рис.1

$x = 0$ свободен, а край $x = l$ заделан.

Согласно обозначениям [1], имеем:

$$X_1 = -p/2,\ \ X_2 = p,\ \ Z_2 = q \tag{1.3}$$

Переходим к безразмерным величинам:

$$\begin{gathered} x = l\,\overline{x},\ \ z = h_0\overline{z},\ u_x = h_0\overline{u}_x,\ w = h_0\overline{w},\ \ h = h_0 H,\ \ s = h_0/l,\ \ \gamma = h_1/s \\ H = 1+\gamma\overline{x},\ \ \chi = a_{55}B_{11},\ \ p = B_{11}\overline{p},\ \ q = B_{11}\overline{q} \\ T_x = B_{11}h_0 T,\ \ N_x = B_{11}h_0 N,\ \ \varphi_1 = B_{11}\varphi,\ M_x = B_{11}h_0^2 M \end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь u_x–тангенциальное перемещение, w–прогиб, a_{55}, B_{11}–параметры материала, T_x и N_x–тангенциальное и поперечное усилия, M_x–изгибающий момент, φ_1–функция, характеризующая распределение касательных напряжений τ_{xz} [3].

На основе [2], где учитываются только те нелинейные члены, которые происходят от прогиба пластины, с учетом (1.4) имеем:

$$\overline{u}_x = \overline{u} - \overline{z}\left(s\frac{d\overline{w}}{d\overline{x}} - \chi\varphi\right)$$

$$T=\frac{sH}{2}\left[2\frac{d\bar{u}}{d\bar{x}}+ks\left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}}\right)^2\right]=C_1-\frac{\bar{p}\,\bar{x}}{s}$$

$$N=\frac{1}{6H}\left[H^2\left(4\varphi-\bar{p}\right)+6\gamma sM\right]=C_2-\frac{\bar{q}}{s}\bar{x}-k\bar{p}\bar{w}-ks\left(C_1-\frac{\bar{p}}{s}\bar{x}\right)\frac{d\bar{w}}{dx}$$

$$M=-\frac{sH^3}{12}\left(s\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2}-\chi\frac{d\varphi}{d\bar{x}}\right)=C_3-kC_1\bar{w}+\frac{C_2}{s}\bar{x}-$$

$$-\frac{\bar{q}\,\bar{x}^2}{2s^2}+\frac{k\bar{p}}{s}\bar{x}\,\bar{w}+\frac{\bar{p}\,\bar{x}}{4s}\left(1+H\right)-\frac{2k\bar{p}}{s}\int_0^{\bar{x}}\bar{w}dt \tag{1.5}$$

$$\varphi=\frac{\bar{p}}{4}+\frac{3}{2H^2}(NH-\gamma sM)$$

Коэффициент “k” может принимать значения 0 или 1. Значению 0 соответствует геометрически линейная, а значению 1– нелинейная постановка задачи.

Используя выражения φ и M приходим к уравнению

$$6ks^2\left[\chi Hs^2\left(2\gamma\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}}-H\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}}\right)+2\left(4-\chi\gamma^2s^2\right)\bar{w}\right]C_1-12s\left(\chi\gamma s^2+4\bar{x}\right)C_2-$$

$$-12s^2\left(4-\chi\gamma^2s^2\right)C_3-2s^3H^2\left(2sH-3k\chi\bar{p}\,\bar{x}\right)\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2}-$$

$$-6ks\left\{2\chi\gamma s^2\,\bar{p}\,\bar{x}H\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}}-2p\left[\chi\gamma s^2\left(1+2\gamma\bar{x}\right)-4\bar{x}\right]-4\bar{p}\left(4-\chi\gamma^2s^2\right)\int_0^{\bar{x}}\bar{w}dt\right\}=$$

$$=3\bar{p}s\left[\chi\gamma s^2+4\left(1+H\right)\bar{x}\right]+6\bar{q}\left(\chi s^2-4\bar{x}^2\right) \tag{1.6}$$

Проинтегрировав второе выражение (1.5), получим:

$$\bar{u}=C_4+\frac{C_1\ln H}{\gamma s}-\frac{\bar{p}}{s^2}\frac{\gamma x-\ln H}{\gamma^2}-\frac{ks}{2}\int_0^{\bar{x}}\left(\frac{dw}{dt}\right)^2dt \tag{1.7}$$

Для решения поставленной задачи к интегро-дифференциальным уравнениям (1.6) и (1.7) надо добавить соответствующие краевые условия.

Рассмотрим некоторые, наиболее часто встречающиеся, краевые условия.

а) Оба края срединной плоскости пластины-полосы шарнирно закреплены. Условия равенства нулю прогиба, изгибающего момента и тангенциального перемещения при $\bar{x}=0,\ \bar{x}=1$ принимают вид.

$$\bar{w}\Big|_{\substack{\bar{x}=0\\ \bar{x}=1}}=0,\quad\left(s\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2}-\chi\frac{d\varphi}{d\bar{x}}\right)\Big|_{\substack{\bar{x}=0\\ \bar{x}=1}}=0 \tag{1.8}$$

$$C_4=0,\ C_1=\frac{\bar{p}}{s}\frac{\gamma-\ln\left(1+\gamma\right)}{\gamma\ln\left(1+\gamma\right)}+\frac{k\gamma s^2}{2\ln\left(1+\gamma\right)}\int_0^1\left(\frac{d\bar{w}}{dt}\right)^2dt \tag{1.9}$$

б) Край срединной плоскости $\bar{x}=0$ свободно шарнирно оперт, а край $\bar{x}=1$– шарнирно закреплен. Из условий $T\Big|_{\bar{x}=0}=0$ и $\bar{u}\Big|_{\bar{x}=1}=0$ имеем:

$$C_1=0,\ C_4=\frac{\bar{p}}{s^2}\frac{\gamma-\ln\left(1+\gamma\right)}{\gamma^2}+\frac{ks}{2}\int_0^1\left(\frac{d\bar{w}}{dt}\right)^2dt \tag{1.10}$$

Условия (1.8) сохраняются.

в) Край $\bar{x}=0$ свободен, а край $\bar{x}=1$ заделан. Из условий свободного края $\left(T=N=M=0\right)$ получим:

$$C_1 = 0,\ C_2 = k\bar{p}\bar{w},\ \ C_3 = 0 \tag{1.11}$$

Условия же заделанного края $\left(\bar{u}_x = \bar{w} = 0\right)$ принимают вид

$$C_4 = \frac{\bar{p}}{s^2}\frac{\gamma - \ln(1+\gamma)}{\gamma^2} + \frac{ks}{2}\int_0^1 \left(\frac{d\bar{w}}{dt}\right)^2 dt\ ,\ \left(s\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi\frac{d\varphi}{d\bar{x}}\right)\Bigg|_{\bar{x}=1} = 0 \tag{1.12}$$

$$\bar{w}\Big|_{\bar{x}=1} = 0 \tag{1.13}$$

Возможны и другие краевые условия.

2. Рассмотрим численный пример, когда оба края пластины-полосы шарнирно закреплены. Решение задачи получено по схеме, включающей методы коллокаций и последовательных приближений [2]. При этом принято

$$s = 0.1,\ \ \gamma = 1 \tag{2.1}$$

В табл. 1 и 2 для некоторых вариантов нагрузок представлены максимальные значения безразмерного прогиба $\bar{w}_{\max}$ и координаты сечения $\bar{x}_0$, где получается этот прогиб. Данные таблиц приводят к следующим заключениям относительно влияния учета геометрической нелинейности и поперечных сдвигов на величину максимального прогиба пластины-полосы.

Таблица 1

$\bar{p}$		$\chi = 0$		$\chi = 3$		$\chi = 10$	
		k=0	k=1	k=0	k=1	k=0	k=1
0.0001	$\bar{w}_{\max}$	-0.002561	-0.002557	-0.002753	-0.002749	-0.003203	-0.03197
	$\bar{x}_0$	0.4399	0.4402	0.4383	0.4429	0.4354	0.4422
0.001	$\bar{w}_{\max}$	-0.02561	-0.02529	-0.02753	-0.02716	-0.03203	-0.03151
	$\bar{x}_0$	0.4399	0.4431	0.4383	0.4426	0.4354	0.4422
0.01	$\bar{w}_{\max}$	-0.2561	-0.2583	-0.2753	-0.2896	-0.3203	-0.3190
	$\bar{x}_0$	0.4399	0.4693	0.4383	0.4771	0.4354	0.4978
0.02	$\bar{w}_{\max}$	-0.51228	-0.4822	-0.5507	-0.5472	-0.6406	-0.7086
	$\bar{x}_0$	0.4399	0.495754	0.4383	0.5118	0.4354	0.5534

Таблица 2

$\bar{q}$		$\chi = 0$		$\chi = 3$		$\chi = 10$	
		k=0	k=1	k=0	k=1	k=0	k=1
0.0001	$\bar{w}_{\max}$	0.05122	0.05102	0.05507	0.05480	0.06406	0.06355
	$\bar{x}_0$	0.4399	0.4399	0.4384	0.4384	0.4354	0.4356
0.001	$\bar{w}_{\max}$	0.5122	0.4086	0.5507	0.4247	0.6406	0.4562
	$\bar{x}_0$	0.4399	0.4429	0.4384	0.4428	0.4354	0.4436
0.002	$\bar{w}_{\max}$	1.024	0.6355	1.101	0.6500	1.281	0.6778
	$\bar{x}_0$	0.4399	0.4468	0.4384	0.4479	0.4354	0.4509
0.005	$\bar{w}_{\max}$	2.561	1.009	2.753	1.019	3.203	1.038
	$\bar{x}_0$	0.4399	0.4547	0.4384	0.4573	0.4354	0.4628

а) При действии только горизонтальной нагрузки $\bar{p}$ (табл. 1) с ростом параметра χ (с уменьшением относительного модуля поперечного сдвига) поправка от геометрической нелинейности сначала убывает, а потом начинает расти. Например, в случае $\bar{p} = 0.02$ эта поправка составляет: при $\chi = 0\quad -5{,}9\%$, при $\chi = 3\quad -0.7\%$, а при $\chi = 10\quad 10.6\%$.

б) В случае действия только вертикальной нагрузки $\bar{q}$ (табл. 2) учет геометрической нелинейности уменьшает значения $\bar{w}_{\max}$ при $\bar{q} = 0.005$; $\chi = 0$ на 60.6%, $\chi = 3$ на 63% и $\chi = 10$ на 67%.

в) Если при действии только вертикальной нагрузки учет геометрической нелинейности приводит только к уменьшению максимального прогиба, то этого нельзя сказать для случая действия только горизонтальной нагрузки.

На рис. 2 приведены графики изменения прогиба пластины-полосы по координате $\bar{x}$ для отмеченных вариантов.

Как видно из графиков рис. 2, в рассмотренных случаях суперпозиция решений приводит к существенным погрешностям.

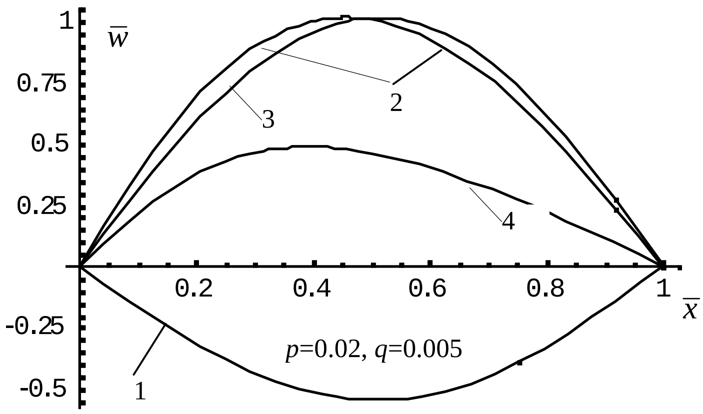


Рис. 2. График прогиба $\bar{w}(\bar{x})$ 1. При действии только нагрузки $\bar{p}$. 2. При действии только нагрузки $\bar{q}$. 3. При совместном действии $\bar{p}$ и $\bar{q}$. 4. Суперпозиция (сумма) нагрузок $\bar{p}$ и $\bar{q}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин.М.: Наука, 1987. 360с.
2. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. К геометрически нелинейной уточненной теории ортотропных пластин переменной толщины. // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т. 60. №4. С. 16-20.
3. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван: Изд. Гитутюн НАН РА, 2000. 122с.

Сведения об авторах

Геворгян Гнун Завенович
Кандидат физ.-мат.наук, старший научный сотрудник Института механики
НАН РА, Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б,
Тел: (+37410) 568188; E-mail: gnungev@freenet.am

Киракосян Размик Макарович
Доктор техн. наук, ведущий научный сотрудник Института механики
НАН РА, Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б,
Тел: (+37410) 568188; E-mail: kiraz@freenet.am

ПОЛЗУЧЕСТЬ УГЛЕРОДИСТЫХ СТАЛЕЙ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Геворкян С.Х., Габриелян Д.С. , Мурадян Л.М.

Настоящая работа посвящена ползучести углеродистых сталей при высоких температурах, когда ползучесть носит кратковременный характер. Кратковременная ползучесть металлов при высоких температурах впервые рассмотрена Ю. Н. Работновым [4], однако отсутствие достаточных экспериментальных исследований не позволило получить реологические зависимости для углеродистых сталей. В дальнейшем в связи с развитием непрерывной разливки стали многими исследователями экспериментально исследованы деформационные характеристики углеродистых сталей при высоких температурах [1-3]. Основываясь на результатах проведенных экспериментальных исследований, нами предлагается аналитическое соотношение, описывающее реологическую зависимость углеродистых сталей при высоких температурах и получены числовые значения параметров аппроксимации.

Не останавливаясь на физических аспектах высокотемпературной ползучести углеродистых сталей, нами предлагается аналитическое выражение, описывающее ползучесть углеродистых сталей при высоких температурах:

$$\dot{\varepsilon}_p = A\left[\sigma\theta^{k_1} + B(1-\theta)^m \sigma^n\right]\frac{\Delta\theta}{1-\theta}\cdot\varphi(\theta) \tag{1}$$

где

$$\theta = \frac{T}{T_C}; \quad \Delta\theta = \frac{T_s\left(KC\right)}{T_L\left(KC\right)} \tag{2}$$

T – температурная функция, T_C – температура солидуса данной марки стали, T_S(КС) – температура солидуса межзеренных границ, соответствующая концентрации углерода (КС), T_L(КС) – температура ликвидуса межзеренных границ для той же концентрации углерода, A, m, n, K_1, K – постоянные для данной марки стали, $\varphi(\theta)$ подбирается для лучшей аппроксимации кривых ползучести для всех марок даннной группы сталей.

Несмотря на многочисленные экспериментальные исследования механических свойств углеродистых сталей [1-5], все еще нет достаточно полных данных о деформации ползучести при одноосном растяжении в интервале температур 900°~1500°. Почти во всех рассмотренных выше экспериментальных исследованиях основным методом испытаний для определения характеристик высокотемпературной ползучести углеродистых сталей приняты испытания с постоянной скоростью деформирования. Имея в распоряжении кривые деформирования при $\dot{\varepsilon} = \mathrm{const}$, мы встретим серьезные трудности при их обработке, отделение пластической деформации от деформации ползучести осуществляется при этом нелегко. В нашем случае мы можем (учитывая принятую точность вычислений в инженерных расчетах и разброс экспериментальных результатов на ползучесть при высоких температурах) упростить обработку кривых деформирования при постоянной скорости деформации.

На рис. (1-5) приведены диаграммы растяжения в температурном интервале (1200°-1475°С) при скоростях деформации, имеющихся в процессе непрерывного литья (10^{-3}-10^{-5} 1/с) для образцов, изготовленных из сляба марки ст. 3, отлитого непрерывным способом. Приведенные диаграммы получены лабораторией НИИТяжмаша ПО Уралмаш. На тех же рисунках приведены несколько кривых испытания при постоянной скорости деформации, полученные Пальмерсом и фирмой Син Нихон Сэйтэцу, которые позволяют дополнить имеющиеся экспериментальные данные и убедиться в достоверности полученных результатов.

Учитывая, что общую деформацию можно представить, как суммы упругой, пластической и деформацией ползучести

$$\varepsilon = \varepsilon_{уп} + \varepsilon_{п} + \varepsilon_{p} \tag{3}$$

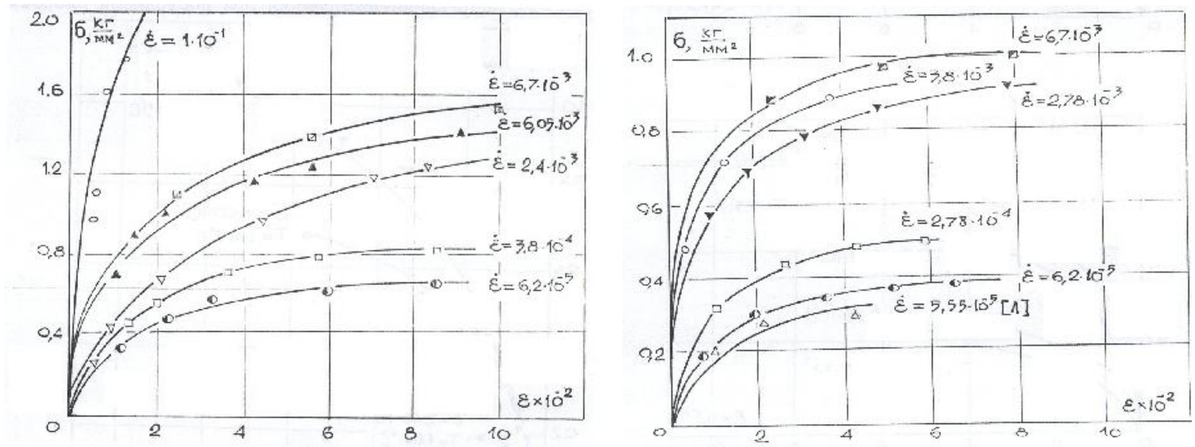
рассмотрим отдельные компоненты полной деформации.

Упругую составляющую можно определить, пользуясь законом Гука

$$\varepsilon_{уп} = \sigma / E(\theta) \tag{4}$$

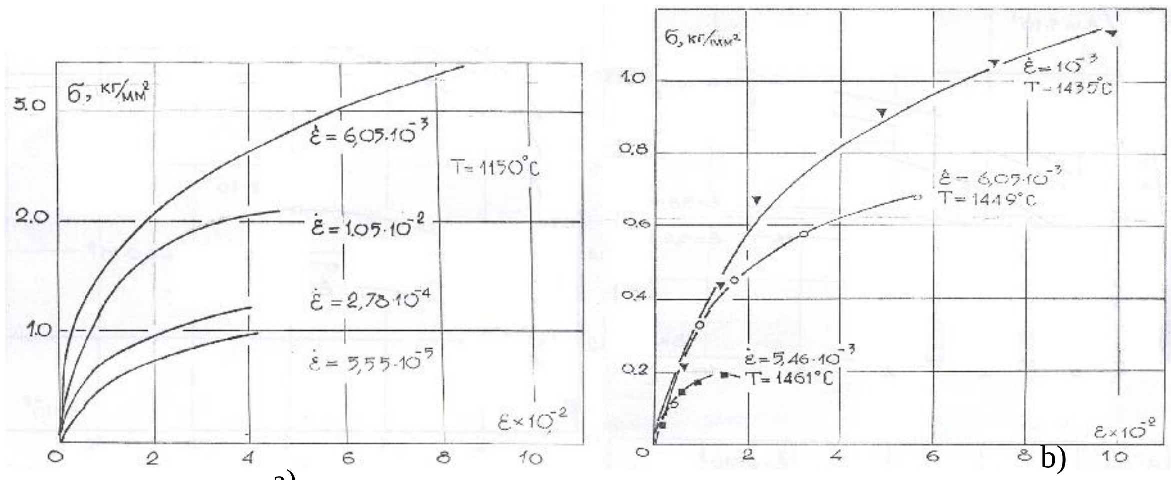
Для определения деформации ползучести рассмотрим классическую кривую ползучести, которая, как известно, делится на три характерных участка:

- первая стадия ползучести характеризуется снижением во времени скорости ползучести,
- вторая стадия ползучести характеризуется постоянной скоростью ползучести;
- третья стадия ползучести характеризуется увеличением ее скорости и разрушением материала. Третью стадию ползучести в дальнейшем рассматривать не будем, так как не представляет практического интереса. Конец второй стадии ползучести можно считать началом процесса разрушения.



a) b)

Рис.1



a) b)

Рис.2

При рассмотрении первой и второй стадии ползучести будем пользоваться усовершенствованной теорией установившейся ползучести, предложенной Одквистом [3]. Согласно этой теории мгновенную пластическую деформацию и деформацию ползучести, соответствующую первой стадии кривой ползучести, объединяют и рассматривают как начальную пластическую деформацию. Обозначая ее через $g(\sigma)$, полную деформацию с учетом (1) представим следующим выражением:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E(\theta)} + \wp g(\sigma,\theta) + A\int_0^t \left[\sigma\theta^{K_1} + B(1-\theta)^n\sigma^m\right]\frac{\Delta\theta}{\theta}\varphi(\theta)dt \qquad (5)$$

Множитель $\wp$ равен единице, если $\dot{\sigma}>0$ и σ имеет значение большее, чем любое из ранее достигнутых значений σ. В противном случае $\wp$ = O.

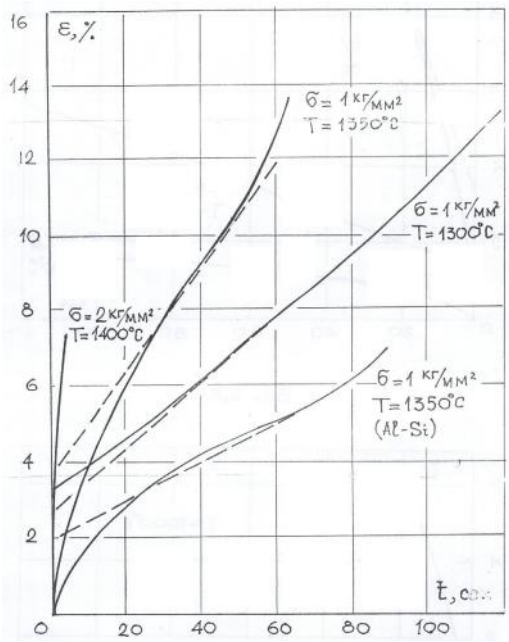


Рис. 3

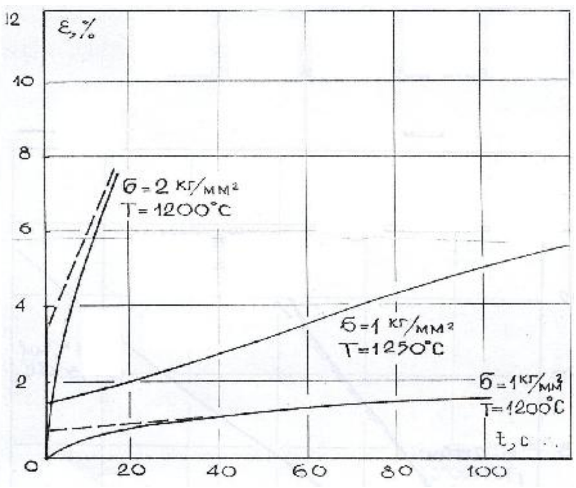


Рис. 4

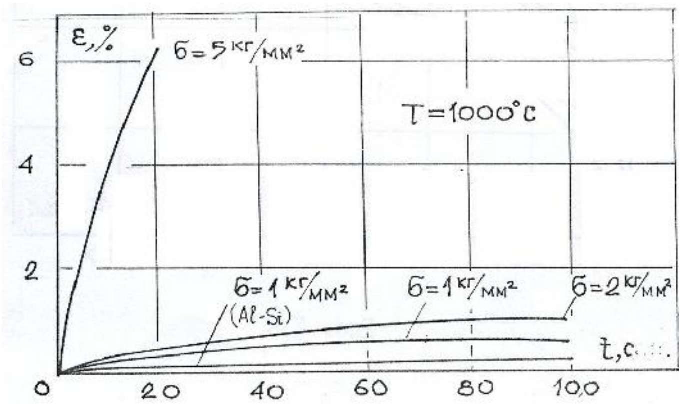


Рис. 5

До определения постоянных, входящих в принятое соотношение воспользуемся результатами экспериментов на ползучесть, проведенными Хирому Фудзи и др.. Часть результатов этих экспериментов приведены на рис.3 и рис.4, где пунктирной линией отмечены принятые допущения для первой стадии ползучести. На основе численной обработки приведенных кривых ползучести и соотношения (5), получаем систему уравнений для определения неизвестных A, B, K_1, n

$$\frac{1.5\cdot 10^{-2}}{\Delta\theta} = A\cdot 0.9^{K_1} + B\cdot 0.1^{n} \quad ; \quad \frac{1.2\cdot 10^{-2}}{\Delta\theta} = A\cdot 0.8^{K_1} + B\cdot 0.2^{n}$$

$$\frac{5\cdot 10^{-2}}{\Delta\theta} = A\cdot 0.867^{K_1} + B\cdot 0.133^{n} \qquad \frac{0.2\cdot 10^{-2}}{\Delta\theta} = A\cdot 0.667^{K_1} + B\cdot 0.33^{n}$$

Исключая из этой системы A и B, получим следующую трансцентную систему уравнений:

$$(3\cdot 0.133^n - 0.1^n)(0.2^n \cdot 0.9^{K_1} - 0.1^n \cdot 0.8^{K_1}) =$$
$$= 3(0.2^n - 0.08\cdot 0.1^n)(0.133^n \cdot 0.9^{K_1} - 0.1^n \cdot 0.867^{K_1})$$
$$25(3\cdot 0.133^n - 0.1^n)(0.33^n \cdot 0.9^{K_1} - 0.1\cdot 0.667^{K_1}) =$$
$$= (75\cdot 0.33^n - 0.1^n)(0.133^n \cdot 0.9^{K_1} - 0.1^n \cdot 0.867^{K_1})$$

Решая полученную систему уравнений численным методом, получаем значения n и K_1: n = 6, $K_1 = 3$, а в дальнейшем определяем остальные постоянные аппроксимации: A = 3.5384, B = 1, m = 15.

Учитывая характер зависимости начальной упруго-пластической деформации от напряжения и температуры, для функции $g(\sigma,\theta)$ выбираем следующее аппроксимирующее выражение:

$$g(\sigma,\theta) = A_1\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{K_2}\left[1-\theta + C(1-\theta)^2 + D(1-\theta)^3\right]$$

Значения постоянных A_1, K_2, C, D определяем, используя имеющиеся кривые ползучести.

$A_1 = 81.3$, C = -17.435, D =12.083, $K_2 = 3$

Задача определения параметров аппроксимации нами рассмотрена и в другой постановке. Строится выражение функционала в виде квадрата разности аппроксимирующего выражения и экспериментальных данных для дискретных значений температуры и напряжения. В дальнейшем методом Полака-Рибьера определяются значения параметров аппроксимации, придающие минимальное значение построенному функционалу.

Проведенные вычисления выявили две области существования минимума данного функционала.

Окончательно, для сложного напряженного состояния соотношения между компонентами напряжений и компонентами скоростей деформации можно представить следующими выражениями:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = (\alpha T)\delta_{ij} + (\dot{\sigma}_{ij} - \nu S)K_1(\theta) + (\sigma_{ij} - \nu S)K_2(\theta) + (\sigma_{ij} - \nu S)\sigma_i{}^2 K_3(\theta)$$

$$K_1(\theta) = \frac{1}{E(\theta)} + z_1(\theta - 0.5)^{z_5'} + z_2(1-\theta)^{z_3'}\,,\quad S = \sum \sigma_{ij}\delta_{ij}$$

$$K_2(\theta) = \left[z_1 - \frac{E,\theta}{E^2(\theta)}\right]\dot{\theta} + z_1'\theta^{z_5'}\,,\quad \sigma = \frac{S}{3}$$

$$K_3(\theta) = z_2'(1-\theta)^{z_3'}\,.$$

$$z_1 = 5.333\cdot 10^4\,,\ z_1' = 2.542\cdot 10^4\,,\ z_2 = 0.709\cdot 10^4\,,$$

$$z_2' = 1.04\,,\ z_3 = 7\,;\ z_3' = 5\,,\ z_5' = 15\cdot 10^4\,.$$

δ_{ij} - символ Кронекера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Р. А. Проблема высокотемпературной ползучести и разрушения в современных инженерных приложениях. // Научно-технические ведомости СПбГТУ. 2003. 3(33). С. 155 -160.
2. Баландин Г.Ф. Основы теории формирования отливки. М.: Машиностроение, 1979. Ч. П. 335 с.
3. Пальмерс А., Этьен, Миньон. Расчеты механических и термических напряжений в непрерывнолитой заготовке. //Черные металлы. 1979. 19. С.3-11.
4. Работнов Ю.И. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
5. Шестериков С.А., Лукашенко Л.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. //Итоги науки и техники. Сер. Мех. деф. твер. тела. 1980. Т.13. С.3-186.

Сведения об авторах:

Геворкян Сурен Хикарович
Доктор техн. наук, профессор, Государственный инженерный университет Армении
Адрес: Ереван, ул. Теряна 105
Тел: (+03741) 52-49-67; E-mail: xikap@web.am

Габриелян Давид Самвелович
Аспирант, Государственный инженерный университет Армении

Мурадян Левон Мурадович.
К.т.н. доцент, Государственный инженерный университет Армении

РОЛЬ ТОНКИХ ВЯЗКОУПРУГИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

Горячева И.Г.

Свойства поверхности и тонких поверхностных слоев, которые в большинстве случаев отличаются от свойств основного материала, оказывают существенное влияние на процессы трения и изнашивания в подвижных сопряжениях. Экспериментально наблюдаемая зависимость силы трения от скорости часто является проявлением несовершенной упругости не самих взаимодействующих тел, а тонких поверхностных слоёв, их покрывающих. Взаимодействие поверхностей, покрытых тонкими твёрдыми слоями или плёнками, исследуется путём анализа контактных задач для слоистых сред. При этом реологические свойства поверхностных слоёв учитываются при постановке контактных задач путём моделирования поверхностного слоя вязкоупругой средой [1-3].

Ниже приведены решения двух контактных задач, которые позволяют изучить совместный эффект несовершенной упругости поверхностного слоя и шероховатости индентора при скольжении упругих тел, и влияние тонкого поверхностного слоя на характеристики контактного взаимодействия при качении упругих тел, разделенных жидким смазочным материалом.

1. Скольжение шероховатого упругого индентора по вязкоупругому слою, сцепленному с упругим основанием

Постановка задачи. Схема контакта шероховатого упругого индентора с упругой полуплоскостью, имеющей на поверхности тонкий вязкоупругий слой толщины h, изображена на рис. 1. Форма индентора описывается периодической (с периодом l) гладкой функцией $f(x)$, т. е. $f(x) = f(x + l)$ для всех x. Индентор скользит по основанию с постоянной скоростью V и находится под действием нагрузки на период P.

При равномерном движении цилиндра движение среды можно считать установившимся по отношению к подвижной системе координат (x, y), связанной с движущимся цилиндром. В этой системе координат смещения и напряжения не зависят явно от времени t и являются функциями координат (x, y).

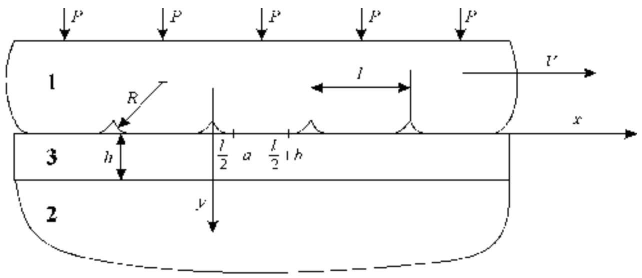


Рис. 1. Схема скольжения шероховатого индентора по границе слоя, сцепленного с основанием

Исследуются одномерные модели поверхностного слоя, для которых давление не меняется по толщине слоя, т. е. $p(x, y) = p(x, 0) = p(x, h) = p(x)$ для всех $y \in [0, h]$ и предполагается, что тангенциальные напряжения не влияют на распределение давлений. Тогда справедливо следующее соотношение между нормальными упругими перемещениями v_i граничных точек индентора ($i = 1$) и полуплоскости ($i = 2$) и давлениями $p(x)$, распределёнными периодически внутри площадок контакта $[(2n + 1)l/2 - a, (2n + 1)l/2 + b]$, ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$) (см. [4])

$$v_1(x) + v_2(x) = -\frac{2}{\pi E^*} \int\limits_{l/2-a}^{l/2+b} p(x') \ln\left| 2\sin\left[\frac{\pi(x'-x)}{l}\right]\right| dx' \qquad (1.1)$$

где $E^* = \left(\dfrac{1-\nu_1^2}{E_1} + \dfrac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)^{-1}$ — эквивалентный модуль упругости.

В силу гладкости индентора и периодичности задачи контактное давление $p(x)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$p\left(\frac{l}{2} - a\right) = p\left(\frac{l}{2} + b\right) = 0, \quad p(x) = p(x + l) \qquad (1.2)$$

Кроме того, внутри площадок контакта выполняется условие

$$v_1(x)+v_2(x)+v_3(x)=D-f(x) \tag{1.3}$$

где D – сближение тел при их нагружении, v_3 – смещение по нормали границы слоя вследствие его деформирования.

Предполагается, что слой сцеплен с полуплоскостью и на границе раздела $y = h$ имеют место следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} &u(x,h^-)=u(x,h^+), \quad v(x,h^-)=v(x,h^+) \\ &p(x,h^-)=p(x,h^+), \quad \tau(x,h^-)=\tau(x,h^+) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Метод решения и основные результаты. Рассмотрим в качестве одномерной модели слоя тело Кельвина, обладающее ограниченной ползучестью. В рамках этой модели упругие перемещения слоя v_3 связаны с контактным давлением $p(x)$ в подвижной системе координат (x, y) соотношением

$$v_3-T_\varepsilon V\frac{\partial v_3}{\partial x}=\frac{h}{E_L}\left(p-T_\sigma V\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{1.5}$$

где T_ε и T_σ — времена последействия и релаксации, E_L — длительный модуль упругости. Решением уравнения (1.5) на ненагруженных участках, где $p(x) = 0$, т. е. при $x \in [-l/2 + b, l/2 - a]$ является функция $v_3=v_0\exp\left(\dfrac{x}{T_\varepsilon V}\right)$ которая должна удовлетворять условию контактирования (1.3) при $x = l/2 - a$ и $x = l/2 + b$ и условию периодичности $v_3(x)=v_3(x+l)$.

Решая уравнение (1.5) в области контакта $x \in [l/2 - a, l/2 + b]$ и используя соотношения (1.1) - (1.3), получим (см.[5]) следующее интегро-дифференциальное уравнение относительно безразмерной функции контактного давления $\tilde{p}(\xi)=\dfrac{2}{\pi E^*}\,p\left(\dfrac{b-a+l}{2}+\dfrac{a+b}{2}\xi\right)$

$$\int_{-1}^{1}\tilde{p}(\xi')H(\xi,\xi')d\xi'-\frac{\beta_\varepsilon}{L}\tilde{p}(\xi)+\frac{\beta_\varepsilon}{L\zeta_0\alpha_T}\tilde{p}'(\xi)=G(\xi) \tag{1.6}$$

где

$$\beta_\varepsilon=\frac{h\pi E^*}{2RE_L}, \quad \alpha_T=\frac{T_\varepsilon}{T_\sigma}, \quad \zeta_0=\frac{a+b}{2VT_\varepsilon} \tag{1.7}$$

а ядро $H(\xi, \xi')$ и функция $G(¶)$ имеют вид:

$$H(\xi,\xi')=\ln\left|2\sin\frac{\pi L}{2\tilde{l}}(\xi'-\xi)\right|+\frac{\pi L}{2\zeta_0\tilde{l}}\operatorname{ctg}\frac{\pi L}{2\tilde{l}}(\xi'-\xi)+$$

$$+\frac{\ln\left|2\sin\dfrac{\pi L}{2\tilde{l}}(1-\xi')\right|\exp\left(2\zeta_0\left(\dfrac{\tilde{l}}{L}-1\right)\right)-\ln\left|2\sin\dfrac{\pi L}{2\tilde{l}}(1+\xi')\right|}{1-\exp\left(2\zeta_0\left(\dfrac{\tilde{l}}{L}-1\right)\right)}$$

$$G(\xi)=\frac{L}{2}\xi^2+L\xi\left(\varepsilon-\frac{1}{\zeta_0}\right)-\frac{L\varepsilon}{\zeta_0}-\frac{L}{2}(1+2\varepsilon)+\frac{2\varepsilon L}{1-\exp\left(2\zeta_0\left(\dfrac{\tilde{l}}{L}-1\right)\right)}$$

Первое соотношение (1.2) и уравнение равновесия в безразмерном виде запишутся как

$$\tilde{p}(-1)=\tilde{p}(1)=0, \quad \int_{-1}^{1}\tilde{p}(\xi)d\xi=\tilde{P} \tag{1.8}$$

Линейное интегро-дифференциальное уравнение (1.6) и соотношения (1.8) используются для определения распределения безразмерного контактного давления $\tilde{p}(\xi)\,(-1 \le \xi \le 1)$ и безразмерных ширины L и смещения ε площадки контакта для слоя, деформационные свойства которого описываются соотношением (1.5). Численное решение уравнений осуществлялось путём сведения их к линейной алгебраической системе, которая, в свою очередь, решалась методом итераций (см. [3,5]).

Распределение тангенциальных напряжений при $\xi \in [-1, 1]$, т. е. в области контакта, определяется соотношением $q(\xi) = \mu\tilde{p}(\xi)$, где μ — коэффициент трения. Заметим, что решение задачи в случае вязкоупругого слоя, моделируемого телом Максвелла, приведено в [3].

Полученные выше соотношения были использованы для анализа совместного влияния свойств тонкого поверхностного слоя и параметров микрогеометрии поверхности на распределение контактных давлений, размер и смещение зоны контакта, а также величину деформационной составляющей силы трения. Проведённый анализ показал, что характер зависимости деформационной составляющей коэффициента трения от скорости определяется реологическими свойствами поверхностного слоя, в частности, той моделью, которая выбрана для описания этих свойств. При использовании модели Кельвина эта зависимость немонотонна, при этом максимальное значение коэффициента трения достигается при скоростях движения, при которых время прохождения индентором элементарного пятна контакта соизмеримо со временем запаздывания материала поверхностного слоя. Результаты исследования также указывают на существенное влияние параметров микрогеометрии поверхности и свойств поверхностного слоя на распределение напряжений внутри упругих тел. Это обстоятельство должно учитываться при оценке вероятности начала разрушения при трении шероховатых тел.

2. Контакт качения со смазкой при наличии тонкого вязкоупругого поверхностного слоя

В этом разделе рассматривается качение двух упругих цилиндров (рис.2), содержащих на поверхности слои, моделируемые вязкоупругими телами, и разделенных слоем смазки. Такая модель дает возможность изучить совместное влияние объемных свойств жидкости, а также свойств тонких поверхностных пленок на характеристики контактного взаимодействия и коэффициент трения при различных условиях взаимодействия (скорость относительного проскальзывания, нагрузка и т.д.).

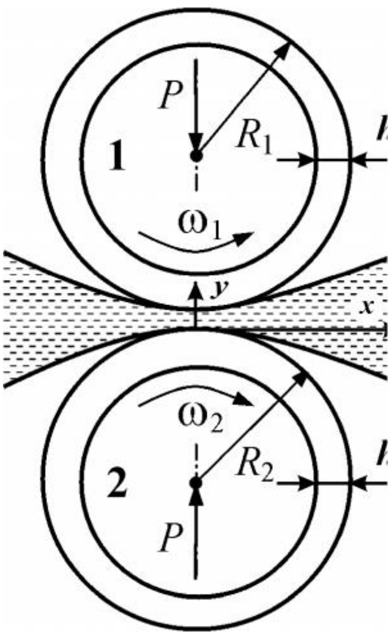


Рис.2 Схема контакта двух цилиндров, разделенных смазочным материалом

Постановка задачи. Для описания податливости поверхностных слоев используется одномерная модель Максвелла, для которой справедливо следующее соотношение между давлением p и смещением по нормали v^L:

$$\frac{dv^L}{dt} = \frac{h}{E_n}\left(\frac{p}{T_n} + \frac{dp}{dt}\right) \tag{2.1}$$

где E_n и T_n – модуль упругости и коэффициент релаксации материала слоя, h – его толщина.

Течение вязкой жидкости между поверхностями, движущимися со скоростями V_1 и V_2, описывается уравнением Рейнольдса:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{H^3}{\text{¦}} \cdot \frac{dp}{dx}\right) = 6(V_1 + V_2)\frac{dH}{dx} \tag{2.2}$$

с граничными условиями $p(-\infty) = p(b) = 0, \quad \left.\frac{dp}{dx}\right|_{x=b} = 0$.

Здесь $H(x)$ – толщина пленки жидкости, ¦ – вязкость жидкости, b – точка выхода.

Внутри области взаимодействия толщина пленки смазки определяется выражением:

$$H(x) = H(b) + \frac{x^2 - b^2}{2R} + v(x) - v(b) + v^L(x) - v^L(b) \tag{2.3}$$

где $v(x)=v_1(x)+v_2(x)$, $v_i(x)$ – перемещения по нормали поверхностей упругих цилиндров (R – их приведенный радиус), для определения которых используется модель изотропного линейного упругого полупространства.

Метод решения и основные результаты. Приведенная выше система уравнений (2.1) - (2.3) совместно с уравнением равновесия и граничными условиями была преобразована в [3,6] к одному нелинейному интегральному уравнению для определения толщины пленки смазки и двум соотношениям для определения точки выхода b и толщины пленки смазки при $dp/dx = 0$. Для решения этой системы использовался метод Ньютона-Канторовича. Неизвестное контактное давление затем определялось путем интегрирования уравнения (2.2).

Анализ решения показал, что контактные характеристики зависят от пяти безразмерных параметров: параметра $\tilde{¦} = 4¦ h/(E_n T_n R)$, характеризующего относительную вязкость жидкости и поверхностного слоя; параметра $= (E_n R)/(2E^* h)$, зависящего от относительного модуля упругости слоя и основания; числа Зоммерфельда $S = ¦ (V_1 + V_2)/P$; скоростного параметра $¥ = (V_1 - V_2)/(V_1 + V_2)$; безразмерной нагрузки $\tilde{P} = P/(E^* R)$. Из результатов расчета следует, что при увеличении вязкости поверхностного слоя распределение давления становится более несимметричным, а толщина пленки смазки выравнивается. Анализ зависимости контактных характеристик от числа Зоммерфельда показал, что при малых числах Зоммерфельда толщина пленки смазки в области контакта близка к постоянной, а распределение давления подобно тому, которое имеет место в несмазанном контакте (режим граничного трения); при больших числах Зоммерфельда распределение давления и профиль смазочного слоя имеют черты, характерные для гидродинамического режима. В отличие от контакта качения однородных упругих цилиндров, разделенных вязкой жидкостью, при наличии вязкоупругого поверхностного слоя имеет место немонотонная зависимость коэффициента трения качения от числа Зоммерфельда: с ростом числа Зоммерфельда коэффициент трения сначала падает, а затем растет. Построенное решение позволяет с единых позиций описать различные режимы трения, имеющие место в контакта реальных тел, и хорошо согласуется с известными экспериментальными результатами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (гранты N 07-01-00282, 06-08-01480 и 06-01-81021-Бел).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ling F.F., Lai W.M. (1980) Surface mechanics of layered media // Solid contact and lubrication / Ed. H.S. Cheng and L.M. Keer. N. Y.: ASME, 1980. No 39. P. 27–50.
2. Kalker J.J. Viscoelastic multilayered cylinders rolling with dry friction // ASME. J. Appl. Mech. 1991. Vol. 58. P. 666–679.
3. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.

4. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1949. 270 с.
5. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Влияние несовершенной упругости поверхностного слоя на контактные характеристики при скольжении шероховатых упругих тел.// Трение и износ. 1997. Т.18. Вып.1. С.5-12.
6. Goryacheva I.G., Sadeghi F., Xu C. Viscoelastic effects in lubricated contacts. // Wear, 1996, Vol.198, No 1. P.307-312

<u>Сведения об авторе</u>

Горячева Ирина Георгиевна

Академик РАН, профессор, доктор физ.-мат. наук, заведующая лабораторией трибологии Института проблем механики РАН
Адрес: пр-т Вернадского, 101, корп. 1, Москва, 119526, Россия
Тел: (095) 434- 36-92; E-mail: goryache@ipmnet.ru

ПРОБЛЕМЫ ПОСЛЕДНИХ СТАДИЙ ЭВОЛЮЦИИ ЗВЁЗД И ДИНАМИКИ ВСЕЛЕННОЙ

Григорян С.С.

На основе классических законов механики, закона всемирного тяготения И. Ньютона и современной теории элементарных частиц построены простые модели статики и динамики предвзрывной стадии эволюции звёзд, формирования после их взрывов нейтронных звёзд и «чёрных дыр» и в рамках этих моделей решены в простом виде возникающие принципиальные задачи. В их числе: задача о квазистатическом росте ядра из «выгоревшей» материи (из железа) достаточно массивной звезды, достижения там неустойчивого состояния, динамического коллапса этого ядра с образованием компактного тела из нейтронной материи и «сбросом» наружу внешних газовых слоёв звезды (взрыв сверхновой звезды); задача о квазистатическом росте массы и размеров нейтронной звезды за счёт захвата (аккреции) ею газо-пылевой материи из близко расположенных источников (гравитационного «высасывания» газа из «нормальной» газовой компоненты в случае тесной двойной звёздной системы (нейтронная и обычная звёзды) или из близких газо-пылевых облаков; задача о достижении критических значений массы и размеров нейтронной звезды при достижении в её центре порогового давления – возникновении критического неустойчивого состояния и задача о динамическом коллапсе из этого состояния с образованием устойчивой нейтронно-кварковой конфигурации (кваркового ядра, окружённого нейтронной мантией); задача о столкновениях тёмных звёзд (нейтронных и нейтронно-кварковых) друг с другом или с обычными звёздами в плотных по «населению» ядрах звёздных скоплений и галактик, в процессе которых образуются ударные волны сжатия с сильным нагревом материи (в начальной стадии соударения) и ударные волны разрежения (на последующей стадии соударения), также порождающие интенсивный (дополнительный) нагрев материи, и задача о разлёте этой нагретой материи в формирующихся на второй стадии высокоскоростных дисковых струях и более медленно разлетающейся общей оболочке из газо-фотонной «смеси»; вывод о неизбежном достижении в разлетающейся массе при её квазиадиабатическом расширении и «высвечивании» фотонов и высокоэнергетических частиц (образующих, в частности, «космические лучи») температурных условий для возникновения массовой рекомбинации водорода.

Полученными результатами установлен физический механизм циркуляции водорода во Вселенной – основной материи в ней в неограниченном во времени процессе формирования газовых сгустков (за счёт самогравитации резко неоднородного распределения материи по пространству и её постоянного движения), их гравитационного сжатия с образованием обычных (светящих) звёзд, эволюцией последних с излучением энергии и массы за счёт протекания в них термоядерных реакций с последовательным синтезом всё более «тяжелых» химических элементов – вплоть до железа, последующим формированием «белых карликов» (при малых начальных массах сгустков) или взрывным их разрушением (явление сверхновой) с образованием нейтронных или нейтронно-кварковых «холодных» звёзд, их динамическими взаимодействиями в ядрах звёздных скоплений и галактик, приводящими к их взрывному распаду и разлёту сильно нагретой при этом материи с возникновением в ней процесса массовой рекомбинации водорода – возврата материи в «исходное» её состояние.

Полученные результаты позволяют дать рациональное объяснение всех наблюдаемых астро-физических феноменов и решить в простом виде соответствующие астрофизические и космологические проблемы – всё это в рамках классической науки о природе, без обращения к Общей теории относительности А. Эйнштейна (его теории гравитации), которая при её применении для решения тех же задач неизбежно приводит к физически недопустимым математическим сингулярностям в решениях этих задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С.С. О природе наблюдаемых во Вселенной «чёрных дыр». Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. //Труды 5-й Международной конференции. 1-7 октября 2005. Горис. Армения.
2. Григорян С.С. О природе наблюдаемых во Вселенной «чёрных дыр» и динамике Вселенной. //Доклады РАН. 2007 (в печати).
3. Григорян С.С. О природе наблюдаемых во Вселенной «чёрных дыр» и динамике Вселенной. //Изв. НАН Армении. Механика. 2007 (в печати).

<u>Сведения об авторе</u>

Григорян Самвел Самвелович
Академик РАН и НАН РА, профессор, доктор физ.-мат. наук, зав. Лабораторией Института механики МГУ
Адрес: 119296, Москва, Университетский проспект, д. 9, кв. 289
Тел. +7(495) 9380452 (д.), +7(495) 9391255 (сл.)
Факс: +7(495) 9391252, +7(495) 9392065; E-mail: grigor@imec.msu.ru

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ЗАДАЧ КИНЕМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ СИСТЕМ

Гукасян А.А., Айрапетян В.В., Мачкалян Р.Н.

В докладе приводятся некоторые кинематические модели манипуляционных роботов и задачи кинематического управления. Приведены постановки задач кинематического управления для рассмотренных кинематических моделей, как с жесткими, так и с упругими свойствами. Получены выражения управляющих функций, обеспечивающие движения манипуляторов по разным критериям качества.

Исследования показывают, что упругая податливость конструкций манипуляторов во многих случаях обусловлена упругостью соединительных узлов [1,2].

При исследованиях кинематики движения многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами и абсолютно жесткими звеньями вводятся три группы координат. Первая группа описывает изменение конфигурации манипулятора в пространстве и включает в себя углы в шарнирах и относительные перемещения звеньев. Вторая группа координат определяет положения характерных точек манипулятора в пространстве. Третья группа – дополнительные обобщенные координаты, которые характеризуют упругость соединительных узлов конструкции манипулятора [1,2]. Обычно при исследовании движения упругой модели манипулятора предполагается, что жесткость соединительных узлов велика, а отклонения звеньев, обусловленные упругостью шарниров, – малые величины [2].

Исследована кинематика пространственного движения многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами, звенья которого считаются абсолютно твердыми телами, а соединительные узлы содержат упругие элементы большой жесткости. Кинематическая модель упругого манипулятора получена в рамках жесткой модели путем введения дополнительного вектора, который зависит от обобщенных координат, описывающих упругость узлов. Получены выражения для скоростей и ускорений движения характерных точек манипулятора, в которых отделены слагаемые, зависящие от упругих свойств узлов манипулятора. Эти слагаемые позволяют оценить влияние упругости узлов на кинематические характеристики движения манипулятора [3].

Рассмотрена кинематика пространственного движения двухзвенного манипулятора с упругими соединительными узлами. Определены векторы скорости и ускорения движения схвата, а также их модули и направляющие косинусы в зависимости от упругих характеристик звеньев. Дана общая оценка параметров манипулятора, откуда видно, что предположение о большой жесткости и малости упругих смещений эквивалентно предположению о малости отношения периода низшего тона собственных колебаний к характерному времени движения схвата.

Положение инерционных элементов манипулятора, а также их скорость и ускорение движений в пространстве во многих случаях более удобно определять с помощью некоторых криволинейных координат. В общем случае рассмотрена кинематика многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами в криволинейной системе координат. Криволинейные координаты зависят, как от обобщенных координат, описывающих изменение конфигурации манипулятора в пространстве, так и от дополнительных обобщенных координат, характеризующух упругость узлов. Для определения кинематических характеристик манипулятора введена обобщенная матрица Лямэ, элементы которой зависят от коэффициентов Лямэ и обобщенных координат манипулятора. С его помощью векторы скорости и ускорения записаны в компактной матричной форме. В выражениях скорости и ускорения характерных точек манипулятора разделены слагаемые, зависящие от упругих характеристик звеньев. Рассмотрена кинематика движения двухзвенного манипулятора с одним упругим соединительным узлом в цилиндрической системе координат. Определены элементы обобщенной матрицы Лямэ и получены проекции вектора скорости движения схвата, которые зависят от упругих свойств узла.

Для многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами исследована задача кинематического управления движения схвата по нестационарной траектории с заданной скоростью. Задача рассмотрена в двух случаях, когда число обобщенных координат равна числу уравнений, определяющих программу движения схвата и в случае, когда число обобщенных координат манипулятора больше числа уравнений, определяющих программу движения схвата. В последнем случае ставится дополнительное условие оптимальности и показано, что задача оптимального кинематического управления движением схвата манипулятора сводится к задаче условного экстремума. Задача исследована методом неопределенных множителей Лагранжа. Составлен расширенный функционал и получены необходимые условия минимума, из которых получаются оптимальные управляющие функции в зависимости от неопределенных множителей Лагранжа. Представлены явные выражения для множителей Лагранжа и получены обобщенные скорости манипулятора как управляющие функции, обеспечивающие оптимальное движение схвата по заданной траектории с заданной скоростью [4,5,6].

Рассмотрена задача кинематического управления движения схвата двухзвенного манипулятора с упругими соединительными узлами. Траектория движения схвата является пересечением двух нестационарных поверхностей. Получены управляющие функции в зависимости от обобщенных координат, а также от дополнительных обобщенных координат и скоростей, обусловленных упругостью соединительных узлов [7].

Для многозвенного манипулятора с идеальными соединительными узлами рассмотрена задача кинематического управления с приведением схвата в конечное положение с заданной точностью. Математическое содержание задачи управления манипулятором сводится к определению таких значений кинематических переменных, при которых испольнительный механизм принимает требуемое положение в пространстве и при этом обеспечивая асимптотическую устойчивость движения. Представлена структурная схема системы управления [3,9].

В качестве применения алгоритма управления рассмотрена задача кинематического управления движением схвата трехзвенного манипулятора. Получены управляющие функции, которые обеспечивают перемещение схвата манипулятора в заданное положение с заданной точностью по асимптотически устойчивой траектории [5,8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н. Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы М.: Наука, 1989.
2. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Гукасян А.А., Вешников В.Б., Самвелян К.В., Степанов В.П., Шушко Д.А. Анализ упругой податливости конструкции манипуляционных роботов. /Препринт N231. ИПМ АН СССР. М.:1984. 66 с.
3. Крутько И.Д., Попов Е.П. Кинематические алгоритмы управления движением манипуляционных роботов.// Техническая кибернетика 1979. №4. С.77-86.
4. Гукасян А.А., Мачкалян Р.Н. Кинематическое управление движением схвата манипулятора с упругими соединительными узлами. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. / V Международная конференция. Ереван: “Гитутюн” НАН РА, 2005. С.169-172.
5. Мачкалян Р.Н. Устойчивое движение схвата двухзвенного манипулятора по заданной программе. Механика. /Материалы XII Республиканской конференции молодых ученых. Ереван: 2003. С.114-118.
6. Мачкалян Р.Н. Об одном алгоритме кинематического управления схвата манипулятора по заданной программе. /В сб. статей молодых ученых: ЕГУ, 2000. №2. С.13-16.
7. Мачкалян Р.Н. Одна задача кинематического управления движением схвата двухзвенного манипулятора с упругими соединительными узлами. //АГПУ. Ученые записки. 2005. №2. С.13-19.
8. Мачкалян Р.Н. Кинематическое управление положением схвата трехзвенного манипулятора. Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем. /В сб. научных трудов конференции. Ереван: 2002. С.63-68.
9. Гукасян А.А., Багдасарян А.В. Об устойчивости движения управляемой системы по заданному фазовому многообразию. //Изв. НАН Армении. Механика. 1998. Т.51. №1. С.70-74.

<u>Сведения об авторах:</u>

Гукасян Артуш Апресович
Доктор физ.-мат. наук, профессор, ректор АГПУ им. Х.Абовяна
Тел. (+37410) 52-64-01; E-mail rektor@nt.am

Айрапетян Ваге Вазгенович
Кандидат физ.-мат. наук, ЕГУ кафедра теоретической механики
Тел. (+37410) 66-85-17; E-mail vahiko@yahoo.com

Мачкалян Рипсиме Никитична
Тел. (+37410) 25-74-57; E-mail ripso2007@yandex.ru

О КОЛЕБАНИЯХ ТОНКОСТЕННОЙ УПРУГОЙ КОНСТРУКЦИИ ИЗ НЕЗАМКНУТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СО СВОБОДНЫМ И ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННЫМ ГРАНИЧНЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ

Гулгазарян Г.Р., Срапионян Дж.Л.

Введение. У свободного края тонкостенных упругих конструкций оболочечного типа происходят трансформации одного типа волнового движения в другой. При трансформации волн, с учетом геометрических и механических параметров оболочечной конструкции со свободными краями, возникают сложные картины распределения частот собственных колебаний [1,2].

В настоящей работе получены дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот возможных типов колебаний для тонкостенной упругой конструкции оболочечного типа, составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек со свободными и жестко защемленными граничными образующими, и оболочечной конструкции, составленной из ортотропных одинаковых незамкнутых круговых конечных цилиндрических оболочек со свободными и жестко защемленными граничными образующими при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных направляющих. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для ортотропной пластины–полосы и прямоугольной пластины соответственно. Предполагается, что образующие ортогональны краям оболочечной конструкции.

1. Дисперсионные уравнения и асимптотические формулы. Введем на срединной поверхности тонкостенной конструкции криволинейные координаты (α,β) ($-\infty < \alpha < \infty$: если составляющие цилиндрической оболочки бесконечны, $0 \le \alpha \le l$: если цилиндрические оболочки имеют длину l и $0 \le \beta \le \beta_0$) являющиеся соответственно длиной образующей и длиной дуги направляющей кривой (рис. 1 и 2). Обозначим через s длину одной арки цилиндрической оболочки срединной поверхности. В частности, при $\beta_0 = s$ имеем цилиндрическую оболочку открытого профиля. На линиях раздела цилиндрических оболочек кривизна направляющей кривой срединной поверхности имеет устранимые особенности. Строгое использование системы уравнений, соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, связано с введением промежуточных сопрягающих элементов, обеспечивающих непрерывность перемещений вектора точки срединной поверхности. Однако выполнение таких строгих сопряжений связано с произволом при задании вида сопрягающего элемента,

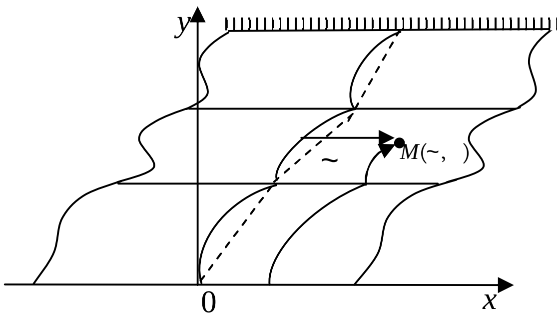


Рис.1

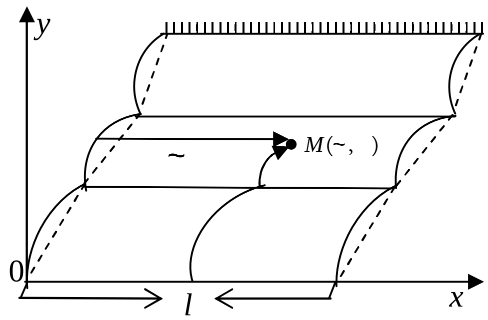


Рис.2

что существенно усложняет расчеты, особенно при исследовании конструкций, состоящих из большого числа цилиндрических оболочек (см. [3], стр. 56). Исходя из этого, здесь, вместо введения сопрягающих элементов, кривизна направляющей кривой конструкции оболочечного типа заменяется соответствующим рядом Фурье с периодом s и применяются динамические уравнения классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, записанные в выбранных криволинейных координатах ~,

$$\sum_{j=1}^{3}\left(« ^4 n_{ij} + l_{ij} \right) u_j = ª u_i \, , \; i = \overline{1,3}; \; « ^4 = h^2 / 12 \qquad (1)$$

Здесь h – толщина оболочки, (u_1, u_2, u_3) – вектор перемещений, n_{ij} и l_{ij}, $i, j = \overline{1,3}$ – дифференциальные операторы, явный вид которых можно найти в [4]. $ª = \mu^2 °$, где ω – угловая частота собственных колебаний, ° – плотность материала.

Ряд Фурье кривизны направляющей кривой такой оболочечной конструкции имеет постоянную сумму R^{-1} при $-\infty < \quad < \infty$, где R – радиус составляющих цилиндрических оболочек срединной поверхности. Обозначим $k = 2® n_0 / l,\ n_0 \in N$, если конструкция составлена из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек, где l – произвольное положительное число или $k = ® / l$, если составляющие цилиндрической оболочки имеют длину l и $R^{-1} = kr_0/2$. Рассматриваются следующие граничные условия [4]:

$$S_{21}\big|_{\beta=0} = T_2\big|_{\beta=0} = N_2 + \frac{\partial H}{\partial \alpha}\bigg|_{\beta=0} = M_2\big|_{\beta=0} = 0 \tag{2}$$

$$u_1\big|_{\beta=\beta_0} = u_2\big|_{\beta=\beta_0} = u_3\big|_{\beta=\beta_0} = \frac{\partial u_3}{\partial \beta}\bigg|_{\beta=\beta_0} = 0 \tag{3}$$

$$u_i(\alpha + 2\pi / k, \beta) = u_i(\alpha, \beta),\ i = \overline{1,3} \tag{4}$$

$$T_1\big|_{\alpha=0,l} = u_2\big|_{\alpha=0,l} = u_3\big|_{\alpha=0,l} = M_1\big|_{\alpha=0,l} = 0 \tag{5}$$

Граничные условия (2)-(4) соответствуют конструкции оболочечного типа, составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек: соотношения (2) выражают условия свободного края при $\ = 0$, соотношения (3) – условия жесткого защемления при $\ = \ _0$, а условия (4) являются условиями волнообразности колебания (рис. 1). Граничные условия (2),(3),(5) соответствуют конструкции оболочечного типа, составленной из ортотропных одинаковых незамкнутых круговых конечных цилиндрических оболочек: соотношения (5) являются условиями шарнирного закрепления по граничным направляющим $\sim = 0$ и $\sim = l$ (рис. 2).

В первом, втором и третьем уравнениях системы (1.1) (при постоянной кривизне, R^{-1}) спектральный параметр λ формально заменим на λ_1 , λ_2 , λ_3 соответственно и решение системы (1) ищем в виде

$$(u_1, u_2, u_3) = (u_{cn} \cos kn\sim,\ v_{sn} \sin kn\sim,\ \sin kn\sim) \exp(k¡\ \ ),\quad n = \overline{1, +\infty} \tag{6}$$

где n - волновое число, u_{cn}, v_{sn} неопределенные коэффициенты и ¡ -неопределенный коэффициент затухания. При этом условия (4) и (5) выполняются автоматически и поставленные задачи решаются аналогичным образом, придавая параметру k разные значения. Подставляя (6) в (1), получим

$$\begin{gathered} R_{nn}c_n + \frac{r_0^2}{4}\left\{ c_n - b_n\chi^2 + \frac{B_{12}}{B_{22}} n^2 a_n + a^2 (R_{nn} g_n d_n + 2\chi^2 l_n b_n) + \right. \\ \left. + \frac{r_0^2}{4} a^2 d_n \left(b_n - \frac{B_{12}}{B_{11}} n^2\right) - a^4 \chi^2 g_n l_n^2 \right\} = 0 \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} c_n = \frac{B_{22}}{B_{11}}\chi^4 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} n^2\chi^2 + \left(\frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_1^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_2^2\right)\chi^2 + \\ + \left(n^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_1^2\right)\left(n^2 - \eta_2^2\right), \quad a_n = -\left(\frac{B_{22}}{B_{11}}\chi^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} n^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}}\eta_2^2\right) \end{gathered}$$

$$b_n = \frac{B_{22}}{B_{11}}¡^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} n^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}}¦_1^2,\ l_n = \chi^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} n^2 \tag{8}$$

$$g_n = \frac{B_{22}}{B_{11}}\chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{66}}n^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_1^2,\quad d_m = \chi^2 - \frac{4B_{66}}{B_{22}}n^2,\quad a^2 = \mu^4 k^2$$

$$R_{nn} = a^2\left(\chi^4 - \frac{2(B_{12}+2B_{66})n^2}{B_{22}}\chi^2 + \frac{B_{11}}{B_{22}}n^4\right) - \frac{B_{66}}{B_{22}}\eta_3^2,\quad \eta_i^2 = \frac{\lambda_i}{B_{66}k^2},\ i=\overline{1,3}$$

Здесь B_{ij} -коэффициенты упругости. Предположим, что ¡ $_j$, $j=\overline{1,4}$ являются попарно различными нулями уравнения (7) с неположительными действительными частями, тогда ¡$_5=-$¡$_1$, ¡$_6=-$¡$_2$, ¡$_7=-$¡$_3$, ¡$_8=-$¡$_4$ также являются попарно различными нулями уравнения (7). Пусть $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)})$, $j=\overline{1,8}$ – нетривиальные решения вида (6) системы (1) при ¡ $=$ ¡$_j$, $j=\overline{1,8}$ соответственно. Представляя решение задач (1)-(4) и (1)-(3),(5) в виде $u_i = \Sigma_{j=1}^{8} w_j u_i^{(j)}$, $i=\overline{1,3}$ и учитывая граничные условия (2),(3), получим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{8}\frac{M_{ij}^{(n)}w_j}{c_n^{(j)} + 0.25a^2r_0^2g_n^{(j)}d_n^{(j)}} = 0,\quad i=\overline{1,8} \tag{9}$$

$$M_{1j}^{(n)} = -\frac{B_{12}}{B_{22}}n^2a_n^{(j)} + \chi_j^2b_n^{(j)} - c_n^{(j)} - \frac{r_0^2}{4}a^2d_n^{(j)}\left(b_n^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}}n^2\right) - a^2\chi_j^2l_n^{(j)}b_n^{(j)}$$

$$M_{2j}^{(n)} = -\chi_j\left\{a_n^{(j)} + b_n^{(j)} + a^2l_n^{(j)}\left(\frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{66}}\chi_j^2 + \frac{B_{22}}{B_{66}}n^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_1^2\right) + a^2\frac{r_0^2}{4}\frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{66}}d_m^{(j)}\right\}$$

$$M_{3j}^{(n)} = \left(\chi_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{22}}n^2\right)c_n^{(j)} + \frac{r_0^2}{4}\left(\chi_j^2b_n^{(j)} + \frac{4B_{12}B_{66}}{B_{22}^2}a^2n^4g_n^{(j)}\right)$$

$$M_{4j}^{(n)} = \chi_j\left\{l_n^{(j)}c_n^{(j)} + \frac{r_0^2}{4}b_n^{(j)}d_n^{(j)}\right\} \tag{10}$$

$$M_{5j}^{(n)} = \left\{a_n^{(j)} + a^2\frac{B_{22}(B_{12}+B_{66})}{B_{11}B_{66}}\chi_j^2l_n^{(j)} + \frac{r_0^2}{4}a^2\frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{66}}d_n^{(j)}\right\}\exp(z_j)$$

$$M_{6j}^{(n)} = \text{¡}_j\left(b_n^{(j)} - a^2g_n^{(j)}l_n^{(j)}\right)\exp(z_j),\quad M_{7j}^{(n)} = \left(c_n^{(j)} + 0{,}25r_0^2a^2g_n^{(j)}d_n^{(j)}\right)\exp(z_j)$$

$$M_{8j}^{(m)} = \text{¡}_j\left(c_n^{(j)} + 0{,}25r_0^2a^2g_n^{(j)}d_n^{(j)}\right)\exp(z_j),\quad z_j = k\chi_j\beta_0;\quad j=\overline{1,8}$$

Здесь индекс j означает, что соответствующая функция взята при ¡ $=$ ¡$_j$, $j=\overline{1,8}$. Чтобы система (9) имела нетривиальное решение, достаточно, чтобы

$$Det\left\|M_{ij}^{(n)}\right\|_{i,j=1}^{8} = n^{34}K^2\exp(-z_1-z_2-z_3-z_4)\,Det\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8} = 0$$
$$K = (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4) \tag{11}$$

Выражения для m_{ij} не приводятся. Уравнение (11) эквивалентно уравнению

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8} = 0 \tag{12}$$

Учитывая возможные соотношения между λ_1, λ_2 и λ_3, уравнение (12) определяет частоты соответствующих типов колебаний.

Замечание 1. При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ уравнение (7) является характеристическим уравнением для системы (1), а уравнение (12) при $k = 2$®n_0/l, $n_0 \in N$ является дисперсионным уравнением задачи (1)-(4), а при $k = \pi/l$ – дисперсионным уравнением задачи (1)-(3),(5), соответственно.

Пусть ¦$_{1n}=$¦$_{2n}=$¦$_{3n}=$¦$_n=$¦$/n$ и $r_0/n \to 0$. Тогда уравнение (7) преобразуется в совокупность уравнений

$$c_n = \frac{B_{22}}{B_{11}}\chi^4 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} n^2\chi^2 + \frac{B_{22}+B_{66}}{B_{11}}\eta^2\chi^2 + \left(n^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta^2\right)\left(n^2 - \eta^2\right) = 0 \qquad (13)$$

$$R_{nn} = a^2\left(\text{¡}^4 - \frac{2(B_{12}+2B_{66})n^2}{B_{22}}\text{¡}^2 + \frac{B_{11}}{B_{22}}n^4\right) - \frac{B_{66}}{B_{22}}\text{¦}^2 = 0 \qquad (14)$$

Уравнения (13),(14) являются характеристическими уравнениями для уравнений планарных и изгибных колебаний пластины соответственно [2]. ¡ $/n$ – корни уравнений (13) и (14) с неположительными действительными частями, обозначим через y_1, y_2 и y_3, y_4 соответственно. Доказывается, что уравнение (12) приводится к виду

$$Det\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8} = \frac{B_{22}^5}{B_{11}^4 B_{66}} N^2(\eta_n)\left\{K_{30}^2(\eta_n)\bar{B}_0(\eta_n)\bar{P}_0(\eta_n) + O(\varepsilon_n^2)\right\} = 0 \qquad (15)$$

$$N(\eta_n) = (y_1+y_3)(y_2+y_3)(y_1+y_4)(y_2+y_4)$$

$$\bar{P}_0(\eta_n) = K_{20}(\eta_n)Q_0(\eta_n)(1+\exp(2(z_1+z_2))) - \frac{4B_{22}(r_{11}r_{21}+r_{22}r_{41}y_1)r_{12}}{B_{12}+B_{66}}\exp(z_1+z_2) +$$

$$+\frac{2B_{22}[r_{11}r_{21}(y_1r_{42}+r_{41}) + r_{41}y_1(r_{11}r_{22}+r_{21}r_{12})]}{B_{12}+B_{66}}(\exp(z_2)-\exp(z_1))[z_1z_2] +$$

$$+\frac{B_{22}(r_{11}r_{22}+r_{12}r_{21})(y_1r_{42}+r_{41})}{B_{12}+B_{66}}(\exp(2z_1)+\exp(2z_2)) + \frac{4B_{22}r_{11}r_{21}r_{41}y_1}{B_{12}+B_{66}}[z_1z_2]^2$$

$$r_{11} = y_1^2 + \frac{B_{12}}{B_{22}}(1-\eta_n^2),\ \ r_{12} = r_{42} = y_1 + y_2,\ \ r_{21} = y_1^3 + \left(\frac{B_{12}}{B_{22}} + \frac{B_{66}}{B_{22}}\eta_n^2\right)y_1$$

$$r_{22} = y_1y_2 + \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{22}B_{66}} - \eta_n^2,\ \ r_{41} = y_1^2 - \frac{B_{66}}{B_{22}}(1-\eta_n^2)$$

$$K_{20}(\eta_n) = (1-\eta_n^2)\left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{22}B_{66}} - \eta_n^2\right) - \eta_n^2 y_1y_2,\ \ Q_0(\eta_n) = \frac{B_{66}}{B_{22}}\left(1-\eta_n^2\right) + y_1y_2 \qquad (16)$$

$$\bar{B}_0(\eta_n) = K_{10}(\eta_n)(1+\exp(2(z_3+z_4))) + 4(y_3^2 + y_3y_4)\left(y_3y_4 + \frac{B_{12}}{B_{22}}\right)\exp(z_3+z_4) -$$

$$-\left[\left(y_3^2 - \frac{B_{12}}{B_{22}}\right)\left(y_3y_4 + \frac{B_{12}}{B_{22}}\right) + (y_3^2 + y_3y_4)\left(y_3^2 - \frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{22}}\right)\right](\exp(2z_3)+\exp(2z_4)) -$$

$$-4y_3\left[\left(y_3^2 - \frac{B_{12}}{B_{22}}\right)\left(y_3^2 - \frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{22}}\right) + \left(y_3y_4 + \frac{B_{12}}{B_{22}}\right)\left(y_3^2 - \frac{B_{12}+2B_{66}}{B_{22}}\right)\right](\exp(z_4) -$$

$$-\exp(z_3))[z_3z_4] - 4y_3^2\left(y_3^2 - \frac{B_{12}}{B_{22}}\right)\left(y_3^2 - \frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{22}}\right)[z_3z_4]^2\ ,\ K_{10}(\eta_n) = y_3^2y_4^2 + 4\frac{B_{66}}{B_{22}}y_3y_4 - \left(\frac{B_{12}}{B_{22}}\right)^2$$

$$[z_iz_j] = (\exp(z_i) - \exp(z_j))/(z_i - z_j)kn\beta_0$$

а выражение для $K_{30}(\text{¦}_n)$ приведено в [2]. Из (15) следует, что при $r_0/(2n) \to 0$ уравнение (12) распадается на уравнения

$$\bar{B}_0(\eta_n) = 0\ ,\ \bar{B}_0(\eta_n) = 0\ , K_{30}(\eta_n) = 0 \qquad (17)$$

Уравнения $\bar{B}_0(\eta_n) = 0$, $\bar{B}_0(\eta_n) = 0$ являются дисперсионными уравнениями изгибных и планарных колебаний аналогичной задачи для ортотропной пластины-полосы со свободными и жестко защемленными краями или прямоугольной пластинки со свободными и жестко защемленными противоположными сторонами, когда остальные стороны шарнирно закреплены, а уравнение $K_{30}(¦_n)=0$ является следствием того, что используется система уравнений соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т. Эффекты локализации волновых движений в упругих волноводах // Прикл. мех. 2005. Т. 41. № 9. С.38-45.
2. Гулгазарян Г.Р. О волнах, локализованных у образующей полубесконечной ортотропной гофрированной тонкой упругой цилиндрической оболочки //Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия механика. 2003. Вып. 1(5). С. 23-31.
3. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкар А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. Киев: Наукова думка, 1986. 170с.
4. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1974. 446с.

<u>Сведения об авторах:</u>

Гулгазарян Гурген Рубенович
Д.ф.-м. н., профессор кафедры мат. анализа и теории функций АГПУ им. Х. Абовяна
Адрес: ул. Ханджяна 5, Ереван, Армения
Тел.: (+37410) 649121, (+37491) 706700
E-mail: ghulgr@yahoo.com

Срапионян Джанибек Липаритович
соискатель кафедры мат. анализа и теории функций АГПУ им Х. Абовяна
Тел.: (+37410) 353263, (+37491) 770771.

О ХАРАКТЕРЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Гулгазарян Л.Г.

В работе определены функции типа пограничного слоя при различных граничных условиях. Установлены скорости их убывания при удалении от боковой поверхности во внутрь оболочки. При собственных колебаниях оболочки каждой собственной частоте соответствует свой пограничный слой. Приведены первые некоторые численные значения скорости затухания функций погранслоя. Проведен анализ поведения пограничного слоя при различных граничных условиях.

Для получения полного решения неклассических задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек рассматриваются решения внутренней задачи и решений в зоне пограничных слоев локализованных у торцов $\alpha=\alpha_0,\alpha_1$ [1]. При асимптотическом методе решения принимается, что влияние пограничного слоя, построенного вблизи одной кромки, не ощущается на другой. Несмотря на то, что пограничный слой локализован вблизи торцов, в общем случае, пограничный слой через граничные условия при $\alpha=\alpha_0,\alpha_1$ влияет на решение внутренней задачи [1,3].

Собственные колебания ортотропных оболочек при серии граничных условий на лицевых поверхностях рассмотрены в работе [2].

Рассмотрим собственные колебания в зоне пограничного слоя вблизи боковой поверхности $\alpha=\alpha_0$ ортотропной оболочки толщины $2h: D=\{\alpha,\beta,\gamma;\ \ \alpha,\beta\in D_0,\ -h\le\gamma\le h\}$, где D_0 – срединная поверхность, α,β – линии кривизны срединной поверхности оболочки, γ – прямолинейная ось, направленная перпендикулярно к срединной поверхности. Требуется найти решения динамических уравнений теории упругости в выбранной триортогональной системе координат при серии граничных условий на лицевых поверхностях $\gamma=\pm h$ оболочки:

$$\tau_{\alpha\gamma}(h)=0,\ \ \tau_{\beta\gamma}(h)=0,\ \tau_{\gamma\gamma}(h)=0 \tag{1}$$

$$U(h)=0,\quad V(h)=0,\quad W(h)=0 \tag{2}$$

$$U(-h)=0,\ \ V(-h)=0,\ \ W(-h)=0 \tag{3}$$

$$\tau_{\alpha\gamma}(-h)=0,\ \ \tau_{\beta\gamma}(-h)=0,\ \ W(-h)=0 \tag{4}$$

Перейдем к безразмерным компонентам вектора перемещения $U=Ru,\ V=R\text{v},\ W=Rw$, где R – характерный размер оболочки (наименьший из радиусов кривизны и линейных размеров срединной поверхности), $\varepsilon=h/R$ – малый параметр, и введем новые независимые переменные по формулам $\alpha-\alpha_0=h\xi,\ \beta=R\eta,\ \gamma=h\zeta$. Разложим величины

$$\begin{gathered}\frac{1}{A},\frac{1}{B},\ k_\alpha=\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta},\ k_\beta=\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha},\\ \frac{1}{R_1},\ \frac{1}{R_2},\ 2H=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2},\ \ K=\frac{1}{R_1R_2}\end{gathered} \tag{5}$$

в ряд Тейлора вблизи $\alpha=\alpha_0$, предполагая, что они удовлетворяют условиям разложения. Если Q любое из этих величин, то

$$Q=Q_n(\alpha-\alpha_0)^n=Q_nR^n\varepsilon^n\xi^n \tag{6}$$

Q_n – коэффициент тейлоровского разложения, по немому индексу “n” происходит суммирование в пределах $[0,+\infty)$. Примем также обозначения: $R^n(1/R_1)_n\xi^n=R_{1n}$, $R^n(1/R_2)_n\xi^n=R_{2n}$, $n=\overline{0,+\infty}$. Имеют место представления:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}=\frac{\varepsilon^{n-1}}{R}\xi^n d_{1n},\quad d_{1n}=\left(\frac{1}{A}\right)_n R^n\frac{\partial}{\partial\xi},\quad \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}=\frac{\varepsilon^{n}}{R}\xi^n d_{2n},\quad d_{2n}=\left(\frac{1}{B}\right)_n R^n\frac{\partial}{\partial\eta} \tag{7}$$

Решение преобразованной системы уравнений будем искать в виде

$$Q_{\alpha\beta}=Q_{jk}(\xi,\eta,\zeta)\exp(i\omega t)\qquad(\alpha,\beta,\gamma);\qquad j,k=1,2,3$$

В результате получим сингулярно возмущенную малым параметром ε систему относительно Q_{jk}, решение которой ищем в виде асимптотического представления [1, 3]

$$\begin{gathered}\tau_{jk}(\xi,\eta,\zeta)=\varepsilon^{-1+s}\tau_{jk}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\quad j,k=1,2,3;\quad \omega_*=\varepsilon^s\omega_*^{(s)},\quad s=\overline{0,N}\\ \left(u(\xi,\eta,\zeta),\mathrm{v}(\xi,\eta,\zeta),w(\xi,\eta,\zeta)\right)=\varepsilon^s\left(u^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\mathrm{v}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),w^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)\right)\end{gathered}\tag{8}$$

и припишем всем искомым величинам индекс b (от слова boundary).

Получается следующая система уравнений:

$$A_0\frac{\partial\tau_{11b}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{13b}^{(s)}}{\partial\zeta}+c^{(j)}u_b^{(s-j)}=R_{1\tau}^{(s-1)}\quad(11b,12b,13b;\ 13b,23b,33b;\ u,\mathrm{v},w;\ 1\tau,2\tau,3\tau)$$

$$A_0\frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial\xi}-\sum\nolimits_{1b}^{(s)}=R_u^{(s-1)},\quad \sum\nolimits_{2b}^{(s)}=R_{\mathrm{v}}^{(s-1)},\quad \frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial\zeta}-\sum\nolimits_{3b}^{(s)}=R_w^{(s-1)},\ A_0=A(\alpha_0)$$

$$\frac{\partial\mathrm{v}_b^{(s)}}{\partial\zeta}-a_{44}\tau_{23b}^{(s)}=R_{4\tau}^{(s-1)},\ A_0\frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial\zeta}-a_{55}\tau_{13b}^{(s)}=R_{5\tau}^{(s-1)},\ c^{(j)}=\sum_{n=0}^{j}\omega_{*(j-n)}\omega_{*(n)}\tag{9}$$

$$A_0\frac{\partial\mathrm{v}_b^{(s)}}{\partial\xi}-a_{66}\tau_{12b}^{(s)}=R_{6\tau}^{(s-1)},\ \tau_{12b}^{(s)}-\tau_{21b}^{(s)}=R_{7\tau}^{(s-1)},\ j=\overline{0,s},\ \sum\nolimits_{ib}^{(s)}=a_{i1}\tau_{11b}^{(s)}+a_{i2}\tau_{22b}^{(s)}+a_{i3}\tau_{33b}^{(s)}$$

где $R_{i\tau}^{(s-1)}$ – функции, известные для каждого приближения, если известны величины предыдущих приближений, в частности, $R_{i\tau}^{(k)}\equiv 0$ при $k<0$.

Из системы (9) компоненты тензора напряжений выражаются через $u_b^{(s)},\mathrm{v}_b^{(s)},w_b^{(s)}$:

$$\tau_{23b}^{(s)}=\frac{1}{a_{44}}\left[\frac{\partial\mathrm{v}_b^{(s)}}{\partial\zeta}-R_{4\tau}^{(s-1)}\right],\ \tau_{12b}^{(s)}=\frac{1}{a_{66}}\left[A_0\frac{\partial\mathrm{v}_b^{(s)}}{\partial\xi}-R_{6\tau}^{(s-1)}\right],\ \tau_{12b}^{(s)}-\tau_{21b}^{(s)}=R_{7\tau}^{(s-1)}$$

$$\tau_{13b}^{(s)}=\frac{1}{a_{55}}\left[A_0\frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial\zeta}-R_{5\tau}^{(s-1)}\right]\tag{10}$$

$$\tau_{11b}^{(s)}=\frac{1}{\Delta}\left[\left(A_0\frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial\xi}-R_u^{(s-1)}\right)\Delta_{23}+R_{\mathrm{v}}^{(s-1)}\Delta_1+\left(\frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial\zeta}-R_w^{(s-1)}\right)\Delta_2\right]\tag{11}$$

$$(11b,22b,33b;\quad \Delta_{23},\Delta_1,\Delta_2;\quad \Delta_1,\Delta_{13},\Delta_3;\quad \Delta_2,\Delta_3,\Delta_{12})$$

а для определения компонент вектора перемещения получаются уравнения

$$\frac{1}{a_{66}}A_0^2\frac{\partial^2\mathrm{v}_b^{(s)}}{\partial\xi^2}+\frac{1}{a_{44}}\frac{\partial^2\mathrm{v}_b^{(s)}}{\partial\zeta^2}+c^{(j)}\mathrm{v}_b^{(s-j)}=T_{\mathrm{v}}^{(s-1)},\quad j=\overline{0,s}\tag{12}$$

$$\frac{\Delta_{23}}{\Delta}A_0^2\frac{\partial^2u_b^{(s)}}{\partial\xi^2}+A_0\left(\frac{\Delta_2}{\Delta}+\delta_1\right)\frac{\partial^2w_b^{(s)}}{\partial\xi\partial\zeta}+\frac{1}{a_{55}}\frac{\partial^2u_b^{(s)}}{\partial\zeta^2}+c^{(j)}u_b^{(s-j)}=T_u^{(s-1)}\tag{13}$$

$$(u,w;\quad \Delta/\Delta_{23},a_{55};\quad a_{55},\Delta/\Delta_{12})$$

Уравнение (12) и соотношения (10) описывают антиплоский, а (11) и (13) – плоский пограничные слои. Особый интерес представляет исходное приближение. При $s=0$ правые части уравнений (11) и (12) обращаются в нуль.

Решение уравнения (12) при $s=0$ будем искать в виде

$$\mathrm{v}_b^{(0)}(\xi,\eta,\zeta)=\exp(-\lambda_a\xi)C^{(0)}(\eta)\mathrm{v}_{1b}^{(0)}(\zeta) \qquad (14)$$

После подстановки выражения (14) в уравнение (11), получим однородное обыкновенное дифференциальное уравнение, общее решение которого имеет вид

$$\mathrm{v}_{1b}^{(0)}(\zeta)=C_1^{(0)}\sin\alpha_a\zeta+C_2^{(0)}\cos\alpha_a\zeta,\quad \alpha_a=\sqrt{a_{44}(\omega_{*0}^2+A_0^2/a_{66}\lambda_a^2)} \qquad (15)$$

Индекс a означает, что λ_a относится к антиплоскому пограничному слою.

Удовлетворив соответствующим граничным условиям (2), (3), получим

$$\sin 2\alpha_0=0 \;\Rightarrow\; \lambda_{ank}=\pm\sqrt{a_{66}/A_0^2\left(\pi^2n^2/(4a_{44})-\omega_{*0k}^2\right)} \qquad (16)$$

В силу свойства пограничного слоя необходимо ограничиться значениями λ_{ank} с $\operatorname{Re}\lambda_{ank}>0$. Собственными функциями будут

$$\mathrm{v}_{bnk}^{(0)}(\xi,\eta,\zeta)=C^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_{ank}\xi)\sin\pi n(1+\zeta)/2 \qquad (17)$$

При граничных условиях (1), (4) собственные значения совпадают с (16), а функции примут вид

$$\mathrm{v}_{bnk}^{(0)}(\xi,\eta,\zeta)=C^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_{ank}\xi)\cos\pi n(1-\zeta)/2 \qquad (18)$$

При условиях (2), (4) собственные значения совпадают со значениями (6.10), полученными в работе [2], а функции –

$$\mathrm{v}_{bnk}^{(0)}(\xi,\eta,\zeta)=C^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_{ank}\xi)\cos\pi(2n+1)(1+\zeta)/4 \qquad (19)$$

После некоторых преобразований системы (13), получим следующее уравнение для определения $u^{(0)}$:

$$B_1\frac{\partial^4u_b^{(0)}}{\partial\xi^4}+B_2\frac{\partial^4u_b^{(0)}}{\partial\zeta^4}+B_3\frac{\partial^4u_b^{(0)}}{\partial\xi^2\partial\zeta^2}+B_4\frac{\partial^2u_b^{(0)}}{\partial\xi^2}+B_5\frac{\partial^2u_b^{(0)}}{\partial\zeta^2}+\omega_{*0}^4u_b^{(0)}=0 \qquad (20)$$

$$B_1=A_0^4\Delta_{23}/(\Delta a_{55}),\; B_2=\Delta_{12}/(\Delta a_{55}),\; B_3=\left((\Delta_{23}\Delta_{12}-\Delta_2^2)/\Delta^2-2\Delta_2/(\Delta a_{55})\right)A_0^2$$

$$B_4=\left(\Delta_{23}/\Delta+1/a_{55}\right)A_0^2\omega_{*0}^2,\quad B_5=\left(\Delta_{12}/\Delta+1/a_{55}\right)\omega_{*0}^2 \qquad (21)$$

решение которого будем искать в виде

$$u_b^{(0)}(\xi,\eta,\zeta)=K_b^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_p\xi+k\zeta),\quad w_b^{(0)}(\xi,\eta,\zeta)=LK_b^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_p\xi+k\zeta) \qquad (22)$$

где L – неопределенный пока множитель, k – корень характеристического уравнения

$$B_2k^4+(\lambda_p^2B_3+B_5)k^2+\lambda_p^4B_1+\lambda_p^2B_4+\omega_{*0}^4=0$$

Отсюда следует

$$k_{1,2}^2=(-\lambda_p^2B_3-B_5\pm\sqrt{D})/(2B_2)$$

$$D=\lambda_p^4(B_3^2-4B_1B_2)+2\lambda_p^2(B_3B_5-2B_2B_4)+B_5^2-4B_2\omega_{*0}^4 \qquad (23)$$

$$L_i=\frac{\Delta_{23}a_{55}\lambda_p^2A_0^2+\Delta k_i^2+\Delta a_{55}\omega_{*0}^2}{(\Delta+\Delta_2a_{55})\lambda_pk_i}$$

В результате решение уравнения (20) примет вид

$$u_b^{(0)}(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^4K_{ib}^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_p\xi+k_i\zeta),\quad w_b^{(0)}(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^4L_iK_{ib}^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_p\xi+k_i\zeta) \qquad (24)$$

При граничных условиях (2), (3) λ_p является корнем уравнения

$$(L_2-L_3)(L_4-L_1)ch(k_2+k_3-k_1-k_4)+(L_1-L_3)(L_2-L_4)ch(k_1+k_3-k_2-k_4)+$$
$$+(L_1-L_2)(L_4-L_3)ch(k_1+k_2-k_3-k_4)=0 \qquad (25)$$

При условиях (1), (4) – корнем уравнения

$$
\begin{aligned}
&e^{-k_1-k_2-k_3-k_4}(-e^{2(k_1+k_2)}(g_4L_3-g_3L_4)(g_2S_1-g_1S_2)+e^{2(k_1+k_3)}(g_4L_2-g_2L_4)(g_3S_1-g_1S_3)-\\
&-e^{2(k_2+k_3)}(g_4L_1-g_1L_4)(g_3S_2-g_2S_3)-e^{2(k_1+k_4)}(g_3L_2-g_2L_3)(g_4S_1-g_1S_4)+\\
&+e^{2(k_2+k_4)}(g_3L_1-g_1L_3)(g_4S_2-g_2S_4)-e^{2(k_3+k_4)}(g_2L_1-g_1L_2)(g_4S_3-g_3S_4))=0
\end{aligned}
\tag{26}
$$

где

$$
g_i=k_i-\lambda_pA_0L_i\,,\quad S_i=\Delta_{12}k_iL_i-\Delta_2\lambda_pA_0\,,\quad i=1,2,3,4
$$

При условиях (2), (4) –

$$
\begin{aligned}
&e^{-k_1-k_2-k_3-k_4}(-e^{2(k_1+k_4)}(g_3L_2-g_2L_3)(L_1-L_4)+e^{2(k_2+k_4)}(g_3L_1-g_1L_3)(L_2-L_4)-\\
&-e^{2(k_3+k_4)}(g_2L_1-g_1L_2)(L_3-L_4)-e^{2(k_2+k_3)}(g_4L_1-g_1L_4)(L_2-L_3)+\\
&+e^{2(k_1+k_3)}(g_4L_2-g_2L_4)(L_1-L_3)-e^{2(k_1+k_2)}(g_4L_3-g_3L_4)(L_1-L_2))=0
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Каждому значению ω_{*0} будет соответствовать счетное множество λ_a и λ_p. Таким образом, каждому собственному значению ω_{*0} соответствует свое семейство пограничных функций. При этом собственные колебания одного типа порождают в пограничном слое колебания и другого типа.

В таблице приведены первые некоторые значения скорости затухания пограничных слоев оболочки из стеклопластика 2:1 с характеристиками $\nu_{12}=0.105$, $\nu_{23}=0.431$, $\nu_{31}=0.405$, $E_1=36\cdot10^3\,\text{МП}a$, $E_2=26.3\cdot10^3\,\text{МП}a$, $E_3=10.8\cdot10^3\,\text{МП}a$, $G_{12}=4.9\cdot10^3\,\text{МП}a$, $G_{23}=4\cdot10^3\,\text{МП}a$, $G_{13}=4.4\cdot10^3\,\text{МП}a$. ω^{uI}_{*0n}, ω^{vI}_{*0n} являются собственными частотами колебаний [2]. Из таблицы видно, что вещественные части по абсолютной величине возрастают быстрее, когда оба конца жестко закреплены, т.е. при условиях (2), (3). При этом значения скорости затухания антиплоского пограничного слоя при условиях (2), (3) и (1), (4) совпадают, но при этом затухание в антиплоском погранслое происходит быстрее, чем в плоском. В смысле приложений, построение приближений $s\geq1$ для пограничного слоя можно осуществить подобным образом, но оно вряд ли представит существенный интерес.

Таблица

При условиях (2),(3)				При условиях (2),(4)	
n	$\omega^{uI}_{*0n}=\dfrac{\pi n}{2\sqrt{a_{55}}}$	$\omega^{vI}_{*0n}=\dfrac{\pi n}{2\sqrt{a_{44}}}$	n	$\omega^{u}_{*0n}=\dfrac{\pi(2n+1)}{4\sqrt{a_{55}}}$	$\omega^{v}_{*0n}=\dfrac{\pi(2n+1)}{4\sqrt{a_{44}}}$
Антиплоский пограничный слой					
1	2.4169, 3.989 5.4783, 6.9383	2.4582, 4.0142 5.4966, 6.9528	0	1.995, 3.469 4.911, 6.343	2.007, 3.476 4.916, 6.347
2	3.044, 4.834 6.4415, 7.978	3.174, 4.916 6.5037, 8.0284	1	2.757, 4.437 5.984, 7.480	2.838, 4.488 6.021, 7.510
3	3.5053, 5.5149 7.2506, 8.8744	3.7549, 5.6769 7.3745, 8.976	2	3.290, 5.190 6.862, 8.441	3.476, 5.310 6.953, 8.515
Плоский пограничный слой					
1	0.5286+0.4853 I 1.4486+0.7152 I 2.1891, 2.7057	0.10765 0.50396+0.4627 I 1.4806+0.6913 I	0	0.2643+0.2427 I 1.095, 1.797 +0.273 I 2.453	0.05383 0.25198 +0.23136 I 1.0938, 1.8065+0.269436 I
2	1.0571+0.9706 I 2.65108	1.0079+0.9255 I 2.46296, 2.6616	1	0.555261 0.7929+0.728 I	0.52615+0.31702 I 1.5104, 2.4356

	2.7034 +0.5346 I	2.8977+0.54452 I		1.49683	3.7909
3	1.1105, 2.3985 2.993 4.01294+0.7735 I	1.0523+0.63403 I 1.5119+1.3887 I 2.4603, 3.0208	2	2.0596+0.4063 I 2.8384, 3.7653	0.4935+0.31697 I 2.1675+0.40919 I 2.8509, 3.7694

При условиях (1),(4)		
n	$\omega_{*0n}^{uI} = \dfrac{\pi n}{2\sqrt{a_{55}}}$	$\omega_{*0n}^{vI} = \dfrac{\pi n}{2\sqrt{a_{44}}}$
Антиплоский пограничный слой		
1	2.4169, 3.98901, 5.4783, 6.9383	2.4582, 4.0142, 5.4966, 6.9528
2	3.044, 4.834, 6.4415, 7.978	3.174, 4.916, 6.5037, 8.0284
3	3.5053, 5.5149, 7.2506, 8.8744	3.7549, 5.6769, 7.3745, 8.976
Плоский пограничный слой		
1	0.529+0.4853I, 1.326, 2.2785, 2.5813+0.2195 I	0.1918+0.19149 I, 0.50396+0.4628 I, 1.3315
2	1.0571+0.9706 I, 1.5763+0.1946 I, 2.6509	0.54703, 1.0079+0.92545 I, 1.6291+0.23176 I , 2.6629
3	0.86341, 2.4426, 2.81695 +0.07978 I	0.9022 +0.2203 I, 1.5119 +1.3889 I, 2.47193, 2.9559+0.2468 I

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
2. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек. //ПММ. 2006. Т. 70. Вып.1. С.111-125.
3. Агаловян Л.А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин// Изв. вузов.Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2000. №3. С. 8-11.

Сведения об авторе

Гулгазарян Лусине Гургеновна
Кандидат физ.-мат. наук, доцент, Институт механики НАН РА
Адрес: пр. Маршала Баграмяна 24Б, 375019, Ереван Армения
Тел: (+37410) 61-81-55; (+37491) 30-25-54; E-mail: lusina@mail.ru

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГО-ПОЛЗУЧЕГО БЕСКОНЕЧНОГО ПРОСТРАНСТВА СО ЩЕЛЬЮ ИЛИ С АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Давтян З. А.

В настоящей работе в постановке теории ползучести неоднородно стареющих сред [1,2] рассматривается задача об определении напряженного состояния вязкоупругого пространства со щелью конечной длины в условиях антиплоской деформации. Одновременно обсуждается аналогичная задача, когда вместо щели в пространстве имеется тонкое абсолютно жесткое включение.

Обширный класс задач о взаимодействии щели и включений с массивными деформируемыми телами рассмотрен в [3-6]. Основные результаты в этом направлении подытожены в [7].

1. Пусть вязкоупругое бесконечное пространство, отнесенное к левой прямоугольной системе координат ***O****xyz*, состоит из верхнего и нижнего полупространств, которые имеют разные вязкоупругие характеристики и возрасты.

Пусть далее это пространство вдоль $\{\,|x| < l,\ y=0\}$ содержит сквозную щель, берега которой в направлении оси **O**z загружены касательными напряжениями разных интенсивностей. Кроме того, на бесконечности в том же направлении действуют равномерно распределенные касательные силы $q_+(t)$ и $q_-(t)$, а также в точках $Z_k(x_k, y_k)$ (k=1,2...N), $Z_k \neq \pm l$ приложены сосредоточенные вдоль определенных линий, параллельных оси **O**z, и равномерно распределенные по ним силы $Q_k(t)$. Предполагается, что под действием таких внешних сил пространство будет находиться в условиях антиплоской деформации. Тогда отличной от нуля будет только компонента смещений $u(x,y,t)$ в направлений оси **O**z. Требуется определить раскрытие щели и касательные напряжения вне щели на линии ее продолжения.

Выведем резрешающие уравнения поставленной задачи для определения скачка смещений на берегах разреза и напряжений вне разреза $\left\{|x| > l,\, y = 0\right\}$.

С этой целью запишем выражение смещений граничных точек верхнего (+) и нижнего (-) упругого полупространств, которые при помощи преобразования Фурье определяются формулой

$$u_\pm(x,0,t) = \mp\frac{1}{\pi G_\pm(t)}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{1}{|x-s|}T_\pm(s,t)ds + f_\pm(x,t), \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{1.1}$$

$$T_\pm(x,t) = \begin{cases}\tau_\pm(x,t), & |x| < l\\ \tau\ (x,t), & |x| > l\end{cases}$$

Здесь $\tau_\pm\left(x,t\right)$ – касательные напряжения, приложенные к берегам щели, $G_\pm(t)$ – упруго-мгновенные модули сдвига полупространств, а функцией

$$f_\pm(x,t) = -\frac{1}{\text{®}G_\pm(t)}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{q_\pm(t) + \sum_{k=1}^{N}Q_k(t)\frac{y_k}{(s-x_k)^2 + y_k^2}\right\}\ln\frac{1}{|x-s|}ds$$

даются смещения граничных точек полупространств, обусловленных силовыми факторами на бесконечности и сосредоточенными силами, указанными выше.

При этом должно выполняться условие

$$q_+(t)G_-(t) = q_-(t)G_+(t) \tag{1.2}$$

выражающее условия совместимости деформаций, порожденных приложенным на бесконечности распределенными силами.

Соотношения (1,1) с учетом ползучести имеют вид [1,2]:

$$u_{\pm}(x,t) = \mp(I - L_{\pm})\frac{1}{®G_{\pm}(t)}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{1}{|x-s|}T_{\pm}(s,t)ds + (I - L_{\pm})f_{\pm}(x,t) \qquad (1.3)$$

Здесь

$$L_{\pm}[y(t)] = \int_{²_0}^{t} G_{\pm}(u)K_{\pm}[t + °_{\pm}, u + °_{\pm}]y(u)du:$$

$$K_{\pm}(t,u) = \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{G_{\pm}(U)} + \varpi(t,u)\right]; \ \rho_{\pm} = \tilde{\tau}_{\pm} - \tau_0$$

где $\tilde{\tau}_{\pm}$ –- возрасты верхнего и нижнего полупространств соответственно, а смысл остальных параметров, хорошо известных в теории ползучести, пояснены в [1,2].

Теперь условия (1.2) с учетом ползучести принимают вид:

$$(I - L_{\pm})\frac{q_{+}(t)}{G_{+}(t)} = (I - L_{\pm})\frac{q_{-}(t)}{G_{-}(t)}$$

Далее, введем в рассмотрение скачок смещений на щели

$$¡(x,t) = u_{+}(x,t) - u_{-}(x,t) = \begin{cases} ¨(x,t), & (|x| < l): \\ 0, & (|x| > l): \end{cases} \quad (-\infty < x < \infty)$$

Тогда из (1.2) после несложных преобразований получим следующее синглуярное интегральное уравнение:

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(s,t)}{s-t}ds = \chi'(x,t) + g_0(x,t) \qquad (-\infty < x < \infty) \ (1.4)$$

$$\Phi(x,t) = (I - L_{+})\frac{T_{+}(x,t)}{G_{+} + (t)} + (I - L_{-})\frac{T_{-}(x,t)}{G_{-}(t)} = \begin{cases} h(x,t); & (|x| < 1) \\ S(x,t); & (|x| > 1) \end{cases}$$

$$h(x,t) = (I - L_{+})\frac{\tau_{+}(x,t)}{\mathrm{G}_{+}(t)} + (I - L_{-})\frac{\tau_{-}(x,t)}{\mathrm{G}_{-}(t)}$$

$$g_0(x,t) = \frac{d}{dx}\left\{(I - L_{+})\frac{f_{+}(x,t)}{G_{+}(t)} - (I - L_{-})\frac{f_{-}(x,t)}{G_{-}(t)}\right\}$$

После обращения уравнения (1.4), придем к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\varphi'(s',t)}{s-t}ds' = -h(x,t) - G_0(x,t) \qquad |x| < l \ (1.5)$$

которое должно рассматриваться при граничных условиях

$$\varphi(l,t) = \varphi(-l,t) = 0 \qquad (1.6)$$

выражающих условия непрерывности смещений в концевых точках щели. После того, как построено решение уравнения (1.5), неизвестные касательные напряжения S(x,t) вне цели на линии ее продолжения определяются по формуле

$$S(x,t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\varphi'(s,t)}{s-t}ds + G_0(x,t); \qquad (|x| > 1) \qquad (1.7)$$

$$G_0(x,t) = \frac{1}{®}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_0(s,t)}{s-x}ds:$$

Обращение сингулярного уравнения (1.5) с учетам (1.6) даст

$$\varphi'(x,t) = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{l^2-x^2}}\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-s^2}\,(h(s,t)+G_0(s,t))}{s-x}ds \quad |x|<l \tag{1.8}$$

Теперь, подставляя выражение $\varphi'(x,t)$ из (1.8) в уравнение (1.7), относительно $\tau(x,t)$ вне щели получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода.

$$G(t)\tau(x,t) - \int_{\tau_0}^{t} K(x,u)\tau(x,u)du = F(x,t) \quad |x|>l \tag{1.9}$$

Здесь введены обозначения

$$G(t) = \frac{G_+(t)+G_-(t)}{G_+(t)\quad G_-(t)}, \qquad K(t,u) = K_+(t+\rho_+,u+\rho_+) + K_-(t+\rho_-,u+\rho_-)$$

$$F(x,t) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{F_+(x,t)}{G_+(t)} + \frac{F_-(x,t)}{G_-(t)}\right] - \int_{\tau_0}^{t}\left[K_+(x,u)F_+(x,u) + K_-(x,u)F_-(x,u)\right]du$$

$$F_\pm(x,t) = \int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-y^2}}{x-y}\left(\frac{\mathrm{sign}y}{\sqrt{y^2-l^2}} - \frac{\mathrm{sign}x}{\sqrt{x^2-l^2}}\right)\left(\tau_\pm\left(y,t\right)+G_0\left(y,t\right)\right)dy$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению интегро-дифференциального уравнения (1.5) при условиях (1.6), после решения которого касательные напряжения вне щели определятся из интегрального уравнения (1.9).

В частных случаях решение интегрального уравнения (1.9) можно получить в виде квадратур. Пусть, в частности, $G(t)=G=\mathrm{const}$, тогда решение интегрального уравнения (1.9) можно представить в виде [1]

$$\tau(x,t) = \int_{\tau_0}^{t} e^{-\eta(\tau)}d\tau\int_{\tau_0}^{\tau} e^{\eta(y)}H(x,y)dy + \beta'(\tau_0)\int_{\tau_0}^{t} e^{-\eta(\tau)}d\tau + \beta(\tau) \tag{1.10}$$

$$\eta(t) = \int_{\tau_0}^{t}\beta(\tau)d\tau \;; \quad \beta(t) = \gamma\left\{1 - \frac{\left(\lambda_1\varphi_+(t)+\lambda_2\varphi_-(t)\right)}{G}\right\}; \;\; H(x,t) = \frac{1}{G}\left\{F''(x,t)+\gamma F'(x,t)\right\}$$

причем все производные берутся по времени.

Тогда раскрытие берегов щели будет определено из соотношения (1.8).

Отметим, что в качестве условия распространения трещины в разбираемом случае можно взять известный деформационный критерий о критическом значении раскрытия щели [8].

2.Теперь, в такой же постановке рассмотрим для вязкоупругого бесконечного пространства, находящегося в условиях антиплоской деформации, аналогичную задачу о включении, когда щель заменяется абсолютно жестким тонким включением.

В этой задаче, сохраняя прежние обозначения, требуется определить скачок касательных напряжений на включении $\{|x|<l,\ y=0\}$, а также касательные напряжения $\tau(x,t)$ вне включения на продолжение его осевой линии.

Выведем разрешающие уравнения поставленой задачи. Поскольку в обсуждаемой задаче $u_+(t)-u_-(t)=0 \ \left(-\infty<x<\infty\right)$, то из (1.2) вытекает

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(s,t)}{s-x}ds = g_0(x,t) \quad \left(-\infty<x<\infty\right) \tag{2.1}$$

Если теперь обратить уравнение (2.1), придем к ключевому уравнению

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_0(x,t)}{s-x}ds \quad \left(-\infty<x<\infty\right) \tag{2.2}$$

Рассматривая уравнение (2.2) вне включения, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода, откуда определяется напряжение на линии продолжения щели, а именно:

$$G(t)\ \ \tau(x,t)-\int_{\tau_0}^{t} K(t,u)\ \tau(x,u)du = G_0(x,t) \qquad (|x|>l) \tag{2.3}$$

Решение уравнения (2.3) дается формулой (1.10).

Теперь определим скачок касательных напряжений на включении. Принимая во внимание очевидное условие, что на включении $u_+(x,t)=u_-(x,t)=0$, из (1.3) получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{T}_+(s,t)-\tilde{T}_-(s,t)}{s-x}ds = q_1(x,t) \qquad (|x|<l) \tag{2.4}$$

где

$$\tilde{T}_\pm(s,t)=\frac{(I-L_\pm)T_\pm(x,t)}{G_\pm(t)}:\ q_1(x,t)=\frac{d}{dx}\left\{(I-L_\pm)\,f_+(x,t)+(I-L_-)\,f_-(x,t)\right\}$$

Далее (2.4) представим в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\tilde{T}_+(s,t)-\tilde{T}_-(s,t)}{s-x}ds = G_1(x,t) \qquad (|x|<l) \tag{2.5}$$

Здесь

$$G_1(x,t)=-\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{l}+\int_{l}^{\infty}\right)\frac{R(\tau(s,t))}{s-x}ds+q_1(x,t)$$

оператор R определяется равенством

$$R(y(t))=\left\{\frac{(I-L_+)}{G_+(x)}-\frac{(I-L_-)}{G_-(x)}\right\}y(t)$$

а $\tau(x,t)$ – решение интегрального уравнения (2.3). Уравнение (2.5) должно рассматриваться при условии

$$\int_{-l}^{l}\left[\tau_+(s,t)-\tau_-(s,t)\right]ds=0 \tag{2.6}$$

выражающего статическое равновесие включения.

Обращая уравнение (2.5), получим

$$\tilde{T}_+(x,t)-\tilde{T}_-(x,t)=-\frac{1}{\pi\sqrt{l^2-x^2}}\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-x^2}G_1(s,t)}{s-x}ds \quad |x|<l \tag{2.7}$$

Легко видеть, что (2.7) можно представить в виде

$$(I-L_+)\frac{\tau_+(x,t)}{G_+(t)}-(I-L_-)\frac{\tau_-(x,t)}{G_-(t)}=\tilde{G}_1(x,t) \quad |x|<l \tag{2.8}$$

С другой стороны, из (2.2) на включении получим следующее интегральное уравнение Вольтерра:

$$(I-L_+)\frac{\tau_+(x,t)}{G_+(t)}+(I-L_-)\frac{\tau_-(x,t)}{G_-(t)}=G_0(x,t) \quad |x|<l \tag{2.9}$$

Теперь, совместно решая уравнения (2.8) и (2.9), можем получить скачок касательных напряжений $\tau_+(x,t)-\tau_-(x,t)$ на включении, а затем остальные механические характеристики задачи (распределение касательных напряжений на берегах включения и вне включения на его продолжении, смещение и пр.).

В заключение отметим, что рассмотренные здесь задачи можно обобщить для произвольного числа коллинеарных трещин, щелей и включений, взаимодействующих с матрицей раздельно или одновременно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. // МТТ. 1976. №3.
2. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983.
3. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982.
4. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983.
5. Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле: Киев: Наукова Думка, 1983.
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
7. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976.
8. Коминский А. А., Механика разрушения вязкоупругих тел. Киев: Наукова Думка, 1980.

<u>Сведения об авторе</u>

Давтян Завен Азибекович
Кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б},
Тел: (+37410) 52-48-90; E-mail mechins@sci.am

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МАГНИТОСТРИКЦИОННЫХ ПЛАСТИН В НАКЛОННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Даноян Э.А.

Предлагаемая работа посвящена вопросам устойчивости магнитострикционных пластин во внешнем магнитном поле. Исследование проведено на основе линеаризованных уравнений и граничных условий, описывающих поведение малых возмущений в магнитострикционной среде [1].

Рассматривается упругая изотропная пластинка постоянной толщины $2h$, отнесенная к декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью x_1, x_2. Пусть рассматриваемая диэлектрическая ферромагнитная магнитострикционная пластинка находится во внешнем стационарном магнитном поле, которое в отсутствии ферромагнитного тела характеризуется вектором напряженности $\vec{H}_0$ и вектором магнитной индукции $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$ ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ H/A^2$ – магнитная постоянная, $\vec{B}_0 = \vec{B}_0\left(B_{01}, 0, B_{03}\right)$). Окружающая тело среда в отношении электромагнитных свойств принимается в приближении вакуума.

Для получения основных уравнений и граничных условий устойчивости магнитострикционных пластин, трехмерные уравнения и граничные условия указанной теории устойчивости аналогично [1] сводятся к двумерным, используя основные положения теории тонких пластин и гипотезу недеформируемых нормалей. Согласно этой гипотезе возмущения $\vec{u}\left(x_1, x_2, x_3, t\right)$ перемещений любой точки пластинки представляются в виде

$$u_1 = u\left(x_1, x_2, t\right) - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = \mathrm{v}\left(x_1, x_2, t\right) - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad u_2 = w\left(x_1, x_2, t\right) \tag{1}$$

где u, v, w – возмущение перемещения точек срединной плоскости пластинки точки.

Обозначим через t_{ik} возмущения компонент тензора магнитоупругих напряжений, h_k – компоненты вектора, представляющего возмущение напряженности $\vec{H}^{non}$ невозмущенного магнитного поля, B^{non} – вектор магнитной индукции невозмущенного магнитного поля. Величины с индексом “non” определяются из решения задачи магнитостатики для рассматриваемой пластинки. Решение этой задачи в общем случае, когда пластинка имеет конечные размеры, связано с серьезными математическими трудностями. Поэтому при решении задачи магнитостатики пластинку будем считать бесконечной. Тогда указанная задача имеет следующее решение.

$$H_{0k}^{non} = \frac{B_{0k}}{\mu_0\left(1+\chi\delta_{3k}\right)}, k = 1, 2, 3 \tag{2}$$

$$B_{0k}^{non} = \mu_0 \mu H_{0k}^{non}, \quad B_{0k}^{non\,(e)} = B_0, \quad H^{non\,(e)} = \mu_0^{-1} B_0$$

где χ – магнитная восприимчивость, $\mu = \chi + 1$ – относительная магнитная проницаемость, δ_{ij} – символ Кронекера.

На основе (1) из линеаризованных уравнений состояние магнитострикционных сред возмущения t_{11}, t_{22} и t_{21} обычным образом [1] выражается через u, v, w и компонент векторов $\vec{H}^{non}$ и $\vec{h}$. Отметим, что при нахождении вектора индуцированного магнитного поля $\vec{h}$ пластинка принимается бесконечной (такой подход обоснован в [1]). На основе этого предположения и соотношений (1)–(2) определены компоненты вектора $\vec{h}$, выраженные через H_i^{non} и функции u, v, w. Используя (1) и найденные выражения для $\vec{H}^{non}$ и $\vec{h}$, определены объемные силы магнитного происхождения и граничные значения возмущений t_{3i} ($i = 1, 2, 3$) на поверхностях $x_3 = \pm h$ пластинки. Указанные граничные значения определены из линеаризованных поверхностных условий теории магнитоупругости магнитострикционного твергодо тела. Наконец, подставляя найденные выражения для объмных сил и для t_{11}, t_{22}, t_{21} в систему линеаризованных уравнений движения магнитострикционной среды [1] и интегрируя полученные при этом уравнения по x_3 в пределах $x_3=-h$ до $x_3=h$, с учетом найденных поверхностных значений t_{3i}, получена система дифференциальных уравнений устойчивости пластинки относительно искомых функций u, v, w. Эта система с точностью $\chi^2 e_i B_{0k}^2 / \mu_0 E << 1$ (e_i, $i=1,2$ – константа магнитострикции) имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}+\frac{1-\nu^2}{2Eh}\frac{\chi(\chi+4)}{\mu_0\mu}\left(e_1-e_2\right)B_{01}B_{03}h\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-\\
&-\frac{1-\nu^2}{2Eh}\frac{\chi(\chi-1)}{\mu_0\mu}\left(e_1-e_2\right)B_{01}B_{03}h\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{1-\nu^2}{2Eh}\left[\left(e_1\chi+3\right)-\frac{\nu}{1-\nu}\chi e_2\right]\times\\
&\times\chi B_{01}\int_{-h}^{h}\frac{\partial h_1}{\partial x_1}dx_3+\frac{1-\nu^2}{2Eh}\left[\left(\chi e_2+1\right)-\left(xe_1+2\right)\right]\frac{\chi}{\mu}B_{03}\int_{-h}^{h}\frac{\partial h_3}{\partial x_1}dx_3+\\
&+\frac{1-\nu^2}{2Eh}\left(t_{31}^{+}-t_{31}^{-}\right)=\frac{1-\nu^2}{E}\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}-\frac{1-\nu^2}{2Eh}\frac{\chi(\chi-1)}{\mu_0\mu}\left(e_1-e_2\right)B_{01}B_{03}h\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}+\\
&+\frac{1-\nu^2}{2Eh}\left[1+\frac{1-2\nu}{1-\nu}\chi e_2\right]\chi B_{01}\int_{-h}^{+h}\frac{\partial h_1}{\partial x_2}dx_3+\\
&+\frac{1-\nu^2}{2Eh}\left[\left(\chi e_2+1\right)-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\chi e_1+2\right)\right]\frac{\chi}{\mu}B_{03}\int_{-h}^{+h}\frac{\partial h_2}{\partial x_3}dx_3+\\
&+\frac{1-\nu^2}{2Eh}\left(t_{32}^{+}-t_{32}^{-}\right)=\frac{1-\nu^2}{E}\rho_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\
&D\Delta^2 w+2\rho_0 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-h\frac{\partial}{\partial x_1}\left(t_{31}^{+}+t_{31}^{-}\right)-h\frac{\partial}{\partial x_2}\left(t_{32}^{+}+t_{32}^{-}\right)-\\
&-\left[\chi e_2-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\chi e_1+2\right)\right]\frac{\chi}{\mu}B_{03}\int_{-h}^{+h}x_3\Delta h_3 dx_3-\frac{\chi}{\mu}B_{03}\int_{-h}^{+h}x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial h_1}{\partial x_1}+\frac{\partial h_2}{\partial x_2}\right)dx_3-\\
&-\left[\left(e_1\chi+2\right)-\frac{\nu}{1-\nu}\chi e_2\right]\chi B_{01}\int_{-h}^{+h}x_3\frac{\partial^2 h_1}{\partial x_1^2}dx_3-\frac{1-2\nu}{1-\nu}\chi^2 e_2 B_{01}\int_{-h}^{+h}x_3\frac{\partial^2 h_1}{\partial x_2^2}dx_3-\\
&-\chi B_{01}\int_{-h}^{+h}x_3\Delta h_1 dx_3-\left(t_{33}^{+}-t_{33}^{-}\right)-S_{11}^{non}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-S_{22}^{non}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\\
&-\chi B_{01}\int_{-h}^{+h}\frac{\partial h_1}{\partial x_3}dx_3-\frac{\chi}{\mu}B_{03}\int_{-h}^{+h}\frac{\partial h_3}{\partial x_3}dx_3=0
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$$D=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\ ,\ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

$$S_{11}^{non}=\frac{\chi^2 B_{03}^2 h}{\mu_0\mu^2}\left[e_2-\frac{\nu}{1-\nu}\left(e_1-1\right)\right]+\frac{\chi^2 B_{01}^2}{\mu_0}h\left[e_1-\frac{\nu}{1-\nu}e_2\right]$$

$$S_{22}^{non} = \frac{\chi^2 B_{03}^2 h}{\mu_0 \mu^2}\left[e_2 - \frac{\nu}{1-\nu}\left(e_1 - 1\right)\right] + \frac{\chi^2 B_{01}^2}{\mu_0} h\, e_2 \frac{1-2\nu}{1-\nu}$$

Искомые функции должны удовлетворять как системе дифференциальных уравнений (3), так и граничным условиям на контуре пластинки. Граничные условия, в которых задаются компоненты перемещений точек контура пластинки, ничем не отличаются от соответствующих условий классической теории пластин. Например, для края $x_1 = \text{const}$ граничные условия жесткой заделки имеют вид

$$u = 0, \qquad \text{v} = 0, \qquad w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0$$

Часть граничных условий могут быть формулированы в напряжениях. Они приведены в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван: ЕГУ, 1999. 400 с.
2. Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А. Математическое моделирование колебаний двухслойной магнитострикционной пластинки. // Изв. АН РФ. МТТ. 1992. № 3.

<u>Сведения об авторе</u>

Даноян Эдвард Айказович

Кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры численного анализа и мат. моделирования, Ереванский государственный университет

Адрес: Ереван, Нор Ареш, ул. 39, дом 31; Тел.45-24-91

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ПОРИСТОМ МАТЕРИАЛЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЯ ФАЗОВО-ГРУППОВОГО СИНХРОНИЗМА

Ерофеев В.И.

Трехмерные уравнения динамики твердой среды с полостями были получены в [1]. В [2] было показано, что в одномерном случае эта система может быть сведена к следующим эволюционным уравнениям:

$$\begin{aligned} & i\frac{\partial W_1}{\partial t}-a_1\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2}+a_2W_1=b_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(W_1+W_2+W_3+W_4\right)^2,\ W_2=W_1^* \\ & \frac{\partial W_{3,4}}{\partial t}\pm c_2\frac{\partial W_{3,4}}{\partial x}\pm g\frac{\partial^3 W_{3,4}}{\partial x^3}=\mp b_2\frac{\partial}{\partial x}\left(W_1+W_2+W_3+W_4\right)^2 \end{aligned} \qquad (1)$$

где W^* – величина, комплексно-сопряженная с W.

Коэффициенты эволюционного уравнения будут выглядеть следующим образом: $a_1=2c_l^4\pi R_0N\sqrt{\omega_0^2+4\pi R_0c_l^2N}\,/\left(\omega_0^2+4\pi R_0c_l^2N\right)^2$, $a_2=\sqrt{\omega_0^2+4\pi R_0c_l^2N}$

$$c_2=c_l\omega_0/\sqrt{\omega_0^2+4\pi R_0c_l^2N},\ g=c_l^3/8\omega_0\sqrt{\omega_0^2+4\pi R_0c_l^2N},$$

$$b_1=0,5P/\rho_0\sqrt{\omega_0^2+4\pi R_0c_l^2N}$$

$$b_2=\frac{P}{2\rho_0}\frac{\sqrt{\omega_0^2+4\pi R_0c_l^2N}}{c_l\omega_0}\left\{1-\rho_0G\left(1+\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2+4\pi R_0c_l^2N}\right)^3/4\pi R_0PN^2\right\}$$

Здесь R_0 – радиус полостей, N – количество полостей в единице объема, ρ_0 – начальная плотность матрицы, $\omega_0^2=\dfrac{4\rho}{\rho_0R_0}$ – квадрат резонансной частоты, $\rho=(4\mu+3\lambda+2A+6B+2C)$, A, B, C – нелинейные коэффициенты Ландау.

Связь новых переменных (W_i) с исходными (u,ν) определяются выражениями

$$\frac{\partial u}{\partial x}=W_1+W_2+W_3+W_4$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\left\{\left(1+\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2+4\pi R_0c_l^2N}\right)\frac{\partial}{\partial x}\right\}\frac{\left(W_1+W_2\right)}{N}-\frac{\left(\omega_0^2+4\pi R_0c_l^2N\right)\left(W_3+W_4\right)}{c_l^2N\dfrac{\partial}{\partial x}}$$

Для $W_{1,2}$ система представляет собой комплексно-сопряженные уравнения Шредингера, а для $W_{3,4}$ – уравнения Кортевега–де Вриза. Нелинейность приводит к тому, что все четыре уравнения оказываются связанными между собой.

Считаем, что в среде в положительном направлении оси x распространяются волна: W_3 с частотой $\omega_Н$ и волновым числом $k_н$ и волна W_1 с частотой $\omega_В$ и волновым числом $k_В$. При этом $\omega_н \ll \omega_в$, т.е. волну W_3 отождествляем с вибрационным полем, а волну W_1 – с ультразвуковым акустическим сигналом.

В результате взаимодействия двух волн на квадратичной нелинейности системы (1) будет генерироваться волна W_1 суммарной частоты, удовлетворяющая условиям трехчастотного резонансного взаимодействия

$\omega_\Sigma = \omega_н + \omega_в$, $k_\Sigma = k_н + k_в$. Частота и волновое число вибрационного поля должны, при этом, подчиняться закону дисперсии уравнения Кортевега-де Вриза: $\omega_н = c_2 k_н - g k_н^3$, а частоты и волновые числа ультразвука должны подчиняться закону дисперсии уравнения Шредингера, т.е. удовлетворять соотношениям: $\omega_в = a_1 k_в^2 + a_2$, $\omega_\Sigma = a_1 k_\Sigma^2 + a_2$.

Ультразвуковая волна суммарной частоты ω_Σ должна, согласно поставленной задаче, подчиняться еще и условию фазово-группового синхронизма с вибрационным полем, т.е. $V_{гр\Sigma} = V_{фн}$, где $V_{гр\Sigma} = \dfrac{d\omega_\Sigma}{dk_\Sigma}$ – групповая скорость ультразвука, а $V_{фн} = \omega_н / k_н$ – фазовая скорость вибрационного поля.

Значения частот волн, участвующих в фазово-групповом синхронизме и трехчастотном взаимодействии, следующие:

$$\begin{aligned} \omega_н &= 16 \frac{c_l^2 \pi R_0 N \omega_0^2}{\left(\omega_0^2 + 4\pi R_0 N \omega_0^2\right)^{3/2}} \\ \omega_\Sigma &= \sqrt{\omega_0^2 + 4\pi R_0 N \omega_0^2}\left\{1 + \frac{\omega_0^2}{8\pi c_l^2 R_0 N}\right\} \end{aligned} \qquad (2)$$

Из анализа величины отношения $\omega_\Sigma / \omega_н$ определены параметры модели твердого пористого материала, при которых возможен процесс фазово-группового синхронизма. Так, при $\omega_\Sigma / \omega_н \sim 10^2$ получаем количество полостей в единице объема $N \sim 10^5$ с радиусами $R_0 \sim 10^{-2}$ м., а из соотношения между радиусом полости, расстоянием между полостями и длиной волны может быть найден объем пористого материала, для конкретных длин, распространяющихся в нем, волн.

Пусть отношение $\varepsilon = k_н / k_\Sigma$ характерных волновых чисел вибрационного поля и ультразвуковой волны мало. Воспользуемся традиционным переходом в подвижную систему координат с изменением масштабов времени и пространства $\xi = \varepsilon\left(x - V_{гр\Sigma} t\right)$, $\tau = \varepsilon^2 t$.

Переходя в системе (1) (при $W_4 = 0$) к новым переменным, получаем

$$\begin{aligned} &\left(V_{гр\Sigma} - c_2\right)\frac{\partial V}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \tau} = 2b_2 \frac{\partial}{\partial \xi}\left(|A|^2\right) \\ &i\frac{\partial A}{\partial \tau} - a_1 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} = -2b_1 k^2 A V \end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь, кроме новых координат и времени появляются функции A и V:

$$W_1 = Ae^{i\phi} + \text{к.с.}, \quad \phi = k\xi - \omega\tau$$
$$W_3 = V$$

где через к.с. обозначена комплексно-сопряженная величина.

В отсутствие резонанса ($V_{\text{гр}\Sigma} \neq c_2$) второе слагаемое в первом уравнении системы (3) оказывается много меньше первого, что дает $V = 2b_2 \left|A\right|^2 / \left(V_{\text{гр}\Sigma} - c_2\right)$ и позволяет привести систему к одному нелинейному уравнению Шредингера для комплексной амплитуды ультразвуковой волны

$$iA_\tau - a_1 A_{\xi\xi} = -\frac{4b_1 b_2}{\left(V_{\text{гр}\Sigma} - c_2\right)} k^2 \left|A\right|^2 A \tag{4}$$

В случае резонанса существует такое k_Σ^*, при котором $V_{\text{гр}\Sigma}\left(k_\Sigma^*\right) = c_2$, т.е. групповая скорость коротких ультразвуковых волн совпадает с фазовой скоростью длинных вибрационных сигналов.

Из условия резонанса может быть выражена длина волны λ^* возбуждаемого ультразвука

$$\lambda^* = \frac{c_l}{c_\tau} \frac{\pi R_0}{\left(1 + \left(\frac{c_\tau}{c_l}\right)^2 \frac{1}{\pi R_0^3 N}\right)}$$

Приближение длинно-короткого резонанса будет тем точнее работать, чем строже выполняется неравенство $\lambda^* / \lambda_{\text{н}} \sim \varepsilon << 1$, где $\lambda_н$ – длина низкочастотной волны, причем $\lambda_{\text{н}} >> \left(g / c_2\right)^{1/2} = \frac{R_0}{4\sqrt{2}} \frac{c_l}{c_\tau}$. Последнее неравенство следует из дисперсионного соотношения и означает, что наиболее эффективный резонанс действительно достигается в области линейного участка дисперсионной кривой уравнения Кортевега – де Вриза.

Известно, что в кубически-нелинейной среде квазигармоническая волна может оказаться неустойчивой по отношению к разбиению на отдельные волновые пакеты. Это явление называется модуляционной неустойчивостью или самомодуляцией [3].

Наличие модуляционной неустойчивости определяется из уравнения (4) с помощью критерия Лайтхилла и возникает в рассматриваемой системе, если

$$4a_1 b_1 b_2 k^2 / \left(V_{\text{гр}\Sigma} - c_2\right) < 0 \tag{5}$$

Поскольку $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $a_1 > 0$, то условие (5) эквивалентно неравенству
$V_{\text{гр}\Sigma} - c_2 < 0$.

Таким образом, пространственная локализация ультразвуковой волны будет наблюдаться до наступления фазово-группового синхронизма.

Введем в рассмотрение вместо комплексной амплитуды A действительные амплитуду (a) и фазу (φ): $A = ae^{i\varphi}$. Тогда уравнение Шредингера (4) можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{a^2}{2}\right) - a_1 \frac{\partial}{\partial\xi}\left(a^2 \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right) = 0 \\ a\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + a_1 \frac{\partial^2 a}{\partial\xi^2} - a_1 a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 - 4b_1 b_2 / \left(V_{\text{гр}\Sigma} - c_2\right) a^3 = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

Определим, как будут выглядеть волновые пакеты, на которые разбивается квазигармоническая волна в результате модуляционной неустойчивости. Для этого воспользуемся системой уравнений (6) и проанализируем стационарные волны огибающих.

Будем искать решения этой системы, зависящие от одной переменной $\eta = \xi - V\tau$, где $V = \text{const}$ – скорость стационарной волны: $a = a(\eta)$, $\varphi = \varphi(\eta)$.

Тогда система уравнений в частных производных (6) сведется к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений, после интегрирования первого из которых получим связь фазы волны и ее амплитуды

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = -\left(\frac{D}{a^2} + \frac{V}{2}\right) / a_1 ,$$

где D – постоянная интегрирования.

Если ограничиться рассмотрением волн, у которых имеется амплитудная модуляция, но отсутствует модуляция фазовая, то $D = 0$, а изменение амплитуды будет описываться уравнением Дуффинга

$$\frac{d^2 a}{d\eta^2} + m_1 a + m_2 a^3 = 0 \text{, где } m_1 = V^2 / 4a_1^2 ;\ m_2 = -4b_1 b_2 / \left(V_{\text{гр}\,\Sigma} - c_2\right) a_1$$

В области модуляционной неустойчивости (5) это уравнение имеет периодическое решение, описываемое эллиптическим косинусом Якоби:

$$a(\eta) = a_0 cn(k_0 \eta, s)$$

Здесь s – модуль эллиптической функции ($0 \le s^2 \le 0,5$); $a_0 = \sqrt{2m_1 s^2 / m_2 (1 - 2s^2)}$ – амплитуда волны огибающей; $k_0 = \sqrt{m_1 / (1 - s^2)}$ – нелинейный аналог волнового числа, связанный с длиной волны огибающей (Λ) и полным эллиптическим интегралом первого рода ($\mathbf{K}(s)$) соотношением $\Lambda = 4\mathbf{K}(s) / k_0$.

Форма волны огибающей определяется модулем эллиптической функции (s), который, в свою очередь, зависит от величины $s^2 = 0,5 m_2 a_0^2 / \left(m_1 + m_2 a_0^2\right)$ и следовательно, характеризует степень нелинейных искажений волнового пакета. При малых амплитудах $s^2 \to 0$ и форма огибающей близка к синусоиде. При больших амплитудах $s^2 \to 0,5$ и форма огибающей становиться пилообразной.

Определим, как связаны высота (h) и ширина (Δ) волнового пакета, сформировавшегося в результате самомодуляции квазигармонической волны, с основными характеристиками среды и соотношением величин фазовой скорости вибрационного поля и групповой скорости ультразвука.

Отождествляя высоту волнового пакета с удвоенной амплитудой $h = 2a_0$, а его ширину с половиной длины волны огибающей $\Delta = \Lambda / 2$, получим соотношения:

$$h = V \sqrt{\frac{\left(V_{\text{гр}\Sigma} - c_2\right) s^2}{-2a_1 b_1 b_2 \left(1 - 2s^2\right)}},\ \Delta = 4\mathbf{K}(s)\sqrt{1 - s^2}\,\left|a_1\right| / V \qquad (7)$$

анализ которых показывает, что высота волнового пакета увеличивается, а его ширина уменьшается, с ростом скорости волны огибающей ($h \sim V$; $\Delta \sim 1/V$) и с ростом пористости $R_0^3 N$ ($h \sim \left(R_0^3 N\right)^{3/4}$; $\Delta \sim \left(R_0^3 N\right)^{-1}$).

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант № 06-02-17158).

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Шекоян А.В. Нелинейные волны в твердой вязкой среде с полостями // Акустический журнал. 1999. Т.45. С.149-156.
2. Ерофеев В.И., Пегушин А.Г., Шешенин С.Ф. Резонансные взаимодействия высокочастотных и низкочастотных волн в нелинейно-упругих средах с микроструктурой // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Изд-во «Гитутюн» НАН РА. 2005. С. 191-196.
3. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.

Сведения об авторе

Ерофеев Владимир Иванович
Доктор физ.-мат. наук, заместитель директора по научной работе,
Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН
Адрес: 603024, Россия, Нижний Новгород, ул. Белинского, 85, Нф ИМАШ РАН
Тел.: +7(8312)32-05-76; Факс: +7(8312)32-05-76; E-mail: erf04@sinn.ru

НЕУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ ОДНОНАПРАВЛЕННО АРМИРОВАННЫХ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРЫ ПРИ МНОГООСНОМ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ И СДВИГЕ

Зайцев А.В., Трефилов Н.В.

Многослойные композитные конструкции проектируются таким образом, чтобы основная силовая нагрузка воспринималась волокнами, а связующее перераспределяло напряжения, обеспечивая взаимодействие между армирующими элементами. Каждый монослой находится в условиях сложного напряженно-деформированного состояния под действием осевых и сдвиговых нагрузок в продольных и поперечной плоскостях. Закономерности механического поведения монослоев могут быть определены при многоосных испытаниях образцов из однонаправленно армированных композитов с детальным анализом их микроструктуры на различных стадиях деформирования. Поэтому разработка новых и развитие существующих математических моделей неупругого деформирования и разрушения волокнистых композитов случайной структуры при многоосном пропорциональном нагружении и сдвиге является актуальной задачей.

Краевая задача. Рассмотрим краевую задачу о деформировании и структурном разрушении представительного объема Ω_{RVE} (определение характерного размера которого является самостоятельной задачей, решение которой представлено в работе [1]) однонаправленно армированного волокнистого композита, компоненты которого не изменяют геометрию, тип упругой симметрии и взаимное расположение в процессе накопления повреждений.

Предполагая нагружение материала пошаговым и пропорциональным, запишем уравнения краевой задачи в инкрементальной форме. Приращения структурных напряжений $\mathbf{d\sigma}(\mathbf{r})$ в области Ω_{RVE} в отсутствие массовых сил удовлетворяют уравнениям равновесия, а бесконечно малые приращения деформаций $\mathbf{d\varepsilon}(\mathbf{r})$ связаны с приращениями перемещений $\mathbf{du}(\mathbf{r})$ соотношениями Коши:

$$d\sigma_{ij,j}(\mathbf{r})=0\,,\qquad 2\,d\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})=du_{i,j}(\mathbf{r})+du_{j,i}(\mathbf{r}) \tag{1}$$

Компоненты материального тензора $\tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{r})$ определяющих соотношений

$$d\sigma_{ij}(\mathbf{r})=\tilde{C}_{ijkl}(\mathbf{r})\,d\varepsilon_{kl}(\mathbf{r}) \tag{2}$$

являются кусочно-однородными случайными функциями пространственных координат $\mathbf{r}$.

Введем для описания геометрии случайной структуры композита кусочно-однородную индикаторную функцию $\lambda(\mathbf{r})$ детерминированного радиус-вектора $\mathbf{r}$, которая принимает значение 1 или 0, если точка $\mathbf{r}$ принадлежит волокну или матрице. Тогда тензор $\tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{r})$ в соотношениях (2) может быть представлен в виде суперпозиции соответствующих тензоров $\tilde{\mathbf{C}}_f(\mathbf{r})$ и $\tilde{\mathbf{C}}_m(\mathbf{r})$ двух фаз (волокна и матрицы) следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{r})=\tilde{\mathbf{C}}_f(\mathbf{r})\lambda(\mathbf{r})+\tilde{\mathbf{C}}_m(\mathbf{r})\left[1-\lambda(\mathbf{r})\right] \tag{3}$$

Будем предполагать, что на участках Γ_1 и Γ_2 границы $\partial\Omega_{RVE}$ представительного объема (плоскостях симметрии) заданы условия

$$u_n(\mathbf{r})\Big|_{\Gamma_1,\Gamma_2}=0\,,\qquad \sigma_{n\tau}(\mathbf{r})\Big|_{\Gamma_1,\Gamma_2}=0 \tag{4}$$

(индексы n и τ определяют положительные направления нормали и касательной), на межфазных поверхностях волокнистого композита выполняются условия непрерывности перемещений $\left[u_i(\mathbf{r})\right]^-=\left[u_i(\mathbf{r})\right]^+$ и напряжений $\left[\sigma_{ij}(\mathbf{r})\,n_j(\mathbf{r})\right]^-=\left[\sigma_{ij}(\mathbf{r})\,n_j(\mathbf{r})\right]^+$, а на остальных участках Γ_3 и Γ_4 — условия макрооднородного напряженного или деформированного состояния

$$dS_i(\mathbf{r})\Big|_{\Gamma_3,\Gamma_4} = d\sigma^*_{ij}\, n_j(\mathbf{r}), \quad du_i(\mathbf{r})\Big|_{\Gamma_3,\Gamma_4} = d\varepsilon^*_{ij}\, r_j \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{d\sigma}^*$ и $\mathbf{d\varepsilon}^*$ — приращения макронапряжений и макродеформаций, а $\mathbf{dS}(\mathbf{r})$ — вектор приращения внешних усилий.

Уравнения (1), (2) совместно с граничными условиями (4), (5) составляют краевую задачу для области Ω_{RVE}, которая имеет единственное решение.

Таблица 1

Совокупность критериев разрушения и схема изменения материальных функций повреждаемой изотропной матрицы

Механизм разрушения	Критерий разрушения	Материальные функции	
		κ	g
Формоизменение	$j^{(2)}_{\varepsilon}(\mathbf{r}) > j^{(2)}_{\varepsilon\ \mathrm{cr}}(\mathbf{r}),\ j^{(1)}_{\varepsilon}(\mathbf{r}) > 0$	1	1
	$j^{(2)}_{\varepsilon}(\mathbf{r}) > j^{(2)}_{\varepsilon\ \mathrm{cr}}(\mathbf{r}),\ j^{(1)}_{\varepsilon}(\mathbf{r}) < 0$	0	1
Объемное растяжение	$j^{(1)}_{\varepsilon}(\mathbf{r}) > j^{(1)}_{\varepsilon\ \mathrm{cr}+}(\mathbf{r})$	1	1
Объемное сжатие	$j^{(1)}_{\varepsilon}(\mathbf{r}) > j^{(1)}_{\varepsilon\ \mathrm{cr}-}(\mathbf{r}),\ j^{(1)}_{\varepsilon}(\mathbf{r}) < 0$	0	1

Моделирование процессов структурного разрушения. Будем считать, что волокна однонаправленно армированного композита изотропные, упругие и неразрушаемые, а матрица — изотропная упруго-хрупкая. Введем независимые материальные функции κ и g, однозначно описывающие объемо- и формоизменение повреждаемой матрицы. Тогда материальные тензоры $\tilde{\mathbf{C}}_f(\mathbf{r})$ и $\tilde{\mathbf{C}}_m(\mathbf{r})$, входящие в равенства (3), могут быть записаны следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{C}}_f(\mathbf{r}) = 3K_f(\mathbf{r})\,\mathbf{V} + 2G_f(\mathbf{r})\,\mathbf{D}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_m(\mathbf{r}) = 3K'_m(\mathbf{r})\,\mathbf{V} + 2G'_m(\mathbf{r})\,\mathbf{D}$$

$$K'_m(\mathbf{r}) = K_m(\mathbf{r})\left[1-\kappa\left(j^{(1)}_{\varepsilon}, j^{(2)}_{\varepsilon}\right)\right], \quad G'_m(\mathbf{r}) = G_m(\mathbf{r})\left[1-g\left(j^{(1)}_{\varepsilon}, j^{(2)}_{\varepsilon}\right)\right]$$

Здесь $\mathbf{V}$ и $\mathbf{D}$ — шаровая часть и девиатор единичного тензора четвертого ранга, $K_f(\mathbf{r})$, $G_f(\mathbf{r})$ и $K_m(\mathbf{r})$, $G_m(\mathbf{r})$ — объемный и сдвиговой упругие модули волокон и матрицы соответственно; $j^{(\gamma)}_{\varepsilon}$ — линейный и квадратичный независимые инварианты тензора структурных деформаций.

В зависимости от вида напряженно-деформированного состояния возможна реализация различных механизмов разрушения при выполнении условий, переставленных в табл. 1 ($j^{(2)}_{\varepsilon\ \mathrm{cr}}(\mathbf{r})$, $j^{(1)}_{\varepsilon\ \mathrm{cr}+}(\mathbf{r})$, $j^{(1)}_{\varepsilon\ \mathrm{cr}-}(\mathbf{r})$ — прочностные постоянные материала матрицы, определяющие способность сопротивляться формоизменению, гидростатическому растяжению и сжатию). Полная потеря несущей способности происходит в результате гидростатического растяжения или формоизменения при условии $j^{(1)}_{\varepsilon}(\mathbf{r}) > 0$, сохранение способности сопротивляться только гидростатическому сжатию — при $j^{(1)}_{\varepsilon}(\mathbf{r}) < 0$.

Пусть $\mu^{(n)} > 0$ — параметр процесса, определенный на n-м шаге. Осуществим из равновесного состояния пробный шаг, увеличивая на малую, наперед заданную, величину компоненты тензора макродеформаций. Выделим внутри композита область поврежденного материала $\Omega_D \subset \Omega_{RVE}$. Определим

$$\rho^n_1 = \min_{i\in\Omega_{RVE}\setminus\Omega_D} j^{(2)\,i}_{\varepsilon\ \mathrm{cr}}(\mathbf{r}) \Big/ \left[\Delta j^{(2)\,i}_{\varepsilon}(\mathbf{r})\right]$$

$$\rho_2^n = \min_{i \in \Omega_{RVE} \setminus \Omega_D} j_{\varepsilon\ \mathrm{cr}+}^{(1)\,i}(\mathbf{r}) \Big/ \left[\Delta j_\varepsilon^{(1)\,i}(\mathbf{r}) \right], \text{ если } \Delta j_\varepsilon^{(1)\,i}(\mathbf{r}) > 0$$

$$\rho_3^n = \min_{i \in \Omega_{RVE} \setminus \Omega_D} j_{\varepsilon\ \mathrm{cr}-}^{(1)\,i}(\mathbf{r}) \Big/ \left[\Delta j_\varepsilon^{(1)\,i}(\mathbf{r}) \right], \text{ если } \Delta j_\varepsilon^{(1)\,i}(\mathbf{r}) < 0$$

по известным из решения краевой задачи (1), (2) с граничными условиями (4), (5) для каждого i неповрежденного элемента изменениям $\Delta j_\varepsilon^{(2)\,i}(\mathbf{r})$, $\Delta j_\varepsilon^{(1)\,i}(\mathbf{r})$ первого и второго инвариантов тензора структурных деформаций, а также прочностным постоянным $j_{\varepsilon\ \mathrm{cr}}^{(2)\,i}(\mathbf{r})$, $j_{\varepsilon\ \mathrm{cr}+}^{(1)\,i}(\mathbf{r})$ и $j_{\varepsilon\ \mathrm{cr}-}^{(1)\,i}(\mathbf{r})$.

Структурное разрушение матрицы сопровождается перераспределением напряжений. Можно предположить, что в ходе пошагового нагружения часть поврежденных ранее элементов может частично восстановить утраченное сопротивление внешней нагрузке. Поэтому при выполнении одного из неравенств

$$j_\varepsilon^{(1)\,k}(\mathbf{r}) < 0 \ \wedge \ \Delta j_\varepsilon^{(1)\,k}(\mathbf{r}) > 0 \quad \text{или} \quad j_\varepsilon^{(1)\,k}(\mathbf{r}) > 0 \ \wedge \ \Delta j_\varepsilon^{(1)\,k}(\mathbf{r}) < 0$$

для k-го элемента из множества Ω_D, свидетельствующих о возможности смены типа напряженно-деформированного состояния в результате продолжения активного нагружения, необходимо также вычислить параметр ρ_4^n из условия:

$$\rho_4^n = \min_{k \in N_D} \left| \ j_\varepsilon^{(1)\,k}(\mathbf{r}) \Big/ \Delta j_\varepsilon^{(1)\,k}(\mathbf{r}) \right|$$

где $j_\varepsilon^{(1)\,k}(\mathbf{r})$ — достигнутое значение первого инварианта.

Определим параметр макродеформирования $\mu^{(n+1)}$ в ($n+1$)-м приближении:

$$\mu^{(n+1)} = \min \left[\rho_1^n,\ \rho_2^n,\ \rho_3^n,\ \rho_4^n \right]$$

Пропорциональное изменение компонент тензора макродеформаций

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{*(n+1)} = \mu^{(n+1)} \varepsilon_{ij}^{*(n)} \tag{6}$$

осуществляется на такую величину, что в процессе нагружения удается зарегистрировать каждый акт изменения деформационных свойств в результате частичной потери или восстановления несущей способности в случае смены типа напряженно-деформированного состояния на структурном уровне.

Закономерности структурного разрушения матрицы. Было проведено исследование неупругого деформирования и разрушения матрицы стеклопластика, стохастическую структуру которого составляли случайным образом размещенные волокна с диаметрами, распределенными по нормальному и логнормальному законам. При генерации фрагментов случайной структуры (основы принципов построения алгоритмов компьютерного синтеза представлены в работах [1, 3]) параметры распределения диаметров волокон соответствовали данным работы [3]. Упругие и прочностные постоянные были выбраны $K_f = 17{,}5$ ГПа и $G_f = 10{,}5$ ГПа для стекловолокна, $K_m = 3{,}5$ ГПа, $G_m = 2{,}1$ ГПа, $j_{\varepsilon\ \mathrm{cr}}^{(2)} = 0{,}025$, $j_{\varepsilon\ \mathrm{cr}\,+}^{(1)} = 0{,}017$ и $j_{\varepsilon\ \mathrm{cr}\,-}^{(1)} = 0{,}037$ — для эпоксидной матрицы.

Моделирование процессов неупругого деформирования и разрушения проводили путем изменения значений компонент тензора макродеформаций $\mathbf{d\varepsilon}^*$ в граничных условиях (5), проверяя на каждом шаге нагружения, который определяется автоматически в соответствии с разработанной итерационной процедурой (6), условия прочности (табл. 4). В случае невыполнения последних производилась корректировка деформационных постоянных элементов структуры.

В результате численного решения последовательности краевых задач (1), (2) были исследованы основные закономерности процесса накопления повреждений при многоосном пропорциональном нагружении и сдвиге. При этом дискретизация реализаций представительных объемов стеклопластика проводилась (в зависимости наполнения) на 40000–100000 треугольных симплекс-элементов. Вследствие значительного различия в упругих модулях волокон и матрицы на границах раздела фаз имели место большие градиенты деформаций.

При деформировании стеклопластика по схеме $\varepsilon_{11}^{*} = \varepsilon_{22}^{*} = -\varepsilon_{33}^{*}$, где $\varepsilon_{33}^{*} > 0$, наблюдался эффект «порционного» разрушения (рис. 1): на каждом шаге увеличения макродеформаций происходило одновременное разрушение небольшого участка матрицы вблизи межфазной поверхности (10–15 соседних конечных элементов). Подобное разрушение связующего на всех стадиях протекало дисперсно и не зависело от вида закона распределения диаметров волокон.

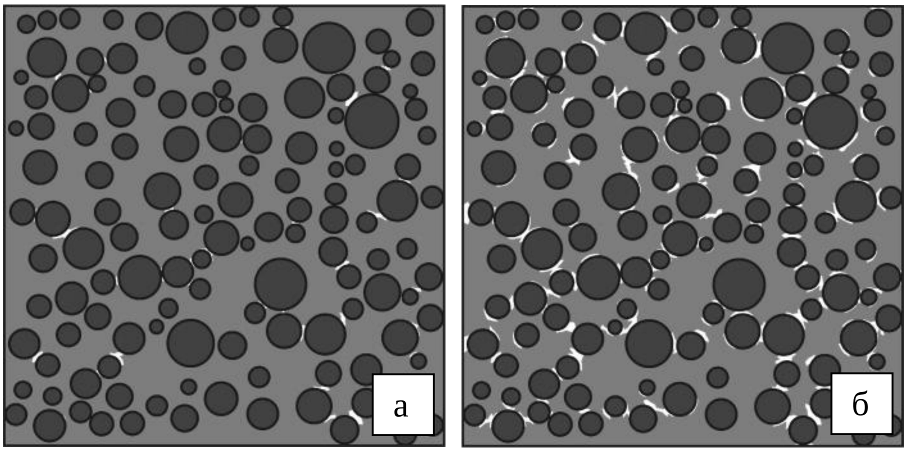


Рис. 1. Эффект «порционного» разрушения матрицыстеклопластика
с объемным наполнением 0,4

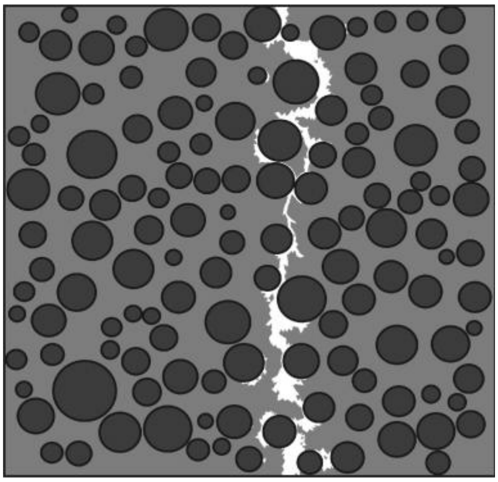


Рис. 2. Макроразрушение стеклопластика
при антиплоском сдвиге $\varepsilon_{13}^{*} > 0$

При продольном сдвиге стеклопластика, рост макродефекта происходил вблизи межфазных границ, сопровождался интенсивным перераспределением напряжений и локализацией деформаций. Заданные макродеформации обеспечивались формоизменением областей эпоксидного связующего и участков волокон, непосредственно примыкавших к этому дефекту.

В работе [3] показаны принципиально разные механизмы локализованного разрушения стеклопластиков при антиплоском сдвиге, которые, несмотря на отсутствие визуальных различий у синтезированных фрагментов, были объяснены «скрытыми» закономерностями (наличием в случайных полях структуры этих материалов в интервале от $0{,}5\langle D\rangle$ до $2{,}0\langle D\rangle$ периодических составляющих [1, 3]), предопределявшими характер неоднородности полей напряжений и деформаций. Было установлено, что симметрия закона распределения диаметров волокон являлась одним из ключевых факторов с точки зрения описания основных закономерностей локализованного разрушения. Если диаметры волокон распределены по нормальному закону, дефект по мере возрастания макродеформаций постепенно увеличивал свою длину, «прорезая» неповрежденные участки матрицы. У стеклопластика, диаметры волокон которого распределены по логнормальному закону, рост поврежденной области происходил путем объединения последовательно возникающих на расстоянии $0{,}5-2{,}0\langle D\rangle$ от его верхней и нижней части очагов матрицы, потерявших способность сопротивляться формоизменению.

Макроскопическое разрушение стеклопластика связывали с отсутствием в математическом смысле решения краевой задачи (1), (2) с граничными условиями (4) и (5) при вырождении матрицы узлового ансамбля, свидетельствовавшем о физической неустойчивости композита при заданном сочетании приложенной нагрузки, прочностных и деформационных свойств элементов структуры [3]. В соответствии с этим условием полное исчерпание несущей способности регистрировалось в момент разделения представительного объема дефектом на фрагменты (рис. 2), способные при заданном внешнем воздействии перемещаться друг относительно друга как жесткое целое.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ–Урал № 07–01–96056).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев А.В., Лукин А.В., Ташкинов А.А., Трефилов Н.В. Случайные структуры двухфазных композитов: синтез, закономерности, новая оценка характерных размеров представительных объемов // Математ. моделирование систем и процессов. 2004. Вып. 12. С. 30–44.
2. Аношкин А.Н. Микромеханический анализ неупругого деформирования однонаправленных волокнистых композитов при многоосном нагружении и сдвиге // Механика композит. материалов. 2003. Т. 39. № 5. –С. 575–586.
3. Зайцев А.В., Лукин А.В., Трефилов Н.В. Компьютерный синтез, закономерности случайных структур и моделирование процессов разрушения волокнистых композитов при продольном сдвиге // Физ. мезомеханика. 2004. Т. 7. № 5. С. 73–79.

<u>Сведения об авторах</u>

Зайцев Алексей Вячеславович
Кандидат физ.-мат.наук, доцент кафедры
Механика композиционных материалов и конструкций
Адрес: 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр-т, 29, Пермский государственный технический университет
Тел: +7-342-2391294
E-mail: zav@pstu.ru

Трефилов Николай Витальевич
Аспирант кафедры Механика композиционных материалов и конструкций
Адрес: 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр-т, 29,
Пермский государственный технический университет
Тел: +7-342-2391294
E-mail: zav@pstu.ru

ДИФФУЗИОННЫЙ МАССОПЕРЕНОС ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТЬ КОНТАКТА ТВЕРДЫХ ТЕЛ В ПРОЦЕССЕ МЕХАНИЧЕСКОГО ЛЕГИРОВАНИЯ

Зубко И.Ю., Оглезнева С.А., Трусов П.В.

Процесс механического легирования (МЛ) представляет собой способ получения твердого раствора разных материалов в виде мелкодисперсного порошка за счет высокоэнергетического механического воздействия на частицы порошка исходных компонентов в планетарной мельнице [1]. МЛ является существенно неравновесным процессом и сопровождается диссипацией подводимой механической энергии на трех уровнях: макроскопическом — за счет сложного вихревого движения соударяющихся и трущихся шаров, мезоскопическом — за счет повторяющихся процессов сваривания и разрушения частиц порошка при контактном взаимодействии, микроскопическом — за счет процессов диффузии и изменения дефектной структуры в частицах порошка. Для ряда твердых растворов металлов МЛ является единственным способом их получения. Основной проблемой является определение параметров ведения процесса для получения новых материалов с заданными свойствами. Экспериментальные методы установления параметров технологического процесса требуют существенных материальных и временных затрат. В связи с этим для решения данной задачи необходимо строить многоуровневую математическую модель процесса, которая позволит прогнозировать свойства получаемого порошка в зависимости от указанных параметров. Развиваемая авторами модель имеет следующую структуру (рис.1):

1.1. Подмодель, описывающая связанные процессы диффузии и деформирования в металлах, в том числе под действием ударного нагружения. Механодиффузия при МЛ является основным механизмом гомогенизации состава частиц порошка, состоящих из микроблоков различных материалов, образующихся в результате многократных процессов разрушения и сваривания частиц.
1.2. Подмодель, описывающая динамику дислокаций в деформируемом теле. В этом направлении авторами разработана модель [2], численно описывающая эволюцию дислокационной структуры при нагружении различной жесткости и скорости. Как показывают эксперименты, плотность дислокаций заметно растет в процессе легирования, и с помощью дислокаций реализуется механизм тоннельной диффузии, обеспечивающий значительно большую скорость диффузии.
1.3. Модель, соединяющая диффузию примеси и динамику дислокаций в деформируемом теле. Результаты численного моделирования совместного движения дислокаций и атомов примеси приведены в [3].
2.1. Подмодель, описывающая холодное (диффузионное) сваривание при контактном взаимодействии частиц порошка между мелющими шарами, позволяющая сформулировать критерий сваривания частиц.
2.2. Подмодель контактного разрушения частиц при ударах со стороны шаров, позволяющая сформулировать критерий разрушения частиц.
2.3. Модель мезоуровня, позволяющая определять воздействия на частицы порошка и описывающая динамику разрушения и сваривания частиц порошка, в том числе изменение их размеров и фазового состава в зависимости от характера воздействий со стороны шаров.
3.1. Модель динамики мелющих шаров в чаше планетарной мельницы, позволяющая делать инженерные оценки эффективности мельниц, определять параметры движения шаров, решать задачи оптимизации процесса механического легирования [4].
3.2. Модель, описывающая эволюцию свойств порошка, включая размеры частиц и плотность дислокаций в них в зависимости от времени дробления.

В данной работе исследуются механизмы диффузионного сваривания поверхностей на начальной стадии контакта двух тел (подмодель 2.1). При этом особую роль играют микронеровности на поверхности контактирующих тел. Для простоты они считаются периодически повторяющимися и вытянутыми в одном направлении, что приводит к задаче

ПДС с периодическим контактом. Принимается, что одно тело — линейно-упругое изотропное полупространство с плоской поверхностью, другое — штамп с поверхностью в виде синусоиды в сечении. Решение этой задачи в виде поля давления под участками контакта приведено в работе [5]. В работе [6] с использованием подхода Колосова-Мусхелишвили получено выражение для комплексного потенциала Φ(z) с учетом трения между телами, что позволяет определить НДС в области контакта. Для упрощенного случая, когда полуширина площадки контакта a не зависит от сил трения и не учитывается отклонение середин площадок контакта от вершин синусоиды, Φ(z) имеет вид:

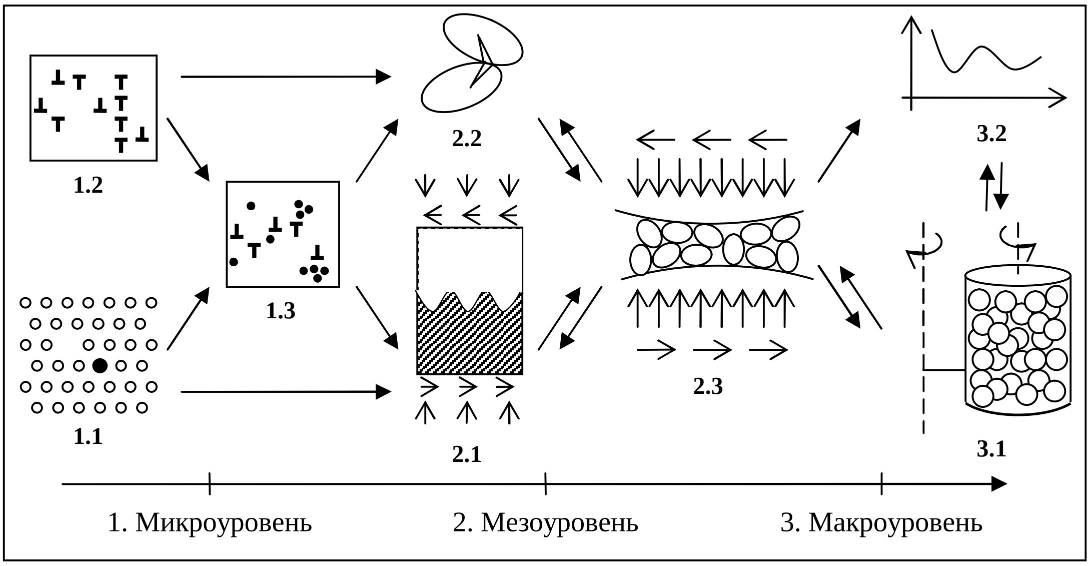


Рис.1. Части модели и связи между ними

$$\Phi(z) = \frac{GLi(1+ik)}{\pi R(\kappa+1)} \sin\frac{2\pi z}{L} - 2\cos\frac{\pi z}{L}\sqrt{\sin\frac{\pi(z+a)}{L}\sin\frac{\pi(z-a)}{L}} \qquad (1)$$

где G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, κ — постоянная Мусхелишвили, которая для ПДС равна $\kappa = 3-4\nu$, R — радиус кривизны в вершине синусоиды, L — период, k — коэффициент трения. Для описания диффузии атомов из штампа в упругое полупространство через поверхность контакта рассматривается один из простейших подходов, когда принимается, что массоперенос примеси происходит по вакансионному механизму, а сами вакансии, реализуя диффузию, всегда находятся в равновесной конфигурации. Поэтому уравнение диффузии для вакансий не используется, рассматривается бинарная система. Учитывается влияние напряжений на диффузию — химический потенциал примеси линейно зависит от среднего давления [7]. Влияние примеси на механическое поведение материала описывается относительным объемным изменением $\omega = (\delta V)C$, где C — концентрация примеси, δV — относительное отклонение радиуса примесного атома от радиуса атома решетки. Это объемное расширение учитывается при записи свободной энергии (линейно-упругого) материала, определяющие соотношения при этом принимают следующий вид:

$$\sigma = K\left(I_1(\varepsilon)-\omega\right)I + 2G\left(\varepsilon - \frac{1}{3}I_1(\varepsilon)I\right) \qquad (2)$$

где σ — тензор напряжений Коши, ε — тензор малых деформаций, K — модуль объемного сжатия, G — модуль сдвига. Используя подход локально-равновесной термодинамики, записывая химический потенциал примеси [7]:

$$\mu = \mu^0 + RTLn(C) - \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)}\delta V\, I_1(\sigma) \qquad (3)$$

получим следующее эволюционное уравнение:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = D\Delta\omega - \frac{D}{RT}\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)}\delta V(\nabla\omega\cdot\nabla I_1(\sigma) + \omega\Delta I_1(\sigma)) \qquad (4)$$

В силу малой доли поверхностей контакта и ограниченности диффузии через внешнюю поверхность тел, будем считать, что концентрация примеси остается малой. В таком случае вклад ω в объемное расширение в законе Гука (2) незначителен, поэтому можно еще упростить задачу и принять, что напряжения от концентрации не зависят. Тогда задачи об определении поля упругих напряжений и о диффузии в известном поле напряжений решаются отдельно. Используя (1), получим выражение для среднего давления в теле:

$$I_1(\sigma) = -\frac{GL(1+\nu)}{\pi R(1-\nu)}\left[\cos\frac{2\pi x}{L}\operatorname{sh}\frac{2\pi y}{L} + G_2(x,y) + k\left(\sin\frac{2\pi x}{L}\operatorname{ch}\frac{2\pi y}{L} + G_1(x,y)\right)\right] \qquad (5)$$

где

$$G_i(x,y) = (\pm 1)^i \cos\frac{\pi x}{L}\operatorname{ch}\frac{\pi y}{L}\sqrt{(-1)^i A(x,y) + \sqrt{\sin^2\frac{2\pi x}{L}\operatorname{sh}^2\frac{2\pi y}{L} + A^2(x,y)}} +$$
$$+(\pm 1)^{i-1}\sin\frac{\pi x}{L}\operatorname{sh}\frac{\pi y}{L}\sqrt{(-1)^{i-1} A(x,y) + \sqrt{\sin^2\frac{2\pi x}{L}\operatorname{sh}^2\frac{2\pi y}{L} + A^2(x,y)}}$$

где верхний знак берется для случая $x \ge 0$, а нижний — для $x < 0$, и функция

$$A(x,y) = \cos\frac{2\pi x}{L}\operatorname{ch}\frac{2\pi y}{L} - \cos\frac{2\pi a}{L}$$

Для случая $a = 0.2L$ при отсутствии трения между соприкасающимися поверхностями получено поле части потока примеси, связанного с градиентом среднего давления (рис.2). Под зоной контакта находится область, в которую «затягиваются» атомы штампа, на расстоянии полупериода имеется область, в которой модуль потока примеси в упругое полупространство увеличивается и происходит наиболее интенсивное проникание атомов примеси, а между ними находится интервал с незначительным противотоком примеси. При учете составляющей потока, связанной с градиентом концентрации, этот противоток в зависимости от интенсивности сжатия и проницаемости внешней поверхности может быть компенсирован.

В случае, когда учитывается трение и касательное усилие в зоне контакта направлено влево, то в областях, находящихся на равном удалении от вершин штампа, интенсивность потока примеси в глубину материала возрастает (рис.3), и вся картина потоков смещается вдоль оси X. При этом появляется новая область быстрого проникания атомов штампа в полупространство сразу перед зоной контакта. В случае сжатия со сдвигом двух полупространств с плоской границей поля напряжений в них однородны, и диффузионный поток определяется только градиентом концентрации. Неровности же на поверхности контактирующих тел приводят к появлению существенно неоднородного поля напряжений вблизи зоны контакта и становятся причиной дополнительных составляющих вектора диффузионного потока. Сдвиговые усилия в зоне контакта приводят к изменению и поля среднего давления, то есть к более интенсивной диффузии перед краем неровностей. Это является причиной лучшего соединения тел при сжатии со сдвигом в процессе холодного (диффузионного) сваривания.

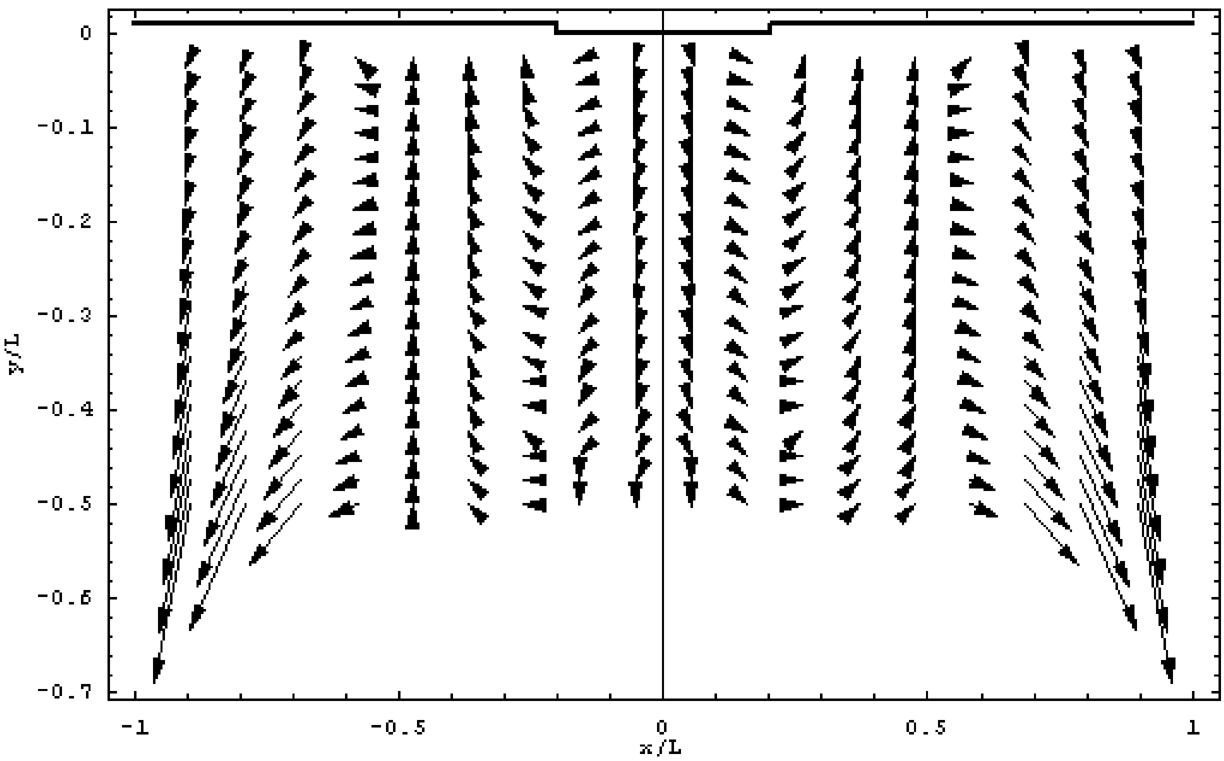


Рис.2. Поле потока примесных атомов при $k = 0$

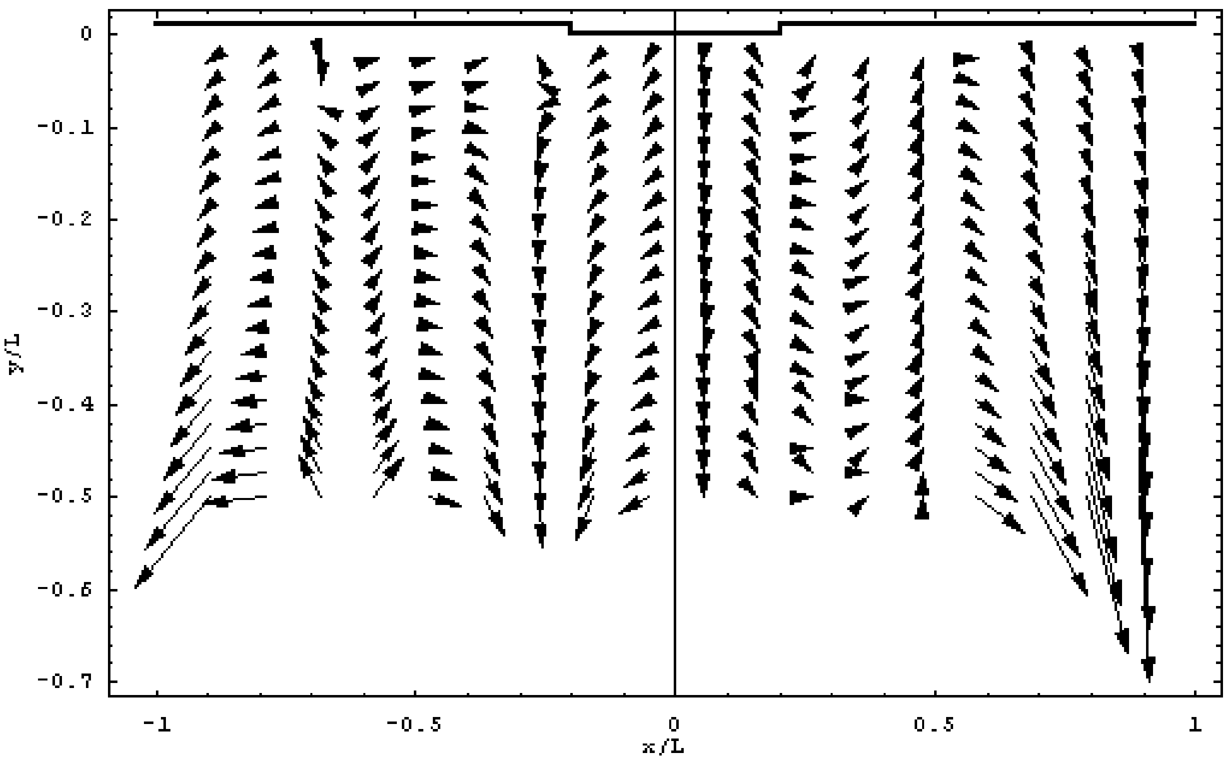


Рис.3. Поле потока примесных атомов при $k = 0.6$

Работа выполняется при финансовой поддержке из средств гранта РФФИ, проект №06-08-00375.

ЛИТЕРАТУРА

1. Проблемы порошкового материаловедения. Часть I / Под ред. В.Н. Анциферова. — Екатеринбург: УрО РАН, 2000. — 252 с.
2. Зубко И.Ю. Модель клеточных автоматов для монокристалла с дислокациями трех систем скольжения. // Математическое моделирование. Вып.12. — Сб. науч. трудов. Пермь: РИО ПГТУ, 2004. С. 45-53.
3. Зубко И.Ю., Трусов П.В. Численное моделирование формирования дислокационных субструктур в поле примесных атомов. // Вестник УГТУ-УПИ. Механика микронеоднородных материалов и разрушение: сб. науч. трудов. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2006. №11 (82). С. 70-76.
4. Пермяков А.В., Зубко И.Ю., Трусов П.В. Динамика многих соударяющихся тел: приложение к моделированию процесса механического легирования // Труды Международной научно-технической конференции "Математические модели и алгоритмы для имитации физических процессов (ММА-2006)". 2006. С. 41-48.
5. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.: Гостехиздат, 1949. 272 с.
6. Кузнецов Е.А., Гороховский Г.А. Влияние шероховатости на напряженное состояние фрикционно контактирующих тел. // Прикладная механика. 1978. Т.14. №9. С. 62-68.
7. Еремеев В.С. Диффузия и напряжения. М: Энергоатомиздат, 1984. - 182 с.

<u>Сведения об авторах</u>

Зубко Иван Юрьевич
Кандидат физ.-мат.наук, доцент (докторант) кафедры Математическое моделирование систем и процессов
Адрес: 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр-т, 29, Пермский государственный технический университет
Тел: +7-342-2391297
E-mail: ziu@matmod.pstu.ac.ru

Оглезнева Светлана Аркадьевна
Кандидат техн.наук,доцент кафедры Порошковое материаловедение
Адрес: 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр-т, 29, Пермский государственный технический университет
Тел: +7-342-2391227
E-mail: osa@pm.pstu.ac.ru

Трусов Петр Валентинович
Доктор физ.-мат.наук,зав. кафедрой Математическое моделирование систем и процессов, директор института фундаментальных исследований Пермского государственного технического университета
Адрес: 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр-т, 29, Пермский государственный технический университет
Тел: +7-342-2391607, +7-342-2431630
E-mail: tpv@matmod.pstu.ac.ru

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНЫХ ОСНОВАНИЙ

Иваночкин П.Г., Наседкин А.В., Чебаков М.И.

В докладе рассматриваются контактные задачи теории упругости для двойного плоского, цилиндрического и сферического слоев с переменной областью контакта. Такие задачи могут являться моделями для расчета тел с покрытиями, цилиндрических и сферических самосмазывающихся подшипников. Для решения задач используются аналитические методы и метод конечных элементов. Проведен расчет контактных напряжений, размеров области контакта и эффективных напряжений во внутренних точках упругих тел.

Для цилиндрического и осесимметричного случаев (в разрезе) схема контактного взаимодействия изображена на рис. 1. Ниже на примере задач для цилиндрического двойного слоя (модель подшипника скольжения) изложены схема решения контактных задач и некоторые результаты [1,2]. Для двойного плоского и сферического слоев использованы аналогичные подходы.

1. Постановка задачи. Основание подшипника отнесем к цилиндрической системе координат $Or\varphi z$, в которой два цилиндрических слоя будут занимать области $R_1 \le r \le R_2$ и $R_2 \le r \le R_3$ в плоскости $Or\varphi$ и сегмент $Z = \{-L \le z \le L\}$ вдоль оси z. Слои жестко соединены между собой по поверхности $r = R_2$, граница $r = R_3$ неподвижна, а в поверхность $r = R_1$ усилием P, равномерно распределенным по сегменту Z, вдавливается штамп в форме цилиндра радиуса $R_4 = R_1 - h$, расположенного вдоль оси z по области $-d - L \le z \le d + L$ с центром O_1, смещенном относительно центра цилиндрического основания вниз на величину $h \ge 0$. Таким образом, штамп длиннее основания вдоль осевой координаты на величину $2d$. Однако, если L велико по сравнению с другими геометрическими параметрами, и если интересоваться распределением напряжений в центре контактной зоны относительно оси z, то можно рассматривать задачу теории упругости о плоской деформации осевого сечения $z = 0$ подшипника (рис. 1).

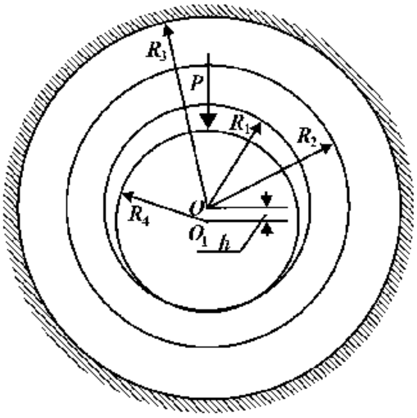


Рис.1. Вид цилиндрического подшипника в двумерной постановке

Входными данными задачи являются также модули сдвига G_j и коэффициенты Пуассона ν_j материалов слоев основания ($j = 1, 2$; $j = 1$ – слой $R_1 \le r \le R_2$; $j = 2$ – слой $R_2 \le r \le R_3$), а также модуль сдвига G_s и коэффициент Пуассона ν_s штампа. Введем также обозначения: δ – смещение штампа в вертикальном направлении; $G = G_2 / G_1$; $R_{21} = R_2 / R_1$; $R_{31} = R_3 / R_1$; $P^* = P / G_1$ $q(\varphi) = -\sigma_{rr}^{(1)}(R_1, \varphi)$ – контактные напряжения; $q^*(\varphi) = q(\varphi) / G_1$; $|\varphi| \le \theta$ – область контакта ($\varphi = 0$ определяет направление r вертикально вниз; $q_0^* = q^*(0)$).

2. Численно-аналитический метод. Рассмотрим случай плоской деформации (бесконечно длинный цилиндрический подшипник). Тогда, с помощью преобразования Фурье контактная задача сводится к следующему интегральному уравнению (ИУ) относительно неизвестных контактных напряжений $q(\varphi)$ в области контакта:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta} q(t)k(t-\varphi)dt = f(\varphi) \quad (-\theta \le \varphi \le \theta) \qquad (1)$$

$$k(y) = \sum_{k=0}^{\infty} L(k)\cos ky\,,\; L(u) = L_1(u)/L_2(u)\,,\; f(\varphi) = \frac{G_1}{R_1(1-\nu_1)}[(\delta+h)\cos\varphi - h]$$

В ИУ (1) трансформанта ядра $L(u)$ получена с использованием программы аналитических вычислений *Maple*, она довольно громоздка и поэтому здесь не представляется возможным привести ее полностью. В [1] были установлены основные свойства трансформанта ядра $L(u)$, например, $L_i(u) = G^2\eta_i^2(u) + G\eta_i^1(u) + \eta_i^0(u)$, где $G = G_2 / G_1$, а найденные функции $\eta_i^n(u)$ содержат степенные и экспоненциальные функции, зависят только от коэффициентов Пуассона материала слоев и отношения радиусов R_{21}, R_{31}. Функция $L_1(u)$ при $u \to \infty$ имеет следующее поведение $L\ (u) = 1/u + O(1/u^2)$, $L\ (0) = A = \text{const}$.

Ядро ИУ (1) можно представить в виде

$$k(t) = \frac{A}{2} - \ln\left|2\sin\frac{t}{2}\right| + \sum_{n=1}^{\infty} K(n)\cos\, nt\,, \quad L(u) = 1/u + K(u) \tag{2}$$

Это позволяет получить решение ИУ прямым методом коллокации, воспользовавшись результатами работы [4], где приведено соответствующее обоснование. В результате дискретизации ИУ (1), (2) для нахождения значений контактных напряжений $q(\psi)$ в узлах коллокации $\psi = \psi_j = -\theta + \varepsilon(j - 1/2)$ ($\varepsilon = 2\theta / N$), получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\varepsilon\sum_{i=1}^{N} a_{ij} q_j = b_i\ , \quad b_i = \pi\, f(\varphi_i) \quad (i = 1,..., N\ ) \tag{3}$$

$$a_{ij} = \frac{A}{2} - \ln\left|2\sin\frac{\varepsilon(i-j)}{2}\right| + \sum_{n=1}^{\infty} K(n)\cos n\varepsilon(i-j)\ (i \neq j), \quad a_{ii} = -(\ln\frac{\varepsilon}{2} - 1)$$

Отличительной особенностью системы (3) является то, что она имеет следующую структуру: $a_{i+1,\,j+1} = a_{i,\,j}$, ($j \geq i$), $a_{ij} = a_{ji}$.

Сила P, действующая на штамп, вычисляется по формуле $P = \varepsilon\, R_1 \sum_{i=1}^{N} q_i \cos\psi_i$.

Таблица 1

№	δ	P^*	θ	q_0	q_4	N^*
$R_1 = 10$, $R_{21} = 1.025$, $R_{31} = 1.05$, $h = 0.05$						
1	0.0159	0.927	40.5	0.104	0.0372	1
2	0.0159	0.961	40.3	0.108	0.0388	2
3	0.0159	0.978	40.3	0.110	0.0395	4
4	0.0159	1.000	40.2	0.112	0.0410	[3]
5	0.0565	4.48	61.8	0.356	0.122	1
6	0.0565	4.73	61.8	0.376	0.128	2
7	0.0565	4.86	61.6	0.386	0.133	4
8	0.0565	5.00	61.5	0.397	0.138	[3]
$R_1 = 10$, $R_{21} = 1.025$, $R_{31} = 1.05$, $h = 0.01$						
9	0.0113	0.945	61.8	0.0751	0.0257	2
10	0.0113	1.000	61.5	0.0795	0.0276	[3]
$R_1 = 10$, $R_{21} = 1.05$, $R_{31} = 1.1$, $h = 0.01$						
11	0.0205	0.973	70.2	0.0706	0.0240	2
12	0.0205	1.000	69.9	0.0725	0.0251	[3]
13	0.0928	4.85	83.8	0.318	0.103	2
14	0.0928	5.00	83.4	0.328	0.108	[3]

На основе полученных соотношений были проведены расчеты приведенных контактных напряжений $q^*(\varphi) = q(\varphi)/G_1$ в точках $\varphi_n = \theta n / 5$ ($n = 0, 4$), области контакта $-\theta \leq \varphi \leq \theta$, величины приложенной к штампу приведенной силы P^* при заданном вертикальном перемещении штампа δ при некоторых значениях геометрических (R_1, R_{21}, R_{31}, h) и механических (G, ν_1, ν_2) параметров задачи. Предварительно было проведено тестирование алгоритма расчетов путем сравнения числовых результатов в случае равенства механических параметров слоев с результатами, полученными при решении аналогичной задачи для однородного цилиндрического слоя асимптотическим методом в [3]. Вычисления проводились при различных значениях N с целью контроля сходимости расчетной схемы. В табл. 1 приведены результаты расчетов приведенных контактных напряжений $q_n = q^*(\varphi_n)$, величины области контакта θ в градусах и приведенной силы P^* при $G=1$, $\nu_1=\nu_2=0.3$ и некоторых значениях других параметров, $N^*=N/1000$. В строках 4, 8, 10, 12 и 14 для сравнения приведены соответствующие результаты из [3] (стр. 146, табл. 3.12) для однородного слоя. По табл.1 можно наблюдать уточнение результатов с увеличением числа уравнений N системы (3) и близость результатов расчетов к соответствующим результатам из [3].

3. Решение задач методом конечных элементов. В качестве инструментария при конечно-элементном моделировании использовался пакет ANSYS и его командный язык программирования APDL. Применение мощных средств решения контактных задач в ANSYS позволяет построить как двумерные, так и трехмерные модели контактного взаимодействия в подшипнике, и, в результате, оценить правомерность применения двумерной модели для исследования контактной зоны подшипника в центральной его части относительно осевой образующей.

Для решения плоской контактной задачи в ANSYS построим конечно-элементную сетку из четырехугольных (или, в редуцированной форме, из треугольных) упругих конечных элементов PLANE82 или PLANE42 с принудительным сгущением в зоне предполагаемого контакта.

Для сгущения конечно-элементной сетки строятся канонические разбиения восьми сегментов для обоих слоев основания, получаемых комбинацией областей изменения r и φ ($\{R_1\le r\le R_2\}$, $\{R_2\le r\le R_3\}$ и $\{-\pi(k-3)/2\le\varphi\le-\pi(k-2)/2\}$), k=1,2, 3,4; с параметрами $n_{\varphi c}$, n_{rcj} ($j=1,2$, индекс j обозначает номер слоя) для нижних четвертей и $n_{\varphi nc}$, n_{rcj} – для верхних четвертей слоев основания, не вступающих в контакт с индентером. На штампе выделяются четыре сектора искусственного слоя толщины h_s с каноническим разбиением, характеризуемым параметрами $n_{\varphi c}$, $n_{\varphi nc}$, n_{rsc}, где n_{rsc} – число элементов по радиальной координате. Оставшаяся часть штампа в форме круга, разделенного четырьмя радиусами, разбивается свободным образом с делением радиальных линий на n_{rs} элементов. Данное разбиение будем далее называть условно каноническим.

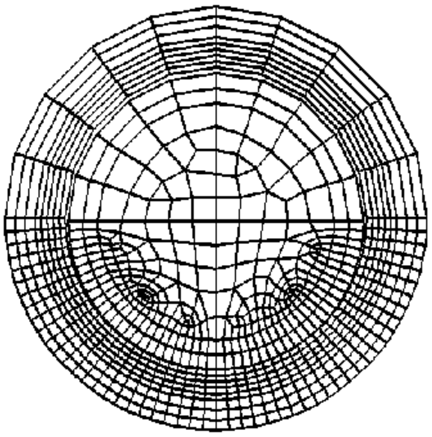


Рис. 2. «Условно каноническая» двумерная конечно-элементная сетка.

Пример одного из таких условно канонических разбиений приведен на рис. 2. Отметим, что анализ влияния использования различных типов конечно-элементных разбиений на точность результатов для рассматриваемой задачи был проведен в [2].

Геометрические и конечно-элементные модели подшипника в трехмерном варианте могут быть получены простой трансляцией плоских моделей вдоль оси z на отрезок $0\le z\le L$ для основания и цилиндра штампа и дополнительно на отрезок $L\le z\le L+d$ для цилиндра с предварительным делением данных отрезков на n_L и n_d элементов соответственно. В результате будем иметь симметричные относительно оси z модели с плоскостью симметрии $z=0$ и соответствующие трехмерные условно свободные и канонические разбиения, состоящие из упругих твердотельных элементов SOLID95 (при 2D-разбиении из PLANE82) или SOLID45 (при 2D-разбиении из PLANE42).

Для моделирования контактного взаимодействия штампа и основания границы контактирующих поверхностей покрываются контактными парами элементов CONTA175 (на границе основания) и TARGE169 (на границе штампа) для плоской задачи и CONTA174 и TARGE170 для пространственного случая. Для двумерной задачи результаты конечно-элементных вычислений можно сравнить с численно-аналитическими результатами, полученными выше методом коллокаций в случаях достаточно больших усилий P^*, малых толщин основания и зазора h, что повышает ценность тестирования, но требует использования очень мелких разбиений в зонах контакта. Основные результаты тестирования собраны в таблице 2. Номера линий в этих таблицах соответствуют случаям из таблицы 1. Нижние индексы "m" обозначают значения, полученные в результате конечно-элементных вычислений, а соответствующие величины без индексов "m" обозначают значения, полученные численно-аналитическим методом из раздела 1 . При расчетах использовались элементы сирендипова типа PLANE82 и следующие параметры конечно-элементных сеток: $n_{\varphi c} = 120$, $n_{rc1} = 5$, $n_{rc2} = 3$, $n_{\varphi nc} = 10$, $h_s = (R_1 - h)/5$, $n_{rsc} = 2$, $n_{rs} = 5$. Во всех расчетах были фиксированы следующие входные величины (в системе Си): $G_1 = 1 \cdot 10^{10}$; $E_s = 1000 E_2$; $E_2 = 2(1+\nu_2)G_2$; $\nu_s = 0.49$.

Таблица 2

№	P^*	δ	δ_m	q_0^*	q_{0m}^*
$R_1 = 10$, $R_{21} = 1.025$, $R_{31} = 1.05$, $h = 0.05$					
4	1.0	0.0159	0.0159	0.112	0.111
8	5.0	0.0565	0.0564	0.397	0.393
$R_1 = 10$, $R_{21} = 1.025$, $R_{31} = 1.05$, $h = 0.01$					
10	1.0	0.0113	0.0113	0.0795	0.0786
$R_1 = 10$, $R_{21} = 1.05$, $R_{31} = 1.1$, $h = 0.01$					
12	1.0	0.0205	0.0205	0.0725	0.0723
14	5.0	0.0928	0.0929	0.328	0.327

Из табл. 2 видно, что применение мелкого условно канонического разбиения позволяет получить результаты, практически идентичные численно-аналитическим (погрешности порядка 1 %).

В последней части работы проведем сравнение решений плоских и пространственных контактных задач для цилиндрического подшипника. При расчетах трехмерных задач использовались физические данные для штампа, указанные ранее; $d = 0.1$; данные из табл.3 и следующие геометрические и физические величины: $P^* = 0.001$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $R_1 = 0.5$, $R_{21} = 1.2$, $R_{31} = 1.4$, $h = 0.02$. Из-за специфики решателей ANSYS (версии 10.0) для плоских задач оказалось эффективным использование четырехугольных плоских конечных элементов PLANE82 сирендипова типа с промежуточными узлами, а для трехмерных задач – пространственных элементов SOLID45 без промежуточных узлов. В связи с этим, для корректного сопоставления результатов расчетов двумерных и трехмерных задач для пространственных задач с элементами SOLID45 в качестве базовых выбирались двумерные конечно-элементные сетки из элементов PLANE42 без промежуточных узлов с управляющими параметрами, обеспечивающими приблизительно в два раза более мелкое разбиение, чем для плоской задачи с конечно-элементными сетками из элементов PLANE82.

Таблица 3

kD	G	L	δ_0^*	δ_L^*	q_{00}^{**}	q_{0L}^{**}
2D	2	-	3.18	-	0.959	-
3D	2	2.5	3.04	3.05	0.897	0.820
3D	2	5	3.02	3.06	0.885	0.811
3D	2	10	2.95	3.33	0.866	0.910
3D	2	15	2.95	3.44	0.858	0.943
3D	2	20	2.94	4.10	0.850	1.092
2D	1	-	3.76	-	0.925	-
3D	1	5	3.56	3.61	0.846	0.775
2D	0.5	-	4.75	-	0.856	-
3D	0.5	5	4.56	4.61	0.788	0.733

Именно, при расчетах, соответствующих табл. 3, для условно канонического разбиения в плоской задаче (тип задачи - $2D$ в табл. 3) были взяты параметры $n_{\varphi c} = 25$, $n_{rc1} = 5$, $n_{rc2} = 3$, $n_{\varphi nc} = 5$, $h_s = (R_1 - h)/5$, $n_{rsc} = 2$, $n_{rs} = 5$; а для разбиения в пространственной задаче ($3D$) – $n_{\varphi c} = 50$, $n_{rc1} = 10$, $n_{rc2} = 6$, $n_{\varphi nc} = 10$, $h_s = (R_1 - h)/5$, $n_{rsc} = 4$, $n_{rs} = 10$, $n_L = 20$, $n_d = 2$. Здесь n_L – число элементов по оси z на отрезке $0 \le z \le L$ для основания и штампа, n_d – дополнительное число элементов по оси z на отрезке $L \le z \le L + d$ для штампа. В табл. 3 введены также обозначения: $\delta_0^* = \delta \cdot 10^4$ при $z = 0$; $\delta_L^* = \delta \cdot 10^4$ при $z = L$; $q_{00}^{**} = q_0^* \cdot 10^2$ при $z = 0$; $q_{0L}^{**} = q_0^* \cdot 10^2$ при $z = L$.

Как видно из табл. 3, как смещения штампа, так и контактные напряжения в пространственной задаче при $z = 0$ оказываются несколько меньшими, чем в плоской задаче.

По оси z смещения возрастают при приближении к торцу, а напряжения убывают при средних значениях L и возрастают при больших L. Эти явления можно объяснить кромочными эффектами вблизи торцевых зон, а также более существенным влиянием изгибных напряжений для очень длинных по оси z подшипников (последние, правда, представляют в большей степени лишь теоретический интерес). С ростом ширины подшипника $2L$ результаты для трехмерных задач в среднем по ширине оказываются более близкими к результатам решения плоских задач, что совершенно естественно. Однако и для средних значений L решения трехмерных задач для различных модулей упругости слоев основания достаточно близки к решениям плоских задач. Таким образом, исследования плоских задач в силу своей значительно меньшей трудоемкости могут оказаться полезными для предварительных прочностных расчетов цилиндрических подшипников скольжения, и в частности, для проведения сложных оптимизационных расчетов.

4. Двойные плоский и сферический слои. По аналогичной методике был выполнен расчет контактного взаимодействия в двухслойном плоском слое и сферическом подшипнике скольжения. Модель сферического подшипника может быть получена путем вращения вокруг оси симметрии правой половины фигуры (меридионального сечения), показанной на рис. 1. Для таких задач были получены интегральные уравнения и выполнены численно-аналитические и конечно-элементные расчеты. Полученные результаты для сферического подшипника качественно повторяют приведенные выше.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 05-01-00002, 05-01-00306, 05-08-18270, 06-08-01257).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чебаков М.И. Контактная задача для двухслойного цилиндрического основания // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. X Межд. конф., г. Ростов-на-Дону, 5-9 декабря 2006г. Т. 1. Ростов-на-Дону: изд-во «ЦВВР», 2006. С. 280-284.
2. Колосова Е.М., Наседкин А.В., Чебаков М.И. Расчет контактного взаимодействия в цилиндрическом подшипнике в двумерных и трехмерных постановках // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. X Межд. конф., г.Ростов-на-Дону, 5-9 декабря 2006г. Т. 2. / Ростов-на-Дону: изд-во «ЦВВР», 2007. С. 190-196.
3. Александров В.М., Чебаков М.И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. М.: Физматлит, 2004. 304 с.
4. Воронин В.В., Цецехо В.А. Численное решение интегрального уравнения 1 рода с логарифмической особенностью методом интерполяции и коллокации // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1981. Т. 21. № 1. С. 40-53.

Сведения об авторах

Иваночкин Павел Григорьевич

Кандидат физ.-мат.наук, доцент кафедры теоретической механики Ростовского государственного университета путей сообщения, Тел: (863) 2726-349; E-mail: prkom_ivan@rgups.ru

Наседкин Андрей Викторович

Доктор физ.-мат.наук, первый зам. директора НИИМ и ПМ ЮФУ, профессор кафедры математического моделирования ЮФУ,Тел: (863) 2975-229; E-mail: nasedkin@math.rsu.ru

Чебаков Михаил Иванович

Доктор физ.-мат.наук, зав. лаб. механики контактных взаимодействий НИИМ и ПМ ЮФУ
Адрес: 344090, Россия, Ростов-на-Дону, пр. Стачки 200/1, НИИМ и ПМ Южного федерального университета,Тел: (863) 2975-248; E-mail: chebakov@math.rsu.ru

О НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЯХ В ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Ивлев Д.Д., Максимова Л.А.

Рассматриваются некоторые соотношения теории напряженного состояния, из которых следуют основные соотношения теории предельного состояния [1].

1. Соотношения связи между компонентами напряжений σ_{ij} в декартовой системе координат *xyz* и главными напряжениями σ_i записываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2, \\ \tau_{xy} &= \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

где l_i, m_i, n_i – направляющие косинусы, выражение *(xyz, 123)* означает, что недостающие соотношения получаются круговой перестановкой индексов, причем индексы у главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ фиксированы.

Для направляющих косинусов справедливы соотношения

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \;\; l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \;\; (1,2,3) \tag{1.2}$$

Введем обозначения

$$\sigma_1 = \nu, \;\; \Sigma = \sigma_2 - \sigma_1, \;\; T = \sigma_3 - \sigma_1. \tag{1.3}$$

Из (1.1), (1.3) получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \nu + \Sigma m_1^2 + T n_1^2, \\ \tau_{xy} &= \Sigma m_1 m_2 + T n_1 n_2, \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x\, y\, z \\ 1\, 2\, 3 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

$$\nu = \sigma - \frac{1}{3}(\Sigma + \mathrm{T}), \quad \sigma = \frac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)$$

Из (1.4) следует

$$\begin{aligned} \left(\sigma_x - \nu\right)\left(\sigma_y - \nu\right) - \tau_{xy}^2 &= \Sigma T l_3^2 \\ \left(\sigma_y - \nu\right)\left(\sigma_z - \nu\right) - \tau_{yz}^2 &= \Sigma T l_1^2 \\ \left(\sigma_z - \nu\right)\left(\sigma_x - \nu\right) - \tau_{xz}^2 &= \Sigma T l_3^2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Из (1.4) также следует

$$\begin{aligned} \left(\sigma_x - \nu\right)\tau_{yz} - \tau_{xy}\tau_{xz} &= \Sigma T l_2 l_3 \\ \left(\sigma_y - \nu\right)\tau_{xz} - \tau_{xy}\tau_{yz} &= \Sigma T l_3 l_1 \\ \left(\sigma_z - \nu\right)\tau_{xy} - \tau_{xz}\tau_{yz} &= \Sigma T l_1 l_2. \end{aligned} \tag{1.6}$$

В случае равенства двух главных напряжений, согласно (1.3), правые части выражений (1.5), (1.6) равны нулю и имеют место соотношения, используемые в теории предельного состояния [1].

Из соотношений (1.5), (1.6) следует

$$\begin{aligned} &\left[\left(\sigma_x - \nu\right)\left(\sigma_y - \nu\right) - \tau_{xy}^2\right]\left[\left(\sigma_y - \nu\right)\left(\sigma_z - \nu\right) - \tau_{yz}^2\right] = \\ &= \left[\left(\sigma_y - \nu\right)\tau_{xz} - \tau_{xy}\tau_{yz}\right]^2, \qquad (x\;\; y\;\; z) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Из соотношений (1.5), (1.6) также следует

$$\left[\left(\sigma_x-\nu\right)\left(\sigma_y-\nu\right)-\tau_{xy}^2\right]\left[\left(\sigma_z-\nu\right)\tau_{xy}-\tau_{xz}\tau_{yz}\right]=$$
$$=\left[\left(\sigma_x-\nu\right)\tau_{yz}-\tau_{xy}\tau_{xz}\right]\left[\left(\sigma_y-\nu\right)\tau_{xz}-\tau_{xy}\tau_{yz}\right],\ \ (x\ \ y\ \ z) \tag{1.8}$$

Соотношения (1.7), (1.8) приводятся к виду

$$\left(\sigma_x-\nu\right)\Delta=0,\ \ (x,y,z) \tag{1.9}$$

$$\Delta=\left(\sigma_x-\nu\right)\left(\sigma_y-\nu\right)\left(\sigma_z-\nu\right)+2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}-$$
$$-\tau_{xy}^2\left(\sigma_z-\nu\right)-\tau_{yz}^2\left(\sigma_x-\nu\right)-\tau_{xz}^2\left(\sigma_y-\nu\right)$$

Из уравнения $\Delta=0$ определяются величины главных напряжений $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$.

Предположим, что

$$\left(\sigma_x-\nu\right)\left(\sigma_y-\nu\right)-\tau_{xy}^2=0 \tag{1.10}$$

Из (1.7), (1.8), (1.10) следует

$$\left(\sigma_y-\nu\right)\tau_{xz}-\tau_{xy}\tau_{yz}=0$$
$$\left(\sigma_z-\nu\right)\tau_{xy}-\tau_{xz}\tau_{yz}=0 \tag{1.11}$$

Из (1.3), (1.4), (1.10), (1.11) следует

$$\tau_{xy}=\sqrt{\left(\sigma_x-\nu\right)\left(\sigma_y-\nu\right)},\quad \tau_{yz}=\sqrt{\left(\sigma_y-\nu\right)\left(\sigma_z-\nu\right)}$$
$$\tau_{xz}=\sqrt{\left(\sigma_z-\nu\right)\left(\sigma_x-\nu\right)}$$

$$\frac{\tau_{xy}\tau_{yz}}{\tau_{xz}}+\frac{\tau_{xz}\tau_{xy}}{\tau_{yz}}+\frac{\tau_{yz}\tau_{xz}}{\tau_{xy}}=3\left(\sigma-\nu\right). \tag{1.12}$$

В случае зависимости

$$\nu=\sigma_1=f(\sigma) \tag{1.13}$$

соотношения (1.10), (1.11), (1.12), (1.13) приводят к статически определимой системе соотношений.

2. Напряженное состояние может быть определено заданием трех главных напряжений $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$, а далее определением тензора напряжений σ_{ij} при помощи соотношений (1.1).

Главные касательные напряжения определим в виде

$$\tau_1=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2},\quad \tau_2=\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2},\quad \tau_3=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} \tag{2.1}$$

Определим тензор ξ_{ij}, главными значениями которого являются величины τ_i:

$$\begin{pmatrix}\tau_1 & 0 & 0\\ 0 & \tau_2 & 0\\ 0 & 0 & \tau_3\end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Компоненты тензора ξ_{ij} определяются аналогично (1.1)

$$\xi_{ij}=\tau_1 l_i l_j+\tau_2 m_i m_j+\tau_3 n_i n_j$$

Инварианты тензора (2.2) имеют вид

$$\begin{aligned}
&\Sigma_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \\
&\Sigma_2 = -\left(\tau_1\tau_2 + \tau_2\tau_3 + \tau_3\tau_1\right) = \frac{1}{2}\left(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2\right) \\
&\Sigma_3 = \tau_1\tau_2\tau_3
\end{aligned} \tag{2.3}$$

В случае выполнения условия пластичности максимального касательного напряжения, условия пластичности Треска положим

$$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = k, \quad k - \text{const} \tag{2.4}$$

Согласно (2.3), (2.4)

$$2\Sigma_2 - k^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2, \quad \Sigma_3 = k\tau_1\tau_2 \tag{2.5}$$

Из (2.3), (2.5) следует

$$\Sigma_2 + \frac{\Sigma_3}{k} = k^2 \tag{2.6}$$

Таким образом, в выбранной системе инвариантов условие пластичности Треска имеет достаточно простой вид (2.6).

Условие полной пластичности имеет место в случае [1]

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_3 = \sigma_1 + 2k, \quad k - \text{const} \tag{2.7}$$

Согласно (2.1), (2.3), (2.7), имеет место

$$\begin{gathered}
\tau_1 = -k, \quad \tau_2 = k, \quad \tau_3 = 0 \\
\Sigma_2 = k, \quad \Sigma_3 = 0
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Второй инвариант Σ_2 совпадает со вторым инвариантом девиатора $\sigma_{ij}^{'} = \sigma_{ij} - \delta\sigma$.

Из (2.6) следует, что максимум Σ_2 достигается при условии полной пластичности (2.7), (2.8), при котором $\Sigma_3 = 0$.

При условиях (2.7), (2.8) выражения (2.2) имеют вид

$$\begin{gathered}
\xi_x = k\left(-l_1^2 + m_1^2\right), \xi_{xy} = k\left(-l_1 l_2 + m_1 m_2\right), (xyz, 123) \\
\xi_x + \xi_y + \xi_z = 0
\end{gathered} \tag{2.9}$$

Из (2.9) следует

$$\xi_x\xi_y - \xi_{xy}^2 = -k^2 n_3^2, \; \xi_z\xi_{xy} - \xi_{xz}\xi_{yz} = k^2 n_1 n_2, \; \begin{pmatrix} x\,y\,z \\ 1\;2\;3 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

В случае условия полной пластичности имеет место [1]

$$\sigma_x = \sigma - \frac{2}{3}k + 2kn_1^2, \quad \tau_{xy} = 2kn_1 n_2, \qquad \begin{pmatrix} x\,y\,z \\ 1\;2\;3 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

Из (2.10), (2.11) получим

$$\begin{aligned}
&\sigma_x = \sigma - \frac{2}{3}k + \frac{1}{2k}\left(\xi_{yz}^2 - \xi_y\xi_z\right), \quad (x\,y\,z) \\
&\tau_{xy} = \frac{1}{2k}\left(\xi_z\xi_{xy} - \xi_{xz}\xi_{yz}\right)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Итак, на основе определения главных компонент тензора, являющихся комбинацией главных компонент тензора напряжений $f_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ (в частности, главных касательных напряжений) могут быть определены тензоры, связанные с компонентами тензора напряжений. Установление свойств подобных тензоров и целесообразность их использования нуждается в дополнительных исследованиях.

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ 06-01-00663.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.

<u>Сведения об авторах</u>

Ивлев Дюис Данилович
Д.ф.-м.н., профессор, ГОУ ВПО “Чувашский государственный
педагогический университет ”им. И.Я.Яковлева
зав.кафедрой математического анализа
E-mail: ivlev21@mail.ru

Максимова Людмила Анатольевна.
Филиал Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического
университета в г.Чебоксары
Д.ф.-м.н., профессор кафедры высшей математики
Адрес: 428000, г.Чебоксары, ул. М.Залка, д.10, к.1, ком.509
Тел: (8352)33-05-76
E-mail: strangcheb@mail.ru

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В МАТЕРИАЛЕ ПРИ ЕГО СТРУКТУРНО-ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ

Индейцев Д.А., Семенов Б.Н.

При описании деформирования твердых тел методами механики сплошной среды обычно пренебрегают дискретностью строения реальных тел и оперирует с так называемой сплошной средой – непрерывной совокупностью материальных точек, находящихся в движении. Предполагается, что свойства частиц этой среды не изменяются при дроблении на сколь угодно малые части [1]. Такой подход обнаруживает явное несоответствие с известными экспериментами, которые, к примеру, указывают на возможность структурно-фазовых превращений в материале под действием сильных полей.

Известно, что сложная структура материала определяется наличием внутренних степеней свободы, определяющих динамику его дискретного строения и которые при определенном воздействии могут приводить к изменению основных макропараметров, используемых обычно при описании материала известными уравнениями механики сплошной среды.

Как показано в работе [2]-[3], одним из подходов описания поведения сплошной среды является использование двухкомпонентной модели, которая позволяет дать объяснение некоторым физическим явлениям, которые до последнего времени не нашли четкого понимания. Это касается, в частности, вопроса об особенности распространения механических импульсов в твердых телах при кратковременных лазерных воздействиях [4], а также влияние динамических и эволюционных эффектов на фазово-структурные превращения в материалах.

В рамках работы на примере одноосного силового нагружения стержня конечной длины, поведение материала которого описывается исходя из модели двухкомпонентной сплошной среды [2]-[3], показывается существенная роль динамических процессов на перестройку материала, а также приводится уравнение вида Льенара [5], решение которого качественно описывает динамический характер структурных превращений.

1. Постановка задачи

Основные уравнения и граничные условия поведения стержня, жестко заделанного одним концом и испытывающим силовое динамическое нагружение на другом, имеют вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

- уравнение баланса импульса,

Предполагается, что к покоящемуся в начальный момент времени $t = 0$ стержню длиной l

$$u(x,0) = \sigma(x,0) = 0 \tag{2}$$

один конец которого заделан

$$u\big|_{x=l} = 0\,, \tag{3}$$

а ко второму свободному концу в момент времени $t = 0$ прикладывается зависящая от времени нагрузка

$$\sigma\big|_{x=0} = \sigma_0(t)$$

Предположим, что в материале могут происходить структурные превращения, зависящие от уровня деформаций. Тогда уравнение состояния материала стержня, учитывающее структурные превращения материала, имеет вид

$$\sigma = E_0 \varepsilon \frac{\kappa}{\kappa + n(\varepsilon, t)} \tag{4}$$

Здесь $n(\varepsilon,t)$ - концентрация частиц новой фазы, $N(\varepsilon,t)$ - концентрация частиц основной фазы в материале, κ - отношение упругих модулей новой и старой фаз.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha(\varepsilon)N - \beta(\varepsilon)n \quad (5)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\alpha(\varepsilon)N + \beta(\varepsilon)n \quad (6)$$

- уравнения баланса частиц в элементарном объеме.

Начальные распределения для концентраций новой и старой фаз

$$n(\varepsilon,0) = 0 \text{ и } N(\varepsilon,0) = \psi \quad (7)$$

Последнее означает, что в начальный момент времени основная структура не содержит присоединенных дефектов и их присоединение существенно зависит от свойств материала и параметров нагружения.

Приведенные уравнения являются частью основных уравнений двухкомпонентной модели сплошной среды [6], поэтому поясним те упрощения, которые были сделаны при их написании. Первое уравнение определяет динамическое поведение основной структуры материала стержня. Уравнение динамики "дефектной структуры", определяемой $n(£,t)$ и которая может ослаблять основную, при пренебрежении силами инерции приводит к определению скорости частиц этой среды по формуле, аналогичной формуле Дарси, но с коэффициентом "диффузии", зависящим от деформации. Эффект ослабления основной структуры подробно описан в работе [6], поэтому появление уравнения состояния указанного выше вида здесь не обсуждается. Заметим только, что оно физически очевидно, т.к. при $n \to 0$, т.е. при отсутствии присоединившейся части дефектной среды к основной структуре, очевидно гуковское поведение материала, а при $n \to n_\infty$, где n_∞ - некоторое предельное значение концентрации, очевидно появление новой структуры с другими модулями упругости.

Уравнение баланса масс "дефектной" структуры и ее части, присоединившейся к основной, записанное через их концентрации, вследствие почти мгновенного структурного изменения по всей длине, не содержит конвективной диффузионной части. Обратим внимание, что источниковые члены в правой части балансовых уравнений в общем случае зависят от уровня деформаций. Каждый из членов α,β характеризует скорость обмена между частицами основной и "дефектной" структурами. В дальнейшем принимаем, что $\alpha(\varepsilon) = \alpha_0 = \text{const}$, а $\beta(\varepsilon) = \beta_0 e^{-\varepsilon}$

2. Решение задачи

В силу сложности рассматриваемой задачи воспользуемся процедурой Бубнова –Галеркина для построения решения уравнения (1). Будем искать перемещение $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t) = \frac{U_0(t)}{l}\cdot x \text{ , тогда } £(x,t) = \frac{U_0(t)}{l} \quad (8)$$

Очевидно пренебрежение волновыми процессами при этом приближении, но при рассматриваемом нагружении основной интерес представляет асимптотическое поведение, близкое к статическому. Т.е. и в дальнейшем будет предполагаться такое распределение перемещений $u(x,t)$ по длине стержня.

Применяя процедуру Бубнова-Галеркина к уравнению (1), получим

$$\sigma = \sigma_0(t) - \frac{\rho l^2}{3}\ddot{\varepsilon} \quad (9)$$

Исключая из системы (5)-(6) $N(t)$, с учетом $\sim(£) = \sim_0 = \text{const}$ и начальных условий для $N(t)$ и $n(t)$ получим для $n(t)$ уравнение

$$\dot{n} + (\quad + \sim_0)\cdot n = \sim_0 \cdot \cdot \quad (10)$$

Выразим $n(t)$ из уравнения состояния (4) через $\pm$ и £

$$n = \kappa \frac{E_0 \varepsilon - \sigma}{\sigma} \qquad (11)$$

После замены $n(t)$ в соответствии с (11) и подстановки в (10) после сравнительно простых преобразований получим уравнение для деформации, учитывающее структурно-фазовые изменения материала

$$\ddot{\varepsilon} + \lambda\mu\dot{\varepsilon} + \lambda\left[1 - \mu\frac{3\dot{\sigma}_0 - \rho_0 l_0^2 \dddot{\varepsilon}}{3\sigma_0 - \rho_0 l_0^2 \ddot{\varepsilon}}\right]\varepsilon = \frac{3}{\rho\ l^2}\sigma_0(t) \qquad (12)$$

где $\lambda = \dfrac{3}{1 + \dfrac{\alpha_0\psi}{(\beta(\varepsilon) + \alpha_0)\kappa}}$, а $\mu = \dfrac{c_0}{(\beta(\varepsilon) + \alpha_0)l}$

В предположении, что $\mu \ll 1$, в уравнении (12) можно пренебречь вторым слагаемым. Решать это уравнение будем при начальных условиях

$\varepsilon(0) = \dot{\varepsilon}(0) = 0$.

Заметим, что коэффициент при £ , определяющий вязкость, в силу малости « также мал.

Для анализа рассматриваемой задачи выберем следующие параметры:
модуль Юнга $E = 1.5 \cdot 10^5 MPa$, плотность $\rho = 6 \cdot 10^3 kg$, © $= 0.1$, · $= 1$, ~ $= 10000$ sec^{-1}, $l = 1\ m$, зависимость коэффициента от деформации имеет вид $= 500000 \cdot \exp(-80 \cdot$ £ $)$.

При выбранных параметрах диаграмма $\sigma - \varepsilon$ имеет вид фиг.1.

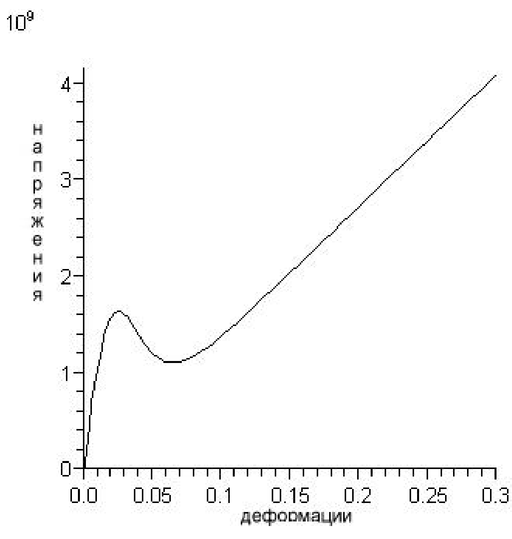


Рис.1 Диаграмма ± −£

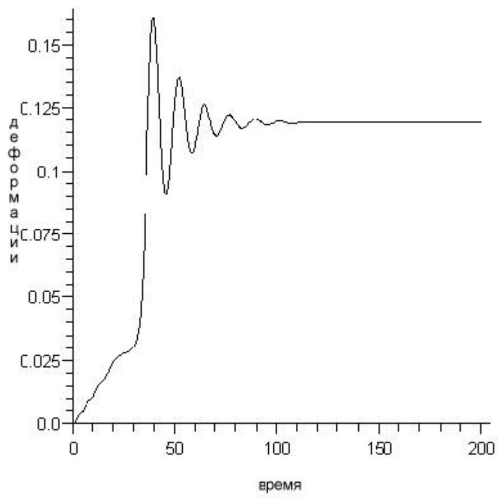


Рис. 2. Зависимость £(t) при ±$_0$ = $1.629 \cdot 10^9$

Диаграмма на рис.1 имеет три характерных участка изменения: 1 – возрастающий, 2 – ниспадающий, 3 – опять возрастающий с модулем отличным от модуля первого участка.

Предполагаем, что прикладываемое напряжение меняется по следующему закону,

$$\sigma_1(t) = \sigma_0(t) \cdot [H(t) - H(t - t_1)] + \sigma_1 \cdot H(t - t_1) \qquad (13)$$

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} \sigma_0 \cdot \sin(\dfrac{\pi \cdot t}{2 \cdot t_0}) & t < t_0 \\ \sigma_0 & t \ge t_0 \end{cases}$$

Здесь σ_0 – амплитуда прикладываемого напряжения, а t_0 – время его нарастания до максимума, t_1 – продолжительность нагружения, после которого начинается мгновенная разгрузка.

Построим решение при следующем значении прикладываемого напряжения $\pm_0 = 1.629 \cdot 10^9$ MPa (рис.2).

Из анализа полученных для рассматриваемых нагружений результатов следует, что при нагрузке с амплитудой $\pm_0 = 1.629 \cdot 10^9$ происходит переход в другое структурное состояние (с первого участка диаграммы $\pm - £$ на третий). Заметим, что на диаграмме $\pm - £$ переход с первого на второй участок (фиг.1) реализуется при больших значениях деформации и напряжения $£ = 0.02532626284$, $\pm = 1.639522287 \cdot 10^9$. Значения напряжений, при которых происходит переход зависят от истории нагружения, т.е. от того с какой скоростью система приходит в точку перехода в другое состояние, чем выше скорость, тем раньше осуществляется переход.

3. Заключение

В настоящей работе на примере использования двухкомпонентной модели с точки зрения рациональной механики дана трактовка особенностей распространения механических импульсов, вызванных существенно нестационарным нагружением. Полученное решение демонстрирует существенное влияние эволюционных процессов на перестройку структуры, определенной уравнением состояния (4). Показано, что одночленная аппроксимация исходной задачи качественно описывает динамические эффекты при переходе от одного устойчивого положения структуры к другому. Если в материале возможны структурные изменения, тогда при его деформировании роль динамики весьма существенна при зарождении новой фазы.

Работа выполнена при поддержке Национальной лаборатории Сандиа(США) и грантов РФФИ 06-01-08048, 05-08-65427, 06-01-00452

ЛИТЕРАТУРА

1. Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел, М.: Наука (физ-мат), 1976, 328 с.
2. Жилин П.А. Актуальные проблемы механики. Том 1.-- СПб.: Изд. Института проблем машиноведения РАН. 2006. 306 с.
3. Zhilin P.A.Advanced problems in mechanics. Vol. 2.-- St.Petersburg: Edition of the Institute For Problems in Mechanical Engineering of Russian Academy of Siences. 2006. 271 p.
4. Леонов Г.А. Семейства трансверсальных кривых для двумерных систем дифференциальных уравнений.// Вестник СПбГУ, сер.1, 2006, вып.4, с.1-35.
5. Chen J.K., Beraun J.E., Grimes L.E., Tzou D.Y. Modeling of femisecond laser-induced non-equilibrium deformation in metal films, International Journal of Solids and Structures 39 (2002), c.3199-3216.
6. Indeitzev D.A. and Semenov B.N. Influence of the kinetics of processes on the behavior of thin structures in a continuous media Rev.Adv.Mater.Sci. 13(2006) 14-34.

Сведения об авторах

Индейцев Дмитрий Анатольевич,
д.ф.-м.н., директор института проблем машиноведения РАН
Адрес: 199178, С.-Петербург, Большой пр.В.О. , 61
Тел. (812)3214772; E-mail: ind@director.ipme.ru

Семенов Борис Николаевич
к.ф.-м.н., доцент, Санкт-Петербургский государственный университет
Адрес: 198504 С.Петербург, Петродворец, Университетский пр.28
Тел. (812)4286989; E-mail: bsemenov@rambler.ru

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ О СКЛЕЙКЕ

Казаков К. Е.

Исследуем контактную задачу для вязкоупругого слоя с покрытием, лежащего на недеформируемом основании, и жесткого кольцевого штампа в осесимметричном случае. Считается, что покрытие и штамп идеально прилегают друг к другу, то есть форма поверхности штампа в точности повторяет форму основания штампа (основание фактически приклеено к штампу с помощью тонкого покрытия). Между подстилающим недеформируемым основанием и слоем осуществляется идеальный контакт. Пусть начиная с момента времени τ_0 в поверхность такого основания вдавливается жесткий кольцевой штамп с силой $P(t)$, приложенной по его оси. Область контакта со временем не изменяется и ограничена окружностями радиусов a и b ($a<b$), а форма основания штампа задается функцией $g(r)$. Тонкое вязкоупругое покрытие переменной толщины $h(r)\equiv g(r)$ ($h(r)<<(b-a)$), изготовленное в момент времени $\tau_1\le\tau_0$ и стареющее однородно, лежит на нижнем слое произвольной толщины H, изготовленном в момент времени $\tau_2\le\tau_0$ и стареющим однородно. Между покрытием и слоем осуществляется идеальный контакт.

Для вывода интегрального уравнения задачи заменим штамп некоторой распределенной нагрузкой $p(r,t)=-q(r,t)$, действующей на том же участке ($a\le r\le b$) и равной нулю вне его. Вертикальное перемещение верхней грани описанного выше слоя под действием нормальной нагрузки $q(r,t)$ можно записать в форме [1]:

$$u_z(r,t)=\frac{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}{1-\nu_1}(I-\mathcal{V}_1)\frac{q(r,t)h(r)}{E_1(t-\tau_1)}+\frac{2(1-\nu_2^2)}{H}(I-\mathcal{V}_2)\mathcal{F}\frac{q(r,t)h(r)}{E_2(t-\tau_2)},$$

$$\mathcal{F}f(r,t)=\int_a^b k_{\text{as}}\left(\frac{r}{H},\frac{\rho}{H}\right)f(\rho,t)\rho\,d\rho,\quad \mathcal{V}_1 f(r,t)=\int_{\tau_0}^t f(t,\tau)K^{(k)}(t-\tau_k,\tau-\tau_k)\,d\tau,$$

$$K^{(k)}(t,\tau)=E_k(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E_k(t,\tau)}+C^{(k)}(t,\tau)\right],$$

где ν_k и $E_k(t-\tau_k)$ ($k=1,2$) — коэффициенты Пуассона и модули Юнга покрытия ($k=1$) и нижнего слоя ($k=2$), I — тождественный оператор, $K^{(k)}(t,\tau)$ ($k=1,2$) — ядра ползучести при растяжении, $C^{(k)}(t,\tau)$ ($k=1,2$) — меры ползучести при растяжении, $k_{\text{as}}[r/H,\rho/H]$ — известное ядро осесимметричной контактной задачи [2, 3], имеющее вид

$$k_{\text{as}}(r,\rho)=\int_0^{+\infty}L(u)J_0(ru)J_0(\rho u)\,du\,.$$

Здесь $J_0(s)$ — функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка, а функция $L(u)$ определяется из соотношения

$$L(u)=\frac{2\kappa\,\mathrm{sh}\,2u-4u}{2\kappa\,\mathrm{ch}\,2u+4u^2+1+\kappa^2},\qquad \kappa=3-4\nu_2\,.$$

Приравнивая вертикальные перемещения верхней грани покрытия перемещению штампа как жесткого целого получим интегральное уравнение исследуемой контактной задачи в форме

$$\frac{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}{1-\nu_1}(I-\mathcal{V}_1)\frac{q(r,t)h(r)}{E_1(t-\tau_1)}+\frac{2(1-\nu_2^2)}{H}(I-\mathcal{V}_2)\mathcal{F}\frac{q(r,t)h(r)}{E_2(t-\tau_2)}=\delta(t),\quad a\le r\le b\,,\qquad(1)$$

где $\delta(t)$ — осадка штампа.

Уравнение (1) дополним условием равновесия штампа на слое

$$2\pi\int_a^b q(\rho,t)\rho\,d\rho = P(t)\,. \qquad (2)$$

Сделав в (1), (2) замену переменных по формулам ($k_m\,, k_P$ — безразмерные масштабные коэффициенты, вводимые исключительно для улучшения вида функций $m^*(r^*)$, $c^*(t^*)$ и $P^*(t^*)$)

$$(r^*)^2 = \frac{r^2-a^2}{b^2-a^2},\quad (\rho^*)^2 = \frac{\rho^2-a^2}{b^2-a^2},\quad t^* = \frac{t}{\tau_0},\quad \tau^* = \frac{\tau}{\tau_0},\quad \tau_1^* = \frac{\tau_1}{\tau_0},\quad \tau_2^* = \frac{\tau_2}{\tau_0},$$

$$\lambda = \frac{H}{b-a},\quad \eta = \frac{a}{b-a},\quad \xi^2 = \frac{b+a}{b-a},\quad \delta^*(t^*) = k_P\frac{\delta(t)}{b-a},\quad c^*(t^*) = \frac{E_2(t-\tau_2)}{k_m E_1(t-\tau_1)},$$

$$m^*(r^*) = k_m\frac{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}{(1-\nu_1)(1-\nu_2^2)}\frac{h(r)}{2(b-a)},\quad q^*(r^*,t^*) = \frac{2k_P(1-\nu_2^2)}{E_2(t-\tau_2)}q\left(r,t\right),$$

$$P^*(t^*) = \frac{k_P P(t)(1-\nu_2^2)}{\pi E_2(t-\tau_2)(b^2-a^2)},\quad \mathcal{F}^* f(r^*,t^*) = \int_0^1 k_{\mathrm{as}}^*(r^*,\rho^*)\,f(\rho^*,t^*)\rho^*\,d\rho^*\,,$$

$$k_{\mathrm{as}}^*(r^*,\rho^*) = \frac{\xi^2}{\lambda}k_{\mathrm{as}}\left[\frac{\sqrt{(r^*)^2\xi^2+\eta^2}}{\lambda},\frac{\sqrt{(\rho^*)^2\xi^2+\eta^2}}{\lambda}\right] = \frac{b+a}{H}k_{\mathrm{as}}\left(\frac{r}{H},\frac{\rho}{H}\right),$$

$$\mathcal{V}_k^* f(r^*,t^*) = \int_1^{t^*} f(t^*,\tau^*)K_k(t^*,\tau^*)\,d\tau^*,\quad K_2(t^*,\tau^*) = K^{(2)}(t-\tau_2,\tau-\tau_2)\tau_0,$$

$$K_1(t^*,\tau^*) = \frac{E_1(t-\tau_1)}{E_1(\tau-\tau_1)}\frac{E_2(\tau-\tau_2)}{E_2(t-\tau_2)}K^{(1)}(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\tau_0\,.$$

и опустив в полученных соотношениях звездочки, получим смешанное интегральное уравнение и дополнительное условие в виде

$$c(t)m(r)(I-\mathcal{V}_1)q(r,t) + (I-\mathcal{V}_2)\mathcal{F}q(r,t) = \delta(t),\quad 0\le r\le 1, \qquad (3)$$

$$\int_0^1 q(\rho,t)\rho\,d\rho = P(t). \qquad (4)$$

Вводя обозначения

$$Q(r,t) = \sqrt{m(r)}q(r,t),\quad k(r,\rho) = \frac{k_{\mathrm{as}}(r,\rho)}{\sqrt{m(r)}\sqrt{m(\rho)}},\quad \mathcal{A}Q(r,t) = \int_0^1 k(r,\rho)Q(\rho,t)\rho\,d\rho,$$

преобразуем интегральное уравнение (3) и дополнительное условие (4) к следующему, удобному для анализа виду:

$$c(t)(I-\mathcal{V}_1)Q(r,t) + (I-\mathcal{V}_2)\mathcal{A}Q(r,t) = \frac{\delta(t)}{\sqrt{m(r)}},\quad 0\le r\le 1, \qquad (5)$$

$$\int_0^1 \frac{Q(\rho,t)}{\sqrt{m(\rho)}}\rho\,d\rho = P(t). \qquad (6)$$

Таким образом, получено разрешающее двумерное интегральное уравнение (5), содержащее интегральные операторы как с постоянными, так и с переменными пределами интегрирования, а также дополнительные условия (6).

Для нахождения решения полученной задачи используем обобщенный проекционный метод [4], который, в отличие от метода разделения переменных Фурье и других классических методов (например, метода ортогональных многочленов), где необходимо исследовать бесконечные системы интегральных уравнений Вольтера, позволяет получать последовательности независимых интегральных уравнений Вольтера для коэффициентов разложения контактных давлений в ряды по специальным базисам $L_2(0,1)$, а также выражение для осадки штампа.

Будем искать решение уравнения (5) при условии (6) в классе функций непрерывных по времени в $L_2(0,1)$ (см., например [1]). Для этого построим сначала ортонормированную в $L_2(0,1)$ систему функций такую, чтобы она содержала $\mathrm{const}/\sqrt{m(r)}$, а остальные функции базиса можно было представить в виде произведения функций, зависящих от r и весовой функции $1/\sqrt{m(r)}$. Система функций, удовлетворяющая оговоренным выше условиям, может быть построена по формулам

$$\int_0^1 p_i(\rho)p_j(\rho)\rho d\rho=\delta_{ij},\quad p_n(r)=\frac{P_n(r)}{\sqrt{m(r)}},\quad J_n=\int_0^1\frac{\rho^{2n+1}}{m(\rho)}d\rho,\quad P_0(r)=\frac{1}{\sqrt{J_0}},$$

$$P_n(r)=\frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}}\begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_n\\ J_1 & J_2 & \cdots & J_{n+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ J_{n-1} & J_n & \cdots & J_{2n-1}\\ 1 & r^2 & \cdots & r^{2n}\end{vmatrix},\quad \Delta_{-1}=1,\quad \Delta_n=\begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_n\\ J_1 & J_2 & \cdots & J_{n+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ J_n & J_{n+1} & \cdots & J_{2n}\end{vmatrix}.$$

Заметим, что гильбертово пространство $L_2(0,1)$ можно представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств $L_2(0,1)=L_2^{(0)}(0,1)\oplus L_2^{(1)}(0,1)$, где $L_2^{(0)}(0,1)$ — евклидово пространство с базисной функцией $p_0(r)$, а $L_2^{(1)}(0,1)$ — гильбертово пространство с базисом $p_k(r)$ ($k=1,\ 2,\dots$). Можно также заметить, что правая часть (5) является функцией непрерывной по времени в $L_2^{(0)}(0,1)$, $\delta(t)/\sqrt{m(r)}=\sqrt{J_0}\delta(t)p_0(r)$, а подынтегральную функцию можно представить в виде суммы функций, непрерывных по времени t в $L_2^{(0)}(0,1)$ и $L_2^{(1)}(0,1)$, соответственно, т.е.

$$Q(r,t)=Q_0(r,t)+Q_1(r,t),\quad Q_0(r,t)=z_0(t)p_0(r),$$

Как показано в [4], можно ввести оператор ортогонального проектирования, который отображает пространство $L_2(0,1)$ в $L_2^{(0)}(0,1)$:

$$\mathcal{P}_0 f(r,t)=\int_0^1 f(\rho,t)p_0(r)p_0(\rho)\rho\, d\rho.$$

Очевидно, что оператор $\mathcal{P}_1=I-\mathcal{P}_0$ (I – тождественный оператор) проектирует пространство $L_2(0,1)$ в $L_2^{(1)}(0,1)$. Кроме того имеют место следующие соотношения:

$$\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_0=I,\quad \mathcal{P}_k Q(r,t)=Q_k(r,t),\quad k=0,1.$$

Заметим, что в представлении для $Q(r,t)$ нам известно $Q_0(r,t)$, которое определяются дополнительным условием (6) ($z_0(t)=P(t)/\sqrt{J_0}$), а слагаемое $Q_1(r,t)$ требуется найти. Для правой части требуется определить осадку $\delta(t)$, а $Q_0(r,t)$ известно. Отмеченные особенности позволяют классифицировать полученную в итоге задачу как частный случай обобщенной проекционной задачи, поставленной и решенной в [4].

Следуя [4], подействуем на уравнение (5) оператором ортогонального проектирования $\mathcal{P}_1$. Тогда получим уравнение для определения $Q_1(r,t)$ с известной правой частью

$$c(t)(I-\mathcal{V}_1)Q_1(r,t)+(I-\mathcal{V}_2)\mathcal{P}_1\mathcal{A}Q_1(r,t)=-(I-\mathcal{V}_2)\mathcal{P}_1\mathcal{A}Q_0(r,t). \qquad (7)$$

Его решение можно построить в виде ряда по собственным функциям оператора $\mathcal{P}_1\mathcal{A}$, который, как можно показать на основании [4], является вполне непрерывным, самосопряженным и сильно положительным оператором из $L_2^{(1)}(0,1)$ в $L_2^{(1)}(0,1)$. Система собственных функций такого оператора составляет базис пространства $L_2^{(1)}(0,1)$. Спектральная задача для оператора $\mathcal{P}_1\mathcal{A}$ может быть записана в форме

$$\mathcal{P}_1\mathcal{A}\varphi_k(r)=\gamma_k\varphi_k(r), \quad \varphi_k(r)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i^{(k)}p_i(r), \quad k=1,2,\ldots,$$

$$K(r,\rho)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}R_{mn}p_m(r)p_n(\rho), \quad \sum_{n=1}^{\infty}R_{mn}\varphi_n^{(k)}=\gamma_k\varphi_m^{(k)}, \quad m=1,2,\ldots$$

Представляя исходную функцию $Q_1(r,t)$ в виде разложения по базисным функциям $\varphi_k(r)$ ($k=1,2,\ldots$) в $L_2^{(1)}(0,1)$, $Q_1(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}z_k(t)\varphi_k(r)$, и подставляя это представление в (7), получим, что неизвестные функции разложения $z_k(t)$ ($k=1,2,\ldots$) можно найти по формуле

$$z_k(t)=-(I+\mathcal{W}_k)\frac{(I-\mathcal{V}_2)z_0(t)K_k^{(0)}}{c(t)+\gamma_k},$$

$$K_k^{(0)}=\sum_{n=1}^{\infty}R_{0n}\varphi_n^{(k)}, \;\; \mathcal{W}_k f(t)=\int_1^t R_k^*(t,\tau)\,d\tau, \;\; k=1,2,...$$

где $R_k^*(t,\tau)$ ($k=1,2,\ldots$) — резольвента ядра интегрального уравнения Вольтера второго рода $K_k^*(t,\tau)=\left[c(t)K_1(t,\tau)+\gamma_k K_2(t,\tau)\right]\left[c(t)+\gamma_k\right]^{-1}$. Следует отметить, что полученное решение имеет структуру вида $q(r,t)=\left[m(r)\right]^{-1}\left[z_0(t)P_0(r)+\ldots\right]$, то есть удается выделить в решении в явном виде весовую функцию $m(r)$, а значит и связанную с ней заменой переменных толщину покрытия $h(r)$.

Теперь, подействовав оператором $\mathcal{P}_0$ на уравнение (5), получим уравнение для определения осадки штампа $\delta(t)$

$$c(t)(I-\mathcal{V}_1)Q_0(r,t)+(I-\mathcal{V}_2)\mathcal{P}_0\mathcal{A}Q(r,t)=\sqrt{J_0}\,\delta(t)p_0(r),$$

откуда

$$\delta(t)=\frac{1}{\sqrt{J_0}}\left\{c(t)(I-\mathcal{V}_1)z_0(t)+(I-\mathcal{V}_2)\left[R_{00}z_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}K_k^{(0)}z_k(t)\right]\right\}.$$

Автор благодарит А.В. Манжирова за постановку задачи, полезные обсуждения и ценные советы. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №05-01-00693 и №06-

01-00521), Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (программа №13 ОЭ) и гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ №НШ-1245.2006.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.
2. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
3. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. Манжиров А. В. Смешанные интегральные уравнения контактной механики и трибологии // Смешанные задачи механики деформируемого тела. Труды V Росс. конф. с междунар. участием, 22–24 августа 2005 г., г. Саратов, Россия. Саратов, Изд-во Сарат. гос. ун-та, 2005.

Сведения об авторе

Казаков Кирилл Евгеньевич
Аспирант, Институт проблем механики Российской академии наук
Адрес: пр-т Вернадского 101 корп. 1, Москва, 119526, Россия
Тел.: (+7 495) 434 3456 (раб), (+7 495) 907 9131 (дом)
Факс: (+7 499) 739 9531
E-mail: kazakov-ke@yandex.ru

ДИНАМИКА ПРЕДНАПРЯЖЕННЫХ СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ТЕЛ

Калинчук В.В., Белянкова Т.И.

Представлены результаты исследования закономерностей динамического поведения структурно неоднородных предварительно напряженных электроупругих тел в условиях воздействия начальных механических и электростатических полей. Исследование проводится в рамках линеаризованной теории наложения малых деформаций на конечные.

1. Постановка задачи. В системе координат Лагранжа, связанной с естественным состоянием [1], краевая задача о колебаниях преднапряженной электроупругой среды описывается линеаризованными уравнениями движения

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{\Theta} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \tag{1.1}$$

линеаризованным уравнением вынужденной электростатики

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{\Delta} = 0 \tag{1.2}$$

механическими граничными условиями на поверхности тела $o = o_1 + o_2$:

на o_1

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Theta} = \mathbf{t}^* \tag{1.3}$$

на o_2

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \tag{1.4}$$

электрическими граничными условиями на поверхности тела $o = o_3 + o_4$:

на o_3

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Delta} = -g^* \tag{1.5}$$

на o_4

$$\varphi = \varphi^* \tag{1.6}$$

Здесь $\mathbf{\Theta}$ и $\mathbf{\Delta}$ – линеаризованные тензор напряжений и вектор индукции, ∇_0 – оператор Гамильтона, $\mathbf{u}^*$, $\mathbf{t}^*$, $\mathbf{n}$ – векторы перемещений, напряжений и внешней нормали к поверхности среды соответственно, определенные в естественной системе координат (звездочкой отмечены заданные в соответствующей области величины), ρ_0 – плотность материала среды, g^*, φ^* - плотность распределения заряда и электрический потенциал соответственно.

Далее будем полагать, что начальное напряженное состояние является однородным, определяемым формулами

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{\Lambda}, \qquad \mathbf{G} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{\Lambda} = \delta_{ij} \nu_i \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j, \qquad \nu_i = const \tag{1.7}$$

Здесь $\mathbf{R}, \mathbf{r}$ - радиус-векторы точки среды соответственно в начально-деформированном и естественном состоянии, $\nu_i = 1 + \delta_i, \delta_i$ - относительные удлинения волокон, направленных в естественной конфигурации вдоль осей a_i, $i = 1, 2, 3$, совпадающих с декартовыми координатами, δ_{ij} - символ Кронекера.

Положим, что начальное электростатическое поле мало. Компоненты тензора $\mathbf{\Theta}$ и вектора $\mathbf{\Delta}$ представляются в виде [1]:

$$\begin{aligned} \theta_{lk} &= c^*_{lksp} u_{s,p} + e^*_{lkp} \varphi_{,p} \\ D_l &= e^*_{lsp} u_{s,p} - \varepsilon^*_{lp} \varphi_{,p} \end{aligned} \tag{1.8}$$

где

$$c^*_{lksp} = P_{lp} \delta_{ks} + \nu_k \nu_s c'_{lksp}$$

$$e^*_{lsp} = \nu_s e_{lsp} \tag{1.9}$$
$$\varepsilon^*_{lp} = \varepsilon_0 \nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_l^{-2} \delta_{lp} + \beta_{lp}$$

Здесь β_{kn} – константа диэлектрической восприимчивости. Участвующие в представлении (1.9) компоненты тензора Кирхгофа P_{lp}, а также упругие константы c'_{qjlp} зависят как от свойств материала, так и от вида начального напряженного состояния среды:

$$P_{lp} = \frac{1}{2} c_{qjlp} \delta_{qj} (\nu_q^2 - 1) - e_{jlp} W_j + \frac{1}{8} \delta_{mn} \delta_{qj} c_{mnqjlp} (\nu_q^2 - 1)(\nu_m^2 - 1)$$
$$c'_{qjlp} = c_{qjlp} + \frac{1}{4} \delta_{mn} c_{mnqjlp} (\nu_m^2 - 1) \tag{1.10}$$

Выражения для диэлектрических и пьезоэлектрических констант, в рамках сделанных предположений о малой величине электрического поля, не изменяются.

2. Решение краевой задачи о колебаниях слоисто неоднородной электроупругой среды. Решение краевой задачи о колебаниях слоисто неоднородной электроупругой среды, представляющей собой пьезоактивный слой толщины h на диэлектрическом полупространстве, представляется в виде [1-3]

$$\mathbf{u}^{(n)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Omega} \mathbf{k}^{(n)}(x_1 - \xi, x_2 - \eta, x_3) \mathbf{q}^{(1)}(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta$$
$$\mathbf{k}^{(n)}(s, t, x_3) = \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) e^{i(\alpha_1 s + \alpha_2 t)} d\alpha_1 d\alpha_2 \tag{2.1}$$

Контуры Γ_1 и Γ_2 выбираются в соответствии с принципом предельного поглощения [3] и поведением элементов матриц – функций $\mathbf{K}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$ на вещественной оси. Представление (2.1) определяет вектор перемещения произвольной точки слоя (n=1) или полупространства (n=2). В случае, когда слой и полупространство подвержены действию однородных начальных напряжений $\sigma_{11}^{(1)0} \neq \sigma_{22}^{(1)0} \neq \sigma_{33}^{(1)0}$ (слой), $\sigma_{11}^{(2)0} \neq \sigma_{22}^{(2)0} \neq \sigma_{33}^{(2)0}$ (полупространство), элементы матрицы - функции $\mathbf{K}^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \omega)$ определяются формулами

$$K_{pj}^{(1)} = -i\alpha_p \sum_{k=1}^{4} f_{pk}^{(1)} \left[\Delta_{jk} \operatorname{sh} \sigma_k^{(1)} x_3 + \Delta_{j,k+4} \operatorname{ch} \sigma_k^{(1)} x_3 \right], \quad p = 1, 2$$
$$K_{pj}^{(1)} = \sum_{k=1}^{4} f_{pk}^{(1)} \left[\Delta_{jk} \operatorname{ch} \sigma_k^{(1)} x_3 + \Delta_{j,k+4} \operatorname{sh} \sigma_k^{(1)} x_3 \right], \; p = 3, 4 \tag{2.2}$$

элементы матрицы - функции $\mathbf{K}^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$ имеют вид [4]:

$$K_{np}^{(2)} = -i\alpha_n \sum_{k=1}^{3} f_{nk}^{(2)} \Delta_{p,k+8} e^{\sigma_k^{(2)} x_3}, \qquad n = 1, 2 \tag{2.3}$$
$$K_{3p}^{(2)} = \sum_{k=1}^{3} \Delta_{p,k+8} e^{\sigma_k^{(2)} x_3}$$

Участвующие в представлениях (2.2) и (2.3) функции Δ_{kp} определяются формулами:

$$\Delta_{kp} = \Delta_{kp}^0 \big/ \Delta^0 \quad (k, p = 1, 2, ..., 11) \tag{2.4}$$

где Δ_{kp}^0 – алгебраические дополнения элементов T_{kp} определителя

$$\Delta^0 = \left\| T_{kp} \right\|_{k,p=1}^{11} \tag{2.5}$$
$$T_{pk} = l_{pk}^1 \operatorname{ch} \sigma_k^{(1)} h, \quad T_{p,k+4} = l_{pk}^1 \operatorname{sh} \sigma_k^{(1)} h, \; T_{p,k+8} = 0 \quad p = 1, 2$$

$$T_{pk}=l_{pk}^{1}\operatorname{sh}\sigma_k^{(1)}h,\quad T_{p,k+4}=l_{pk}^{1}\operatorname{ch}\sigma_k^{(1)}h,\ T_{p,k+8}=0\quad p=3,4$$

$$T_{pk}=0,\ T_{p,k+4}=f_{p-4,k}^{(1)},\ T_{p,k+8}=-f_{p-4,k}^{(2)},\ p=5,6 \tag{2.6}$$

$$T_{7k}=1,\ T_{7,k+4}=0,\ T_{7,k+8}=-1$$

$$T_{8k}=f_{4k}^{(1)},\ T_{8,k+4}=0,\ T_{8,k+8}=0$$

$$T_{pk}=l_{p-8,k}^{1},\ T_{p,k+4}=0,\ T_{p,k+8}=-l_{p-8,k}^{2},\ p=9,10$$

$$T_{11,k}=0,\ T_{11,k+4}=l_{3k}^{1},\ T_{11,k+8}=-l_{3k}^{2}$$

Здесь в первых двух столбцах индекс $k=1,2,3,4$, в третьем столбце $k=1,2,3$. Коэффициенты l_{pk}^{1} выражаются формулами

$$l_{pk}^{1}=\theta_{3pp3}^{(1)}\sigma_k^{(1)}f_{pk}^{(1)}+\theta_{3p3p}^{(1)}f_{3k}^{(1)}+\theta_{3p4p}^{(1)}f_{4k}^{(1)},\qquad p=1,2$$

$$l_{pk}^{1}=-\alpha_1^2\theta_{3p11}^{(1)}f_{1k}^{(1)}-\alpha_2^2\theta_{3p22}^{(1)}f_{2k}^{(1)}+\theta_{3p33}^{(1)}\sigma_k^{(1)}f_{3k}^{(1)}+\theta_{3p43}^{(1)}\sigma_k^{(1)}f_{4k}^{(1)},\ p=3,4$$

Коэффициенты $f_{pk}^{(1)}$, $p,k=1,2,4,$ $n=1,2$ являются решениями однородной системы уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} H_{1k}^{n} & -\alpha_2^2B_{12}^{n} & \sigma_k^{(n)}B_{13}^{n} & \sigma_k^{(n)}B_{14}^{n} \\ -\alpha_1^2B_{21}^{n} & H_{2k}^{n} & \sigma_k^{(n)}B_{23}^{n} & \sigma_k^{(n)}B_{24}^{n} \\ -\alpha_1^2\sigma_k^{(n)}B_{31}^{n} & -\alpha_2^2\sigma_k^{(n)}B_{32}^{n} & H_{3k}^{n} & H_{5k}^{n} \\ -\alpha_1^2\sigma_k^{(n)}B_{41}^{n} & -\alpha_2^2\sigma_k^{(n)}B_{42}^{n} & H_{6k}^{n} & H_{4k}^{n} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$H_{pk}^{n}=h_p^{n}\sigma_k^{(n)2}-P_k^{n}\quad,\ p=1,2,...,6 \tag{2.8}$$

$\sigma_k^{(1)}$ – являются корнями характеристического уравнения 8-го порядка

$$\Delta_1^{00}=\begin{Vmatrix} h_1^{(1)}\sigma^2-P_1^{(1)} & -\alpha_2^2B_{12}^{1} & \sigma B_{13}^{1} & \sigma B_{14}^{1} \\ -\alpha_1^2B_{21}^{1} & h_2^{(1)}\sigma^2-P_2^{(1)} & \sigma B_{23}^{1} & \sigma B_{24}^{1} \\ -\alpha_1^2\sigma B_{31}^{1} & -\alpha_2^2\sigma B_{32}^{1} & h_3^{(1)}\sigma^2-P_3^{(1)} & h_5^{(1)}\sigma^2-P_5^{(1)} \\ -\alpha_1^2\sigma B_{41}^{1} & -\alpha_2^2\sigma B_{42}^{1} & h_6^{(1)}\sigma^2-P_6^{(1)} & h_4^{(1)}\sigma^2-P_4^{(1)} \end{Vmatrix} \tag{2.9}$$

Здесь

$$B_{pj}^{n}=\theta_{ppjj}^{(n)}+\theta_{jpjp}^{(n)},\ p,j=1,2,3,\ B_{p4}^{1}=\theta_{pp43}^{(1)}+\theta_{3p4p}^{(1)}$$

$$B_{4p}^{1}=\theta_{34pp}^{(1)}+\theta_{p4p3}^{(1)},\quad p=1,2$$

$$h_p^{(1)}=\theta_{3pp3}^{(1)},\ p=1,2,3,4\ \ h_5^{(1)}=\theta_{3343}^{(1)},\ h_6^{(1)}=\theta_{3433}^{(1)}$$

$$P_p^{(n)}=\sum_{k=1}^{2}\theta_{kppk}^{(n)}\alpha_k^{\,2}-\rho^{(n)}\omega^2,\ n=1,2,\ p=1,2,3,\quad P_4^{(1)}=\sum_{k=1}^{2}\theta_{k44k}^{(n)}\alpha_k^{\,2},$$

$$P_5^{(1)}=\sum_{k=1}^{2}\theta_{k34k}^{(1)}\alpha_k^{\,2},\quad P_6^{(1)}=\sum_{k=1}^{2}\theta_{k43k}^{(1)}\alpha_k^{\,2} \tag{2.10}$$

Уравнения для нахождения $\sigma_k^{(1)}$, а также формулы, определяющие параметры упругого полупространства можно найти в [3].

3. Численные результаты. На рис. 1–6 представлены графики $\operatorname{Re}\Theta$ ($\Theta=Q_\sigma-Q_0$, Q_0,Q_σ – динамическая жесткость среды в естественном и начально-деформированном состоянии), иллюстрирующие влияние различных видов начальной деформации на динамическую жесткость пьезоактивной структуры, представляющей собой слой ZnO (рис.1-4) и слой $BaTiO_3$ (рис.5, 6) на подложке, жесткость которой предполагается намного большей жесткости пьезоэлектрика. В качестве частоты используется безразмерный параметр

$k_2 = \omega h\left(\rho\,\theta^{(2)}_{4444}\right)^{-1/2}$, Цифрами 1, 2 и 3 на рис. 1 и 2 отмечены кривые, соответствующие одноосным начальным напряжениям по осям x_1 (НДС1), x_2 (НДС2) и x_3 (НДС3), причем значения, соответствующие НДС3 уменьшены в 6 раз. Как следует из графиков, изменение напряженного состояния приводит к существенному изменению динамической жесткости, причем на некоторых частотах оно мало, на некоторых весьма значительно. На рис. 3 и 4 представлены кривые, соответствующие НДС3, 2-х-осному (2НДС3) и 3-х-осному (3НДС) (отмечены индексами 1^x, 2^x и 3^x) для слоя ZnO. Как следует из графиков, влияние этих состояний на динамическую жесткость структуры ZnO на порядок превосходит влияние НДС1 и НДС2. На рис. 5 и 6 представлены графики, соответствующие НДС3, 2-х-осному (2НДС3) и 3-х-осному (3НДС) (отмечены индексами 1^x, 2^x и 3^x) для слоя $BaTiO_3$. Как следует из графиков, влияние начальных напряжений на динамические характеристики материалов существенным образом изменяются по амплитуде. В то же время характер влияния начальных напряжений в указанных диапазонах частот для рассмотренных материалов сохраняется.

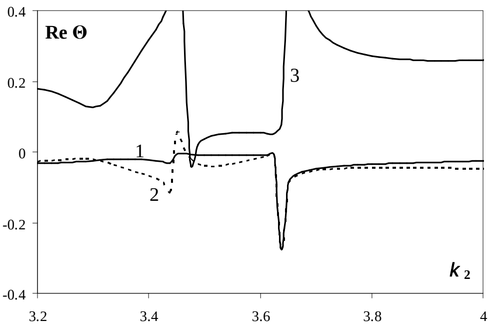


Рис.1

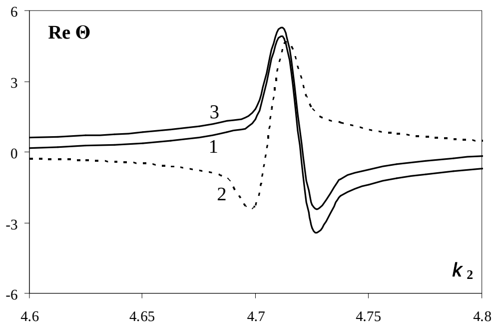


Рис.2

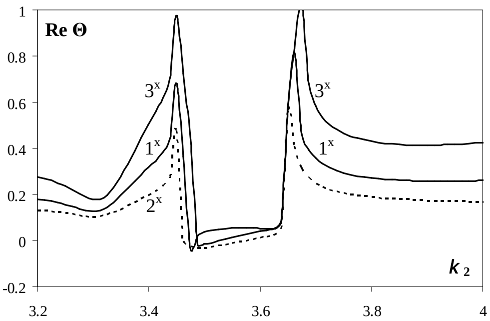


Рис.3

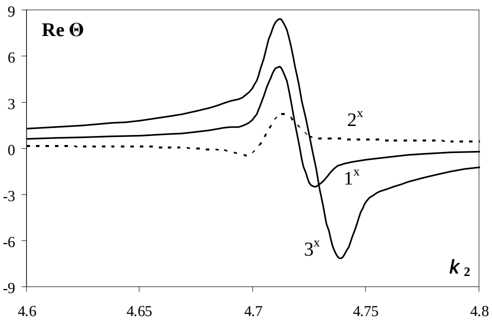


Рис.4

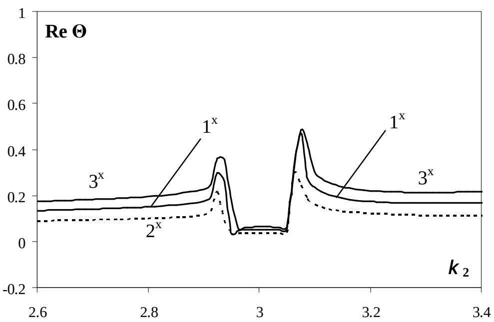


Рис.5

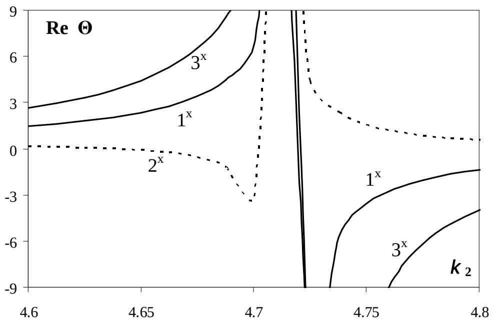


Рис.6

ЛИТЕРАТУРА

1. Калинчук В.В., Белянкова Т.И. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих сред. М: Физматлит, 2006, 276 с.
2. Калинчук В.В., Белянкова Т.И. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел. М: Физматлит, 2002, 240 с.
3. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984, 256 с.

Сведения об авторах

Калинчук Валерий Владимирович
Доктор физ.-мат.наук, главный научный сотрудник, Южный научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону
Адрес: 344010, пр. Соколова 85, кв.149, Ростов на Дону, Россия
Тел. (+7918)5579325; факс (+7863)2665677; E-mail: kalin@rsu.ru

Белянкова Татьяна Ивановна
Кандидат физ.-мат.наук, заведующая лабораторией
Адрес: 344058 ул. Рихарда Зорге д.6/1 кв.95, Ростов-на-Дону, Россия
Тел. (+7863)2222062; Факс (+7863)2975232; E-mail : belen@rsu.ru

О ВЛИЯНИИ СТЕПЕНИ ВЛАЖНОСТИ СТАРОГО БЕТОНА НА ЕГО УПРУГИЕ СВОЙСТВА

Карапетян К.А.

Приводятся результаты по исследованию изменения модуля упругости и коэффициента Пуассона старого бетона в зависимости от степени его влажности как в случае адсорбции, так и при десорбции свободной влаги.

Вводная часть

Исследованию изменения упругих характеристик бетона в зависимости от десорбции химически несвязанной влаги из пор и капилляров или ее адсорбции посвящены немногочисленные работы [1-6]. Между тем, результаты таких исследований могут быть полезными для оптимального проектирования бетонных и железобетонных конструкционных элементов, подвергаемых периодическому увлажнению и высыханию, обусловленными эксплуатационными или климатическими условиями [7]. Следует отметить, что во избежание влияния побочных эффектов, связанных с преждевременным прекращением или возобновлением химического процесса гидратации цементных зерен, вышеупомянутые исследования целесообразно проводить на старых бетонах.

В данной работе приводятся результаты экспериментального исследования изменения модуля упругости и коэффициента Пуассона старого туфобетона в зависимости от его влажности как в случае влагонасыщения “сухих”, так и в случае влагопотери гидроизолированных сразу после распалубки образцов.

Методика проведения исследований

Эксперименты были осуществлены на туфобетоне состава в массе 1:1,797:2,743, В/Ц=1,433, Ц=261кг/м^3. Для приготовления бетона использова- лись песок ($\gamma_п$=1070кг/м^3), щебень ($\gamma_щ$=820кг/м^3) с фракцией 5-40мм, взятые из туфового карьера Джрвеж (Республика Армения) и шлакопортландцемент активностью 40МПа.

Опытные образцы – цилиндры с диаметром 5,5см и высотой 16,5см – были выбурены из туфобетонных исходных элементов (цилиндры с диаметром 25см и высотой 60см) в возрасте 23 лет в перпендикулярном направлении по отношению к слоям укладки бетона. Часть исходных элементов сразу после распалубки была гидроизолирована и в таком состоянии сохранялась в лабораторном помещении в течение 23 лет. Неизолированные же исходные элементы первые 3 года хранились при температуре среды 20±5°C и относительной влажности 80±10%, а в дальнейшем, еще 20 лет – в лабораторном помещении.

Кратковременные испытания опытных образцов были проведены согласно методу, изложенному в работе [8]. Были испытаны контрольные образцы (сразу после их выбуривания), а также соответствующие образцы-близнецы в одном случае влагонасыщенные путем хранения в водной среде, а в другом случае – высушенные в лабораторном помещении в течение определенного количества дней. Повторность опытов в каждом случае была принята 3-х кратной. Максимальный разброс показателей измеренных механических характеристик по отношению к их среднему арифметическому значению составил +4,8 и –5,1%. Температура лабораторного помещения в период проведения опытов составляла 22±5°C, а относительная влажность - 70±5%.

Известно, что определение интересующих характеристик бетона должно производиться согласно ГОСТ 24452-90, требующему призматические образцы с размерами 10х10х40см. То есть использованный нами метод испытания отличен от метода, рекомендованного соответствующим стандартом. Однако, в случае старого бетона, результаты испытания, полученные обоими вышеупомянутыми методами, не могут значительно отличаться. Об этом свидетельствуют данные наших предварительных экспериментов, поставленных на 16-летних литоидопемзобетонах, согласно которым величины прочности, модуля упругости и коэффициента Пуассона бетона, полученные по обоим вышеупомянутым методам испытаний, мало отличаются друг от друга.

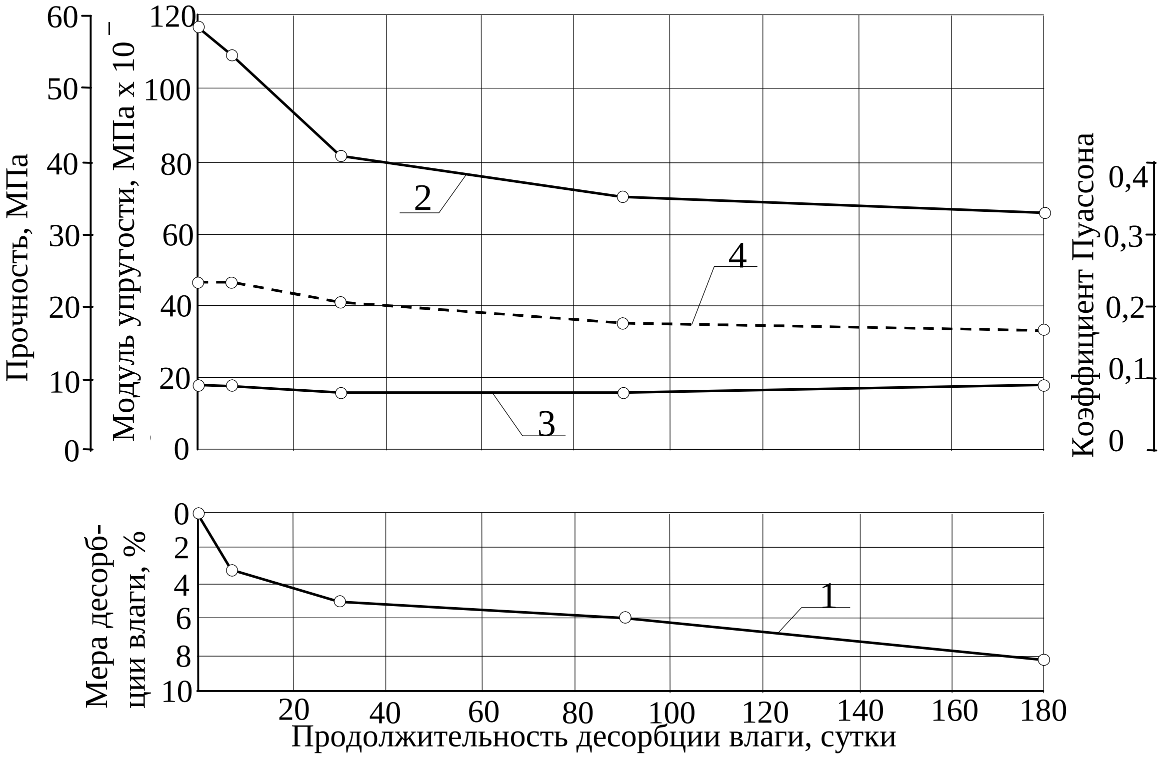


Рис.1. Кривые изменения меры десорбции влаги (1), модуля упругости (2), коэффициента Пуассона (3) и прочности (4) бетона в зависимости от продолжительности процесса десорбции.

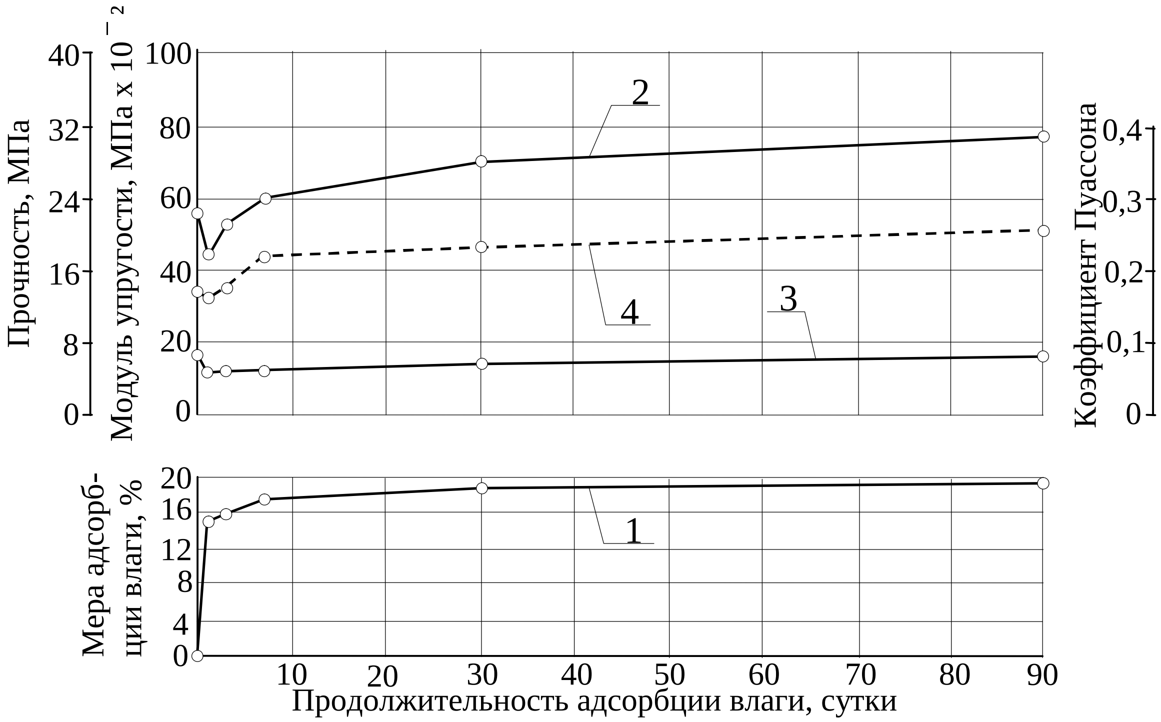


Рис.2. Кривые изменения меры адсорбции влаги (1), модуля упругости (2), коэффициента Пуассона (3) и прочности (4) бетона в зависимости от продолжительности процесса адсорбции.

Полученные результаты и их обсуждение

Результаты исследований представлены на рис.1 и 2. Часть результатов, касающаяся прочности бетона, опубликована в работе [9].

Согласно проведенным измерениям влажность туфобетона в возрасте 28 сут. составляла 17,4%. Расчеты, проведенные на основе данных работы [10], показывают, что в случае надежной гидроизоляции влажность бетона в возрасте 23 лет должна была составить 15,5%. По данным же кривой 1 рис.1 мера влажности гидроизолированных образцов в указанном возрасте составляла 10,6%, что свидетельствует о недостаточной надежности изоляции.

По данным рис.1 (кривые 1 и 2) с уменьшением влажности во времени вследствие десрбции влаги наблюдается существенное, с затухающей скоростью, снижение величины модуля упругости гидроизолированных после распалубки и освобожденных от изоляции к моменту начала испытания опытных туфобетонных образцов. Величина спада указанной характеристики бетона через 180 сут. после начала процесса десорбции составляет примерно 44%.

По данным кривых 1 и 2 рис.1 величина уменьшения модуля упругости бетона через 30 сут. после начала процесса десорбции влаги (потеря влаги равна 5%) составляет около 31%. В дальнейшем, с продолжением этого процесса еще 150 сут. (потеря влаги за этот промежуток времени равна 3%), имеет место снижение величины модуля упругости приблизительно на 19%. Из сравнения вышеприведенных показателей можно придти к выводу, что связь между величинами модуля упругости старого туфобетона и содержащейся в его порах и капиллярах свободной влаги можно считать прямо пропорциональной.

Характер изменения прочности бетона вследствие десорбции влаги качественно аналогичен изменению модуля упругости (см. кривая 4 рис.1). Однако, величина этого показателя менее чувствительна к мере свободной влаги, содержащейся в бетоне.

На основе количественного сравнения данных, кривая 3 рис.1, можно придти к выводу, что изменение коэффициента Пуассона старого туфобетона, обусловленное процессом десорбции влаги из его пор и капилляров, несущественно.

Как видно из кривых 1 и 2 рис.2 при хранении в водной среде в течение 1 суток происходит интенсивная адсорбция влаги и существенный спад модуля упругости негидроизолированного после распалубки (“сухого”) бетона. При этом мера адсорбции влаги бетона в указанный период времени составила приблизительно 77% от ее значения после 90 сут. хранения в водной среде, а снижение модуля упругости по сравнению с его исходным значением составляет около 21%. Дальнейшее влагонасыщение бетона в водной среде приводит к затуханию скорости процесса адсорбции и устойчивому существенному увеличению модуля упругости (кривые 1 и 2 рис.2). В итоге, после 90 сут. хранения образцов в водной среде, значение модуля упругости бетона превзошло величину модуля упругости контрольного “сухого” бетона на 37%.

Из сравнения кривых 2 и 4 рис.2 следует, что характер изменения во времени прочности “сухого” туфобетона вследствие его влагонасыщения качественно аналогичен характеру изменения модуля упругости. Однако, в количественном отношении прочность бетона менее чувствительна к процессу адсорбции.

Из анализа кривой 3 рис.2 следует, что при интенсивной адсорбции влаги, происходящей в первые сутки хранения в водной среде, имеет место снижение величины коэффициента Пуассона туфобетона на 25% по отношению к его исходному значению. Величина этого уровня остается практически одинаковой для образцов, находящихся в водной среде вплоть до 7 сут., несмотря на то, что в этот период времени наблюдается рост меры адсорбции влаги на 2,5%. После этого имеет место монотонный рост коэффициента Пуассона и его конечная величина (через 90 сут. влагонасыщения) практически равняется показателю этой характеристики, полученному для контрольных “сухих” образцов.

Выводы

1. Десорбция влаги из пор и капилляров туфобетона, вызревавшего в течение многих лет в благоприятных для упрочнения условиях (в гидроизолированном состоянии), практически не

влияя на коэффициент Пуассона, приводит к существенному снижению модуля упругости, происходящему прямопропорционально потере влаги.

2. В процессе адсорбции влаги старого бетона, вызревавшего в среде с невысокой влажностью, имеет место начальное уменьшение и дальнейшее увеличение значений модуля упругости и коэффициента Пуассона. При этом модуль упругости влагонасыщенного бетона существенно превосходит его начальный модуль упругости, в то время как коэффициент Пуассона остается практически одинаковым.

Наблюдаемую закономерность изменения модуля упругости, по-видимому, можно объяснить тем, что несвязанная влага, находящаяся в порах и капиллярах бетона, создает дополнительное препятствие к деформированию. Одновременно следует заметить, что подобное объяснение в случае коэффициента Пуассона вроде противоречит обнаруженному явлению. Однако, дать полное объяснение такому поведению коэффициента Пуассона бетона в рамках этих экспериментов затруднительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jones R. The effect of frequency on the dynamic modulus and damping coefficient of concrete. – Mag. Concrete Res., 1957, 9, №26, p.69-72.
2. Стольников В.В. Исследование бетона резонансным методом. //Изв.ВНИИГ. 1957. Т.57. С.166-177.
3. Reichard T.W. Creep and drying shrinkage of lightweight and normal – weight concretes. – NBS Monogr. U.S. Dept. Commerce, 1964, N7, p.III, 30p.
4. Карапетян К.С. О вторичном твердении и изменении анизотропных свойств бетона при его водонасыщении. //Докл.АН Арм.ССР. 1973. Т.57. №3. С.158-166.
5. Haque M.N., Cook D.J. The effect of water sorption on the dynamic modulus of elasticity of desiccated concrete materials. – Mater et constr., 1976, 9, №54, p.407-410.
6. Каранфилов Т.С. Влияние влажности на модуль упругости бетона. // Бетон и железобетон. 1978. №2. С.13-14.
7. Александровский С.В. Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменения температуры и влажности с учетом ползучести. М.: Стройиздат, 1973. 432с.
8. Карапетян К.С. Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от масштабного фактора. // Изв.АН Арм. ССР. Серия физ.-мат. наук. 1964. Т.17. №4. С.71-90.
9. Карапетян К.С., Карапетян К.А. Исследование изменения прочности, модуля деформации и степени анизотропии весьма старого туфобетона при сжатии вследствие водонасыщения и высыхания. // Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1981. Т.34. №4. С.29-51.
10. Симонов М.З. Основы технологии легких бетонов. М.: Изд. лит. по строительству, 1973. 584с.

Сведения об авторе

Карапетян Корьюн Ашотович
Доктор техн.наук, ведущий научный сотрудник ИМ НАН РА,
Г.Ереван, ул.О.Эмина, д.32. ,Тел. (+03741)26-01-35.
E-mail: koryan476973@mechins.sci.am

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ И БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННЫХ ЧАСТИЧНО СКЛЕЕННЫМ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫМ СТРИНГЕРОМ

Керопян А. В.

Рассматриваются контактные задачи для упругих тел, моделированных в виде упругой полуплоскости и бесконечной пластины, границы y=0 которых (в плоскости xoy) усилены кусочно-однородным стрингером в виде тонкой упругой накладки, состоящей из двух симметрично расположенных полубесконечных кусков и одного разделенного конечного куска с разными упругими характеристиками. Здесь контакт между стрингером и деформируемыми основаниями в полубесконечных участках осуществляется через тонкий слой клея (с другими физико-механическими и геомерическими характеристиками), а в конечном участке имеет место идеальный механический контакт и деформируются под действием горизонтальных сил приложенных к стрингерам.

Для краткого изложения работы в основе постановки задачи в качестве деформируемого основания выбрана полуплоскость. По ходу ее решения приведены результаты для упругой бесконечной пластины по возможности с одинаковыми обозначениями.

§1. Постановка задачи и вывод основных разрешающих уравнений. Пусть упругая полуплоскость (модуль упругости E, коэффицент Пуассона ν) усилена на границе $y=0$ (в плоскости xoy) кусочно-однородным бесконечным стрингером малой толщины h и с модулями упругости E_1 при $|x|>b$, и E_2 – при $|x|<a$. Контакт между стрингером и деформируемым основанием при $|x|>b$ осуществляется через тонкий слой клея (модуль упругости E_k, коэффицент Пуассона ν_k и толшина h_k), а при $|x|<a$ они находятся в идеальном механическом контакте. Задача заключается в определении контактных напряжений, когда на краях стрингера, т. е. в точках $x=\pm a$, $x=\pm b$ приложены горизонтальные силы P, а в точках $x=\pm c$ – горизонтальные силы Q (Q>P, c> b> a).

Аналогичная задача при отсутствии слоя клея была расмотрена в работе [1]. Задачи, где контактные взаимодействия в конечном участке осуществляются через слой клея, а в полубесконечных участках они находятся в идеальном механическом контакте, рассмотрены в работах [2,3]. В работе [4] рассмотрена задача с двумя конечными стрингерами. Не останавливаясь на всех рассмотренных задач этого класса, отметим лишь, что в работе [5] рассмотрена задача для бесконечной пластины, усиленной через слой клея с одним полубесконечным стрингером, а в [6] – с двумя полубесконечными стрингерами.

Для стрингера принимается модель контакта по линии, а для слоя клея условия чистого сдвига, благодаря чему под стрингерами действуют только касательные контактные напряжения [2-6].

Согласно вышепринятой модели, из условия равновесия элемента стрингеров и закона Гука получим уравнения равновесия стингеров, которые с помощью обобщенных функций представим в виде двух уравнений [2,3]:

$$\frac{dU_1^{(1)}(x)}{dx}=\frac{\tau_1(x)}{E_1h}+\frac{Q[\delta(x+c)-\delta(x-c)]}{E_1h}-\frac{P[\delta(x+b)-\delta(x-b)]}{E_1h} \tag{1.1}$$

$$\frac{dU_0^{(1)}(x)}{dx}=\frac{\tau_0(x)}{E_2h}+\frac{P[\delta(x+a)-\delta(x-a)]}{E_2h}, \quad -\infty<x<\infty \tag{1.2}$$

Здесь

$$U_1^{(1)}(x)=\left[\theta(-x-b)+\theta(x-b)\right]du^{(1)}/dx$$

$$U_0^{(1)}(x)=\left[\theta(x+a)-\theta(x-a)\right]du^{(1)}/dx$$

$$\tau_1(x)=\left[\theta(-x-b)+\theta(x-b)\right]\tau(x),\ \tau_0(x)=\left[\theta(x+a)-\theta(x-a)\right]\tau(x) \tag{1.3}$$

$$\tau(x)=\tau_0(x)+\tau_1(x)$$

где $u^{(1)}(x)$ – горизонтальные перемещения точек стрингера, $\tau(x)$ – интенсивность касательных контактных напряжений, $\theta(x)$ – функция Хевисайда, $\delta(x)$ – ее производная.

В дальнейшем, для интегрального преобразования Фурье функции $f(x)$ будем пользоваться обозначениями:

$$\overline{f}(\sigma)=F\left[f(x)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\sigma x}dx, \quad f(x)=F^{-1}\left[\overline{f}(\sigma)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

Деформацию граничных точек упругой полуплоскости, когда на ее границе y=0 действуют только касательные напряжения интенсивности$\tau(x)$, в обобщенных функциях представим в виде [2,3]

$$\frac{du^{(2)}(x,0)}{dx}=U^{(2)}(x)=\frac{1}{\pi A}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[\tau_0(s)+\tau_1(s)\right]}{s-x}ds \tag{1.4}$$

Здесь

$$U^{(2)}(x)=U_1^{(2)}(x)+U_0^{(2)}(x)+G_u(x)$$
$$U_1^{(2)}(x)=\left[\theta(-x-b)+\theta(x-b)\right]du^{(2)}/dx$$
$$U_0^{(2)}(x)=\left[\theta(x+a)-\theta(x-a)\right]du^{(2)}/dx \tag{1.5}$$
$$G_u(x)=[\theta(x+b)-\theta(x+a)+\theta(x-a)-\theta(x-b)]g_u(x)$$
$$g_u(x)=du^{(2)}/dx,\ x\in(-b,-a)\cup(a,b),\ A=E/2(1-\nu^2)$$

Далее, представляя контактные условия при $|x|<a$ и $|x|>b$, при помощи обобщенных функций, затем применив к ним, а также к уравнениям (1.1), (1.2) и (1.4) обобщенные интегральные преобразования Фурье, как это сделано в [2,3], можно получить одно функциональное уравнение на действительной оси $-\infty<\sigma<\infty$, которое после обратного преобразования Фурье представим так:

$$\begin{gathered}\tau(x)+\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)\int_{-a}^{a}K_\beta(x-s)\tau_0(s)\,ds+\int_{-a}^{a}K_\beta''(x-s)\tau_0(s)\,ds+\\+\frac{1}{k}\int_a^b[K_\beta'(x-s)+K_\beta'(x+s)]g_u(s)\,ds=g_\beta(x),\qquad -\infty<x<\infty\end{gathered} \tag{1.6}$$

и следовательно,

$$\begin{gathered}\tau(x)+\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)\int_{-a}^{a}K_\beta(x-s)\tau(s)ds+\int_{-a}^{a}K_\beta''(x-s)\tau(s)ds+\\+\frac{1}{k}\int_a^b[K_\beta'(x-s)+K_\beta'(x+s)]g_u(s)ds=g_\beta(x),\qquad x\in(-a,a)\end{gathered} \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{k}\int_a^b[K_\beta'(x-s)+K_\beta'(x+s)]g_u(s)ds+\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)\int_{-a}^{a}K_\beta(x-s)\tau(s)ds+\\+\int_{-a}^{a}K_\beta''(x-s)\tau(s)ds=g_\beta(x),\qquad x\in(a,b)\end{gathered}$$

при условиях

$$\int_{-a}^{a}\tau(s)\,ds=0,\quad \int_b^{\infty}\tau(s)\,ds=Q-P \tag{1.8}$$

Здесь

$$K_\beta(x)=F^{-1}\left[K_\beta(\sigma)\right],\ \tau_i(x)=F^{-1}\left[\bar{\tau}_i(\sigma)\right]\ (i=0,1)$$

$$K_\beta(\sigma)=\frac{1}{\lambda_1^2+2\beta|\sigma|+\sigma^2},\ K'_\beta(x)=dK_\beta(x)/dx,\ K''_\beta(x)=d^2K_\beta(x)/dx^2 \qquad (1.9)$$

$$g_\beta(x)=Q\lambda_1^2[K_\beta(x-c)-K_\beta(x+c)]-P\lambda_1^2[K_\beta(x-b)-K_\beta(x+b)]+$$
$$+P\lambda_2^2[K_\beta(x-a)-K_\beta(x+a)]-\tau(b)[K'_\beta(x-b)+K'_\beta(x+b)]$$

$$\lambda_j^2=1/kE_jh\ (j=1,2),\ \beta=1/2kA,\ k=h_k/G_k,\ G_k=E_k/2(1+\nu_k)$$

$\tau(b)$ – значение $\tau(x)$ в точке $x=b$ при учете $\tau(-x)=-\tau(x)$.

При получении (1.6), (1.7) имелось в виду, что $g_u(-x)=g_u(x)$, а также $\tau(x)=0$ при $x\in(-b,-a)\cup(a,b)$ и $\tau(x)=\tau_0(x)$ при $x\in(-a,a)$.

Для бесконечной пластины, находящейся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, в предположении, что кусочно-однородный стрингер расположен на поверхности пластины при y=0 (xoy – средная плоскость пластины), в (1.6) и (1.7) следует a_j^2 заменить на $\bar{\lambda}_j^2=1/k^*E_jF\ (j=1,2)$, а β на $\beta^*=1/2k^*A^*$, $k^*=k/b_1$, $A^*=4Ed/b_1(1+\nu)(3-\nu)$, где d – толщина пластины, b_1 – ширина стрингеров в контактных участках.

Таким образом, задачи сведены к решению системы интегральных уравнений вида (1.7), при условиях (1.8). После решения системы (1.7) значения $\tau(x)$ при $|x|>b$ будут определяться из уравнения (1.6) при требовании, чтобы $|x|>b$.

Из (1.6) и (1.7) можно получить некоторые возможные предельные случаи прямой постановкой: т.е. а) при $k=0$ [1], б) $\lambda_1^2=\lambda_2^2=\lambda_1=\mathrm{A}/E_1h$ (случай однородных стрингеров. т. е. $E_2=E_1$) и т. д.

§2. Решение системы интегральных уравнений (1.7). Для этой цели заметим, что имеют место следующие представления [2,3,6]:

$$K_\beta(x)=\frac{\gamma}{\pi}\ln\left(\frac{b_2}{b_1}\right)+\gamma R(x),$$

$$K'_\beta(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(x)+\gamma R_\beta(x)$$

$$R(x)=R_{b_1}(x)-R_{b_2}(x),\ R_\beta(x)=R_{\beta_1}(x)-R_{\beta_2}(x)$$

а для $K''_\beta(x)$ будем иметь

$$K''_\beta(x)=-\delta(x)+2\beta\ln\frac{1}{2\beta|x|}-2\beta R^*(x) \qquad (2.1)$$

$$\gamma=\frac{1}{b_2-b_1}=\frac{1}{2\sqrt{\beta^2-\lambda_1^2}},\ b_{1,2}=\frac{\lambda_1^2}{\beta\pm\sqrt{\beta^2-\lambda_1^2}}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция, а $R_{b_j}(x)$, $R_{\beta_j}(x)$ $(j=1,2)$ и $R^*(x)$ – регулярные функции и определяются аналогично $R_1(x)$ и $R_2(x)$, как в работах [2,3]. Тогда систему (1.7) сведем к системе интегральных уравнений, одно из которых будет сингулярное с логарифмическим ядром (при $x\in(-a,a)$), а другое – регулярное уравнение (при $x\in(a,b)$). Далее, представляя решения этой системы в виде рядов по многочленам Чебышева первого рода, известным способом, как это сделано в [2,3], получим следующую квазивполне регулярную систему бесконечных систем алгебраических уравнений:

$$X_m+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(R_{m,n}^{(1)}+R_{m,n}^{(2)}\right)X_n+R_{m,n}^{(3)}Y_n\right]=\alpha_m^{(1)}Y_0+f_m^{(1)}\qquad (m=1,2,...) \tag{2.2}$$

$$Y_m+\sum_{n=1}^{\infty}\left[R_{m,n}^{(4)}Y_n+\left(R_{m,n}^{(5)}+R_{m,n}^{(6)}+R_{m,n}^{(7)}\right)X_n\right]=\alpha_m^{(2)}Y_0+f_m^{(2)}\quad (m=1,2,...)$$

где $R_{m,n}^{(k)}$ $\left(k=1,2,...,7\right)$ – регулярные ядра.

Неизвестная Y_0 определяется из второго условия (1.8). После определения X_n $\left(n=1,2,3...\right)$ и Y_n $\left(n=0,1,2,...\right)$ значения $\tau(x)$ при $x>b$ будут определяться так:

$$\begin{aligned}\tau(x)=&\gamma(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\sum_{n=1}^{\infty}X_n\int_{-a}^{a}\frac{\left(2n-1\right)R(x-s)}{\sqrt{a^2-s^2}}T_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)ds-2\beta\sum_{n=1}^{\infty}X_n\frac{a^{2n-1}}{(x+\sqrt{x^2-a^2})^{2n-1}}+\\&+2\beta\sum_{n=1}^{\infty}X_n\int_{-a}^{a}\frac{\left(2n-1\right)R^*(x-s)}{\sqrt{a^2-s^2}}T_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)ds-\\&-\frac{\gamma}{k}\sum_{n=1}^{\infty}Y_n\int_{a}^{b}n[R_\beta(x-s)+R_\beta(x+s)]\frac{T_n\left[h(s)\right]}{\sqrt{1-h^2(s)}}ds-\\&-\frac{\gamma Y_0}{k}\int_{a}^{b}[R_\beta(x-s)+R_\beta(x+s)]\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}ds+g_\beta(x),\quad x>b\end{aligned} \tag{2.3}$$

где $h(x)=(2x-a-b)/(b-a)$, а $T_n(y)=\cos(n\arccos y)$, $n=0,1,2,...$, – многочлены Чебышева первого рода.

Отметим, что $\tau(x)$ в точках $x=\pm b$, $x=\pm c$ имеет конечные значения, причем значение в точке $x=b$ получим из (2.3), подставляя в нее $x=b$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Э.Х., Мелтонян Б.А. Об одной задаче для упругой полуплоскости, усиленной на своей границе упругими накладками.//Уч. записки ЕГУ. Естеств. науки. 1984. №1. С. 46-51.
2. Керопян А.В. Контактные задачи для упругой полуплоскости и бесконечной пластины, усиленных частично склеенными стрингерами. //Уч. записки ЕГУ. Естеств. науки. 2007. №2. С. 35-44.
3. Керопян А.В. Решение контактных задач для упругой полуплоскости и бесконечной пластины, усиленных частично склеенными разнородными стрингерами. // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №4.
4. Григорян Э.Х., Керопян А.В., Шагинян С.С. Контактная задача для бесконечной пластины с двумя конечными стрингерами, один из которых склеен с ней, а другой находится в идеальном контакте. //Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №2. С. 14-23.
5. Benthem J.P. On the diffusion of a load from a semi-infinit stringer bounded to a sheet.// Contril. Theory Aireraft struct. Delft. 1972, p. 117-134.
6. Григорян Э.Х., Керопян А.В., Саркисян В.С.. Контактная задача для упругой полуплоскости, граница которой усилена склеенными с ней полубесконечными накладками.//Изв. РАН. МТТ. 1992. №3. С. 180-184.

<u>Сведения об авторе:</u>

Керопян Агаси Вачаганович
Кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры механики сплошной среды, ЕГУ
Адрес: ул.А.Манукяна 1, ЕГУ, Тел: 57-12-08(раб.), 46-19-41(дом.); E-mail: agas50@ysu.am

О ПРИМЕНЕНИИ МОДЕЛИ ПЛОСКОГО СЛОЯ В ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН УПРУГОЙ НЕКРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ

Ковалев В.А.

Изучается задача рассеяния стационарных акустических волн упругой некруговой цилиндрической оболочкой с помощью коротковолнового высокочастотного приближения. Предложен подход для нахождения приближенного решения, основанный на развитии модели плоского слоя, учитывающего взаимодействие оболочки с акустической средой.

В работах [1−3] для задач рассеяния акустических волн был предложен асимптотический метод построения коротковолнового высокочастотного приближения на базе развития модели плоского слоя на примерах круговой цилиндрической и сферической оболочек. Эта модель используется для описания коротковолновых колебаний оболочки вне окрестности нулевой частоты и частот толщинных резонансов.

Рассмотрим стационарную задачу о рассеянии плоских акустических волн некруговой цилиндрической оболочкой. Введем криволинейную ортогональную систему координат, связанную со срединной поверхностью следующим образом

$$\mathbf{P}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\mathbf{M}(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3\mathbf{n} \qquad (1)$$

где α_1,α_2 – параметры линий главной кривизны на срединной поверхности Γ, представляющей собой некруговой цилиндр ($\alpha_3=0$); $\mathbf{n}$ **–** единичная нормаль к срединной поверхности; α_3 – расстояние от Γ по нормали. Криволинейные координаты срединной поверхности представлены на рис. 1. Здесь параметр α_1 равен расстоянию от поперечного сечения, лежащего в плоскости $\chi=0$, до поперечного сечения, содержащего искомую точку M. Параметром α_2 определяется положение этой точки на направляющей кривой.

Скалярные уравнения, задающие рассматриваемую цилиндрическую поверхность в криволинейных координатах, имеют вид:

$$\chi=\alpha_1,\ y=y(\alpha_2),\ z=z(\alpha_2) \qquad (2)$$

Коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности A_1, A_2 задаются тогда выражениями [4]

$$A_1=1,\ A_2=\sqrt{y'^2+z'^2}=B(\alpha_2) \qquad (3)$$

Главные радиусы кривизн определяются следующими формулами [4]:

$$R_1=\infty,\ R_2=-\frac{(y'^2+z'^2)^{3/2}}{y'z''-z'y''}=R(\alpha_2) \qquad (4)$$

Рассмотрим случай нормального падения, для которого вектор распространения падающей волны лежит в плоскости (α_2,α_3), т.е. перпендикулярен боковой поверхности. Тогда уравнение Гельмгольца для данного случая принимает вид

$$\frac{1}{H}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial p}{\partial\alpha_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H\frac{\partial p}{\partial\alpha_3}\right)\right]+\omega^2 p=0 \qquad (5)$$

где p – давление, $H=B\left(1+\frac{\alpha_3}{R}\right)$.

Пусть плоская акустическая волна давления $p_i=p_0\exp\left[-i(k\xi+\omega t)\right]$ падает на некруговую цилиндрическую оболочку и рассеивается ею. Введем следующие параметры, характеризующие процесс рассеяния:

$$\kappa=\rho/\rho_1,\quad \beta_i=c_i/c\ \ (i=1,2),\quad \gamma=c_2/c_1,\quad k=\omega/c$$

Здесь c_1, c_2 – скорости волн расширения и сдвига в оболочке, соответственно, ρ_1 – плотность материала оболочки, c – скорость звука в жидкости, ρ – плотность жидкости, ω – круговая частота, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, ось ξ направлена навстречу распространению плоской волны, p_0 – постоянная, имеющая размерность давления, v_2 , v_3 – соответствующие компоненты скорости.

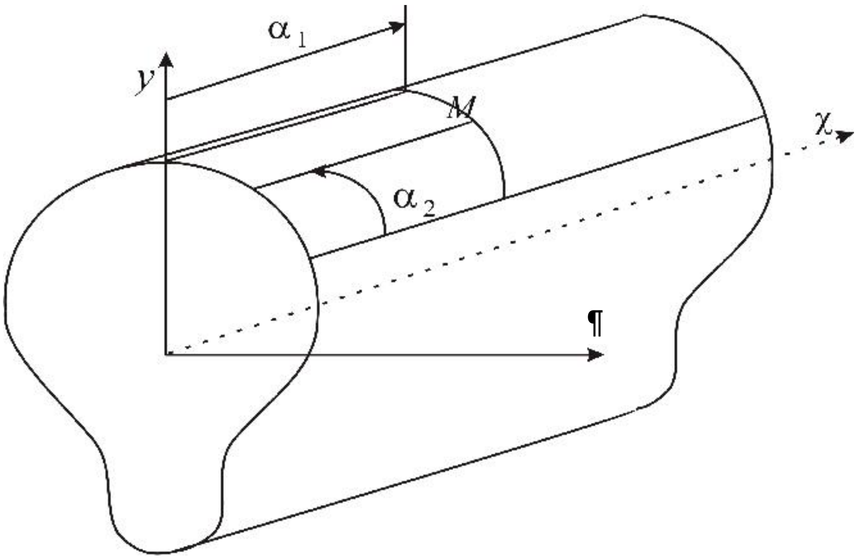


Рис. 1. Криволинейные координаты срединной поверхности.

Взаимодействие тела со средой моделируется контактными условиями

$$\sigma_{33} = -p\,,\ \sigma_{32} = 0\,,\ \frac{1}{\rho c^2 \gamma^2} \frac{\partial p}{\partial \alpha_3} = v_3 \text{ при } \alpha_3 = h \tag{6}$$

где h – полутолщина оболочки. Предположим также, что внутренняя поверхность оболочки свободна от напряжений

$$\sigma_{33} = \sigma_{32} = 0 \text{ при } \alpha_3 = -h \tag{7}$$

Представим акустическое давление в виде наложения давления p_i в падающей волне и рассеянного давления p_s. При этом представление давления p_i зависит от формы геометрии оболочки. Давление p_s должно удовлетворять условию излучения на бесконечности

$$\frac{\partial p_s}{\partial |\mathbf{P}|} - i k\, p_s = o\left(|\mathbf{P}|^{-1} \right) \text{ при } |\mathbf{P}| \to \infty \tag{8}$$

Выпишем точные уравнения теории упругости для оболочки.

Уравнения движения:

$$\frac{1}{H}\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial \alpha_3} + \rho\omega^2 v_2 = 0 \tag{9}$$

$$\frac{1}{H}\frac{\partial \sigma_{32}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \alpha_3} - \frac{B}{RH}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) - \rho\omega^2 v_3 = 0$$

Уравнения закона Гука:

$$\sigma_{22} = \frac{E}{2(1+\nu)\gamma^2}\left[\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{H}\frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2} + \frac{B}{RH} v_3 \right]$$

$$\sigma_{33}=\frac{E}{2(1+\nu)\gamma^2}\left[\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial v_2}{\partial\alpha_2}+\frac{B}{RH}v_3\right)+\frac{\partial v_3}{\partial\alpha_3}\right] \quad (10)$$

$$\sigma_{32}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{1}{H}\frac{\partial v_3}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial v_2}{\partial\alpha_3}-\frac{B}{RH}v_2\right]$$

Коротковолновое высокочастотное приближение, т.е. модель типа плоского слоя, применяется при больших значениях частот и большой изменяемости по координатам (малая длина волны). Асимптотически оптимальные уравнения [4] для этого приближения обобщают уравнения плоской задачи теории упругости для слоя и имеют вид

$$\frac{1}{B}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial\alpha_3}+\rho\omega^2 v_2=0,\ \frac{1}{B}\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\alpha_3}-\rho\omega^2 v_3=0 \quad (11)$$

$$\sigma_{22}=\frac{E}{2(1+\nu)\gamma^2}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial v_3}{\partial\alpha_3}+\frac{1}{B}\frac{\partial v_2}{\partial\alpha_2}\right) \quad (12)$$

$$\sigma_{33}=\frac{E}{2(1+\nu)\gamma^2}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{B}\frac{\partial v_2}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial v_3}{\partial\alpha_3}\right),\ \sigma_{32}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial v_3}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial v_2}{\partial\alpha_3}\right)$$

Здесь, как и в работах [1−3], радиальная координата рассматривается на срединной поверхности, что возможно ввиду малой толщины оболочки.

Таким образом, начальная сложная задача свелась к более простой коротковолновой задаче. В общем случае решение сформулированной задачи требует численных методов. Однако в случае резонансов высших номеров можно в полной мере развивать асимптотические подходы. Так, использование ВКБ процедуры, т.е. метода фазовых координат, позволяет свести произвольную выпуклую цилиндрическую оболочку к круговой цилиндрической оболочке.

В случае эллиптической цилиндрической оболочки резонансные компоненты парциальных мод могут быть оценены с помощью введения эквивалентного радиуса срединной поверхности. При этом в формуле для резонансной компоненты величина R заменяется эквивалентным радиусом срединной поверхности $R_{пр}$, рассчитываемым по формуле

$$R_{пр}=\frac{L}{2\pi} \quad (13)$$

где L – периметр сечения срединной поверхности плоскостью, перпендикулярной оси. Эта формула основана на том, что при коротковолновых колебаниях главную роль играет длина траектории, и любое сечение может в первом приближении быть заменено окружностью. Нужно учитывать также, что $x=k(R_{пр}+h)$, $\eta=h/R_{пр}$.

Величина эквивалентного радиуса для эллиптической цилиндрической оболочки определяется выражением

$$R_{пр}=\frac{4aE(m)}{2\pi},E(m)=\int_0^{\pi/2}\left(1-m\sin^2\theta\right)^{1/2}d\theta\ ,\ m=\frac{a^2-b^2}{a^2}$$

где $E(m)=E(m,\pi/2)$ – полный эллиптический интеграл второго рода; a,b – полуоси эллипса.

На рис. 2 представлены графики резонансных компонент парциальных мод для волны Лэмба A_1 в случае эллипса с полуосями $a=1$, $b=0.7$, когда $R_{пр}=0.8567$ [5, с. 423] (см. рис. 2а)) и в случае окружности с радиусом $R=1$ [1] (см. рис. 2б)). Расчеты проведены при следующих значениях параметров:

c_1=5960 м/с, c_2=3240 м/с, c=1493 м/с, ρ=1000 кг/м^3, ρ_1=7700 кг/м^3, η=1/39.

Эти графики показывают влияние геометрии эллиптичности цилиндрической оболочки по сравнению с круговой цилиндрической оболочки на вид значений решения для резонансных компонент.

Таким образом, использование эквивалентного радиуса дает хорошие оценки резонансных частот, а в ряде случаев и разумные приближения для ширины резонансов. Полное же асимптотическое решение задачи требует построения лучевых разложений для давлений [6].

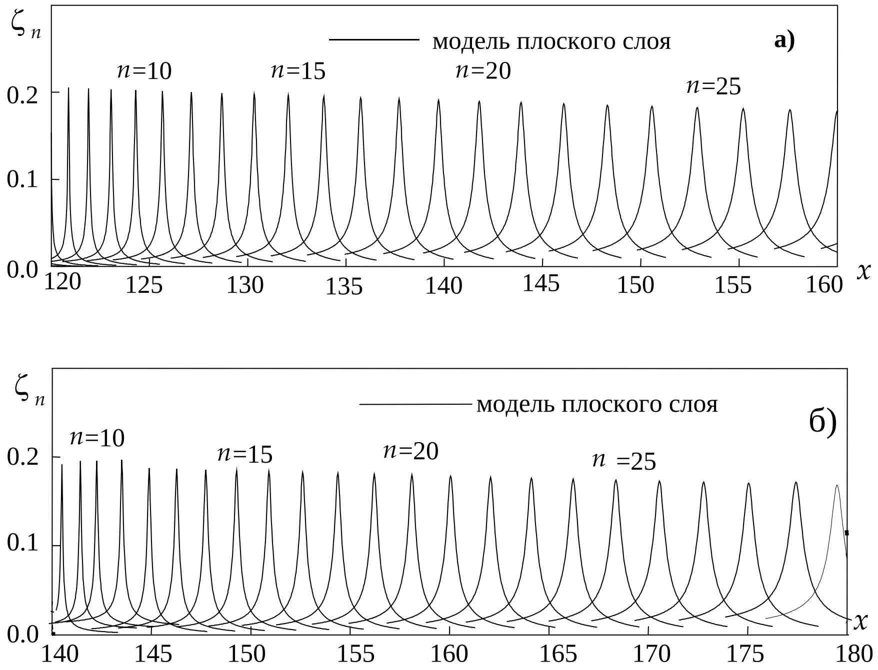


Рис. 2. Резонансные компоненты парциальных мод для эллиптической цилиндрической и круговой цилиндрической оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Ковалев В.А. Развитие приближения типа плоского слоя в задаче рассеяния акустических волн цилиндрической оболочкой// Изв. РАН. МТТ. 2002. № 3. С. 180-186.
2. Ковалев В.А. Развитие приближения типа плоского слоя в задаче рассеяния акустических волн сферической оболочкой// Сб. науч. тр. Мех. сплошных сред. Саратов. Изд. СГУ. Вып. 14. 2002. С. 70-76.
3. Kovalev V.A. On development of the flat layer model in scattering of acoustic waves by elastic bodies// Proceedigs of the XXIX Summer school Advanced problems in mechanics. St. Peterburg (Repino). 2001. St. Peterburg. 2002. P. 382-388.
4. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of thin walled elastic bodies. N.Y. etc.: Acad. Press, 1998. 226 p.
5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами//под ред. Абрамовица М. и Стиган И. М.: Наука, 1979. 832 с.
6. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.

Сведения об авторах

Ковалев Владимир Александрович
Д.ф.-м.н., проф., зав. кафедрой «Математические и информационные основы управления», Московский город. университет управл. Правительства Москвы
Адрес: 107045, г. Москва, ул. Сретенка, д. 28.
тел.: (495) 957-91-13, 8-903-255-4077, факс 957-75-88, E-mail: vlad_koval@mail.ru

РАЗРУШЕНИЕ КОЛЕСНОЙ СТАЛИ НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМ ТРАНСПОРТЕ, ИНИЦИИРОВАННОЕ ТРЕНИЕМ И СИЛОВЫМИ НАГРУЗКАМИ

Козаков А.Т., Булгаревич С.Б., Колесников В.И., Сидашов А.В., Бойко М.В.

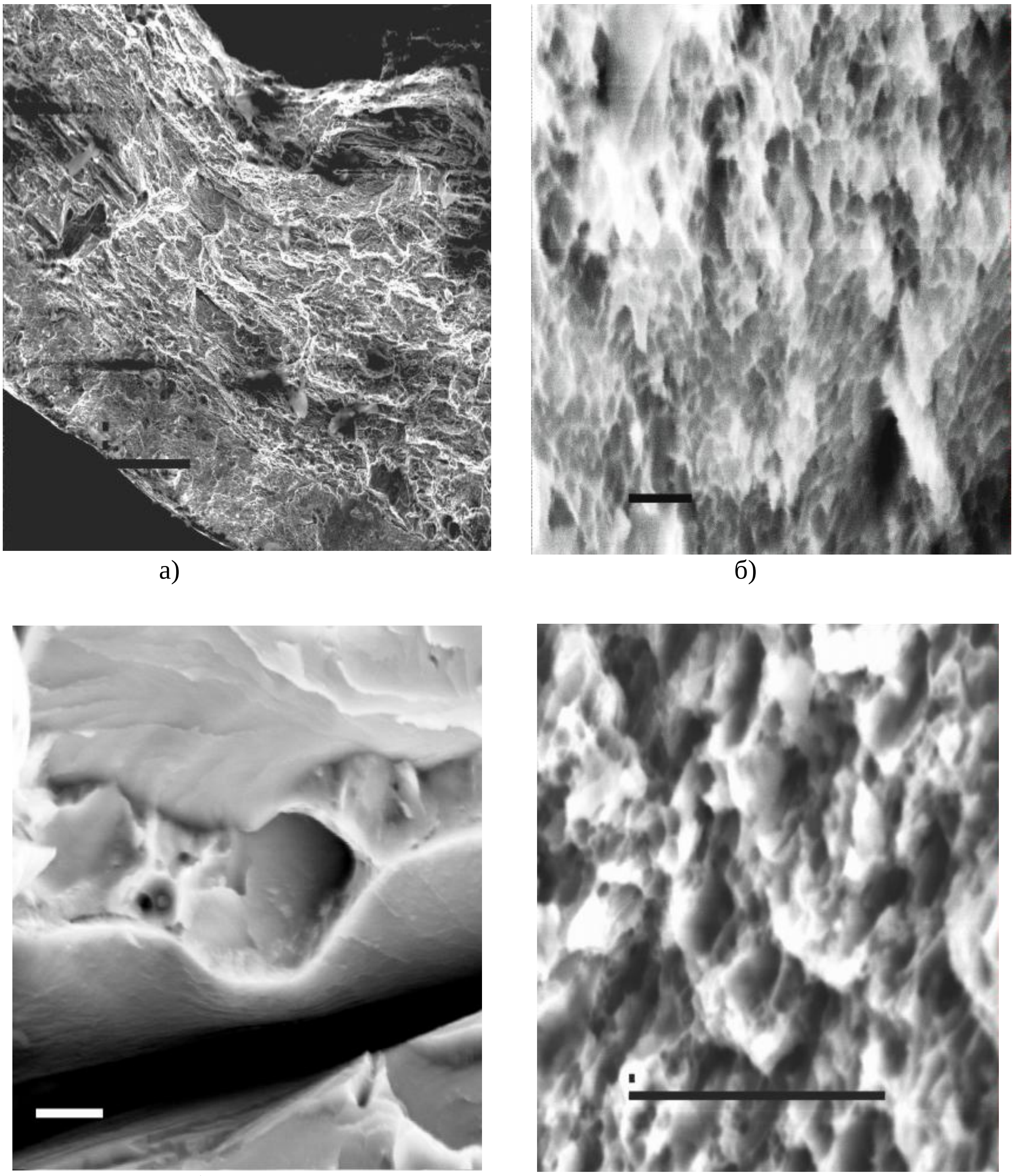
Металл поверхности катания железнодорожного колеса в процессе эксплуатации трибосистемы «колесо-рельс-тормозная колодка» испытывает огромные температурные и силовые нагрузки, следствием которых является образование разного рода дефектов на поверхности колеса: трещины, выщерблины и т.д. Их появление инициируется трением и определяется действием различных физико-химических процессов в зонах фрикционного контакта и по соседству с ними. У колеса, сопряженного с композиционной тормозной колодкой на границах зерен металла на поверхности катания и на глубинах до 8 мм методами оже- и рентгено- электронной спектроскопии [1] нами обнаружено большое количество атомов химических элементов (сегрегантов), отрицательно влияющих на механические характеристики межзеренных границ: фосфор, сера, стронций, барий, кальций, калий и др. С помощью растровой электронной микроскопии исследованы фрагменты разрушения: поверхности трещины, образовавшейся на глубине 1 мм под дефектом рабочей поверхности колеса; поверхности поперечного скола, полностью отслоившейся от рабочей поверхности колеса и, для сравнения, поверхности разрушения металла колеса при испытаниях на ударную вязкость.

На рис. а) при небольшом увеличении (маркер на рис. - 100 мкм) дан общий вид поверхности трещины на глубине 1 мм (образец 1). На рис. б) приведено изображение поверхности межзеренной границы, расположенной на одном из гладких участков рис. а) (маркер на рис. б) соответствует 1 мкм). Видно, что рельеф образован ямками, размером от 0.2 мкм и больше, свидетельствующими о том, что трещина прошла по пути, с ослабленными связями между зернами из-за формирования и роста (путем сливания) на них ямок. На сколе образца 2 (катастрофическое разрушение; рис. г)) ямки, сливаясь в более крупные образования, оставляют мало места для контакта между зернами. Ослабление наличием пустот на границах связи между зернами приводит к отслаиванию пластины от рабочей поверхности колеса (рис. г). Пустоты удлиненной формы расположены рядами, параллельными рабочей поверхности колеса (маркер на рис. г) - 10 мкм). Для сравнения на рис. в) представлен рельеф поверхности образца 3 (маркер на рис. в) - 1 мкм). Эта поверхность не сформирована силами крипа, поэтому она имеет другой рельеф, характерный, скорее для квазискола по телу зерен (отсутствует ямочный рельеф). Наибольшее количество сегрегирующих элементов, в том числе фосфор и сера, было обнаружено на глубинах, где образованы поверхности разрушения, представленные образцами 1 и 2, для образца 2 содержание примесных элементов было больше. Мы полагаем, что наряду с сегрегацией примесных атомов, на зернограничной поверхности могут сегрегировать и «фантом – примеси» или вакансии, если их концентрация в материале превзойдёт порог насыщения. Согласно термодинамике, для идеальных насыщенных растворов справедливо уравнение Шредера – Ле-Шателье (1)

$$\frac{d\ln x_s}{dT} = \frac{\Delta H_s}{RT^2} \tag{1}$$

Здесь x_s – мольная доля растворенного вещества в насыщенном растворе; ΔH_s – мольная энтальпия, выделяющаяся при его выпадении в осадок. «Выпадение в осадок» вакансий и есть образование макроскопических сферических полостей на «стенках сосуда» – зернограничных поверхностях. Сферическая форма «осадка» диктуется минимумом свободной энергии макроскопических полостей. Обозначая $\Delta H_s = N_A \cdot E_v$, где E_v – энергия образования вакансии, а N_A – число Авогадро и интегрируя уравнение, учитывая, что число вакансий в материале при температуре $T \to \infty$ будет равно числу узлов решетки n_0, получим уравнение (2)

$$x_s = \frac{n}{n_0} = e^{-\frac{E_v}{kT}} \tag{2}$$



а) б)

в) г)

Рисунок. Микрофотографии разрушения рабочей поверхности колеса

где n – число вакансий решётки в материале при данной температуре. Уравнение (2) – известное выражение для равновесной концентрации вакансий в твёрдом теле. Так как (2) вытекает из (1), то равновесная – одновременно и насыщенная концентрация вакансий. Легко оценить, как изменяется насыщение вакансиями при изменении температуры. Применим приближение $E_v = 9kT_{\text{пл.}}$, где $T_{\text{пл.}}$ – температура плавления материала. Тогда из (2) вытекает (3)

$$\ln\frac{x_2}{x_1} = 9T_{\text{пл.}}\frac{(T_2 - T_1)}{T_1T_2} \tag{3}$$

В левой части под логарифмом стоит отношение концентраций насыщения при температурах T_2 и T_1. Пусть T_1 = 300 ºK, T_2 = 400 ºK, а температура плавления $T_{\text{пл.}}$ варьирует от 1418 до 1673 ºK, что соответствует данным диаграммы плавкости для углеродистых сталей.

Тогда отношение x_2 / x_1 будет изменяться в диапазоне $4.2 \cdot 10^4 \div 2.8 \cdot 10^5$. При понижении температуры на сто градусов концентрация насыщения вакансиями уменьшается на четыре – пять порядков! При перепадах температур на поверхности колеса, особенно за счет чередующихся торможений, постоянно создаются пересыщенные концентрации вакансий в кристаллических зёрнах, что вызывает их постоянное «выпадение в осадок» на границах зёрен.

«Колесо-рельс-тормозная колодка» – открытая трибосистема, процессы, протекающие в ней, неравновесны и активированы трением. Активация заключается во взаимодействиях образование – разрыв адгезионных связей между шероховатостями контактирующих поверхностей трущихся тел при наличии или отсутствии между ними третьего тела (смазка). Это химическая реакция, активация которой осуществляется за счёт трения скольжения или качения. В неравновесной термодинамике важную роль играет диссипативная функция d_iS / dt, описывающая производство энтропии в единицу времени за счёт внутренних источников в системе [2]. Если механоактивация возбуждает только одну реакцию, диссипативная функция запишется в виде (4)

$$\frac{d_iS}{dt} = -\frac{\vec{F}_{fr}\vec{v}}{T} + \frac{1}{T}A\dot{\P} \succ 0 \tag{4}$$

где $\vec{F}_{fr}$ – сила трения; $\vec{v}$ – скорость скольжения; T – абсолютная температура; A – химическое сродство; $\P$ - химическая переменная или степень протекания реакции в системе; $\dot{\P}$ – скорость химической реакции. Величина $\frac{1}{T}A\dot{\P}$ – химическое слагаемое, описывающее производство энтропии за счёт неравновесной химической реакции. Для нахождения $\dot{\P}$ воспользуемся основными положениями теории активированного комплекса. Скорость химической реакции есть скорость прохождения активированного комплекса через вершину потенциального барьера реакции (5)

$$-\frac{dC}{dt} = \neg[A^{\#}] \tag{5}$$

где C – концентрация одного из исходных веществ участников реакции; $[A^{\#}]$ – концентрация активированного комплекса. Частоту $\neg$ можно записать как (6)

$$\neg = \frac{1}{{}^{2}}, {}^{2} = \frac{d}{v} \tag{6}$$

где ^{2} – время прохождения активированного комплекса через энергетический барьер; d – поперечник соприкасающихся микрошероховатостей, вдоль которого сохраняется состояние активированного комплекса при скольжении тела; v – величина скорости скольжения. Тогда скорость трибохимической реакции выразится формулой (7):

$$-\frac{dC}{dt} = [A^{\#}]\frac{v}{d} \tag{7}$$

В теории термоактивируемых реакций принимается, что активированный комплекс находится в равновесии с исходными веществами. В случае трибохимических реакций этого предполагать нельзя. Продвижение активированного комплекса через потенциальный барьер навязано макроскопическим скольжением тела. Запас кинетической энергии трибосистемы огромен, поэтому любой энергетический барьер взаимодействия шероховатостей будет преодолён. Маршрут механоактивированного процесса по поверхности потенциальной энергии взаимодействующих реагентов определяется только направлением скольжения тела. Поэтому температурная зависимость в (7) отсутствует, что подтверждается опытом. Пользуясь выражением (7), легко оценить скорость $\dot{¶}$

$$\dot{¶} = \frac{d¶}{dt} = [A^{\#}]V\frac{v}{d} = n\frac{v}{d} \qquad (8)$$

где $[A^{\#}]V = n$ – число молей активированного комплекса, вступающего в химическую реакцию в объёме реакционного пространства, равном V. Выражая силу трения через коэффициент трения « и нагрузку Р на скользящее тело, а также учитывая (8), получаем из (4) соотношение (9) для оценки величины химического сродства при трении скольжения

$$\frac{d_iS}{dt} = \frac{1}{T}«\mathrm{P}v + \frac{1}{T}An\frac{v}{d} \qquad (9)$$

Аналогично, для трения качения получим выражение (10)

$$\frac{d_iS}{dt} = \frac{1}{T}\gamma\frac{P}{R}v + \frac{1}{T}An\frac{v}{d} \qquad (10)$$

Здесь сила трения качения выражается через ¥ - коэффициент трения качения, нагрузку P на скользящее тело и радиус колеса R.

Производство энтропии в стационарном состоянии минимально, поэтому, дифференцируя (9) и (10) по скорости скольжения v как независимой переменной системы и приравнивая результат к нулю, получим из условия минимума выражения для химического сродства несамопроизвольной реакции, запускаемой трением скольжения (11) и качения (12) соответственно.

$$A = -\frac{«N_A\mathrm{P}±_{\circ}d}{¦±} = -\frac{«N_A}{¦}P±_{\circ}d \qquad (11)$$

$$A = -\frac{¥N_A\mathrm{P}±_{\circ}d}{R¦±} = -\frac{¥N_A}{R¦}P±_{\circ}d \qquad (12)$$

где $P = \mathrm{P}/±$ – давление на номинальных поверхностях контакта трущихся тел, ± – номинальная площадь контакта трущихся тел; $±_{\circ}$ – площадь пятна фактического контакта атома или молекулы; ¦ – доля номинальной площади, которая вступает в фактический контакт; N_A – число Авогадро, « – коэффициент трения скольжения, ¥ – коэффициент трения качения.

Исходя из общеизвестных данных о величинах, входящих в формулы (11) и (12) нами были рассчитаны величины химического сродства для системы с трением скольжения колесо – тормозная колодка (-27000 кДж) и трения качения колесо – рельс (-19000 кДж). Эти оценки очень большие по модулю и сопоставимы с ранее опубликованными одним из нас оценками для граничного и смешанного трения при наличии смазки [3]. Приведенные оценки являются минимальными. В рассматриваемой трибосистеме могут быть запущены практически любые несамопроизвольные процессы, вплоть до полного разложения любых химических соединений и образования трибоплазмы. При торможении и одновременном проскальзывании колеса по рельсу, а также при проскальзывании колеса без торможения величины химического сродства окажутся по модулю на порядок больше из-за высоких давлений в номинальных пятнах контакта и высоких коэффициентов трения скольжения (0.35-0.55). Величина A является интегральной, ей соответствует большое число последовательных и параллельных процессов.

Авторы выражают благодарность РФФИ за поддержку проекта № 07-08-00525.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анализ поверхности методами оже - и рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии. /Под ред. Д. Бриггса и М.П. Сиха. М.: Мир, 1987. 600 с.
2. Пригожин И. Введение в термодинамику необратимых процессов. М.: Иностранная литература, 1960. 127 с.
3. Булгаревич С.Б. Термодинамические характеристики несамопроизвольных химических реакций, инициируемых трением. / Контактное взаимодействие и сухое трение. Сб. трудов III Межд.семинара. Москва, 2005 г. – М.: МГТУ им.Н.Э.Баумана,2005.– 90 с.

Сведения об авторах

Булгаревич Сергей Борисович
Профессор, доктор химических наук,
Ростовский государственный университет путей сообщения
Адрес: 344038, г. Ростов-на-Дону, пл. им. Ростовского стрелкового полка народного ополчения, 2. РГУПС
Тел: (863)2726272 E-mail: bulgarevich@rambler.ru

Козаков Алексей Титович
профессор, доктор физико-математических наук
Адрес: 344090, г. Ростов-на-Дону, Стачки пр-т, д.198/1.
НИИ физики при Южном федеральном университете
Тел: (863)2223758 E-mail: kozakov@ip.rsu.ru

Колесников Владимир Иванович
Ректор,доктор технических наук, академик РАН
Адрес: 344038, г. Ростов-на-Дону, пл. им. Ростовского стрелкового полка народного ополчения, 2. РГУПС
Тел: (863)2450613 E-mail: rek@rgups.ru

Сидашов Андрей Вячеславович
Аспирант
Адрес: 344038, г. Ростов-на-Дону, пл. им. Ростовского стрелкового полка народного ополчения, 2. РГУПС
Тел: (863)2726349 E-mail: myasnikova@rgups.ru

Бойко Михаил Викторович
Аспирант
Адрес: 344038, г. Ростов-на-Дону, пл. им. Ростовского стрелкового полка народного ополчения, 2. РГУПС
Тел: (863)2726272 E-mail: mikle135@donpac.ru

ЗАВИСИМОСТЬ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ УПРУГОГО ПОЛЯ ОТ ПАРАМЕТРОВ СТРУКТУРЫ И ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОНЕНТОВ В НЕТЕКСТУРИРОВАННЫХ КОМПОЗИТАХ

Колесников В.И., Бардушкин В.В., Сычев А.П., Яковлев В.Б.

Рассматриваются двухкомпонентные матричные композиты с включениями, форма которых близка к сферической. Их компоненты обычно состоят из материалов с четко выраженной границей, имеющих различные физико-механические характеристики. Широкое применение подобные композиты находят в узлах сопряжения и трения на транспорте, а также в качестве электроизоляционных и вспомогательных материалов в микроэлектронике.

Локальные и средние значения плотности энергии упругого поля являются важнейшими характеристиками, определяющими напряженно-деформированное состояние неоднородных материалов. При этом основное влияние на него оказывают концентрация включений, тесно связанная со средним расстоянием между элементами неоднородности, и упругие свойства компонентов, составляющих материал. Работа посвящена исследованию зависимости плотности энергии от параметров структуры (среднего расстояния между элементами неоднородности) и изменения отношения упругих модулей включений и матрицы в нетекстурированных композитах типа «жесткая матрица – мягкие включения». Для анализа локальной объемной плотности энергии упругого поля

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})\sigma_{ij}(\mathbf{r}) \tag{1}$$

таких материалов используется обобщенное сингулярное приближение теории случайных полей [1] и исследование безразмерных операторов концентраций напряжений и деформаций (тензоров четвертого ранга). Операторы концентраций представляют собой отношение локальных значений напряжений и деформаций к соответствующим средним значениям по всему материалу [2]. В выражении (1) $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$, $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ – локальные тензоры деформаций и напряжений соответственно, **r** – радиус вектор случайной точки среды.

Элементарным объемом V композита в рассматриваемой модели является куб с ребром $2(h+R)$, в центре которого находится сферическое включение радиуса R (рис. 1). Для среднего расстояния h/R между включениями из анализа двух находящихся рядом элементарных объемов получается выражение

$$\frac{h}{R} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6\nu_{\text{в}}}} - 1 \tag{2}$$

где $\nu_{\text{в}} = V_{\text{в}}/V$, $\nu_{\text{м}} = 1 - \nu_{\text{в}}$ – концентрации включений и матрицы (индекс «в» относится к включению, а «м» – к матрице).

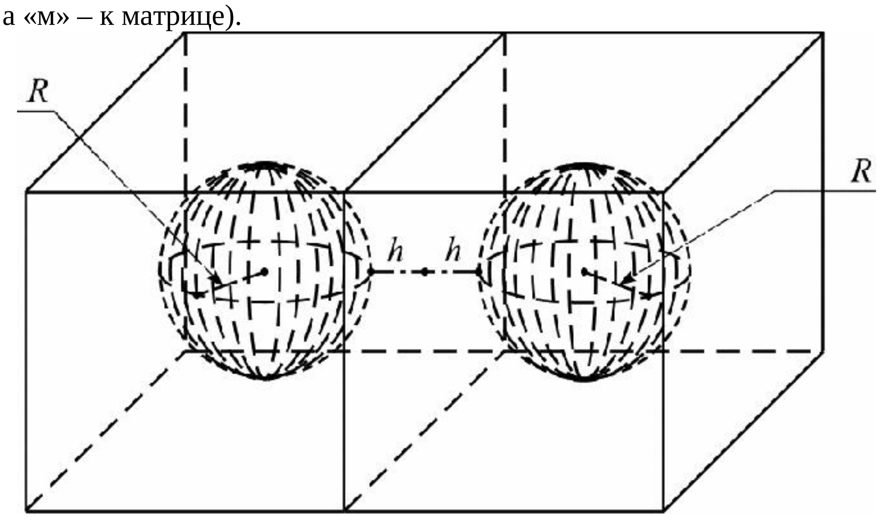


Рис. 1. Микроструктура двухкомпонентного нетекстурированного композита

Расчеты основаны на соотношениях для определения локальной

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\left(3\frac{(K_V^{\sigma}(\mathbf{r}))^2}{K(\mathbf{r})} V_{ijkl} + 2\frac{(K_D^{\sigma}(\mathbf{r}))^2}{\mu(\mathbf{r})} D_{ijkl} \right) < \sigma_{ij}(\mathbf{r}) >< \sigma_{kl}(\mathbf{r}) > \tag{3}$$

и средней (угловые скобки обозначают операцию усреднения по объему)

$$< E(\mathbf{r}) > = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3K^*} V_{ijkl} + \frac{1}{2\mu^*} D_{ijkl} \right) < \sigma_{ij}(\mathbf{r}) >< \sigma_{kl}(\mathbf{r}) > \tag{4}$$

плотности энергии в нетекстурированных композитах [3]. В формулах (3) и (4) значком «*» обозначены эффективные упругие характеристики композитов; тензоры V_{ijkl} и D_{ijkl} представляют соответственно объемную и девиаторную составляющие единичного тензора четвертого ранга; $K_V^{\sigma}(\mathbf{r})$ и $K_D^{\sigma}(\mathbf{r})$ – соответственно объемная и девиаторная составляющие оператора концентраций напряжений [2]; $K(\mathbf{r}) = K_{\text{м}}$, $\mu(\mathbf{r}) = \mu_{\text{м}}$ при расчетах в матрице, $K(\mathbf{r}) = K_{\text{в}}$, $\mu(\mathbf{r}) = \mu_{\text{в}}$ – во включении; $K_{\text{в}}$, $K_{\text{м}}$, K^* и $\mu_{\text{в}}$, $\mu_{\text{м}}$, μ^* – объемные и сдвиговые модули упругости соответственно. Эффективные упругие модули K^* и μ^* определяются из соотношений:

$$\frac{1}{K^* + b_K^{\text{c}}} = \frac{\nu_{\text{в}}}{K_{\text{в}} + b_K^{\text{c}}} + \frac{\nu_{\text{м}}}{K_{\text{м}} + b_K^{\text{c}}}, \quad \frac{1}{\mu^* + b_{\mu}^{\text{c}}} = \frac{\nu_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}} + b_{\mu}^{\text{c}}} + \frac{\nu_{\text{м}}}{\mu_{\text{м}} + b_{\mu}^{\text{c}}}$$

где $b_K^{\text{c}} = \frac{4}{3}\mu^{\text{c}}$, $b_{\mu}^{\text{c}} = \frac{\mu^{\text{c}}(9K^{\text{c}} + 8\mu^{\text{c}})}{6(K^{\text{c}} + 2\mu^{\text{c}})}$, K^{c} и μ^{c} – соответственно объемные и сдвиговые модули однородного тела сравнения (при выборе параметров тела сравнения использовался метод самосогласования) [1].

Для относительной плотности энергии деформации в [3] получено выражение (индексы опущены):

$$E(\mathbf{r}) < E(\mathbf{r}) >^{-1} = \frac{9(K_V^{\sigma}(\mathbf{r}))^2 K^*}{K(\mathbf{r})} \cdot V + \frac{4(K_D^{\sigma}(\mathbf{r}))^2 \mu^*}{\mu(\mathbf{r})} \cdot D \tag{5}$$

Обозначая в (5) через E_V относительную энергию объемного напряженно-деформированного состояния, а через E_D относительную энергию чистого сдвига, получаются следующие соотношения:

$$E_V = \frac{9(K_V^{\sigma}(\mathbf{r}))^2 K^*}{K(\mathbf{r})}, \quad E_D = \frac{4(K_D^{\sigma}(\mathbf{r}))^2 \mu^*}{\mu(\mathbf{r})} \tag{6}$$

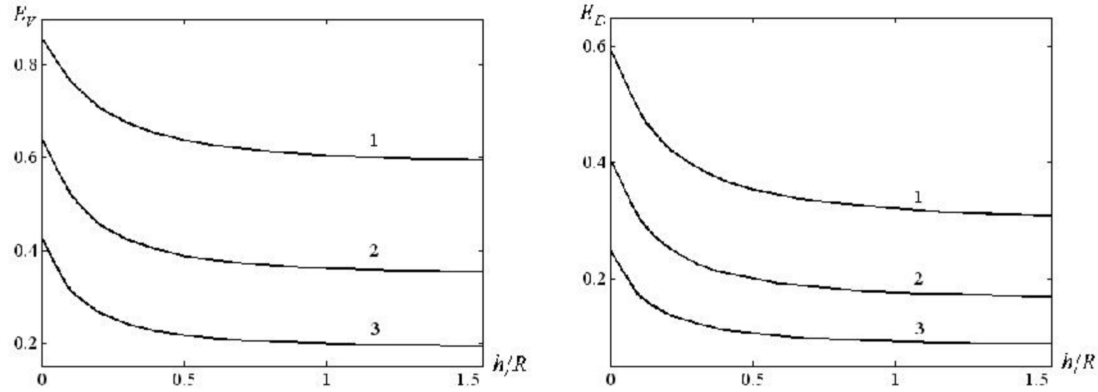
С целью изучения зависимости относительных энергий E_V и E_D от параметра h/R (а значит, от концентрации включений (2)) и изменения отношения упругих модулей включений и матрицы в работе проведены расчеты для модельных композитов, состоящих из изотропных компонентов, со значениями объемных и сдвиговых модулей упругости, приведенными в табл. 1.

Таблица 1

Объемные и сдвиговые модули упругости включений и матрицы, ГПа

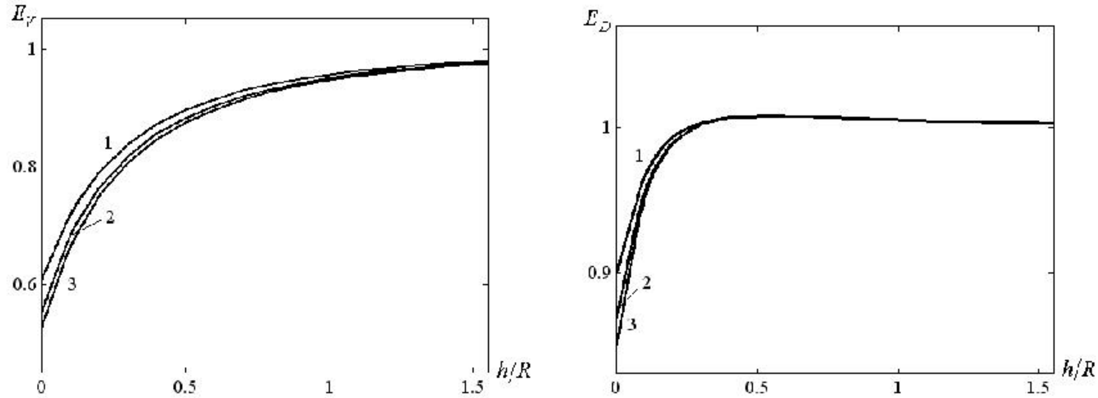
Модельный композит	Включение		Матрица	
	$K_{\text{в}}$	$\mu_{\text{в}}$	$K_{\text{м}}$	$\mu_{\text{м}}$
1	5	2	50	20
2	2,5	1		
3	1,25	0,5		

Расчетные зависимости относительной энергии объемного напряженно-деформированного состояния и чистого сдвига во включении от параметра h/R для модельных композитов представлены на рис. 2. Аналогичные расчетные зависимости относительной энергии в матрице приведены на рис. 3. Номер кривой на этих рисунках соответствует номеру модельного композита.



а *б*

Рис. 2. Зависимости относительной энергии деформации для объемного напряженно-деформированного состояния (*а*) и чистого сдвига (*б*) во включении от параметра h/R



а *б*

Рис. 3. Зависимости относительной энергии деформации для объемного напряженно-деформированного состояния (*а*) и чистого сдвига (*б*) в матрице от параметра h/R

Таким образом, для нетекстурированных матричных композитов, состоящих из изотропных компонентов, зависимости объемной и сдвиговой относительной энергии (6) от параметра h/R имеют нелинейный характер. Причем при значениях параметра микроструктуры $h/R<1$ эта нелинейность проявляется наиболее существенно. На средних расстояниях между включениями $h/R>1{,}5$ происходит стабилизация относительной энергии. С уменьшением отношения упругих модулей включений к модулям упругости матрицы происходит уменьшение E_V и E_D во включениях. При этом сохраняется характер зависимости объемной и сдвиговой относительной энергии от параметра h/R. Значения E_V и E_D в матрице при увеличении h/R стабилизируются около единицы, т.е. при уменьшении концентрации включений упругие свойства материала будут в основном определяться соответствующими свойствами матрицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1977, 399 с.
2. Бардушкин В.В., Яковлев В.Б. Характеристики локального напряженно-деформированного состояния в статистически однородных матричных композитах. – М.: «Деформация и разрушение материалов», 2005, № 9, с. 38-42.
3. Бардушкин В.В., Булах И.И., Колесников В.И., Сычев А.П., Яковлев В.Б. Локальная плотность энергии упругого поля в двухкомпонентных нетекстурированных композитах.//1-я Межд. конф. «Деформация и разрушение материалов»// – М.: ИМЕТ им. А.А. Байкова РАН, 2006, т. 2, с. 805-808.

<u>Сведения об авторах</u>

Колесников Владимир Иванович
Ректор, Ростовский гос.университет путей сообщения
д.т.н., профессор, действительный член РАН
Адрес: 344038, Ростов-на-Дону, пл. Народного ополчения, 2, РГУПС
Тел.: (8632) 72-63-49, (8632) 59-53-48
E-mail: myasnikova@rgups.ru

Бардушкин Владимир Валентинович
К.ф.-м.н, доцент, Московский гос. институт электронной техники (ТУ)
Адрес: 141551, Московская область, Солнечногорский район, пос. Андреевка, д. 26 кв. 53
Тел.: (495) 532-99-39, (495) 532-98-81
E-mail: bardushkin@mail.ru

Сычев Александр Павлович
к.ф.-м.н., доцент, Ростовский гос. университет путей сообщения
Адрес: 344038, Ростов-на-Дону, пл. Народного ополчения, 2, РГУПС
Тел.: (8632) 72-63-49, (8632) 59-53-48
E-mail: Sap@rgups.ru

Яковлев Виктор Борисович
д.ф.-м.н., профессор, Московский гос. институт электронной техники (ТУ)
Адрес: 124536, Москва, Зеленоград, корп. 505 кв. 80
Тел.: (495) 532-99-39, (495) 532-98-81
E-mail: yakovlev@miee.ru

КОМПОЗИЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ ТОРМОЗНОЙ КОЛОДКИ, СНИЖАЮЩИЙ ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ КОЛЕС ВАГОНА

Колесников В.И., Сычёв А.П., Бойко М.В.

Рассмотрены актуальные проблемы трения в системе «Колесо-рельс-тормозная колодка». Проанализированы механизмы изнашивания и структурные изменения в трущихся материалах, а также обменно-диффузионное взаимодействие элементного состава между материалами колеса и тормозной колодки. Показано, что удаление вредных примесей из композиционной колодки влияет на долговечность трибосистемы.

Контактно-усталостные повреждения – один из наиболее распространённых дефектов колёс железнодорожного подвижного состава. Возникновение их связано с различными факторами: технологией обработки вагонов на сортировочных горках, характеристиками тормозного оборудования, сцеплением колеса и рельса, динамическими свойствами подвижного состава, аспектами материаловедения[1].

Под выщербиной понимают выкрошившиеся участки поверхности катания более допустимых размеров (рис. 1), чтобы учесть все типы дефектов, дефектообразование надо рассматривать не только в системе “колесо-рельс”, но и в системе “колесо–рельс–тормозная колодка”.

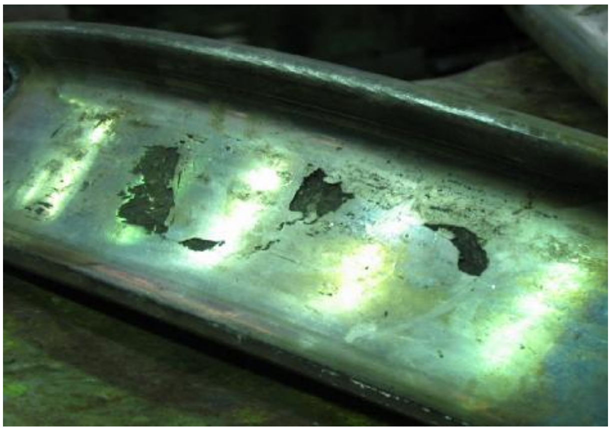


Рис. 1 Выщербина на поверхности катания колеса грузового вагона

При этом вклад полимерной композиционной тормозной колодки в дефектообразование состоит в создании системы термотрещин, приводящих впоследствии к выщербинам [2].Проведённые исследования показали, что роль полимерных композиционных тормозных колодок гораздо шире. В трибосистеме “колесо-рельс-тормозная колодка” полимерная композиционная тормозная колодка является источником большого числа элементов, переносимых не только на поверхность катания колеса, но и на границы зерен в приповерхностных слоях колеса на глубины вплоть до 8мм от поверхности катания [3-5].

Установлена многосторонняя роль переносимых с колодки элементов и их влияние на механические характеристики поверхности катания колеса. Часть этих элементов, принадлежащих тормозной колодке, а именно, S, P, Ba, Sr, Zn являются элементами, охрупчивающими границы зерен металла колеса. Их выход на границы зерен и последующая диффузия по границам зерен вглубь металла колеса от поверхности катания в очень сильной степени определяется температурными режимами участков колеса во время его эксплуатации [3-5].

Используемые в настоявшее время материалы для изготовления композиционных колодок не удовлетворяют в полной мере надёжности, так как обладают склонностью к внедрению на свою поверхность продуктов износа колеса (рис.2).

Исследования показали, что выщербинообразование в меньшей степени зависит от типа колодки (чугун или композит), а в большей степени–от свойств колёсной стали и состава композиционной колодки.

Основными недостатками композиционного материала тормозной колодки являются невысокие прочностные свойства, низкий и нестабильный коэффициент трения, а также склонность к охрупчиванию металлического контртела.

Рис. 2 Композиционная колодка с перенесённым материалом колеса

Задачей исследования является повышение термомеханической прочности фрикционного материала и снижение интенсивности изнашивания и образования дефектов структуры металлического контртела пары трения.

Поставленная задача решается тем, что фрикционный материал, выполненный из композиции, дополнительно содержит оксид титана, в качестве целевых добавок композиция содержит выпрессовку, а модификатор трения находится в виде смеси и дополнительно содержит борид циркония.

Модификатор трения, состоящий из смеси технического углерода и борида циркония в сочетании с оксидом титана снижает интенсивность изнашивания металлического контртела и замедляет сегрегационные процессы в паре трения агрессивных в отношении стали элементов – серы, водорода, кремния и других, что способствует снижению степени охрупчивания и износостойкости материала контртела (стали). Механизм блокировки сегрегаций агрессивных элементов заключается в увеличенной скорости сегрегации и диффузии циркония и титана по границам зерен и дефектам структуры металла, особенно при благоприятствующих протеканию сегрегационных и диффузионных процессов триботехнических факторах: динамических нагрузках и больших градиентах температур, возникающих при нестационарном трении. В результате снижается разупрочняющее по границам зерен действие «вредных» элементов и происходит структурное упрочнение металла. Замедление процессов накапливания в структуре приповерхностного слоя разупрочняющих элементов (S, H, Si и других атомов как материала тормозной колодки, так и окружающей среды), снижает усталостное изнашивание металлического контртела, что наиболее значимо проявляется в системе рельс-колесо-тормозная колодка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колесников В.И., Богатырёв А.С., Нахимович И.А., Сычёв А.П. Пути повышения срока службы колёс железнодорожного подвижного состава / Исследования и разработки ресурсосберегающих технологий на железнодорожном транспорте. Самара. 2001. С.21-24
2. 2.Нахимович И.А., А.П. Сычёв Уменьшение изнашиваемости колёс железнодорожного подвижного состава технологическими методами И.А. Нахимович. // Изв. ВУЗов. Северо-кавказский регион. 2001. С.105-107
3. Колесников В.И., Козаков А.Т., Сидашов А.В., Кравченко В.Н., Сычев А.П. Диффузионные процессы в металлополимерной трибосистеме. //Трение и износ. 2006. Т.27. №4. С.361-365.
4. Колесников В.И., Козаков А.Т., Сидашов А.В., Кравченко В.Н., Сычев А.П. Роль диффузионных и сегрегационных процессов в контактно-усталостном разрушении рабочей поверхности железнодорожного колеса. //Трение и смазка в машинах и механизмах. 2006. №8. С.22-32.
5. Колесников В.И., Козаков А.Т., Сидашов А.В. Неравновесные теплофизические процессы и сегрегационные явления на фрикционном контакте // Международная научно-техническая конференция “ Современные проблемы машиноведения и высоких технологий”, труды конференции, т.2. Ростов-на-Дону. 2005. С.10-17.

<u>Сведения об авторах</u>

Колесников Владимир Иванович

Ректор, Ростовский гос.университет путей сообщения

Д.т.н., профессор, действительный член РАН

Адрес: 344038, Ростов-на-Дону, пл. Народного ополчения, 2, РГУПС

Тел.: (8632) 72-63-49, (8632) 59-53-48

E-mail: myasnikova@rgups.ru

Сычев Александр Павлович

К.ф.-м.н., зав. лабораторией «Транспорта, энергетики и новых композиционных материалов» Южного научного центра РАН, доцент кафедры «Теоретическая механика», Ростовский гос. университет путей сообщения

Адрес: 344038, Ростов-на-Дону, пл. Народного ополчения, 2, РГУПС

Тел.: (8632) 72-63-49, (8632) 59-53-48

E-mail: Sap@rgups.ru

Бойко Михаил Владимирович

аспирант

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛИННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, БЛИЗКИХ ПО ФОРМЕ К ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ

Кукуджанов С.Н.

Исследуется влияние упругих параметров ортотропии на устойчивость длинных оболочек вращения, близких по форме к цилиндрическим, находящимся под воздействием меридиальных усилий *P*, равномерно распределенных по торцам, и нормального давления *q*, равномерно распределенного по всей боковой поверхности оболочки. Рассматриваются оболочки, у которых форма образующей срединной поверхности определяется параболической функцией. Исследование проведено для неосесимметричных форм потери устройчивости на основе утонченного уравнения в сравнении с уравнением, приведенным в [1] для изотропных оболочек. Рассмотрены облочки как положительной, так и отрицательной гауссовой кривизны. Предполагалось, что края оболочек свободно оперты. Получены формулы для критической нагрузки, как при раздельном, так и совместном действии меридиальных сил и давления. Из полученных формул, в частном случае – изотропной, цилиндрической оболочки, находящейся под воздействием продольного сжатия, следует как формула Эйлера, так и формула Саутвелла-Тимошенко. При решении использовался метод Бубнова-Галеркина в сочетании с методом оптимальных приближений [3].

1. Рассматривается оболочка, у которой срединная поверхность образована вращением квадратной параболы вокруг оси *z*, прямоугольной системы координат x, y, z с началом в середине отрезка оси вращения. Предполагалось, что радиус *R* поперечного сечения срединной поверхности определяется равенством

$$R = r + ¢_0[1 - ¶^2 (r/\ell)^2] \tag{1.1}$$

где r – радиус торцевого сечения; $¢_0$ – максимальное отклонение (при $¢_0 > 0$ оболочка выпуклая; при $¢_0 < 0$ – вогнутая); $L = 2\ell$ – длина оболочки; $¶ = z/r$. Предполагалось, что

$$(¢_0/r)^2 \ , \ (¢_0/\ell)^2 \ll 1 \tag{1.2}$$

Для рассматриваемых форм потери устойчивости длинных оболочек имеет место соотношение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial ¶^2} « \frac{\partial^2 f}{\partial ¨^2} \quad (f = u, v, w) \tag{1.3}$$

где $u, ¬, w$ – осевая, окружная, радиальная компоненты перемещения, характирезующие форму потери устойчивости. При исследовании использовалось уточненное разрешающее уравнение устойчивости, отличное от уравнения [1] дополнительными членами, которые для длинных оболочек, при сокращении главных членов, необходимо учитывать.Исходное состояние предполагалось безмоментным. На основании безмоментного решения и неравенств (1.2), (1.3) получаем следующие приближенные выражения:

$$T_1^0 = P[1 + \frac{¢_0}{r}(¶^2 (r/\ell)^2 - 1)] + q\delta_0 [¶^2 (r/\ell)^2 - 1] \tag{1.4}$$

$$T_2^0 = -2P\frac{¢_0 r}{\ell^2} \text{-q} r \ [1 + \frac{¢_0}{r}(1 - ¶^2 (r/\ell)^2)]$$

В результате уравнение устойчивости принимает вид

$$£(\frac{\partial^8 w}{\partial ¨^8} + 2\frac{\partial^6 w}{\partial ¨^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial ¨^4}) + \frac{\partial^4 w}{\partial ¶^4} + 4¢(\sim_1 \frac{\partial^4 w}{\partial ¶^2 \partial ¨^2} - \sim_2 \frac{\partial^2 w}{\partial ¶^2} - \sim_3 ¶ \frac{\partial^3 w}{\partial ¶^3}) + ¢^2 \frac{\partial^4 w}{\partial ¨^4} + + \{p[1 - \frac{¢_0}{r} \times$$

$$\times (1 - ¶^2 (r/\ell)^2)] + \bar{q}\frac{¢_0}{r}(¶^2 (r/\ell)^2 - 1)\}(\frac{\partial^6 w}{\partial ¶^2 \partial ¨^4} - \frac{\partial^4 w}{\partial ¶^2 \partial ¨^2}) - \{2p¢ - \bar{q}[1 - \frac{¢_0}{r}(¶^2 (r/\ell)^2 - 1)]\} \times$$

$$\times (\frac{\partial^6 w}{\partial ¨^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial ¨^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial ¶^2 \partial ¨^2}) = 0 \quad ¢ = \frac{¢_0 r}{\ell^2}, \ p = -P/E_1 h \ , \bar{q} = qr/E_1 h \tag{1.5}$$

$$£_1 = £\frac{E_2}{E_1},\ £ = h^2/12r^2(1-v_1v_2),\ \sim_1 = (1-v_1^2)/(1-v_1v_2),\ \sim_2 = (1+0{,}5v_1)/(1-v_1v_2)$$

$\sim_3 = (3{,}5-2{,}5v_1v_2)/(1-v_1v_2)$, E_1, E_2, v_1, v_2 – модули упругости и коэффициенты Пуассона в осевом в окружном направлениях. При сжатии $p>0$, а при растяжении $p<0$; q – нормальное давление, которое считается положительным, если оно внешнее $q>0$ и отрицательным, если оно внутреннее $q<0$.

В силу симметрии задачи в осевом направлении решение уравнения (1.5) согласно [3], будем искать в виде следующего ряда, который удовлетворяет принятым граничным условиям

$$w = \sin n\,¨ \sum_k A_{m_k} \cos ª_{m_k} ¶,\ ª_{m_k} = m_k®r/2\ell\ (k=1,2,...) \tag{1.6}$$

где $m_k = (m_1, m_2, ...)$ – некоторая наперед неизвестная последовательность нечетных чисел. Используя метод Бубнова-Галеркина в сочетании с методом оптимальных приближений [3], получаем систему алгебраических уравнений

$$A_{m_k} D_{m_k} + \sum_{m_i \neq m_k} A_{m_i} L_{m_i m_k} = 0 \tag{1.7}$$

где D_{m_k}, $L_{m_i m_k}$ – определенные выражения.

Первоначально рассмотрим случай n =1 . При этом, система уравнений (1.7) принимает вид

$$A_{m_k}\{ª_{m_k}^4 + 4¢d_v ª_{m_k}^2 + 4¢^2 - 2p[1-\frac{2¢_0}{r}(\frac{1}{3}+\frac{1}{(m_k®)^2})+¢]ª_{m_k}^2 + \bar{q}[1+\frac{6¢_0}{r}(\frac{1}{3}+\frac{1}{(m_k®)^2})]ª_{m_k}^2\} +$$

$$+\sum_{m_i \neq m_k} A_{m_i}\{¢\sim_3 m_i ª_{m_i}^2 d_{m_i m_k} - 2(p-1{,}5\bar{q})ª_{m_i}^2 \frac{8}{®^2}\frac{¢_0}{r} g_{m_i m_k}\} = 0,$$

$$d_v = \frac{0{,}25+0{,}5v_1 - v_1^2 + 1{,}25v_1v_2}{1-v_1v_2} \tag{1.8}$$

Ограничимся в первом приближении в ряде (1.6) одним членом с неизвестным индексом m_1. Тогда получаем

$$p_{(1)} = \frac{ª_{m_1}^2 + 4¢d_v + 4¢^2 ª_{m_1}^{-2} + \bar{q}[1+\frac{6¢_0}{r}(\frac{1}{3}+\frac{1}{(m_1®)^2})]}{2[1-\frac{2¢_0}{r}(\frac{1}{3}+\frac{1}{(m_1^2®^2)})+¢]} \tag{1.9}$$

Согласно [3] наилучшее приближение к точному значению наименьшего собственного числа (критическая нагрузка) дает та гармоника ряда (1.6), которая реализует наименьшее значение $p_{(1)}$. Учитывая неравенства (1.2), а также, что $p>0$, нетрудно показать, что $p_{(1)}(m_1=1) < p_{(1)}(m_1 = 1+2i), i=1,2,...$ Следовательно, наименьшее значение $p_{(1)}$ реализуется при $m_1 = 1$. При этом (1.9) принимает вид

$$p_{(1)} = \frac{ª_1^2}{2}\frac{1+\sim_1\frac{¢_0}{r}+\sim_2(\frac{¢_0}{r})^2+\bar{q}(1+2{,}608\frac{¢_0}{r})(\frac{2}{®})^2(\frac{\ell}{r})^2}{1-0{,}8693\frac{¢_0}{r}+\frac{¢_0}{r}(\frac{r}{\ell})^2} \tag{1.10}$$

$$\sim_1 = 4d_v(\frac{2}{®})^2,\ \sim_2 = 4(\frac{2}{®})^2$$

Отметим, что при действии внутреннего давления ($\bar{q} < 0$) величина критической нагрузки сжатия *p* понижается, тогда как при действии внешнего давления ($\bar{q} > 0$)– повышается.

При $\text{¢}_0 = 0,\ q = 0$ из (1.10) получаем известную формулу Эйера для длинной трубки [2] $p = p_э = \text{a}_1^2/2$.

При $\text{¢}_0 = 0,\ p = 0,\ \bar{q} < 0$ из (1.10) получаем

$$|\bar{q}| = |\bar{q}_0^*| = \text{a}_1^2 \qquad (1.11)$$

При этом выражение (1.10) можно представить в виде

$$\frac{p}{p_э} = \frac{1 + \sim_1 \frac{\text{¢}_0}{r} + \sim_2 (\frac{\text{¢}_0}{r})^2 + \frac{\bar{q}}{|\bar{q}_0^*|}(1 + 2,608\frac{\text{¢}_0}{r})}{1 - 0,8693\frac{\text{¢}_0}{r} + \frac{\text{¢}_0}{r}(\frac{r}{\ell})^2} \qquad (1.12)$$

Из (1.12) при $p = 0$ получаем следующую формулу для определения критического внутреннего давления:

$$|\bar{q}| = \text{a}_1^2 \frac{1 + \sim_1 \frac{\text{¢}_0}{r} + \sim_2 (\frac{\text{¢}_0}{r})^2}{1 + 2,608\frac{\text{¢}_0}{r}} \qquad (1.13)$$

Далее рассмотрим второе приближение. Учитывая, что $m_1 = 1$, возьмем, как обычно, $m_2 = 3$. При этом имеем систему двух однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_1, A_3 . Из условия нетривиальности решения этой системы получаем следующее уравнение относительно *p*:

$$ap^2 - bp + c = 0, a = g_1^2 g_3^2 - e_1^2 e_3^2 \qquad (1.14)$$

$$b = (g_1^2 g_3^1 + g_3^2 g_1^1) - (e_1^2 e_3^1 + e_3^2 e_1^1)\ ,\ c = g_1^1 g_3^1 - e_1^1 e_3^1 \qquad (1.15)$$

$$g_j^1 = \text{a}_j^4[1 + 4\text{¢}d_v \text{a}_j^{-1} + 4\text{¢}^2 \text{a}_j^{-4} + \bar{q}(1 + 2{,}608\frac{\text{¢}_0}{r})\text{a}_j^{-2}]\ (j = 1{,}3)\ ,$$

$$g_j^2 = 2\lambda_j^2(1 - 0,8693\frac{\delta_0}{r} + \delta)\ , e_j^2 = -\frac{3}{\pi^2}\frac{\delta_0}{r}\lambda_j^2$$

$$e_1^1 = \lambda_1^2(9\delta + \frac{4,5}{\pi^2}\frac{\delta_0}{r}\bar{q})\ , e_3^1 = \lambda_3^2(-9\delta - \frac{4,5}{\pi^2}\frac{\delta_0}{r}\bar{q}) \qquad (1.16)$$

Нетрудно показать, что при $\bar{q} > 0$ и $\frac{|\text{¢}_0|}{r}$, удовлетворяющем (1.2), выполняются неравенства

$$g_1^2 g_3^2 >> e_1^2 e_3^2\ ,\ g_1^2 g_3^1 >> e_1^2 e_3^1\ ,\ g_3^2 g_1^1 >> e_3^2 e_1^1\ ,\ g_1^1 g_3^1 >> e_1^1 e_3^1 .$$

При $\bar{q} < 0$, когда $\bar{q} \le 0,8|\bar{q}_0^*|$, где $|\bar{q}_0^*|$ определяется по формуле (1.11), можно также показать выполнение этих неравенств. Следовательно, с точностью до малых величин имеем

$$a \approx g_1^2 g_3^2\ , b \approx g_1^2 g_3^1 + g_3^2 g_1^1\ ,\ c \approx g_1^1 g_3^1\ ,\ b^2 - 4ac \approx (g_1^2 g_3^1 - g_3^2 g_3^1)^2$$

В результате наименьший корень уравнения (1.14) принимает вид

$$p_{(2)} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \approx \frac{g_1^1}{g_1^2} = p_{(1)}$$

и, следовательно, с точностью до величин второго порядка малости $p_{(2)} \approx p_{(1)}$,

Таким образом, для определения критической нагрузки в рассматриваемых случаях вполне можно ограничиться первым приближением.

Рассмотрим случай $n \geq 2$. При этом на основании (1.3) в системе (1.6) можно пренебречь некоторыми малыми членами.

Ограничиваясь в первом приближении одним членом ряда (1.6) с неизвестным индексом m_1, получаем

$$p_{(1)} = \frac{\varepsilon_1 (n^2-1)^2 + \lambda_{m_1}^4 n^{-4} + 4\delta\lambda_{m_1}^2(\alpha_1 n^2 + D_v)n^{-4} + 4\delta^2 - \overline{q}(1+\frac{2}{3}\frac{\delta_0}{r})(n^2-1)}{(1-\frac{2}{3}\frac{\delta_0}{r})\lambda_{m_1}^2(1+n^{-2}) - 2\delta N}$$

$$N = (n^2 - 0{,}75 + 0{,}25n^{-2}) \tag{1.17}$$

При $p = 0$ получаем

$$\overline{q} = \varepsilon_1 (1+\frac{2}{3}\frac{\delta_0}{r})^{-1}(n^2-1)[1+\frac{m_1^4\lambda_1^4\varepsilon_1^{-1}}{n^4(n^2-1)^2}(1{,}62\frac{\delta_0}{r}\frac{\alpha_1 n^2 + D_v}{m_1^2} + 0{,}656(\frac{\delta_0}{r})^2\frac{n^4}{m_1^4})] \tag{1.18}$$

$$D_v = \sim_2 - \frac{1}{2}\sim_3$$

Можно показать, что для длинных оболочек $\text{a}_1^{-1}\text{£}^{1/4} \sim \text{®}^{-1}$ [2], наименьшее значение $\overline{q}(n)$ реализуется при $m = 1, n = 2$. В результате получаем

$$\overline{q}/\overline{q}_\infty^* = (1+\frac{2}{3}\frac{\text{¢}_0}{r})^{-1}\{1+\frac{\text{a}_1^4\text{£}_1^{-1}}{144}[1+1{,}62\frac{\text{¢}_0}{r}(4\sim_1 + D_v) + 10{,}496(\frac{\text{¢}_0}{r})^2]\}\ ,\ \overline{q}_\infty^* = 3\text{£}_1 \tag{1.19}$$

Введем обозначение $\Lambda = \text{a}_{m_1}^2$ и обратимся к выражению (1.17).

Согласно вышесказанному наилучшим приближением к собственной функции, соответствующей наименьшему собственному числу, является та гармоника, для которой m_1 реализует наименьшее значение $p_{(1)}$. Поэтому определим то значение Λ, при котором $p_{(1)}$ (Λ) достигает наименьшего значения. Нетрудно показать, что оно найдется из условия $p'_\Lambda(\Lambda) = 0$. Отсюда получаем следующее уравнение относительно Λ:

$$\Lambda^2 - B\Lambda - C = 0$$

Учитывая, что $C > 0$, $B > 0\,(\overline{q} \leq 0)$, получаем, что $\Lambda = \frac{1}{2}(B + \sqrt{B^2 + 4AC})$.

Так как для длинных оболочек наименьшее значение $p(n \geq 2)$ реализуется при
$n = 2$, то получаем

$$p_* = \frac{6\varepsilon_1^{1/2}}{5K_0}[\omega(n=2) + \frac{8}{\pi^2}\frac{\delta_0}{r}\lambda_1^2\varepsilon_1^{-1/2}(0{,}221K_0^{-1} + \frac{1}{3}(\alpha_1 + 0{,}25D_v))] \tag{1.20}$$

$$\text{µ}(n=2) = \sqrt{1 + 4(\frac{2}{\text{®}})^4(\frac{\text{¢}_0}{r})^2\text{a}_1^4\text{£}_1^{-1}B(n=2) - \frac{q_1}{3\text{£}}}\ ,\ q_1 = \overline{q}K_1\ ,\ N_1 = Nn^{-2} \tag{1.21}$$

$$B(n) = [N_1^2\alpha_n^{-2} + 2(\alpha_1 + D_v n^{-2})N_1\alpha_n^{-1} + 1](n^2-1)^{-2}\ ,\ \alpha_n = K_0(1+n^{-2})$$

$$\Lambda = 12\text{£}_1^{1/2}(\text{µ}(n=2) + 0{,}179K_0^{-1}\text{a}_1^2\text{£}_1^{-1/2}\frac{\text{¢}_0}{r}),\quad K_0 = 1 - \frac{2}{3}\frac{\text{¢}_0}{r}\ ,\ K_1 = 1 + \frac{2}{3}\frac{\text{¢}_0}{r} \tag{1.22}$$

При $\delta_0 = 0$, $q = 0$ из формулы (1.20) следует известная формула Саутвелла-Тимошенко [2] $p_T^* = 6\text{£}_1^{1/2}/5$.

Рассмотрим второе приближение. Учитывая, что m_1, дополненное до целого, некоторое нечетное число m, возьмем $m_2 = m + 2i$ $(i = 1,2,...,\ \ i = -1,-2,..,$ где $|i| = (m - 1/2))$, то есть m_2 может принимать любое нечетное значение, отличное от m. При этом имеем систему двух однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_m , A_{m+2i} .. Из условия нетривиальности решения этой системы получаем уравнение вида (1.14), (1.15), где для коэффициентов *a*, *b*, *c* нижний индекс 1 надо заменить на *m*, а 3 на *m =2i*, при этом

$$a = g_m^2 g_{m+2i}^2 - e_m^2 e_{m+2i}^2 \quad , b = (g_{m+2i}^2 g_m^1 + g_m^2 g_{m+2i}^1) - (e_{m+2i}^2 e_m^1 + e_m^2 e_{m+2i}^1) \tag{1.23}$$

$$c = g_m^1 g_{m+2i}^1 - e_m^1 e_{m+2i}^1$$

Показано, что для длинных оболочек при *n* = 2 (для любых *m* и *i*)

$$g_m^2 g_{m+2i}^2 >> e_m^2 e_{m+2i}^2 \ \ , \ g_m^1 g_{m+2i}^i >> |e_m^1 e_{m+2i}^i| , \ g_{m+2i}^1 g_m^2 >> |e_{m+2i}^1 e_m^2| \ \ (j = 1,2)$$

Следовательно, с точностью до малых величин

$$a = g_m^2 g_{m+2i}^2 \ , b = g_m^1 g_{m+2i}^2 + g_m^2 g_{m+2i}^1 \ , c = g_m^1 g_{m+2i}^2 \tag{1.24}$$

$$p_{(2)} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \approx \frac{g_m^1}{g_m^2} = p_{(1)} \tag{1.25}$$

Таким образом, рассматривая гармонику *m* в совокупности с любой гармоникой ряда (1.6), получаем, что для определения наименьшего собственного числа (критическая нагрузка), в рассматриваемых случаях, вполне можно ограничиться одним главным членом этого ряда. В то же время приведенный способ дает возможность оценить вклад любой гармоники (отличной от главной) во второе приближение, и если понадобится, учесть эту информацию в последующих приближениях.

Приведенные результаты показывают, что как малые отклонения оболочки от цилиндрической формы, так и знак гауссовой кривизны могут существенно изменить критическую нагрузку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Даревский В.М. Устойчивость облочки, близкой по форме с цилиндрической // Проблемы расчета пространственных конструкций . М.: МИСИ, 1980. С.35-45
2. Григолюк Э.И., КабановВ.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.
3. Кукуджанов С.Н. Об оптимальных приближенных в проблеме собственных значений для методов Ритца и Бубнова-Галеркина // ЖВМ и МФ АН СССР. 1983. Т.23. №5. С. 1230 – 1233.

<u>Сведения об авторе:</u>

Кукуджанов Сергей Николаевич
Доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, профессор
Адрес: 0102 Грузия, Тбилиси. ул. И. Джавахишвили д. 31. кв. 5
Тел.: (+99532) 95-20-85; E-mail: kotic13@mail.ru

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ИЗНОСО-КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЯЗКО-УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ

Любичева А. Н.

Изнашивание тел с неоднородной структурой происходит неравномерно, их первоначально плоская рабочая поверхность становится волнистой. Такими неоднородными свойствами могут обладать композиционные материалы или материалы, поверхность которых подвергнута локальному упрочнению.

В работах [1, 2, 3] рассмотрены математические постановки ряда износоконтактных задач для неоднородных упругих тел. Развит метод решения этих задач в условиях установившегося режима изнашивания. Он был использован для анализа процесса химико-механического полирования неоднородной поверхности в [4]. Решение периодической контактной задачи для упругого слоя при учете износа и сил трения представлено также в работе [5]. Обзор исследований в области износоконтактных задач содержится в монографии [6].

Ниже предлагается исследование изнашивания структурно неоднородных тел при контакте с вязкоупругим телом. Задача рассматривается в плоской постановке. Исследуется влияние скорости относительного скольжения и триботехнических параметров неоднородного материала на формирование рельефа поверхности.

1. Постановка задачи

Вязкоупругое тело прижато к неоднородному полупространству силой P/l и движется с постоянной скоростью V вдоль оси x (рис. 1). Материал полупространства обладает переменным коэффициентом износа поверхности $K_\omega(x)$, при этом неоднородная структура материала является периодической с периодом l ($K_\omega(x+l) = K_\omega(x)$).

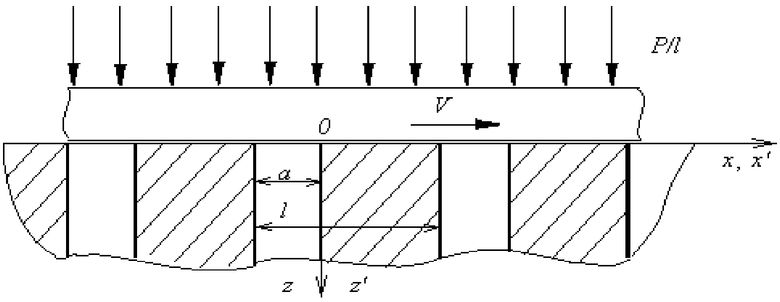


Рис.1 Схема скольжения вязкоупругого тела вдоль поверхности полупространства, имеющего неоднородную периодическую структуру.

Пусть коэффициент износа $K_\omega(x)$ принадлежит к классу кусочно-постоянных функций:

$$K_\omega(x) = \begin{cases} K_{\omega 1}, & x \in [nl,\ a+nl] \\ K_{\omega 2}, & x \notin [nl,\ a+nl] \end{cases} \tag{1}$$

здесь $K_{\omega 1}$ и $K_{\omega 2}$ – коэффициенты износа поверхности внутри и вне заштрихованных полос $[nl+a, (n+1)l]$, ($K_{\omega 1} > K_{\omega 2}$).

Скорость линейного изнашивания $\partial\omega_*(x,t)/\partial t$ связана с давлением $p(x,t)$ соотношением [7]:

$$\frac{\partial \omega_*(x,t)}{\partial t} = K_\omega(x)\left(\frac{p(x,t)}{\tilde{p}}\right)^\alpha \tag{2}$$

где $\omega_*(x,t)$ – износные перемещения границы тела, $K_\omega(x)$, α – параметры, определяемые экспериментально, $\tilde{p}$ – некоторое характерное давление.

Если реализуется полный контакт двух тел и поверхность жесткого полупространства в начальный момент времени совпадает с координатной плоскостью (x,y), то условие контакта имеет вид:

$$u_z(x,t) + \omega_*(x,t) = D(t) \tag{3}$$

здесь $u_z(x,t)$ – перемещения точек поверхности вязкоупругого тела, $D(t)$ – сближение тел в результате действия нагрузки. Полная нагрузка на период l при $z = 0$ определяется выражением:

$$P(t) = \int_0^l p(x,t)dx \tag{4}$$

В процессе изнашивания происходит формоизменение первоначально плоской поверхности полупространства и перераспределение контактного давления $p(x,t)$. Пусть функция $f(x,t)$ описывает границу поверхности полупространства. Необходимо определить асимптотику функции $f(x,t)$ при $t\to\infty$. Заметим, что при построении модели мы пренебрегаем влиянием сил трения на распределение контактных давлений.

2. Модель вязкоупругого тела

Для описания свойств вязкоупругого тела воспользуемся двумерным аналогом модели Максвелла–Томсона. Определяющие соотношения в случае плоской деформации имеют вид [8]:

$$\varepsilon_{x'} + T_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_{x'}}{\partial t} = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_{x'} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial t}\right) - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\left(\sigma_{z'} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{z'}}{\partial t}\right) \tag{5}$$

$$\varepsilon_{z'} + T_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_{z'}}{\partial t} = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_{z'} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{z'}}{\partial t}\right) - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\left(\sigma_{x'} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial t}\right)$$

$$\gamma_{x'z'} + T_\varepsilon \frac{\partial \gamma_{x'z'}}{\partial t} = \frac{1+\nu}{E}\left(\tau_{x'z'} + T_\sigma \frac{\partial \tau_{x'z'}}{\partial t}\right)$$

Здесь E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона, соответственно, отношение $T_{£}E/T_{\pm}$ представляет собой мгновенный модуль упругости, $1/T_{£}$ – коэффициент скорости последействия ($T_{£} > T_{\pm}$). В подвижной системе координат компоненты вектора смещений u_i и тензора напряжений σ_{ij} не зависят явно от времени и являются функциями координат (x,z). При этом комплексы $\varepsilon_{ij} – T_{£}V\partial\varepsilon_{ij}/\partial x$, $\sigma_{ij} – T_{£}V\partial\sigma_{ij}/\partial x$ удовлетворяют уравнениям, эквивалентным уравнениям равновесия, совместности деформаций и закону Гука для изотропного упругого тела, а решение контактной задачи теории упругости определяется с помощью разностного интегрального оператора **A**[p]:

$$u_i - T_\varepsilon V \frac{\partial u_i}{\partial x} = \mathbf{A}\left[p(x) - T_\sigma V \frac{\partial p(x)}{\partial x}\right] \tag{6}$$

3. Метод решения

Система уравнений (2) - (4), (6) является замкнутой и позволяет определить контактное давление, форму изношенной поверхности, вязкоупругие перемещения и сближение тел при изнашивании. Если скорость износа $\partial\omega_*(x,t)/\partial t = D_\infty$ постоянна, то распределение давлений $p(x,t)$ согласно (2) не зависит от времени.

$$p_\infty(x) = \lim_{t\to\infty} p(x,t), \quad p_\infty(x) = \begin{cases} p_1 = \tilde{p}\left(\dfrac{D_\infty}{K_{\omega 1}}\right)^{1/\alpha}, & x \in [nl, a+nl] \\ p_2 = \tilde{p}\left(\dfrac{D_\infty}{K_{\omega 2}}\right)^{1/\alpha}, & x \notin [nl, a+nl] \end{cases} \tag{7}$$

Эти условия на практике соответствуют условиям установившегося режима изнашивания. В этом режиме скорость скольжения V, область контакта Ω и сближение тел D не зависят от времени. При $t\to\infty$ контактное давление $p_{ã}(x)$ и вязкоупругие $u^\infty_z(x)$ перемещения границы тела являются периодическими функциями координаты x. Кроме того, когда оператор **A**[$p(x)$] не зависит от времени, существует стационарное решение системы (2) - (4), (6).

Ядро оператора K(ξ-x) в случае плоской периодической контактной задачи для упругой полуплоскости известно [9] и имеет вид:

$$K(\xi - x) = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}\ln 2\left|\sin\frac{\pi(\xi - x)}{l}\right| \tag{8}$$

Решение уравнения (6) при $t \to \infty$ с учетом соотношений (7, 8) определяется выражением:

$$u_z^{(\infty)}(x) = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}\left\{\int_0^a p_1 \ln 2\left|\sin\frac{\pi(\xi - x)}{l}\right| d\xi + \int_a^l p_2 \ln 2\left|\sin\frac{\pi(\xi - x)}{l}\right| d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(1-e^{-\frac{l}{T_\varepsilon V}})}\left(1-\frac{T_\sigma}{T_\varepsilon}\right)\Delta p \int_0^l e^{-\frac{\chi}{T_\varepsilon V}} \ln\left|\frac{\sin(\pi(a-(x+\chi))/l)}{\sin(\pi(-(x+\chi)/l))}\right| d\chi \right\} \tag{9}$$

здесь принято обозначение $\Delta p = p_2 - p_1$.

Форму изношенной поверхности определяют износные перемещения границы тела $\omega_*(x,t)$. Однако износные перемещения границы неоднородного полупространства могут быть определены с точностью до неизвестной постоянной, которая, вообще говоря, зависит от времени (2). Определим форму поверхности $f(x)$ при $t \to \infty$ как:

$$f_\infty(x) = u_z^{(\infty)}(x) \tag{10}$$

Итак, установившаяся в процессе изнашивания форма поверхности зависит от:

– $K_{\omega i}(x)$, l триботехнических свойств периодической структуры полупространства;

– отношения времен $T_{±}$ релаксации и $T_{£}$ последействия вязкоупругого материала;

– отношения времени прохождения вязкоупругим телом одного периода неоднородной структуры l/V к времени $T_{£}$ последействия материала.

4. **Результаты расчета**

В результате проведенных вычислений были построены графики формы поверхности жесткого тела в установившемся режиме изнашивания при различных значениях параметра $\zeta = l/T_{£}V$ (рис. 2).

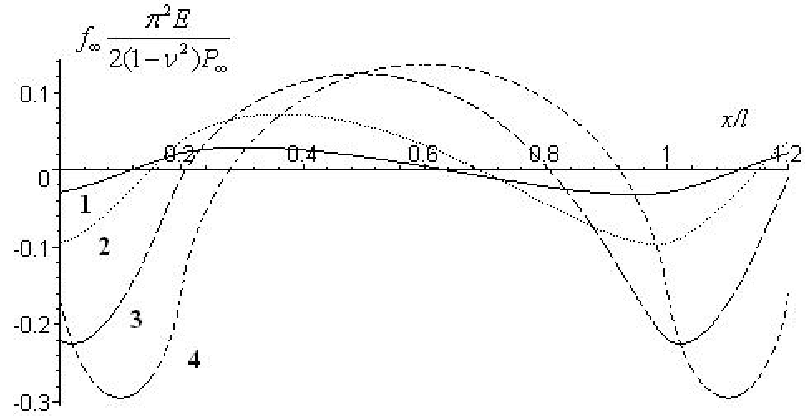


Рис.2 Установившаяся форма изношенной поверхности при m_1=0,3, â=0,2, γ=10^{-3}, ζ=1 – кривая 1; ζ=3 – кривая 2; ζ=10 – кривая 3; ζ=1000 – кривая 4 (так же соответствует установившейся форме поверхности при изнашивании в контакте с упругим телом).

Отметим, что форма выступов изношенной поверхности при контакте с вязкоупругим телом при значениях $10^{-2}<\zeta<10^2$ является несимметричной (кривые 1-3) в отличие от формы выступов при контакте с упругим телом (кривая 4). При ζ=100 формы поверхности, полученные в результате решения вязкоупругой и упругой задач, отличаются незначительно, а при ζ=1000 совпадают. При прочих равных условиях в зависимости от параметра $\zeta = l/T_{£}V$ меняется глубина впадин (амплитуда волн).

Вязкоупругие свойства материала оказывают существенное влияние на формирование рельефа поверхности при изнашивании, причем форма поверхности существенно зависит от скорости скольжения. Полученные результаты могут быть применены для моделирования износа дорожного покрытия при контакте с шинами автомобиля. В процессе износа микро и макро рельеф дорожного полотна меняется, что приводит к изменению коэффициента сцепления. Поддержание оптимального коэффициента сцепления в течение длительного времени и прогнозирование его снижения обеспечивает необходимую безопасность движения транспорта.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований грант № 05-08-50269-а, и Гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ: НШ-1245.2006.1

ЛИТЕРАТУРА

1. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Изнашивание неоднородно упрочненных поверхностей.//Трение и износ. 1986 (7). № 6. С. 985-992
2. Горячева И.Г., Торская Е.В. Контактные задачи при наличии износа для тел с переменным по поверхности коэффициентом износостойкости.//Трение и износ. 1992 (13), № 1, 185-194
3. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. - М.: Наука, 2001. – 478
4. Chekina O.G., Keer L.M. Wear-contact problems and modeling of chemical mechanical polishing// J. Electrochem. Soc. – 1998. (145), N 6, 2100-2106
5. Александров В.М., Кудрова Ф.В. Точное решение периодической контактной задачи для упругого слоя при учете износа.// ПММ. – 2002 (66), № 4, 647-654
6. Механика контактных взаимодействий. Под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова. М.: Физматлит, 2001. – 672
7. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М: Машиностроение, 1977. – 576
8. Горячева И.Г. Контактная задача качения вязкоупругого цилиндра по основанию из того же материала // ПММ. – 1973 (37), №5, 877-885
9. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1949. – 270

Сведения об авторе

Любичева Анастасия Николаевна
Младший научный сотрудник, Институт проблем механики РАН
Адрес: Россия, 119526, г. Москва, пр. Вернадского, 101, к. 1
E-mail: lyubicheva@mail.ru

МЕХАНИКА НАРАЩИВАЕМЫХ ТЕЛ:
СОСТОЯНИЕ, ПРОБЛЕМЫ, ПЕРСПЕКТИВЫ

Манжиров А.В.

Механика наращиваемых или растущих тел — новое направление развития механики сплошной среды. Имея своей основой основные концепции механики деформируемого твердого тела, механика наращиваемых тел принципиальным образом отличается от нее, порождая совершенно новые задачи и новое понимание происходящих технологических, инженерных и природных процессов.

Под непрерывно (кусочно-непрерывно) наращиваемым или растущим телом понимается деформируемое твердое тело, состав, масса или объем которого изменяются вследствие процесса непрерывного (кусочно-непрерывного) притока материала к его поверхности. Процесс присоединения к телу новых элементов называется соответственно наращиванием или ростом.

При кусочно-непрерывном наращивании тела четко прослеживаются следующие основные этапы его деформирования: до начала процессанаращивания, в процессе непрерывного наращивания и чередующийся с последним этап деформирования тела после прекращения наращивания или остановки роста. Каждый из этих этапов характеризуется, естественно, моментами своего начала и окончания. Первый — моментом приложения к телу нагрузки или загружения и моментом начала наращивания. Второй — моментом начала наращивания и моментом прекращения наращивания илиостановки роста. Третий соответственно наоборот — моментами остановки роста и начала наращивания. Обычно, исследуемый процесс заканчивается третьим этапом, для которого момент начала следующего этапа непрерывного наращивания полагается сколь угодно большим.

Тело, к поверхности которого, начиная с момента начала наращивания впервые происходит приток новых элементов, называется основным или исходным телом. Тело, составленное из материальных элементов, которые присоединились к основному телу за промежуток времени от момента начала наращивания до рассматриваемого момента времени, называется дополнительным телом. Само дополнительное тело может иметь сложную структуру и состоять из совокупности тел, образовавшихся на разных временных промежутках этапа непрерывного наращивания. Их назовем субтелами. Очевидно, что объединение субтел составляет дополнительное тело, причем области, занимаемые как первыми, так и последним могут быть несвязными.

Объединение основного и дополнительного тел называется наращивае-мым или растущим телом.

Заметим, что процесс наращивания может происходить и без участия основного тела, когда он начинается с зарождения бесконечно малого материального элемента тела. Часть поверхности, к которой в текущий момент времени присоединяются бесконечно малые элементы материала, назовается поверхностью наращивания или роста. В общем случае поверхность роста не связна, а, в частности, ею может быть вся поверхность тела. Наконец, базовой поверхностью назовем ту часть поверхности исходного или растущего тел, которая совпадает с поверхностью наращивания в моменты его начала. Понятно, что базовая поверхность представляет из себя как раз ту часть поверхности тела, к которой предполагается организовать приток вещества на очередном этапе непрерывного наращивания. На разных этапах она, как правило, совпадает с поверхностью раздела основного и дополнительного тел, а также — с поверхностями раздела субтел.

Момент времени, в который к телу присоединяется материальная частица, называется моментом присоединения этой частицы к растущему телу. Вместе с моментами изготовления и начала нагружения частицы он во многом определяет специфику наращивания. Если исследуются, например, процессы непрерывного бетонирования, обледенения, роста кристаллов и т.п., то все три указанных момента времени равны между собой, т.е. приращиваемые элементы загружаются и присоединяются одновременно с их зарождением. Если процессом непрерывного наращивания моделируется напыление или возведение конструкции из большого количества блоков, то, как правило, момент присоединения равен моменту нагружения, а момент изготовления частиц произволен.

Первыми в ряду работ по данной проблематике следует назвать работы [1-6, 9, 12], в которых были шаг за шагом сформулированы основные идеи и уравнения, на которых базируется механика наращиваемых тел. Для случая больших деформаций они были развиты в [7, 8, 10, 13-15]. В этих работах были также решены простейшие одномерные задачи для растущих тел, которые и в случае одного измерения зачастую вызывали серьезные затруднения в получении аналитических или численных решений с силу их сложности. Основные результаты этого периода развития механики наращиваемых тел обобщены в основном в монографиях [4, 10, 11].

Следующим этапом развития стал этап решения первых неодномерных (с двумя пространственными переменными) задач (см., например, [17-19, 21], основные результаты которого подытожены в монографиях [16, 20]. Этот этап позволил перейти от разрозненных и часто интуитивных методик и методов решения задач наращивания к единому математически строгому подходу, который стал основой для математической теории.

Основы математической теории наращиваемых упругих и вязкоупругих (в том числе стареющих) тел были заложены работами [22, 23]. На их основе была развита математическая теория кручения растущих призматичесикх тел [26-28, 39], решены плоские и пространственные задачи для наращиваемого тела [25, 27, 33, 34], исследованы контактные задачи механики растущих тел [12, 19-22, 24], впервые решены весьма сложные задачи деформирования наращиваемых тел под действием массовых сил [29-32, 35-38].

Следует отметить, что основополагающие и наиболее яркие результаты в области механики наращиваемых тел были получены академиком Н.Х. Арутюняном и его школой, которая и сейчас занимает здесь лидирующие позиции и с честью продолжает дело своего выдающегося основателя.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ № НШ-1245.2006.1, РФФИ (проекты №05-01-00693 и № 06-01-00521) и Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (программа №13 ОЭ).

ЛИТЕРАТУРА

1. Рашба Э.И. Определение напряжений в массивах от действия собственного веса с учетом порядка их возведения. В кн.: Сб. тр. Ин-та строит. мех. АН УССР. 1953. № 18. С. 23-27.
2. Харлаб В.Д. Линейная теория ползучести наращиваемого тела. В кн.: Механика стержневых систем и сплошных сред. Тр. ЛИСИ. Л.: ЛИСИ, 1966. Вып. 49. С. 93-119.
3. Арутюнян Н.Х. Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела. ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 783-789.
4. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
5. Арутюнян Н.Х., Метлов В.В. Нелинейные задачи теории ползучести наращиваемых тел, подверженных старению. Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 142-152.
6. Тринчер В.К. О постановке задачи определения напряженно-деформированного состояния растущего тела. Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 2. С. 119-124.
7. Метлов В.В. О наращивании тел при конечных деформациях. Докл. АН АрмССР. 1985. Т. 80. № 2. С. 71-75.
8. Метлов В.В. О наращивании неоднородных вязкоупругих тел при конечных деформациях. ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 637-647.
9. Метлов В.В., Турусов Р.А. О формировании напряженного состояния вязкоупругих тел, растущих в условиях фронтального отверждения. Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 145-160.
10. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э. Механика растущих вязкоупругопластических тел. М.: Наука, 1987. 471 с.
11. Арутюнян Н.Х., Зевин А.А. Расчет элементов строительных конструкций с учетом ползучести. М.: Стройиздат, 1988. 257 с.

12. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи механики растущих тел ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 145–158.
13. Арутюнян Н.Х., Наумов В.Э., Радаев Ю.Н. Математическая модель динамически наращиваемого деформируемого тела. Ч. 1. Кинематика и меры деформации растущего тела. Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 85-96.
14. Арутюнян Н.Х., Наумов В.Э., Радаев Ю.Н. Математическая модель динамически наращиваемого деформируемого тела. Ч. 2. Эволюционная граничная задача теории растущих тел. Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 72-86.
15. Наумов В.Э., Радаев Ю.Н. Термомеханическая модель наращиваемого тела: вариационная формулировка. Препринт № 527. М.: Ин-т проблем механики РАН, 1993. 39 с.
16. Арутюнян Н.Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1990 (Изд-во НАН РА, 1999). 320 с.
17. Арутюнян Н.Х., Манжиров А. В. и др. Механика растущих неоднородных вязкоупругих тел, подверженных старению. Отчет Ин-та проблем механики АН СССР. М.: ИПМ АН СССР, 1990. 21 с.
18. Арутюнян Н.Х., Манжиров А. В. Математическое моделирование и алгоритм расчета наращиваемых упругих и вязкоупругих тел с учетом процессов физического старения материалов. Отчет Ин-та проблем механики РАН. М.: ИПМ РАН, 1992. 47 с.
19. Манжиров А.В. О кручении растущего цилиндра жестким штампом. ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 842–850.
20. Арутюнян Н.Х., Манжиров А. В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.
21. Манжиров А.В., Черныш В.А. Задача об усилении заглубленной арочной конструкции методом наращивания. Изв. РАН. МТТ. 1992. № 5. С. 25–37.
22. Манжиров А.В. Контактные задачи теории вязкоупругости наращиваемых тел: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. М.: Институт проблем механики РАН, 1993. 377 с.
23. Манжиров А.В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела. ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 836–848.
24. Манжиров А.В. Контактные задачи механики наращиваемых тел. В кн.:Механика контактных взаимодействий. Под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова. М.: Физматлит, 2001. С. 607–621.
25. Манжиров А.В., Михин М.Н. Плоская задача для растущего тела. В кн.: Современные проблемы механики сплошной среды. Труды VI международной конференции, г. Ростов-на-Дону, 19–23 июня 2000 г. Том 2. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ, 2001. С. 106–109.
26. Манжиров А.В., Михин М.Н. О кручении наращиваемого эллиптического бруса. В кн.: Проблемы механики деформируемых тел. Ереван: Изд-во "Гитутюн" НАН РА, 2003. С. 216–224.
27. Манжиров А.В., Михин М.Н. Методы теории функций комплексного переменного, в механике растущих тел. Вестник СамГУ. Естественная серия. 2004. № 4(34). С. 82–98.
28. Манжиров А.В., Михин М.Н. О кручении растущих тел. В кн.: Современные проблемы механики сплошной среды. Труды IX Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения академика РАН И.И. Воровича, г.Ростов-на-Дону, 11–15 октября 2005 г. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО "ЦВВР", 2005. С. 131–136.
29. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Формирование гравитирующих тел в процессе аккреции. Вторая всероссийская научная конференция "Внутреннее ядро земли. Геофизическая информация о процессах в ядре", Москва, 16–17 ноября 2005 г., ИФЗ РАН. Тезисы докладов. http://innercore.ru/2005/abstracts /551126797963.html.
30. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Наращивание вязкоупругого шара в центрально-симметричном силовом поле. Изв. РАН. МТТ. 2006. № 1. С. 66-83.
31. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Моделирование процессов наращивания цилиндрических тел на вращающейся оправке с учетом действия центробежных сил. Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 149-166.

32. Manzhirov A.V., Parshin A.D. Accretion of solids under mass forces. In: Indo-Russian workshop "Problems in nonlinear mechanics of solids with large deformation". New Delhi: IIT Delhi, 2006. PP. 71-79.
33. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Моделирование процесса деформирования наращиваемых конических тел. Вестник СамГУ. Естественная серия. 2007. № 4 (54). С. 290–303.
34. Михин М.Н. Наращивание пластины, ослабленной эллиптическим отверстием Новые информационные технологии. Сборник трудов VI Всероссийской научно-технической конференции, Москва, 23-24 апреля 2003 г. Т. 1. Под ред. А.П. Хныкана. М.: МГАПИ, 2003. С. 147-148.
35. Паршин Д.А. О контакте массивной наращиваемой арки с жестким основанием. В кн.: Смешанные задачи механики деформируемого тела. Материалы V Российской конференции с международным участием. Саратов, 23-25 августа 2005 г. Под ред. акад. Н.Ф. Морозова. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. С. 253-256.
36. Паршин Д.А. Наращивание гравитирующего упругого шара. В кн.: Современные проблемы механики сплошной среды. Труды IX Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения акад. И.И. Воровича. Ростов-на-Дону, 11-15 октября 2005 г. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО <<ЦВВР>>, 2005. Т. 1. С. 157-161.
37. Паршин Д.А. Наращивание массивных деформируемых тел. В кн.: XXXII Гагаринские чтения. Научные труды Международной молодежной научной конференции в 8 томах. Москва, 4-8 апреля 2006 г. М.: <<МАТИ>> - РГТУ им. К.Э. Циолковского, 2006. Т. 1. С. 147-149.
38. Паршин Д.А. Деформирование наращиваемых тел под действием массовых сил: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: Институт проблем механики РАН, 2007. 236 с.
39. Михин М.Н. Кручение растущей призмы. Зимняя школа по механике сплошных сред (пятнадцатая). Сборник статей. В 3-х частях. Часть 3. Екатеринбург: УрО РАН, 2007.

Сведения об авторе

Манжиров Александр Владимирович
Доктор физико-математических наук, профессор,заведующий лабораторией
Адрес: Институт проблем механики РАН, пр-т Вернадского, 101, корп. 1
Москва, 119526, Россия
Тел.:+7 926 2332511; E-mail:manzh@inbox.ru, manzh@ipmnet.ru

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ РАСТУЩИХ ТЕЛ

Манжиров А.В., Михин М.Н., Юбер С.В.

Рассмотрим однородное вязкоупругое стареющее тело, изготовленное в нулевой момент времени, занимающее некоторую цилиндрическую область Π_1 с поперечным сечением Ω_1, имеющим границу L_1. В момент приложения нагрузки τ_0 к торцам цилиндрического тела прикладываются усилия, статически эквивалентные паре с моментом $M(t)$. Боковая поверхность тела Π_1 свободна от напряжений.

В момент времени $\tau_1 \geq \tau_0$ начинается непрерывное наращивание тела элементами, изготовленными одновременно с ним. Обозначим через $L(t)$ границу поперечного сечения $\Omega(t)$, которая изменяется с течением времени, при этом $L(\tau_1) = L_1$ и $\Omega(\tau_1) = \Omega_1$. Граница $L(t)$ сечения $\Omega(t)$ состоит из двух участков $L(t) = L^*(t) \bigcup L_\sigma(t)$, где — граница наращивания или граница роста, к которой в рассматриваемый момент времени осуществляется приток материала, при этом $L^*(t) = L^*$ при $\tau \leq \tau_1$, $L_\sigma(t)$ — граница, свободная от напряжений.

Будем считать, что момент приложения нагрузки к приращиваемым элементам $\tau_0(x_1, x_2)$ совпадает с моментом их присоединения к растущему телу $\tau^*(x_1, x_2)$.

В момент $\tau_2 \geq \tau_1$ наращивание тела прекращается и с этого момента оно занимает область $\Pi_2 = \Pi(\tau_2)$ с поперечным сечением $\Omega_2 = \Omega(\tau_2)$, имеющим границу $L_2 = L(\tau_2)$. Заметим, что всюду далее рассматривается достаточно медленные процессы, такие, что в уравнениях равновесия можно пренебречь инерционными членами.

Краевая задача для основного (нерастущего) вязкоупругого стареющего тела на интервале времени $[\tau_0, \tau_1]$ представляет собой традиционную задачу кручения теории вязкоупругости. Методы ее решения хорошо известны (см., напр., [1]) и останавливаться на этом здесь не будем.

Начально-краевую задачу для непрерывно растущего тела на интервале времени $t \in [\tau_1, \tau_2]$ составляют [1–4]:

уравнения равновесия –

$$\sigma_{13,3} = 0, \quad \sigma_{23,3} = 0, \quad \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} = 0 \tag{1}$$

соотношения Коши между скоростями деформации $D_{ij} = \partial\varepsilon_{ij} / \partial t$ и скоростями перемещений $\upsilon_i = \partial u_i / \partial t$ –

$$\begin{gathered} D_{11} = \upsilon_{1,1} = 0, \ D_{22} = \upsilon_{2,2} = 0, \ D_{33} = \upsilon_{3,3} = 0 \\ D_{12} = \frac{1}{2}\left(\upsilon_{1,2} + \upsilon_{2,1}\right) = 0, D_{13} = \frac{1}{2}\left(\upsilon_{1,3} + \upsilon_{3,1}\right), D_{23} = \frac{1}{2}\left(\upsilon_{2,3} + \upsilon_{3,2}\right) \end{gathered} \tag{2}$$

уравнения состояния –

$$\begin{gathered} \sigma_{13} = 2G(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{N}_{\tau_0(x_1,x_2)})\varepsilon_{13}, \sigma_{23} = 2G(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{N}_{\tau_0(x_1,x_2)})\varepsilon_{23} \\ \tau_0(x_1, x_2) = \begin{cases} \tau_0, & (x_1, x_2) \in \Omega_1 \\ \tau^*(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega^*(t) \end{cases} \\ \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{N}_{\tau_0(x_1,x_2)}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}_{\tau_0(x_1,x_2)}\right), \ \boldsymbol{L}_s f(t) = \int_s^t f(\tau) K_1(t,\tau) d\tau \end{gathered} \tag{3}$$

краевое условие на неподвижной части границы –

$$\left(x_1, x_2\right) \in L_\sigma(t): \qquad \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0 \tag{4}$$

начально-краевое условие на растущей границе

$$\left(x_1, x_2\right) \in L(t): \sigma_{13} = \sigma_{13}^*,\ \sigma_{23} = \sigma_{23}^*,\ \sigma_{13}^* n_1 + \sigma_{23}^* n_2 = 0 \quad (t = \tau^*(x_1, x_2); \tag{5}$$

условия равновесия торцевых сечений $\Omega(t)$ –

$$M\left(t\right) = \iint\limits_{\Omega(t)} (x_1\sigma_{23} - x_2\sigma_{13}) dx_1 dx_2,\ \iint\limits_{\Omega(t)} \sigma_{13} dx_1 dx_2 = \iint\limits_{\Omega(t)} \sigma_{23} dx_1 dx_2 = 0 \tag{6}$$

где $\boldsymbol{n} = \{n_1, n_2\}$ — единичный вектор внешней нормали боковой поверхности тела, $\Omega^*(t) = \Omega(t) \setminus \Omega_1$ — образовавшаяся в процессе наращивания часть тела (дополнительное тело), $\sigma_{ij}^*\left(x_1, x_2\right) = \sigma_{ij}\left(x_1, x_2, \tau^*(x_1, x_2)\right)$ — компоненты задаваемого на границе роста $L^*(t)$ полного тензора напряжений, G — модуль упруго мгновенной деформации при сдвиге; $K_1(t,\tau)$ — ядро ползучести; $\boldsymbol{I}$ — тождественный оператор. Значения всех функций в момент времени $\tau_0 \le t \le \tau_1$ известны из решения задачи для основного тела.

Отличительными особенностями начально-краевой задачи (1)–(6) для наращиваемого тела, выводящими ее за рамки классических задач механики деформируемого твердого тела, являются: специфическое начально-краевое условие на растущей границе; нарушение условий совместности деформаций в области, занимаемой дополнительным телом, и выполнение лишь его аналога и аналога соотношений Коши в скоростях соответствующих величин; зависимость определяющих соотношений от функции $\tau_0(x_1, x_2)$, которая может иметь разрывы первого рода.

Используя метод, разработанный в [3, 4], начально-краевую задачу (1)–(6) приведем к начально-краевой задаче с параметром времени t:

$$\begin{gathered}
S_{13,1} + S_{23,2} = 0 \\
D_{13} = \frac{1}{2}\left(\upsilon_{1,3} + \upsilon_{3,1}\right),\ D_{23} = \frac{1}{2}\left(\upsilon_{2,3} + \upsilon_{3,2}\right) \\
S_{13} = 2D_{13},\ S_{23} = 2D_{23}, \quad S_{ij} = \partial\sigma_{ij}^0 \big/ \partial t \\
\left(x_1, x_2\right) \in L(t): \quad S_{13} n_1 + S_{23} n_2 = 0 \\
\frac{dM^0\left(t\right)}{dt} = \iint\limits_{\Omega(t)} (x_1 S_{23} - x_2 S_{13}) dx_1 dx_2 + \iint\limits_{L^*(t)} (x_1\sigma_{23}^* - x_2\sigma_{13}^*) dx_1 dx_2
\end{gathered} \tag{7}$$

Для величин S_{ij} и υ_i справедливы формулы [4, 5]:

$$\begin{gathered}
\upsilon_1 = -\theta_t'\left(t\right) x_2 x_3, \quad \upsilon_2 = \theta_t'\left(t\right) x_1 x_3, \quad \upsilon_3 = \theta_t'\left(t\right) \varphi(x_1, x_2, t) \\
S_{13} = \theta_t'\left(t\right)\left(\varphi_{,1} - x_2\right),\ S_{23} = \theta_t'\left(t\right)\left(\varphi_{,2} + x_1\right)
\end{gathered} \tag{8}$$

где $\varphi(x_1, x_2, t)$ — функция кручения, подлежащая определению, $\theta(t)$ — угол закручивания (крутка). Функция кручения $\varphi(x_1, x_2, t)$ является гармонической в области $\Omega(t)$. Она должна удовлетворять краевому условию

$$\left(x_1, x_2\right) \in L(t): \quad \partial\varphi \big/ \partial\boldsymbol{n} = x_2 n_1 - x_1 n_2$$

Таким образом, решение задачи кручения при помощи функции кручения $\varphi(x_1, x_2, t)$ сведено к определению в области поперечного сечения Ω_1 гармонической функции $\varphi(x_1, x_2, t)$ по заданному значению ее нормальной производной на контуре L_1 (задача Неймана).

Очевидно, что с учетом (8) можно получить

$$\frac{dM^0(t)}{dt} = \theta'_t(t)\iint\limits_{\Omega(t)}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1\varphi_{,2} - x_2\varphi_{,1}\right)dx_1dx_2 + \iint\limits_{L^*(t)}(x_1\sigma^*_{23} - x_2\sigma^*_{13})dl \tag{9}$$

Рассмотрим теперь этап кручения тела после остановки роста. Пусть в момент времени τ_2 наращивание тела прекращается. В этот момент оно занимает область Π_2 с поперечным сечением Ω_2, ограниченным контуром L_2. В этом случае получаем задачу, аналогичную (7). В данном случае для величин υ_i и S_{ij} применимы формулы (7), в которых необходимо положить $t = \tau_2$.

В итоге неклассические краевые задачи, возникающие при исследовании кручения наращиваемых тел, приведены к известным краевым задачам, содержащим некоторый параметр. По найденным решениям последних полностью восстанавливается напряженно-деформированное состояние тела при помощи формул расшифровки [3, 4].

В качестве примера рассмотрим кручение наращиваемой правильной треугольной призмы. Наращивание призмы осуществляется так, чтобы призма в каждый момент времени оставалась правильной. Граница поперечного сечения $L(t)$ является границей роста, т.е. $L(t) = L^*(t)$. Будем считать, что новые приращиваемые элементы не напряжены. Ввиду эквивалентности получаемых задач на каждом рассматриваемом этапе наращивания, достаточно рассмотреть этап непосредственного наращивания. Тогда начально-краевая задача для растущей призмы имеет вид:

$$\begin{gathered}
\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} = 0 \\
D_{13} = \frac{1}{2}\left(\upsilon_{1,3} + \upsilon_{3,1}\right),\ D_{23} = \frac{1}{2}\left(\upsilon_{2,3} + \upsilon_{3,2}\right) \\
\sigma_{13} = 2G(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{N}_{\tau_0(x_1,x_2)})\varepsilon_{13},\ \sigma_{23} = 2G(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{N}_{\tau_0(x_1,x_2)})\varepsilon_{23} \\
\left(x_1, x_2\right) \in L^*(t) = L(t) : \sigma_{13} = \sigma^*_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = \sigma^*_{23} = 0 \quad (t = \tau^*(x_1, x_2)) \\
M(t) = \iint\limits_{\Omega(t)}(x_1\sigma_{23} - x_2\sigma_{13})dx_1dx_2
\end{gathered} \tag{10}$$

Краевая задача (7) для растущей скручиваемой правильной треугольной призмы примет вид:

$$\begin{gathered}
S_{13,1} + S_{23,2} = 0 \\
D_{13} = \frac{1}{2}\left(\upsilon_{1,3} + \upsilon_{3,1}\right),\ D_{23} = \frac{1}{2}\left(\upsilon_{2,3} + \upsilon_{3,2}\right) \\
S_{13} = 2D_{13},\ S_{23} = 2D_{23} \\
\left(x_1, x_2\right) \in L(t) : n_1S_{13} + n_2S_{23} = 0 \\
\frac{dM^0(t)}{dt} = \iint\limits_{\Omega(t)}(x_1S_{23} - x_2S_{13})dx_1dx_2
\end{gathered} \tag{11}$$

Функция кручения $\varphi\left(x_1, x_2, t\right)$ для равностороннего треугольника $L(t)$ известна и имеет вид (см., напр., [6])

$$\varphi\left(x_1, x_2, t\right) = \left(3x_1^2x_2 - x_2^3\right)\Big/\left(6a(t)\right)$$

Зная момент $M(t)$, сначала находим $\dfrac{dM^0(t)}{dt}$ по формуле

$$\frac{dM^0(t)}{dt} = \frac{M_t'(t)}{G(t)} + \int\limits_{\tau_0(x_1,x_2)}^{t} \frac{\partial M(t)}{\partial \tau}\frac{\partial \omega(t,\tau)}{\partial t}d\tau + M\left(\tau_0(x_1,x_2)\right)\frac{\partial \omega\left(t,\tau_0(x_1,x_2)\right)}{\partial t}$$

Затем находим скорость крутки $\theta_t'(t) = \dfrac{5}{9\sqrt{3}a^4(t)}\dfrac{dM^0(t)}{dt}$.

Скорость перемещений и величины S_{13} и S_{23} находим по формулам

$$\upsilon_1 = -\theta_t'(t)x_2x_3\ ,\ \upsilon_2 = \theta_t'(t)x_1x_3,\ \upsilon_3 = \theta_t'(t)\left(3x_1^2x_2 - x_2^3\right)\Big/\left(6a(t)\right)$$

$$S_{13} = \frac{5\left(x_1 - a(t)\right)x_2}{9\sqrt{3}a^5(t)}\frac{dM^0(t)}{dt},\ S_{23} = \frac{5\left(x_1^2 + 2a(t)x_1 - x_2^2\right)}{18\sqrt{3}a^5(t)}\frac{dM^0(t)}{dt}$$

Истинные характеристики напряженно-деформированного состояния восстанавливаются по формулам расшифровки [3, 4]. Для получения решения на этапе после остановки наращивания достаточно в функции кручения принять $t = \tau_2$.

При выбранном законе наращивания касательные напряжения равны нулю в вершинах и в центре тяжести треугольника. В готовом теле (без учета наращивания) максимум касательного напряжения (максимум интенсивности касательных напряжений) достигается на границе в серединах сторон треугольника. При учете процесса наращивания максимум интенсивности касательных напряжений достигается в некоторой точке радиуса вписанной в треугольник окружности, который перпендикулярен к стороне треугольника. На рис.1. показаны предельные распределения интенсивности касательных напряжений вдоль указанного радиуса при различных способах наращивания. Отметим только, что максимум интенсивности касательных напряжений в растущем теле может находиться на границе раздела основного и дополнительного тел (кривая 1), на границе всего тела (кривой 2), а также в любой точке оговоренного радиуса, проходящего в области дополнительного тела (см., напр., кривую 3), т.е. внутри образовавшейся части наращиваемого тела.

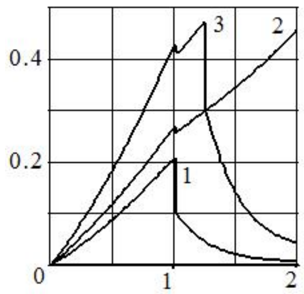


Рис. 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №05-01-00693), Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (программа №13 ОЭ) и гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ №НШ-1245.2006.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1990; Изд-во НАН РА, 1999. 320 с.
2. Арутюнян Н.Х., Манжиров А. В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.
3. Манжиров А.В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 836 – 848.
4. Манжиров А.В., Михин М.Н. Методы теории функций комплексного переменного, в механике растущих тел // Вестник СамГУ. Естественная серия. 2004. № 4(34). С. 82–98
5. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел // М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
6. Михин М.Н. Кручение растущей призмы // Зимняя школа по механике сплошных сред (пятнадцатая). Сборник статей. В 3-х частях. Часть 3. Екатеринбург: УрО РАН, 2007.

<u>Сведения об авторах</u>

Манжиров Александр Владимирович
Доктор физико-математических наук, профессор,заведующий лабораторией
Адрес: Институт проблем механики РАН, пр-т Вернадского, 101, корп. 1
Москва, 119526, Россия
Тел.:+7 926 2332511; E-mail:manzh@inbox.ru, manzh@ipmnet.ru

Михин Михаил Николаевич
Старший преподаватель
Адрес: Московский государственный университет приборостроения и информатики, Стромынка, 20, Москва, 10784, Россия
E-mail:kashira_mgapi@mailru.com

Stephan Victor Joubert
Ph.D., Professor, Research Professor
Адрес:Tshwane University of Technology, Arcadia Campus, Department of Mathematical Technology, Private Bag X680, Pretoria 0001,Nelson Mandela Drive,Pretoria, South Africa
Tel: 012 382 6377, Fax: 012 382 6210

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ С ТРЕЩИНОЙ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Манукян Э.А., Мкртчян М.С.

Задачи о трещинах тесно связаны с задачами о взаимодействии массивных деформируемых тел с абсолютно жесткими тонкими включениями, не сопротивляющимся изгибу. Ввиду их теоретической и практической важности в вопросах механики композитов и прочности разнообразных инженерных конструкций они стали предметом исследования многих авторов. В этом направлении укажем на работы [1-6]. В настоящей работе рассматривается задача об определении компонентов напряженно-деформированного состояния упругой полосы, содержащей на горизонтальной оси трещину конечной длины, верхний берег которой нагружен нормальными напряжениями, а нижний берег частично закреплен абсолютно жестким тонким включением.

1.Пусть упругая полоса $\Pi = \{-\infty < x < \infty,\ -h < x < h\}$ с упругими константами (E, ν), отнесенная к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ на горизонтальной оси Ox, содержит разрез $\omega = \{y = 0, -a < x < a\}$ конечной длины $2a$. Предполагается, что на верхнем берегу $\omega_+ = \{y = +0, -a < x < a\}$ действуют нормальные распределенные силы интенсивности $p_+(x)$, а тангенциальные силы равны нулю. А нижний берег разреза $\omega_- = \{y = -0, -a < x < a\}$ по отрезку $(-b, b)\,(b < a)$ усилен абсолютно жестким тонким включением, которое под действием вертикальной силы $\tilde{P}$ совершает жесткое вертикальное смещение δ. Считается, что под включением действуют только нормальные контактные напряжения. При этом действующие на верхнем берегу разреза вертикальные силы $p_+(x)$ уравновешиваются силой $\tilde{P}$, а отрезки нижнего берега $(-a, -b) \cup (b, a)$ свободны от напряжений. На гранях $y = \pm h$ также действуют уравновешенные вертикальные сосредоточенные силы величиной P.

Требуется определить плотность дислокаций смещений на берегах разреза, распределение нормальных напряжений под включением и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН).

Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи упругую полосу Π вдоль оси Ox разрежем на две части $\Pi_+ = \{-\infty < x < \infty,\ 0 < x < h\}$, $\Pi_- = \{-\infty < x < \infty,\ -h < x < 0\}$, а затем для действующих на их грани $y = 0$ напряжений введем следующие обозначения:

$$\sigma_y^+\Big|_{y=+0} = -\Sigma_+(x) = \begin{cases} -p_+(x) & (|x| < a); \\ -\sigma(x) & (|x| > a); \end{cases} \qquad \tau_{xy}^+\Big|_{y=+0} = -T_+(x) = \begin{cases} 0 & (|x| < a) \\ -\tau(x) & (|x| > a) \end{cases}$$

$$\sigma_y^-\Big|_{y=-0} = -\Sigma_-(x) = \begin{cases} -p_-(x) & (|x| < b); \\ 0 & (b < |x| < a); \\ -\sigma(x) & (|x| > a); \end{cases} \qquad \tau_{xy}^-\Big|_{y=-0} = -T_-(x) = \begin{cases} 0 & (|x| < a) \\ -\tau(x) & (|x| > a) \end{cases} \tag{1}$$

Запишем также граничние условия на $y = \pm h$:

$$\sigma_y^+\Big|_{y=h} = P\delta(x); \quad \tau_{xy}^+\Big|_{y=h} = 0; \qquad \sigma_y^-\Big|_{y=-h} = P\delta(x); \quad \tau_{xy}^-\Big|_{y=-h} = 0 \tag{2}$$

где ¢(x) известная дельта-функция Дирака. Уравнения Ляме для полос $\Pi_\pm$ имеют вид:

$$\begin{cases} \Delta u_\pm(x,y) + \dfrac{\lambda + \mu}{\mu} \dfrac{\partial e_\pm(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \Delta u_\pm(x,y) + \dfrac{\lambda + \mu}{\mu} \dfrac{\partial e_\pm(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3}$$

где $e_\pm(x,y)$ –объемное расширение, $u_\pm(x,y)$, $v_\pm(x,y)$ –соответственно, вертикальное и горизонтальное смещения в точках полос $\Pi_\pm$, а ª, « – константы Ляме.

Далее введем в рассмотрение следующие величины:

$$\mathrm{X}_{\pm}(x) = T_{\pm}(x) + i\Sigma_{\pm}(x) \quad (x \in R); \quad R = \{y = 0; -\infty < x < \infty\}$$

$$\mathrm{X}(x) = \mathrm{X}_{+}(x) - \mathrm{X}_{-}(x) = T_{+}(x) - T_{-}(x) + i\left[\Sigma_{+}(x) - \Sigma_{-}(x)\right]$$

$$\Omega(x) = \mathrm{X}_{+}(x) + \mathrm{X}_{-}(x) = T_{+}(x) + T_{-}(x) + i\left[\Sigma_{+}(x) + \Sigma_{-}(x)\right] \qquad (4)$$

$$w_{\pm}(x, \pm 0) = \frac{du_{\pm}(x, \pm 0)}{dx} + i\frac{dv_{\pm}(x, \pm 0)}{dx} \qquad (x \in R); \quad R = \{y = 0; -\infty < x < \infty\}$$

$$w(x) = w_{+}(x, +0) - w_{-}(x, -0); \qquad h(x) = w_{+}(x, +0) + w_{-}(x, -0)$$

а также плотности дислокации смещений:

$$\Phi(x) = \frac{du_{+}(x, +0)}{dx} - \frac{du_{-}(x, -0)}{dx} = \begin{cases} \varphi(x) & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \frac{dv_{+}(x, +0)}{dx} - \frac{dv_{-}(x, -0)}{dx} = \begin{cases} \psi(x) & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases} \qquad (5)$$

Теперь с помощью преобразования Фурье по переменой x, из уравнений (3) и граничных условиий (1)-(2) с учетом закона Гука для трансформантов комплексных комбинаций напряжений и производных смещений будем иметь:

$$\begin{cases} \hat{w}_{+}(\lambda) = -ia_1(\lambda)\hat{\mathrm{X}}_{+}(\lambda) - ib_2(\lambda)\bar{\hat{\mathrm{X}}}_{+}(-\lambda) - (c_1(\lambda) + d_1(\lambda))\mathrm{P} \\ \hat{w}_{-}(\lambda) = -ia_2(\lambda)\hat{\mathrm{X}}_{-}(\lambda) + ib_2(\lambda)\hat{\mathrm{X}}_{-}(-\lambda) + (c_2(\lambda) + d_2(\lambda))P \end{cases} \qquad (6)$$

где

$$a_1(\lambda) = \frac{\lambda^2 h^2 - (1-\nu)sh(2\lambda h) + (1-2\nu)sh^2(\lambda h)}{2\mu\Delta(\lambda)}$$

$$a_2(\lambda) = \frac{\lambda^2 h^2 + (1-\nu)\mathrm{sh}(2\lambda h) + (1-2\nu)\mathrm{sh}^2(\lambda h)}{2\mu\Delta(\lambda)}$$

$$b_1(\lambda) = b_2(\lambda) = \frac{(1-\nu)\lambda h}{\mu\Delta(\lambda)}; \quad c_1(\lambda) = c_2(\lambda) = \frac{(1-\nu)\mathrm{sh}(\lambda h)}{\mu\Delta(\lambda)}$$

$$d_1(\lambda) = \frac{(1-\nu)h\lambda[\mathrm{ch}(\lambda h) - \mathrm{sh}(\lambda h)]}{\mu\Delta(\lambda)}; \qquad d_2(\lambda) = \frac{(1-\nu)h\lambda[\mathrm{ch}(\lambda h) + \mathrm{sh}(\lambda h)]}{\mu\Delta(\lambda)}$$

$$\hat{w}_{\pm}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\pm}(x)e^{i\lambda x}dx; \quad \hat{\mathrm{X}}_{\pm}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{X}_{\pm}(x)e^{i\lambda x}dx; \quad \hat{\mathrm{X}}_{\pm}(-\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{X}_{\pm}(x)e^{-i\lambda x}dx$$

Отметим, что эти выражения совпадают с известными результатами [6] (стр. 20 ф. (1.5)). Из соотношения (6) после элементарных преобразований с учетом обозначений (4)-(5) для $\hat{\Omega}(\lambda)$ и $\hat{h}(\lambda)$ будем иметь

$$\hat{\Omega}(\lambda) = -i\frac{2\mu)}{1-\nu}\frac{\mathrm{sh}(2\lambda h)\Delta(\lambda)}{\mathrm{sh}^2(2\lambda h) - 4\lambda^2 h^2}\hat{W}(\lambda) - i\frac{4\mu}{1-\nu}\frac{\lambda h\Delta(\lambda)}{\mathrm{sh}^2(2\lambda h) - 4\lambda^2 h^2}\bar{\hat{W}}(-\lambda) +$$

$$+\frac{1}{1-\nu}\frac{\mathrm{sh}(2\lambda h)[\lambda^2 h^2 + (1-2\nu)\mathrm{sh}^2(\lambda h)]}{\mathrm{sh}^2(2\lambda h) - 4\lambda^2 h^2}\hat{\mathrm{X}}(\lambda) - \frac{2}{1-\nu}\frac{\nu h[\lambda^2 h^2 + (1-2\nu)\mathrm{sh}^2(\lambda h)]}{\mathrm{sh}^2(2\lambda h) - 4\lambda^2 h^2}\bar{\hat{\mathrm{X}}}(-\lambda) -$$

$$-i\frac{4[\mathrm{sh}(\lambda h) + \lambda h\mathrm{ch}(\lambda h)]}{\mathrm{sh}(2\lambda h) + 2\lambda h}P$$

$$\hat{h}(\lambda)=-\frac{1}{1-\nu}\frac{\mathrm{sh}(2\lambda h)[\lambda^2h^2+(1-2\nu)\mathrm{sh}^2(\lambda h)]}{\mathrm{sh}^2(2\lambda h)-4\lambda^2h^2}\hat{W}(\lambda)-$$
$$-\frac{2}{1-\nu}\frac{\nu h[\lambda^2h^2+(1-2\nu)\mathrm{sh}^2(\lambda h)]}{\mathrm{sh}^2(2\lambda h)-4\lambda^2h^2}\times \tag{7}$$
$$\times\bar{\hat{W}}(-\lambda)-i\frac{1}{2\mu(1-\nu)}\frac{\mathrm{sh}(2\lambda h)[H_1(\lambda)H_2(\lambda)+4(1-\nu)^2\lambda^2h^2]}{\Delta(\lambda)[\mathrm{sh}^2(2\lambda h)-4\lambda^2h^2]}\hat{\mathrm{X}}(\lambda)+i\frac{1}{\mu(1-\nu)}\times$$
$$\times\frac{\lambda h[H_1(\lambda)H_2(\lambda)+4(1-\nu)^2\lambda^2h^2]}{\Delta(\lambda)[\mathrm{sh}^2(2\lambda h)-4\lambda^2h^2]}\bar{\hat{\mathrm{X}}}(-\lambda)-\frac{2}{\mu}\frac{A_0(\lambda)B_0(\lambda)-(1-\nu)C_0(\lambda)}{\Delta(\lambda)[\mathrm{sh}(2\lambda h)+2\lambda h]}P$$

где

$$H_1(\lambda)=\lambda^2h^2-(1-\nu)\mathrm{sh}(2\lambda h)+(1-2\nu)\mathrm{sh}^2(\lambda h);$$
$$H_2(\lambda)=\lambda^2h^2+(1-\nu)\mathrm{sh}(2\lambda h)+(1-2\nu)\mathrm{sh}_2(\lambda h)$$
$$A_0(\lambda)=\mathrm{sh}(\lambda h)+\lambda h\mathrm{ch}(\lambda h);B_0(\lambda)=\lambda_2h^2+(1-2\nu)\mathrm{sh}^2(\lambda h);$$
$$C_0(\lambda)=\lambda h\mathrm{sh}(\lambda h)[\mathrm{sh}(2\lambda h)+2\lambda h]$$

Учитывая последние соотношения и (4)-(5), из (7) с помощью обратного преобразования Фурье получим систему ключевых уравнений задачи:

$$\begin{cases}\Omega(x)=-\frac{\mu}{\pi(1-\nu)}\int_{-a}^{a}\frac{w(s)ds}{s-x}-\frac{2\mu}{\pi(1-\nu)}\int_{-a}^{a}K_{11}(x-s)w(s)ds-\\ -\frac{2\mu}{\pi(1-\nu)}\int_{-a}^{a}K_{12}(x-s)\bar{w}(s)ds+i\frac{1-2\nu}{2\pi(1-\nu)}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{X}(s)ds}{s-x}\\ -\frac{i}{\pi(1-\nu)}\int_{-a}^{a}L_{11}(x-s)\mathrm{X}(s)ds+\frac{2i}{\pi(1-\nu)}\int_{-a}^{a}L_{12}(x-s)\bar{\mathrm{X}}(s)ds-\\ \qquad -i\frac{4P}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{[\mathrm{sh}(\lambda h)+\lambda h\mathrm{ch}(\lambda h)]\cos\lambda xd\lambda}{\mathrm{sh}(2\lambda h)+2\lambda h}; \qquad (x\in R)\\ h(x)=-i\frac{1-2\nu}{2\pi(1-\nu)}\int_{-a}^{a}\frac{w(s)ds}{s-x}+\frac{i}{\pi(1-\nu)}\int_{-a}^{a}L_{11}(x-s)w(s)ds+\\ +\frac{2i}{\pi(1-\nu)}\int_{-a}^{a}L_{12}(x-s)\bar{w}(s)ds+\frac{3-4\nu}{4\pi\mu(1-\nu)}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{X}(s)ds}{s-x}-\\ -\frac{2}{4\pi\mu(1-\nu)}\int_{-a}^{a}K_{21}(x-s)\mathrm{X}(s)ds+\frac{1}{\pi\mu(1-\nu)}\int_{-a}^{a}K_{22}(x-s)\bar{\mathrm{X}}(s)ds-\\ \qquad -\frac{2P}{\pi\mu}\int_{0}^{\infty}\frac{[A_0(\lambda)B_0(\lambda)-(1-\nu)C_0(\lambda)\}]\cos\lambda xd\lambda}{\Delta(\lambda)[\mathrm{sh}(2\lambda h)+2\lambda h]}; \qquad (x\in R)\end{cases} \tag{8}$$

где

$$K_{11}(x)=\int_0^\infty\left\{\frac{\Delta(\lambda)\mathrm{sh}(2\lambda h)}{\mathrm{sh}^2(2\lambda h)-4\lambda^2h^2}+\frac{1}{2}\right\}\sin\lambda xd\lambda;\quad K_{12}(x)=\int_0^\infty\frac{\lambda h\Delta(\lambda)\sin\lambda xd\lambda}{\mathrm{sh}^2(2\lambda h)-4\lambda^2h^2}$$
$$K_{21}(x)=\int_0^\infty\left\{\frac{\mathrm{sh}(2\lambda h)[H_1(\lambda)H_2(\lambda)+4(1-\nu)^2\lambda^2h^2]}{\Delta(\lambda)[\mathrm{sh}^2(2\lambda h)-4\lambda^2h^2]}-\frac{3-4\nu}{2}\right\}\sin\lambda xd\lambda$$

$$K_{22}(x)=\int_0^\infty \frac{\lambda h[H_1(\lambda)H_2(\lambda)+4(1-\nu)^2\lambda^2h^2]}{\Delta(\lambda)[\mathrm{sh}^2(2\lambda h)-4\lambda^2h^2]}\sin\lambda x d\lambda;$$

$$L_{12}(x)=\int_0^\infty \frac{\lambda h[\lambda^2h^2+(1-2\nu)\mathrm{sh}^2(\lambda h)]}{\mathrm{sh}^2(2\lambda h)-4\lambda^2h^2}\sin\lambda x d\lambda$$

$$L_{11}(x)=\int_0^\infty \left\{\frac{\mathrm{sh}(2\lambda h)[\lambda^2h^2+(1-2\nu)\mathrm{sh}^2(\lambda h)]}{\mathrm{sh}^2(2\lambda h)-4\lambda^2h^2}-\frac{1-2\nu}{2}\right\}\sin\lambda x d\lambda$$

Рассматривая теперь первое уравнение системы (8) на $(-a,a)$, а второе уравнение на $(-b,b)$, придем к определяющей системе сингулярных интегральных уравнений задачи:

$$\begin{cases}
-\dfrac{\mu}{\pi(1-\nu)}\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{w(s)ds}{s-x}-\frac{2\mu}{\pi(1-\nu)}\int_{-a}^{a}K_{11}(x-s)w(s)ds-\\
-\dfrac{2\mu}{\pi(1-\nu)}\displaystyle\int_{-a}^{a}K_{12}(x-s)\overline{w}(s)ds-ip_-(x)+\frac{1-2\nu}{2\pi(1-\nu)}\int_{-b}^{b}\frac{p_-(s)ds}{s-x}-\\
-\dfrac{1}{\pi(1-\nu)}\displaystyle\int_{-b}^{b}L(x-s)p_-(s)ds=ip_+(x)+\frac{1-2\nu}{2\pi(1-\nu)}\int_{-a}^{a}\frac{p_+(s)ds}{s-x}-\\
-\dfrac{1}{\pi(1-\nu)}\displaystyle\int_{-a}^{a}L(x-s)p_+(s)ds+i\frac{4P}{\pi}\int_0^\infty\frac{[\mathrm{sh}(\lambda h)+\lambda h\mathrm{ch}(\lambda h)]\cos\lambda x d\lambda}{\mathrm{sh}(2\lambda h)+2\lambda h};\quad (x\in(-a,a))\\
\quad -w(x)-i\dfrac{1-2\nu}{2\pi(1-\nu)}\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{w(s)ds}{s-x}+\frac{i}{\pi(1-\nu)}\int_{-a}^{a}L_{11}(x-s)w(s)ds+\\
\quad +\dfrac{2i}{\pi(1-\nu)}\displaystyle\int_{-a}^{a}L_{12}(x-s)\overline{w}(s)ds-i\frac{3-4\nu}{4\pi\mu(1-\nu)}\int_{-b}^{b}\frac{p_-(s)ds}{s-x}+\\
\quad +\dfrac{i}{2\pi\mu(1-\nu)}\displaystyle\int_{-b}^{b}K_2(x-s)p_-(s)ds=2w_-(x)-i\frac{3-4\nu}{4\pi\mu(1-\nu)}\int_{-a}^{a}\frac{p_+(s)ds}{s-x}+\\
\quad +\dfrac{i}{2\pi\mu(1-\nu)}\displaystyle\int_{-a}^{a}K_2(x-s)p_+(s)ds+\\
\quad +\dfrac{2P}{\pi\mu}\displaystyle\int_0^\infty\frac{[A_0(\lambda)B_0(\lambda)-(1-\nu)C_0(\lambda)\}]\cos\lambda x d\lambda}{\Delta(\lambda)[\mathrm{sh}(2\lambda h)+2\lambda h]};\quad (x\in(-b,b))
\end{cases} \tag{9}$$

где

$$L(x-s)=L_{11}(x-s)+2L_{12}(x-s);\quad K_2(x-s)=K_{21}(x-s)+2K_{22}(x-s).$$

Первое уравнение системы (9) должно рассматриваться при условии

$$\int_{-a}^{a}w(x)dx=0 \tag{10}$$

эквивалентное условию непрерывности смещений в концевых точках разреза, а второе уравнение должно рассматриваться при условии

$$\int_{-b}^{b}p_-(x)dx=\int_{-a}^{a}p_+(x)dx=\widetilde{P} \tag{11}$$

являющееся условием равновесия включения.

Рассматривая же первое уравнение системы (8) вне разреза, будем иметь:

$$
\begin{aligned}
\tau(x)+ip(x) &= -\frac{\mu}{2\pi(1-\nu)}\int_{-a}^{a}\frac{w(s)ds}{s-x}-\frac{\mu}{\pi(1-\nu)}\int_{-a}^{a}K_{11}(x-s)w(s)ds- \\
&-\frac{\mu}{\pi(1-\nu)}\int_{-a}^{a}K_{12}(x-s)\overline{w}(s)ds+ \\
&+i\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{X}(s)ds}{s-x}-\frac{i}{2\pi(1-\nu)}\int_{-a}^{a}L_{11}(x-s)\mathrm{X}(s)ds+ \\
&+\frac{i}{\pi(1-\nu)}\int_{-a}^{a}L_{12}(x-s)\overline{\mathrm{X}}(s)ds-i\frac{2P}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{[\mathrm{sh}(\lambda h)+\lambda h\,\mathrm{ch}(\lambda h)]\cos\lambda x d\lambda}{\mathrm{sh}(2\lambda h)+2\lambda h}; \qquad (|x|>a)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Таким образом, поставленная задача о напряженном состоянии упругой полосы с трещиной и содержащей в ней абсолютно жесткого включения сводится к решению системы (9) при условиях (10)-(11). После решения (9)-(11) разрушающие напряжения определяются формулой (12).

2.Для решения определяющей СИУ (9)–(11) сначала интервал $(-a,a)$ системы преобразуем в интервал (-1;1), а затем определяющее СИУ преобразуем в систему интегральных уравнений относительно функций ¨ 0(¦) = ¨ (a¦), · 0(¦) = · (a¦), p_0(¦) = p(b¦)/« на интервале (-1,1). Решение системы (9)–(11) строится численно-аналитическим методом [7, 8, 9] с привлечением математического аппарата ортогональных многочленов Чебышева.

КИН определяются формулами [7]

$$
k_1^{\pm}-ik_2^{\pm}=\mp\frac{\mu}{2i(1-\nu)}\lim_{x\to\pm a}\left[\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a}}w(x)\right]
$$

где верхние знаки относятся к правому концу трещины $x=a$, а нижние знаки – к левому концу трещины $x=-a$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. О напряженном состоянии в неоднородном пластинке с разрезами. //Изв. АН. СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 1. С.131-137.
2. Райс, Си. Плоские задачи о трещинах, расположенных на границе раздела двух различных сред.//Прикладная механика. Труды амер. о.-ва инж.-мех., сер. Е, 1965. Т. 32. № 2. С. 186-192.
3. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений. М.: Наука, 1982. 344с.
4. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В. Стащук Н.Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наукова думка, 1983. 288с.
5. Ворвич И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М: Наука, 1974. 456с.
6. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М: Наука, 1983. 488с.
7. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.

8. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and solution of Crack Problems; pp. 368-425. Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973.
9. Theocaric P.S., Iokamidis N.I. Numerical Integration Methods for the solution of singular Integral Equations. Quart. Appl. Math., vol XXXV, No1, pp. 173-185, 1977.

<u>Сведения об авторах</u>

Манукян Эмиль Абетович
Кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, Институт механики НАН РА
Адрес: Армения, 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}, ИМех. НАН
E-mail: mechins@sci.am

Мкртчян Мушег Сережаевич,
Кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник,
Тел: (37410)-43-16-52

ПЛАСТИНКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАСАТЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ. УЧЕТ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ ПО ТЕОРИИ С. А. АМБАРЦУМЯНА

Мартиросян К.Л.

В [1] предлагается уточненный вариант гипотезы Кирхгофа, который является промежуточным между теорией пластин Кирхгофа и теориями, учитывающими поперечные сдвиги. Устанавливаются условия, при которых основными являются либо обобщенное плоское напряженное, либо изгибное состояния.

В [2] рассматривается задача изгиба пластики по форме цилиндрической поверхности при наличии касательных нагрузок на лицевых поверхностях. Предполагается, что на кромках пластинки заданы условия скользящего контакта, а на лицевых поверхностях приложены только касательные нагрузки. Задача решена на основе точных уравнений теории упругости. Для сравнения с результатами приближенных теорий, теории Кирхгофа для пластин и теорий, учитывающих поперечные сдвиги, необходимо представить полученное решение в виде разложения по параметру относительной толщины. Задача решена также на основе уточненной теории А.С. Амбарцумяна. Учет поперечного сдвига в обоих случаях приводит к уменьшению прогиба в отличие от действия нормальной нагрузки, которая приводит к увеличению прогиба.

В настоящей работе рассматривается пластинка под действием касательных нагрузок при учете поперечных сдвигов по теории С. А. Амбарцумяна. Задача рассматривается при произвольной нагрузке и при закрепленных краях.

В итоге, так же, как и в [2], получается, что учет поперечных сдвигов приводит к уменьшению прогиба.

1. Пусть пластинка-полоса занимает область $0 \le x \le a$, $0 < y < b$, $-h \le z \le h$

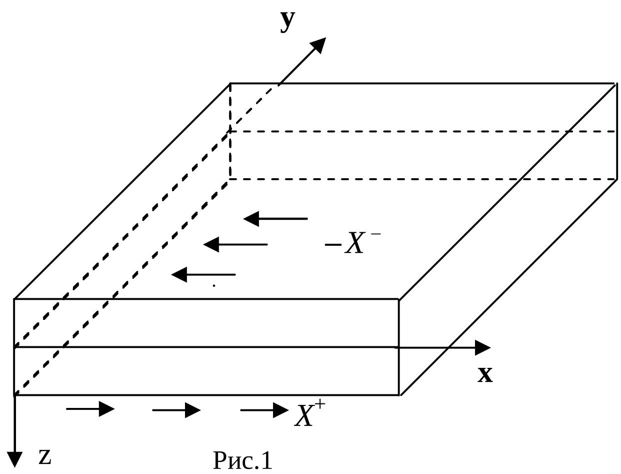


Рис.1

Предполагается, что на лицевых поверхностях заданы касательные нагрузки:

$$z = h: \quad \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{31} = X^+(x,y), \quad \sigma_{32} = 0$$
$$z = -h: \quad \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{31} = X^-(x,y), \quad \sigma_{32} = 0 \tag{1}$$

Допущения относительно перемещений [3], [4]:

$$U_1 = U - z\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{z}{2G}\left(X_1 + \frac{z}{2h}X_2\right) + \frac{1}{G}g(z)\varphi_1$$
$$U_2 = V - z\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{1}{G}g(z)\varphi_2, \quad U_3 = W, \quad g(z) = z\left(1 - \frac{z^2}{3h^2}\right) \tag{2}$$

где U, V, W – функции от координат x, y, G – модуль сдвига $X_1 = X^+ - X^-$, $X_2 = X^+ + X^-$.

Осредненные уравнения равновесия в усилиях:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + X_2 = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} + hX_1 = N_1, \quad \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = N_2 \tag{4}$$

$$T_1 = \int_{-h}^{h} \sigma_{11} dz, \quad T_2 = \int_{-h}^{h} \sigma_{22} dz, \quad S = \int_{-h}^{h} \sigma_{12} dz$$

где
$$N_1 = \int_{-h}^{h} \sigma_{13} dz, \quad N_2 = \int_{-h}^{h} \sigma_{23} dz \tag{5}$$

$$M_1 = \int_{-h}^{h} z\sigma_{11} dz, \quad M_2 = \int_{-h}^{h} z\sigma_{22} dz, \quad H = \int_{-h}^{h} z\sigma_{12} dz$$

Допущения относительно основных напряжений совпадают с допущениями теории Кирхгофа:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), \quad \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12} \tag{6}$$

где ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга.

Выражения для напряжений поперечного сдвига:

$$\sigma_{13} = 2G\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = 2G\varepsilon_{23} \tag{7}$$

Выражения для напряжений с учетом (2), (6), (7) и

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \quad i, j = 1,2,3 \tag{8}$$

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\frac{\partial V}{\partial y} - z\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) + \frac{z}{2G}\frac{\partial}{\partial x}\left(X_1 + \frac{z}{2h}X_2\right) + \frac{g(z)}{G}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \nu\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)\right]$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial V}{\partial y} + \nu\frac{\partial U}{\partial x} - z\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) + \nu\frac{z}{2G}\frac{\partial}{\partial x}\left(X_1 + \frac{z}{2h}X_2\right) + \frac{g(z)}{G}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \nu\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)\right]$$

$$\sigma_{12} = G\left[\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{z}{2G}\frac{\partial}{\partial y}\left(X_1 + \frac{z}{2h}X_2\right) + \frac{g(z)}{G}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \nu\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)\right]$$

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2}\left(X_1 + \frac{z}{h}X_2\right) + g'\varphi_1, \quad \sigma_{23} = g'\varphi_2 \tag{9}$$

Подставляя выражения (9) в (5), получим:

$$T_1 = C\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{h}{12G}\frac{\partial X_2}{\partial x}\right), \quad T_2 = C\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \nu\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\nu h}{12G}\frac{\partial X_2}{\partial x}\right)$$

$$S = \frac{1-\nu}{2}C\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{h}{12G}\frac{\partial X_2}{\partial y}\right) \tag{10}$$

где $C = \dfrac{2Eh}{1-\nu^2}$

$$M_1 = -D\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{1}{2G}\frac{\partial X_1}{\partial x} - \frac{4}{5G}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)\right]$$

$$M_2 = -D\left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\nu}{2G}\frac{\partial X_1}{\partial x} - \frac{4}{5G}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \nu\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)\right]$$

$$H = -(1-\nu)D\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{X_1}{4G} - \frac{2}{5G}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)\right] \tag{11}$$

$$N_1 = \frac{4h}{3}\varphi_1 + hX_1, \quad N_2 = \frac{4h}{3}\varphi_2$$

где $D = \dfrac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$

Подставляя выражения (10) в осредненные уравнения равновесия (3), получим следующие уравнения относительно планарных перемещений срединной поверхности пластинки:

$$\begin{aligned} &\Delta U + \Theta \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) = -\frac{2X_2}{(1-\nu)C} - \frac{\Theta h}{12G}\left[\frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 X_2}{\partial y^2}\right] \\ &\Delta V + \Theta \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) = -\frac{\Theta h}{12G}\frac{\partial^2 X_2}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{12}$$

где $\Theta = \dfrac{1+\nu}{1-\nu}$

Уравнения для искомых прогиба и функций φ_1, φ_2 получаются в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = -\frac{3}{4}\frac{\partial X_1}{\partial x} \\ &D\frac{\partial}{\partial x}\Delta W - \frac{8h^3}{15}\left[\Delta\varphi_1 + \Theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)\right] + \frac{4h}{3}\varphi_1 = \frac{4h^3}{3(1-\nu)}\left(\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 X_1}{\partial y^2}\right) \\ &D\frac{\partial}{\partial y}\Delta W - \frac{8h^3}{15}\left[\Delta\varphi_2 + \Theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)\right] + \frac{4h}{3}\varphi_2 = \frac{4h^3}{3(1-\nu)}\left(\nu\frac{\partial^2 X_1}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 X_1}{\partial x \partial y}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

2. Рассматривается изгиб пластинки по форме цилиндрической поверхности. Предполагается, что на лицевых поверхностях заданы касательные нагрузки:

$$z = h \quad X^+ = \tau^+(x), \quad z = -h \quad X^- = 0 \tag{14}$$

При условиях (14) уравнения (12) и (13) принимают вид:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 U_0}{dx^2} = -\frac{\tau^+}{C} - \frac{h}{12G}\frac{d^2\tau^+}{dx^2}, \qquad \frac{d\varphi_1}{dx} = -\frac{3}{4}\frac{d\tau^+}{dx} \\ &D\frac{d^3 W_0}{dx^3} - \frac{16h^3}{15(1-\nu)}\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \frac{4}{3}h\varphi_1 = \frac{4h^3}{3(1-\nu)}\frac{d^2\tau^+}{dx^2} \end{aligned} \tag{15}$$

Общее решение обыкновенных дифференциальных уравнений будет:

$$\begin{aligned} &U_0 = -\frac{1}{C}\int_0^x (x-\zeta)\tau^+(\zeta)d\zeta - \frac{h}{12G}\tau^+ + C_1 x + C_2, \qquad \varphi_1 = -\frac{3}{4}\tau^+ + C_3 \\ &W_0 = \frac{8h^3}{15D(1-\nu)}\int_0^x \tau^+(\zeta)d\zeta + \frac{h}{2D}\int_0^x (x-\zeta)^2\tau^+(\zeta)d\zeta - \frac{2h}{9D}x^3 C_3 + \frac{x^2}{2}C_4 + C_5 x + C_6 \end{aligned} \tag{16}$$

Рассмотрим несколько частных случаев:

1. Пусть на кромках пластины заданы осредненные условия жесткой заделки по теории С.А. Амбарцумяна:

$$x = 0, a \qquad U_0 = -\frac{h}{12G}{}^{2\,+}; \quad W_0 = 0; \quad \frac{dW_0}{dx} - \frac{4}{5G}\,{}^{\cdot\cdot}{}_1 = \frac{2^{\,+}}{2G} \tag{17}$$

При $\tau^+(x) = \tau_0 = \text{const}$ удовлетворяя граничным условиям (17), находим постоянные C_i $(i = 1,2,...6)$, которые подставляя в выражения (16), получим решение уравнений (15):

$$U_0 = \frac{\tau_0(1-\nu)}{8G}\frac{a^2}{h}\left[\frac{x}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{2h^2}{3a^2(1-\nu)}\right], \quad \varphi_1 = -\frac{6h^2\tau_0}{a^2(1-\nu)}\left[1 + \frac{48h^2}{5a^2(1-\nu)}\right]^{-1}$$

$$W_0 = \frac{\tau_0 x}{2G}\left[1+\frac{48h^2}{5a^2(1-\nu)}\right]^{-1}(1-\frac{x}{a})(1-\frac{2x}{a}) \tag{18}$$

2. Предположим, что на кромках пластины заданы условия жесткой заделки по варианту С.А. Амбарцумяна [3]:

$$x = 0, a \qquad U_1\big|_{z=\pm z_0} = 0;\ \ U_2\big|_{z=\pm z_0} = 0;\ \ U_3 = 0 \tag{19}$$

При $\tau^+(x) = \tau_0 = \text{const}$ удовлетворяя граничным условиям (19), находим постоянные $C_i\ \ (i = 1,2,...6)$, которые подставляя в выражения (16), получим решение уравнений (15)

$$U_0 = \frac{\tau_0}{8G}\frac{a^2(1-\nu)}{h}\left[\frac{x}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{2z_0{}^2}{a^2(1-\nu)}\right]$$

$$\varphi_1 = -\frac{6h^2\tau_0}{a^2(1-\nu)}\left[1+\frac{12h^2-4z_0{}^2}{a^2(1-\nu)}\right]^{-1} \tag{20}$$

$$W_0 = \frac{\tau_0 x}{2G}\left[1+\frac{12h^2-4z_0{}^2}{a^2(1-\nu)}\right]^{-1}(1-\frac{x}{a})(1-\frac{2x}{a})$$

Следует отметить, что в решениях (20) и (18) при $z_0 = h/\sqrt{3}$ совпадают продольные перемещения, а при $z_0 = \sqrt{3/5}h$ – прогибы пластинки.

3. Рассмотрим частный случай статьи [5], когда на лицевой поверхности заданы касательные нагрузки (14) и условия закрепленного края. В этом случае решение имеет вид:

$$U = \frac{\tau_0(1-\nu)}{8G}\frac{ax}{h}\left(1-\frac{x}{a}\right)$$

$$W = \frac{\tau_0 x}{2G}\left(1+\frac{96h^2}{5a^2(1-\nu)}\right)^{-1}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{2x}{a}\right) \tag{21}$$

При этом отметим, что в статье [5], когда на верхней и нижней лицевых поверхностях заданы касательные нагрузки, прогиб пластинки так же, как и в решении (21), уменьшается при учете поперечного сдвига.

В результате, как и в статье [2], учет поперечных сдвигов приводит к уменьшению прогиба.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А., Белубекян М. В. Тонкая пластинка при действии поверхностной касательной нагрузки. //Изв. НАН Армении. Сер. техн. наук. 1999. Т. 52. №3. С. 278-283.
2. Белубекян М.В., Мартиросян К.Л. К задаче изгиба пластинки по форме цилиндрической поверхности при наличии касательных нагрузок на лицевых поверхностях. //Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т. 60. №2. С. 41-46
3. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М. : Наука, 1987. 360 с.
4. 4.Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. //Проблемы механики тонких деформируемых тел. 2002. С. 67-88.
5. Киракосян Р.М. Влияние распределения касательных напряжений по толщине пластинки при наличии касательных поверхностных нагрузок. //Докл. НАН Армении. 2006. Т. 106. №4. С. 304-311.

Сведения об авторе:

Мартиросян Кристина Левоновна

Младший научный сотрудник, Институт механики НАН РА

Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б,Тел: (+37410) 52-48-90

E-mail: kristine@mechins.sci.am

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНКИ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ И НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССЫ НА КРОМКАХ

Мартиросян С. Р.

Рассматривается тонкая пластинка конечной длины, обтекаемая сверхзвуковым потоком газа. Массой пластинки пренебрегается, но принимается, что на подкрепленных кромках, одна из которых имеет жесткое скользящее защемление, а другая – шарнирное опирание, имеются сосредоточенные массы. Определяются критические скорости обтекания, приводящие к флаттерной неустойчивости.

1. Пусть тонкая пластинка в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \le x \le l$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Пластинка обтекается с одной стороны в направлении оси Ox сверхзвуковым потоком газа с невозмущенной скоростью V. Принимается справедливость гипотезы Кирхгофа и поршневой теории [1]. Считается, что в направлении оси Oy пластинка достаточно длинная, а следовательно, колебания пластинки имеют форму цилиндрической поверхности, т.е. не зависят от координаты y. При указанных допущениях уравнение изгибных колебаний пластинки имеет вид [1,2]

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + a_0\rho_0\left(\frac{\partial w}{\partial t} + V\frac{\partial w}{\partial x}\right) + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

Здесь ρ, ρ_0 - плотности материала пластинки и невозмущенного потока газа соответственно; V - скорость звука в невозмущенной газовой среде; $w = w(x,t)$ - функция прогиба точек срединной поверхности пластинки; D - цилиндрическая жесткость на изгиб. Решение уравнения (1) при различных статических граничных условиях на длинных кромках пластинки исследовано А.А. Мовчаном [3].

Пусть одна из длинных кромок имеет жесткое скользящее защемление, а другая – шарнирное опирание:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \quad x = 0; \qquad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad x = l \tag{2}$$

Исследуем уравнение (1) при граничных условиях (2). Задача устойчивости состоит в нахождении такого наименьшего значения скорости потока $V_{кр}$, при котором возмущенное движение пластинки становится неустойчивым.

Представим решение уравнения (1) в виде

$$w(x,t) = f(x)\cdot\exp(i\omega t) \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции $f(x)$.

Задача устойчивости пластинки существенно упрощается, если применить статический метод Эйлера. Тогда вместо уравнения (1) с граничными условиями (2) необходимо решить уравнение [2]

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + s^3\frac{dw}{dx} = 0, \quad w = w(x), \quad s^3 = a_0\rho_0 V D^{-1} \tag{4}$$

при граничных условиях

$$w' = 0, \quad w''' = 0, \quad x = 0; \qquad w = 0, \quad w'' = 0, \quad x = l \tag{5}$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (4), определяются как

$$p_1 = 0, \qquad p_2 = -s, \qquad p_{3,4} = 0,5(1 \pm i\sqrt{3}) \tag{6}$$

В соответствии с (6), общее решение уравнения (4) записывается в виде

$$w(x) = A_1 + A_2\cdot\exp(-sx) + (A_3\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}sx) + A_4\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}sx))\cdot\exp(\frac{sx}{2}) \tag{7}$$

Подставляя (7) в (5), получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Приравнивая определитель этой системы к нулю, получаем уравнение относительно параметра sl:

$$0,5\exp(-sl) + \exp(\frac{sl}{2}) \cdot \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} sl) = 0 \tag{8}$$

имеющее множество решений, наименьшее из которых $(sl)_0 \approx 1,85$ определяет критическое значение скорости потока $V_{\text{кр}0} \approx 6,33 D(a_0 \rho_0 l^3)^{-1}$, приводящее к потере статической устойчивости пластинки – дивергенции, состоящей в монотонном выпучивании пластинки.

2. Так как характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (4), имеет простые корни (6), то появилась идея исследования динамических задач (флаттерной неустойчивости), в которых динамические члены учитываются в граничных условиях. Такая идея явилась основополагающей в методе, который был использован В.В. Болотиным для решения задачи устойчивости балки, сжатой следящей силой [1]. В соответствии с этим, вместо уравнения (1) рассматривается уравнение, в котором динамические силы пренебрегаются, как и при статическом подходе:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + s^3 \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad w = w(x,t), \qquad s^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \tag{9}$$

При этом предполагается, что на каждой подкрепленной кромке имеется сосредоточенная масса, т.е. граничные условия (2) заменяются условиями [4]

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -\beta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad x = 0; \qquad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\alpha \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \quad x = l \tag{10}$$

$$\alpha = JD^{-1}, \quad \beta = mD^{-1}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \tag{11}$$

α, β - параметры, характеризующие сосредоточенный инерционный момент J и массу m, приложенные к шарнирно опертой кромке $x = l$ и кромке с жестким скользящим защемлением $x = 0$ соответственно.

Подставляя решение (3) в уравнение (9) и граничные условия (10), получаем, соответственно, обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции $f(x)$, общее решение которого совпадает с выражением (7), и следующие условия относительно функции $f(x)$:

$$f' = 0, \quad f''' - \beta\omega^2 f = 0, \quad x = 0; \qquad f = 0, \quad f'' - \alpha\omega^2 f = 0, \quad x = l \tag{12}$$

Здесь так же, как и в методе Эйлера, подставляя общее решение вида (7) в граничные условия (12), получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Приравнивая определитель этой системы нулю, получаем алгебраическое уравнение относительно квадратов собственных частот колебаний пластинки ω^2:

$$\tilde{\alpha}\tilde{\beta} A(r) - (\tilde{\beta} B_1(r) + \tilde{\alpha} B_2(r)) r\omega^2 + r^4 C(r) = 0 \tag{13}$$

$$A(r) = \mathrm{ch}(r) - \exp(0,5r) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} r\right) - \exp(-0,5r) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} r\right)$$

$$B_1(r) = 2\mathrm{sh}(0,5r) \cdot \left(\mathrm{ch}(0,5r) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} r\right)\right)$$

$$B_2(r) = -0,5\exp(-r) + \exp(0,5r) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} r\right)$$

$$C(r) = 0,5\exp(-r) + \exp(0,5r)\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right);\ r = sl;\ \tilde{\alpha} = \alpha l;\ \tilde{\beta} = \beta l^3$$

Графо-аналитические методы исследования, результаты которых подтверждены численными расчетами, показали следующее. Неустойчивость дивергентного типа, определяемая значением $\omega^2 = 0$, которому соответствует постоянное отклонение системы от положения исходного равновесия, имеет место при значениях $sl \in \{1,85;5,43;...;(2n+1)\pi/\sqrt{3};...\}$, $k \in [0,\infty)$, $k = \tilde{\alpha}(\tilde{\beta})^{-1}$.При этом соответствующие критические значения скорости потока газа разграничивают области устойчивости и неустойчивости. Переход через них вызывает плавное изменение характера движения – плавный переход от гармонических колебаний к апериодическому движению по нарастающей экспоненте и, наоборот, с ограниченной скоростью выпучивания пластинки. Здесь, как и при статическом подходе, первая точка статической потери устойчивости – дивергенции $(sl)_0 \approx 1,85$, которой соответствует скорость потока $V_{\text{кр}0} \approx 6,33D(a_0\rho_0 l^3)^{-1}$. А после происходит динамическая потеря устойчивости – плавный переход от гармонических колебаний к апериодическому движению по нарастающей амплитуде при всех $k \in [0,\infty)$. При малых k $(k \in [0;0,1))$ зоны динамической неустойчивости флаттерного типа отсутствуют. Зона флаттерной неустойчивости впервые появляется при $k \approx 0,1$ и определяется значениями $sl \in (5,83;7,12)$: в граничных точках $(sl)_{\text{фл}} \approx 5,83$ и $(sl) \approx 7,12$ происходит, соответственно, плавный переход от устойчивого движения к неустойчивому флаттерного типа и наоборот - гармонические колебания пластинки плавно переходят в колебания с возрастающей амплитудой и наоборот. Критическое значение скорости потока, при котором возникают флаттерные колебания, при $k \approx 0,1$ равно $V_{\text{кр.фл.}} \approx 198D(a_0\rho_0 l^3)^{-1}$. При $k \approx 1$ и более появляются уже две зоны флаттерной неустойчивости. Первой граничной точке первой зоны $(sl)_{\text{фл}} \approx 5,68$ при $k \approx 1$ соответствует $V_{\text{кр.фл.}} \approx 184D(a_0\rho_0 l^3)^{-1}$. При $k \approx 10$ и более появляются три зоны флаттерной неустойчивости. При этом первой точке $(sl)_{\text{фл}} \approx 6,31$ возникновения флаттерных колебаний соответствует критическое значение скорости потока, равное $V_{\text{кр.фл.}} \approx 251,2D(a_0\rho_0 l^3)^{-1}$. Далее, с ростом k число зон флаттерной неустойчивости растет. Однако они становятся все уже и уже, стягиваясь при $k \to \infty$ в точку, а интервалы динамической неустойчивости нефлаттерного типа все шире. Первой точке $(sl)_{\text{фл}} \approx 6,64$ соответствует критическое значение скорости потока, равное $V_{\text{кр.фл.}} \approx 293D(a_0\rho_0 l^3)^{-1}$. При этом происходит скачкообразный переход от апериодического движения по нарастающей экспоненте к флаттерным колебаниям и, далее, скачкообразный переход к гармоническим колебаниям. При $k = \infty$ $(\tilde{\alpha} \neq 0,\ \tilde{\beta} = 0)$ зоны флаттерной неустойчивости исчезают. Однако при этом $\omega^2 = \infty$ в точках $sl \in \{3,02;6,64;...;(n+5/6)2\pi/\sqrt{3};...\}$, что соответствует скачкообразному переходу от устойчивых движений к неустойчивым и наоборот. Первой точке $(sl)_p \approx 3,02$ соответствует критическое значение скорости потока газа $V_p \approx 27,54D(a_0\rho_0 l^3)^{-1}$, при котором происходит скачкообразное изменение характера движения от абсолютной устойчивости к мгновенному выпучиванию пластинки. Такой переход, обычно, сопровождается разрушением пластинки.

Отметим, что в случае обтекаемой сверхзвуковым потоком газа пластинки со сосредоточенными массами на обеих шарнирно опертых длинных кромках, имеют место только флаттерные колебания, а дивергенция отсутствует [5]. При этом наименьшее критическое значение скорости потока газа, приводящее к флаттерной неустойчивости, меньше,чем в рассматриваемой задаче.

При $V = 0$ и $V < 0$, т.е. когда поток отсутствует и когда поток направлен в обратную сторону – от шарнирно опертой кромки к кромке с жестким скользящим защемлением возмущенное движение пластинки при всех $k \in [0, \infty)$ устойчиво.

Таким образом, в рассматриваемом случае – шарнирно опертой вдоль одной из длинных кромок и имеющей жесткое скользящее защемление вдоль другой пластинки со сосредоточенными массами на опорах и обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, имеют место все типы аэроупругой неустойчивости. При этом раньше флаттера возникает неустойчивость типа дивергенции.

Автор выражает благодарность М. В. Белубекяну за постановку задачи, за внимание к работе и ценные замечания.

Автор благодарит Ю. Г. Санояна за проведенные численные расчеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 340 с.
2. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
3. Мовчан А. А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе // Прикл. мате-матика и механика. 1956. 20. С. 211-222.
4. Вибрации в технике. Справочник: В 6 т. / Под ред. В. В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. Т.1. 352 с.
5. Белубекян М. В., Мартиросян С. Р. Флаттер пластинки при сверхзвуковом обтекании и наличии сосредоточенной массы на кромках // ISSN 0130-9420. Мат. методи та фiз.-мех. поля. 2006. – 49, N 3. – С. 162-167.

<u>Сведения об авторе:</u>

Мартиросян Стелла Размиковна
Кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник, Институт механики НАН РА
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б
Тел: (+37410) 52-48-90, E-mail: mechins@sci.am

ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИИ УПРУГИХ ТЕЛ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК И ЕЕ СВЯЗЬ С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ НАПРЯЖЕНИЙ

Матвеенко В.П.

Проблема построения сингулярных решений задач теории упругости в окрестности особых точек привлекает внимание многих исследователей. В меньшей степени рассматривались возможные практические приложения сингулярных решений.

При исследовании сингулярности напряжений в особых точках доминируют два подхода. Первый из них связан с построением решений, удовлетворяющих однородным уравнениям равновесия и однородным граничным условиям для областей, содержащих особые точки. При втором подходе используются преобразование Меллина и теория вычетов. Эти подходы позволили исследовать сингулярность в окрестности особых точек практически для всех ситуаций, имеющих место в двумерных областях.

В трехмерных областях имеют место особые точки, например, вершина многогранного клина, конуса, в которых задача анализа особенности напряжений не сводится к решению двумерных задач. Рассматривая работы, посвященные исследованию этих задач, можно отметить относительно небольшой (по сравнению с двумерными задачами) объем полученных численных результатов. В связи с этим, был предложен метод, позволяющий проводить численный анализ характера сингулярности напряжений в окрестности различных типов особых точек упругих тел. Этот метод позволил получить результаты для двумерных и трехмерных задач для вариантов, рассмотрение которых другими методами связано с различными трудностями, а также вариантов решения, для которых отсутствуют. К числу таких решенных задач относятся: составной клин, выполненный из прямолинейно анизотропных материалов; трехгранный клин при различных вариантах однородных краевых условий на боковых гранях; круговые и некруговые конуса; полые и составные конуса; конуса со смешанными краевыми условиями на боковых поверхностях.

Суть метода состоит в следующем. Рассмотрим полубесконечный клин или конус, у которого вершина совпадает с центром сферических координат. В случае клина одно из ребер совпадает с осью $\theta = 0$, а одна из граней, содержащая ребро $\theta = 0$, совпадает с плоскостью $\varphi = 0$. Для конуса ось $\theta = 0$ перпендикулярна его основанию. Для анализа сингулярности напряжений необходимо построить собственные решения, удовлетворяющие в рассматриваемой области уравнениям равновесия

$$\frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + \nabla^2\mathbf{u} = 0 \qquad (1)$$

и однородным краевым условиям на боковой поверхности, где могут быть заданы либо нулевые перемещения

$$\mathbf{u} = 0 \qquad (2)$$

либо нулевые напряжения

$$\frac{\nu}{1-2\nu}\mathbf{n}\operatorname{div}\mathbf{u} + \mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{u} = 0 \qquad (3)$$

либо комбинация нулевых значений вектора перемещений и тензора напряжений. Здесь ν - коэффициент Пуассона, $\mathbf{n}$ - единичный вектор внешней нормали, точкой обозначается скалярное произведение, а крестиком – векторное.

Собственные решения для конуса, как и в работе [1], строятся в виде

$$u_k(r,\theta,\varphi) = r^{\lambda}\xi_k(\theta,\varphi) \qquad (k = 1,2,3) \qquad (4)$$

Для многогранного клина особенность напряжений на ребрах учитывается следующим образом [2,3]:

$$u_k(r,\theta,\varphi) = r^{\eta}\rho_1^{\alpha_1}\rho_2^{\alpha_2}\cdots\rho_n^{\alpha_n}\xi_k(\theta,\varphi) \qquad (k = 1,2,3) \qquad (5)$$

n - число ребер, $\rho_i(r,\theta,\varphi)$ $(i=1,2,\ldots n)$ эквивалентно расстоянию до i - го ребра, α_i - собственные значения для плоского клина со сторонами, образованными в результате пересечения плоскости, перпендикулярной i-му ребру клина, и граней пространственного клина.

Вид функций $\rho_i(r,\theta,\varphi)$ можно получить, исходя из их определения как расстояния до ребра i

$$\rho_i(r,\theta,\varphi) = r\beta^{1/2} \tag{6}$$

$$\beta_i = 1-[\cos\theta\cos\theta_i + \sin\theta\sin\theta_i\cos(\varphi-\varphi_i)]^2$$

где прямая $\theta=\theta_i$, $\varphi=\varphi_i$, определяет i-е ребро клина. Тогда соотношение (5) примет вид

$$u_k(r,\theta,\varphi) = r^{\lambda}(\beta_1^{\alpha_1}(\theta,\varphi)\beta_2^{\alpha_2}(\theta,\varphi)\ldots\beta_n^{\alpha_n}(\theta,\varphi))^{1/2}\xi_k(\theta,\varphi) \tag{7}$$

$$\lambda = \eta+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$$

Подставляя (7) в (1), получим систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно функций $\xi_k(\theta,\varphi)$ и параметра λ

$$L_k(\lambda,\xi_1,\xi_2,\xi_3)=0 \qquad (k=1,2,3) \tag{8}$$

Граничные условия (2), (3) с учетом (7) преобразуются соответственно к виду

$$\xi_k = 0,\ M_k(\lambda,\xi_1,\xi_2,\xi_3)=0 \qquad (k=1,2,3) \tag{9}$$

Таким образом, поставленная задача свелась к задаче на собственные значения для системы дифференциальных уравнений в частных производных. При этом по значениям параметра a можно судить о характере сингулярности напряжений.

Решение поставленной задачи предлагается осуществлять следующим образом. Запишем дифференциальные уравнения (8) в слабой форме [4], для чего умножим их на тестовые функции $\psi(\theta,\varphi)$ и проинтегрируем по области S, вырезаемой рассматриваемой областью на сфере.

$$\int_S \sum_{j=1}^{3} L_j(\lambda,\xi_1,\xi_2,\xi_3)\cdot\psi_j\, dS = 0 \tag{10}$$

Для решения уравнений (10) используется процедура метода конечных элементов (МКЭ).

Достоверность и эффективность рассматриваемой процедуры подтверждена серией численных экспериментов.

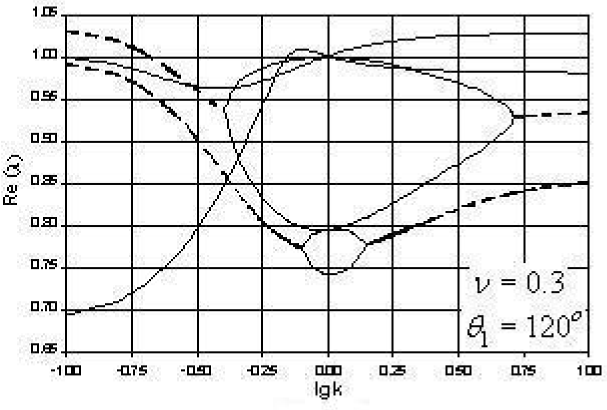


Рис. 1.

В качестве приложений рассматриваемого метода приводятся результаты расчета для конуса, основанием которого является эллипс, определяемый соотношением $k=a/b$, где a и b - полуоси эллипса. На боковой поверхности конуса заданы нулевые напряжения (3). $2\theta_1$ - угол раствора конуса в плоскости, проходящей через вершину конуса и полуось эллипса a.

На рис. 1 приведены результаты вычислений собственных значений λ с действительной частью $\mathrm{Re}\lambda$, определяющей сингулярные решения. Здесь сплошная линия соответствует действительным собственным значениям, а пунктирная – комплексным собственным значениям.

Предлагаемый численный метод позволяет оценивать характер сингулярности напряжений для различных двумерных и трехмерных задач и является хорошим дополнением к известным аналитическим методам, в тех случаях, когда их возможности ограничены.

Оценивая накопленный материал по задачам анализа сингулярности напряжений, необходимо отметить ограниченность приложений этих решений для прочностного анализа и численной оценки напряжений в телах произвольной конфигурации.

Анализ сингулярных решений и инженерный опыт позволяет говорить о том, что окрестности особых точек, как правило, являются зонами сильной концентрации напряжений, а форма их поверхности и механические характеристики материала существенно влияют на напряженное состояние. Поэтому представляется совершенно естественной постановка задачи оптимизации формы поверхности в окрестности особых точек и поиска значений упругих постоянных, при которых напряженное состояние удовлетворяет заданному прочностному критерию, либо возникающие напряжения являются минимальными из всех возможных конструктивных решений.

Необходимо также отметить, что рядом исследователей (Чобанян К.С., Задоян М.А. и др.) выдвинуто и развивается положение о явлении малонапряженности в составных клиньях. Рассматриваемая задача оптимизации может быть развитием и дополнением этого положения.

Предлагается следующая постановка оптимизационной задачи. Рассматривается кусочно-однородное тело объема V, состоящее из k частей и ограниченное поверхностью S, на которой имеются особые точки (точки смены типа граничных условий, нарушения гладкости поверхности, границы контакта различных материалов и т.п.). В окрестности особой точки t введем функционал

$$F[S_t, E_{ijmn}^k] = \max_{V_t} f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}) \tag{11}$$

где S_t и V_t - часть поверхности S и объема V в окрестности особой точки, E_{ijmn}^k-тензор упругих постоянных k-ой части объема V, $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij})$- некоторая функция напряжений и деформаций.

На поверхность S_t наложены ограничения типа равенств и неравенств в форме

$$x \in S_t^* : \quad S_t(x) = S_t^*(x) \tag{12}$$

$$x \in V_t^* : \quad S_t(x) \subset V_t^*(x) \tag{13}$$

где $S_t^*(x)$, $V_t^*(x)$ – заданные ограничения.

Требуется найти поверхность S_t и характеристики материала, удовлетворяющие ограничениям (12) – (13) и минимизирующие функционал (11), либо обеспечивающие его значение меньше некоторой заданной величины.

При численной реализации поставленной оптимизационной задачи решение предлагается отыскивать на ограниченном классе поверхностей S_t. В качестве образующих для таких поверхностей можно использовать кусочно-полиномиальные функции, определяемые по значениям координат конечного числа узловых точек. Тогда неизвестная часть геометрии тела S_t определяется конечным числом параметров, а функционал (11) превращается в функцию этих параметров. Следовательно, задача минимизации функционала (11) при ограничениях (12) – (13) сводится к минимизации функции конечного числа переменных (координат узловых точек поверхности и компонент тензора упругих постоянных E_{ijmn}^k) при ограничениях (12) – (13), т.е. к классической задаче нелинейного программирования.

Для определения напряженно-деформированного состояния тела в ходе оптимизационного поиска использовался метод конечных элементов. Включение в конечно-элементный алгоритм полуаналитических сингулярных элементов [5] позволило снять вопросы о точности и сходимости решения в окрестности особых точек (линий).

Анализ оптимальных поверхностей, полученных для различных задач, позволил выявить у них следующее общее свойство. Углы, образуемые проведенными из особой точки касательными к поверхности, в совокупности со значениями упругих постоянных дают точку на линии (поверхности), разделяющей в соответствующей задаче о клиновидной области решения с сингулярностью и без сингулярности.

Важным обстоятельством является то, что указанное свойство оптимальных поверхностей является их ключевой характеристикой. Это позволяет при наличии информации о значениях $\operatorname{Re}\alpha_n$ и размерах допустимой области изменения геометрии построить поверхность, достаточно близкую к оптимальной, не решая оптимизационной задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00488-а), гранта НШ-8055.2006.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bazant Z.P., Keer L.M. Singularities of elastic stresses and of harmonic functions at conical notches and inclusions // Int. J. Solids Struct. 1974. V.10. №9. P. 957-965.
2. Bazant Z.P. Three-dimensional harmonic functions near termination or intersection of gradient singularity lines: a general method// Intern. J. Eng Sci. 1974. V.12. № 3. P. 221-243.
3. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688с.
4. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир. 1977. 349 с.
5. Борзенков С.М., Матвеенко В.П. Полуаналитические сингулярные элементы для плоских и пространственных задач теории упругости// Изв. АН. МТТ. 1995. №6. С.48 – 61.

Сведения об авторе

Матвеенко Валерий Павлович
Доктор технических наук, директор Института механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия
Адрес: 614013, Россия, г. Пермь, ул. Акад. Королева, 1.
Тел.:(342)2378461; Факс (342)2378487; E-mail: mvp@icmm.ru

МИНИМАКСНОЕ ПРИЦЕЛИВАНИЕ В СОБСТВЕННО ЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ПРИ НЕСКОЛЬКИХ ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВАХ

Матевосян А.Г.

Рассматривается задача сближения с m целевыми множествами, когда движение системы описывается системой собственно линейных стохастических дифференциальных уравнений. Построено стохастическое гипотетическое рассогласование. Получен стохастический дифференциал гипотетического рассогласования, который дает условие для определения экстремальных стратегий.

Рассмотрим стохастическую дифференциальную игру при m целевых множествах для линейных стохастических систем. Пусть движение конфликтно-управляемой системы описывается следующей системой стохастических дифференциальных уравнений:

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + f(t,u,\mathrm{v})d\xi \tag{1}$$

где $A(t)$ – $(n\times n)$ матрица с измеримыми и ограниченными элементами при $t\in[t_0,\ T]$, $f:[t_0,\infty)\times P\times Q\to R^n$ — непрерывная функция. Управления u и v стеснены включениями

$$u\in P\subset R^P,\ \ \mathrm{v}\in Q\subset R^q \tag{2}$$

где P и Q – заданные компакты, характеризующие возможности игроков. $\xi=\xi(t,\omega)$ – случайный процесс, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega,\ B,\ P)$ и измеримый относительно B_t^{Ω}. $(\Omega,\ B,\ P)$ обозначает некоторое фиксированное вероятностное пространство: Ω – пространство элементарных событий; B – σ-алгебра подмножеств Ω; P – вероятность, определенная на B; B_t^{Ω} — неубывающее семейство борелевских σ-подалгебр B, т.е. при $t_1<t_2$ имеет место включение $\mathrm{B}_{t_1}^{\Omega}\subset\mathrm{B}_{t_2}^{\Omega}$. Пусть $\xi(t,\omega)$ является однородным процессом с независимыми приращениями и конечным моментом 2-го порядка, а моменты 1-го и 2-го порядка функции $\xi(t+h,\omega)-\xi(t,\omega)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$M\left|\xi(t+h,\omega)-\xi(t,\omega)\right|\le Ch,\ \ M\left|\left(\xi(t+h,\omega)-\xi(t,\omega)\right)\right|^2\le Ch,$$
$$h>0, C=\mathrm{const} \tag{3}$$

Тогда случайное поле $\zeta(t,x,h,\omega)=A(t)xh+f(t,u,v)\left(\xi(t+h,\omega)-\xi(t,\omega)\right)$ удовлетворяет условию квазидифференциальности, определенному в [1]. Обозначим через H_C пространство случайных процессов (случайных кривых) $x(t)=x(t,\omega)$, $t\in[t_*,\vartheta]$, $\omega\in\Omega$, со значениями в R^n, измеримых при каждом μ и среднеквадратически непрерывных на $[t_*,\vartheta]$, т.е. $M\left|x(t+h,\omega)-x(t,\omega)\right|^2\to 0$ при $h\to 0$, $t,t+h\in[t_*,\vartheta]$. При этих предположениях, согласно теореме существования и единственности [1], стохастическое дифференциальное уравнение (1) при любом начальном значении x имеет в H_C единственное решение.

Таким образом, случайное движение системы (1) можно трактовать как пучок реализаций $\{x(t_*,[\cdot],\vartheta,\omega), \quad \omega\in\Omega\}$. Каждая реализация $x(t_*,[\cdot],\vartheta,\omega)$ отвечает некоторому значению $\omega\in\Omega$.

Предположим, что заданы некоторые замкнутые и ограниченные множества $M_k, \quad k\in I=(1,...,m)$, в евклидовом пространстве R^{n+1}. Пусть также заданы моменты времени $\{\vartheta_k\}$ такие, что $t_0\le\vartheta_1<...<\vartheta_m\le T$. Предположим, что проекция множества M_k на ось t содержит точку ϑ_k, т.е.

$$M_k \bigcap \left[(t,x): t=\vartheta_k, x\in R^n\right] = M_k(\vartheta_k)\ne\varnothing, \quad k\in I$$

Пусть $M_k(\vartheta_k)$ – выпуклые, замкнутые и ограниченные множества в пространстве R^n.

Рассмотрим задачу сближения с множествами $M_k(\vartheta_k)$ в моменты ϑ_k. Согласно [2], решение системы (1) определяется следующей формулой:

$$x(t,\omega) = X[t,t_0]x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X[t,\tau] f(\tau,u,\mathrm{v})\, d\xi(t,\omega) \tag{4}$$

где последний интеграл следует понимать как стохастический интеграл по процессу $\xi(t,\omega)$, а $X[t,\tau]$ – нормированная фундаментальная матрица с абсолютно непрерывными элементами.

Имея в виду формулу решения (4), для уравнения (1) поставим следующую задачу.

Задача. Дана начальная позиция (t_*,x_*) и моменты времени ϑ_k. Требуется найти стратегию $U_0 \div u_0(t,\mu)$, которая обеспечивает встречи $x[\vartheta_k,t_*,x_*,u_0,\omega]\in M_k(\vartheta_k)$, $k\in I$, почти наверно (п.н.) при любых действиях противника, стесненных вторым условием из (2).

Используя приведенные в [3], а также в [4–6] для m целевых множеств рассуждения для детерминированных линейных систем, можем построить гипотетическое рассогласование, которое в нашем случае будет стохастическим:

$$\varepsilon_0(t_*,x_*,x_1,x_{s-1},\{\vartheta_k\},\omega) = \max_{\|l\|\le 1}\Bigg[\sum_{k=1}^{s-1} l'_k x_k + \sum_{k=1}^{s-1}\min_{-p_k\in M_k} l'_k p_k + \sum_{k=l}^{m} l'_k \bar{X}[\vartheta_k,t_*]x_* +$$

$$+\int_{t_*}^{\vartheta_m}\min_{u\in P}\max_{\mathrm{v}\in Q}\sum_{k=1}^{m} l'_k \bar{\bar{X}}[\vartheta_k,\tau]\, f(\tau,u,\mathrm{v})d\xi + \sum_{k=s}^{m}\min_{-P_k\in M_k} l'_k\, p_k\Bigg] \tag{5}$$

и $\varepsilon_0(t_*,x_*,x_1,...,x_{l-1},\{\vartheta_k\},\omega)=0$, если правая часть в (5) отрицательна [3–6].

Здесь $\{t_*,x_*\}$ – начальное положение системы (1), причем $t_*\in[\vartheta_{l-1},\vartheta_l)$, величины x_j, $j=1,...,l-1$, считаются постоянными, а матрицы $\bar{X}[t,\tau]$ и $\bar{\bar{X}}[t,\tau]$ определяются следующим образом:

$$\bar{X}[t,\tau] = \begin{cases} X[t,\tau], & t\ge\tau, \\ E, & t\le\tau; \end{cases} \qquad \bar{\bar{X}}[t,{}^2] = \begin{cases} X[t,{}^2], & t>{}^2 \\ 0, & t\le{}^2 \end{cases}$$

Из формулы (5) вытекает справедливость следующего утверждения.

Если $\varepsilon_0(t,x(t,\omega),\{\vartheta_k\},\omega)=0$ п.н. при $t\in[t_*,\vartheta_m]$, то для всех $k\in I \quad x(\vartheta_k,\omega)\in M_k$ п.н. [3–6].

Скажем, что задача регулярна, если максимум в правой части (5) достигается на единственном векторе $\left\{l_k^0\right\}$ для каждой фиксированной ω.

Вследствие единственности максимизирующего вектора $l^0=\left\{l_k^0\right\}$ он изменяется непрерывно с изменением позиции $\left\{t_*, x_*\right\}$, $t\in\left[\vartheta_{k-1}, \vartheta_k\right)$ для каждой фиксированной ω [3].

Применим правило стохастического дифференцирования для гипотетического рассогласования.

Теорема 1. (Формула Ито. Правило стохастического дифференцирования). Пусть z – n-мерный вектор, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dz=f\left(z,t\right)dt+q\left(z,t\right)d\xi\left(t,\omega\right) \tag{6}$$

Пусть функция $\varepsilon\left(z,t\right)$ непрерывно дифференцируема по t и дважды дифференцируема по z. Тогда $\varepsilon\left(z,t\right)$ также имеет стохастический дифференциал [1, 2, 7]

$$d\varepsilon=\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z_i}f_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial z_i\partial z_j}q_{ik}q_{jk}\right]dt+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z_i}\left(qd\xi\right)_i \tag{7}$$

В регулярном случае гипотетическое рассогласование $£\left(\cdot\right)$ – непрерывная функция на каждом промежутке $\left(\vartheta_{k-1},\vartheta_k\right)$ и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon\left(\cdot\right)=&\sum_{k=1}^{l-1}l_k'^0x_k^0+\sum_{k=1}^{m}\min_{-p_k\in M_k}l_k'^0p_k+\sum_{k=l}^{m}l_k'^0\bar{X}\left[\vartheta_k,t\right]x+\\&+\int_{t_*}^{\vartheta_m}\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\sum_{k=1}^{m}l_k'^0\bar{\bar{X}}\left[\vartheta_k,\tau\right]f\left(\tau,u,v\right)d\xi\left(\tau,\omega\right)\end{aligned} \tag{8}$$

Принимая

$$y=\int_{t_*}^{\vartheta_m}\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\sum_{k=1}^{m}l_k'^0\bar{\bar{X}}\left[\vartheta_k,\tau\right]f\left(\tau,u,v\right)d\xi\left(\tau,\omega\right) \tag{9}$$

получим

$$\varepsilon\left(\cdot\right)=\left[\sum_{k=1}^{l-1}l_k'^0x_k^0+\sum_{k=1}^{m}\min_{-p_k\in M_k}l_k'^0p_k+\sum_{k=l}^{m}l_k'^0\bar{X}\left[\vartheta_k,t\right]x+y\right] \tag{10}$$

где x, y удовлетворяют следующим стохастическим дифференциальным уравнениям:

$$dx=A\left(t\right)xdt+f\left(\tau,u,v\right)d\xi\left(t,\omega\right) \tag{11}$$

$$dy=-\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\sum_{k=1}^{m}l_k'^0\bar{\bar{X}}\left[\vartheta_k,\tau\right]f\left(\tau,u,v\right)d\xi\left(\tau,\omega\right) \tag{12}$$

Обозначим $z=\left(x,y\right)$ и получим

$$\varepsilon\left(\cdot\right)=R_1+R_2z, \tag{13}$$

где

$$R_1=\sum_{k=1}^{l-1}l_k'^0x_k^0+\sum_{k=1}^{m}\min_{-p_k\in M_k}l_k'^0p_k,\ R_2=\begin{pmatrix}\sum_{k=l}^{m}l_k'^0\bar{X}\left[\vartheta_k,t\right]\\1\end{pmatrix}$$

Тогда

$$dz = A_1(t,z)\,dt + Q_1(t,z)\,d\xi(t,\omega),\text{ где } A_1(t,z) = \begin{pmatrix} A(t)\,x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_1(t,z) = \begin{pmatrix} f(\tau,u,\mathrm{v}) \\ -\min\limits_{u\in P}\max\limits_{\mathrm{v}\in Q}\sum\limits_{k=1}^{m} l_k'^{0}\,\overline{\overline{X}}[\vartheta_k,\tau]\,f(\tau,u,\mathrm{v}) \end{pmatrix}$$

В силу непрерывности l_k^0 от своих аргументов, как в детерминированном случае так и здесь игнорируем зависимость вектора l_k^0 от t при дифференцировании. Тогда

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial R_2}{\partial t}z = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{k=l}^{m} l_k'^{0}\,\overline{X}[\vartheta_k,t]\,A(t) \\ 0 \end{pmatrix} z \tag{14}$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} = R_2 = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=l}^{m} l_k'^{0}\,\overline{X}[\vartheta_k,t] \\ 1 \end{pmatrix},\ \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial z^2} = 0 \tag{15}$$

В силу теоремы 1 на каждом промежутке $(\vartheta_{k-1},\vartheta_k)$ гипотетическое рассогласование имеет стохастический дифференциал

$$d\varepsilon = \left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}A_1(t,z)\right]dt + \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}Q_1(t,z)\,d\xi(t,\omega)$$

$$d\varepsilon = \left[\sum_{k=1}^{m} l_k'^{0}\,\overline{\overline{X}}[\vartheta_k,t]\,f(\tau,u,\mathrm{v}) - \min_{u\in P}\max_{\mathrm{v}\in Q}\sum_{k=1}^{m} l_k'^{0}\,\overline{\overline{X}}[\vartheta_k,\tau]\,f(\tau,u,\mathrm{v})\right]d\xi(t,\omega) \tag{16}$$

В случае, когда $\xi(t,\omega)$ – винеровский процесс, то $\xi(t,\omega)$ имеет необычный дифференциал $\left(\dfrac{d\xi(t,\omega)}{dt} = e(t,\omega)\right)$, который является белым шумом. В этом случае, когда первый игрок выбирает экстремальную стратегию из следующего условия:

$$\max_{\mathrm{v}\in Q}\sum_{k=1}^{m} l_k'^{0}\,\overline{\overline{X}}[\vartheta_k,t]\,f(\tau,u^0,\mathrm{v})\,e(t,\omega) = \min_{u\in P}\max_{\mathrm{v}\in Q}\sum_{k=1}^{m} l_k'^{0}\,\overline{\overline{X}}[\vartheta_k,\tau]\,f(\tau,u,\mathrm{v})\,e(t,\omega) \tag{17}$$

то $\dfrac{d\varepsilon(\cdot)}{dt} < 0$ для каждой реализации траектории.

Теорема 2. Пусть для всех $t\in[t_0,\vartheta_m)$ ситуация для задачи регулярна. Тогда экстремальная стратегия $U_0 \div u_0(t,\omega)$, определяемая при $\varepsilon_0(t,x,\omega) > 0$ условием (17), где $l_k'^{0}(\cdot)$ – максимизирующий вектор из (5), а при $\varepsilon_0(t,x,\omega) = 0$ – любым допустимым управлением $u\in P$, обеспечит встречу всех движений $x(t,\vartheta_k,u_0,\omega)$ со всеми множествами M_k, $k\in I$, п.н., если только $\varepsilon_0(t_0,x_0\{\vartheta_k\},\omega) = 0$ п.н.

Доказательство. Доказательство аналогичной теоремы в детерминированном случае основывается на том факте, что вдоль всякого решения существует производная гипотетического рассогласования и вдоль всякого решения гипотетическое рассогласование не возрастает [3–5]. В нашем случае стохастическое гипотетическое рассогласование имеет стохастический дифференциал, который не возрастает для каждой реализации траектории, что и при условии $\varepsilon_0\left(t_0, x_0\left\{\vartheta_k\right\}, \omega\right)=0$ п.н. доказывает теорему 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968. 353 с.
2. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1985.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 445 с.
4. Габриелян М.С. Программные конструкции для игровых задач при m целевых множествах. //Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1985. Т.38. № 3. С. 55–66.
5. Габриелян М.С., Субботин А.И. Игровые задачи о встрече с m целевыми множествами //ПММ. 1979. Т 43. № 2. С. 204–208.
6. Габриелян М.С., Матевосян А.Г. Минимаксное прицеливание при нескольких целевых множествах для поэтапно меняющихся собственно линейных стохастических систем.//Уч. записки ЕГУ. 2003. № 2. С. 25–29.
7. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.

Сведения об авторе

Матевосян Арам
Кандидат физ. –мат. наук, ассистент кафедры теоретической механики Ереванского государственного университета
Адрес: Ереван, Андраника 62, кв35, тел: 35-14-96
E-mail: amatevosyan@ysu.am

ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ГЕКСАГОНАЛЬНОМ ПЬЕЗОЭЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Мгерян Д. Э.

В [1] рассмотрена трехмерная задача распространения упругих поверхностных волн в трансверсально-изотропном полупространстве, когда на границе полупространства заданы условия равенства нулю всех трех напряжений.

Рассматривается трехмерная задача распространения упругих поверхностных волн в гексагональном пьеоэлектрическом полупространстве, когда на границе полупространства равны нулю все напряжения и потенциал. Предполагается, что граница полупространства параллельна к плоскости изотропии, такое предположение сделано также для задачи [1]. Отметим, что в таком случае волна Блюстейна-Гуляева не возникает [2]. Исследование задачи упрощается введением потенциальных функций по аналогу с задачами плоской деформации [3]. Необходимо отметить, эти преобразования были применены также в работах [1,4,5,6].

Получено, что при рассмотрении пьезоэффекта супремум интервала затухания увеличивается. Показано, что параметр скорости поверхностной волны увеличивается. В работе также приведены численные значения параметра скорости поверхностной волны для некоторых материалов.

1.Рассматривается гексагональное пьезоэлектрическое полупространство, которое в прямоугольной декартовой системе координат занимает следующую область:

$$(-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, 0 \le z < \infty)$$

Предполагается, что плоскость изотропии параллельна к границе полупространства, а ось z перпендикулярна к плоскости изотропии. В таком случае система уравнений, определяющая волновые процессы в этой среде, имеет вид [7]:

$$\begin{aligned}
&c_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_{44}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12})\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \\
&+(c_{13} + c_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + (e_{15} + e_{31})\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
&\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + c_{44}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\
&+(c_{13} + c_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + (e_{15} + e_{31})\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
&c_{44}\Delta_2 w + c_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44})\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + e_{15}\Delta_2\varphi + e_{33}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
&e_{15}\Delta_2 w + e_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (e_{15} + e_{31})\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \varepsilon_{11}\Delta_2\varphi - \varepsilon_{33}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0
\end{aligned} \tag{1.1}$$

здесь u, v, w – проекции вектора перемещения на оси координат x, y, z соответственно, c_{ij} – пять упругих независимых констант трансверсально-изотропной среды, ρ – плотность материала, e_{ij} – пьезоэлектрические модули, ε_{ij} – диэлектрическая проницаемость, Δ_2 – двумерный оператор Лапласа.

При постановке задачи нахождения поверхностной волны необходимо удовлетворить условиям затухания :

$$\lim_{z\to\infty} u = 0,\ \lim_{z\to\infty} v = 0,\ \lim_{z\to\infty} w = 0 \tag{1.2}$$

Исследование задачи упрощается введением потенциальных функций по аналогии с задачами [1,5]

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial y},\ \ v = \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\chi}{\partial x} \tag{1.3}$$

Отметим, что преобразование (1.3) было использовано также для пространственной задачи статики трансверсально-изотропного пьезоэлектрика [3].
Из первых двух условий (1.2) и из (1.3) следуют условия затухания для функций · и ¡ :

$$\lim_{z\to\infty}\chi = 0, \lim_{z\to\infty}\psi = 0 \tag{1.4}$$

После введения потенциальных функций, первые два уравнения системы (1.1) примут следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(c_{11}\Delta_2\psi + c_{44}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + (c_{13}+c_{44})\frac{\partial w}{\partial z} + (e_{15}+e_{31})\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) +$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\Delta_2\chi + c_{44}\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} - \rho\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(c_{11}\Delta_2\psi + c_{44}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + (c_{13}+c_{44})\frac{\partial w}{\partial z} + (e_{15}+e_{31})\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) -$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\Delta_2\chi + c_{44}\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} - \rho\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} &c_{11}\Delta_2\psi + c_{44}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + (c_{13}+c_{44})\frac{\partial w}{\partial z} + (e_{15}+e_{31})\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \\ &\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\Delta_2\chi + c_{44}\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} - \rho\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Из второго уравнения системы (1.5) можно найти функцию ¡ .

Третье и четвертое уравнения системы (1.1) дифференцируются по z, затем выражение $\frac{\partial w}{\partial z}$ из первого уравнения системы (1.5) подставляется в эти уравнения, что дает:

$$\Delta_2^2\psi + 2\alpha_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Delta_2\psi + \alpha_2\frac{\partial^4\psi}{\partial z^4} - \left(\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_2\psi - \left(\frac{\alpha_2}{c_2^2}+\frac{1}{c_1^2}\right)\frac{\partial^4\psi}{\partial z^2\partial t^2} + \frac{1}{c_1^2c_2^2}\frac{\partial^4\psi}{\partial t^4} -$$
$$-\frac{e_{15}c_{13}-e_{31}c_{44}}{c_{11}c_{44}}\frac{\partial}{\partial z}\Delta_2\varphi - \frac{c_{13}+c_{44}}{c_{11}c_{44}}\left[e_{33} - \frac{(e_{15}+e_{31})c_{33}}{c_{11}+c_{44}}\right]\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3} - \frac{e_{15}+e_{31}}{c_{11}c_2^2}\frac{\partial^3\varphi}{\partial z\partial t^2} = 0$$
$$e_{15}\Delta_2^2\psi + \left[e_{33} - c_{13}\frac{e_{15}+e_{31}}{c_{11}} - e_{31}\frac{c_{44}}{c_{11}}\right]\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Delta_2\psi + e_{33}\frac{c_{44}}{c_{11}}\frac{\partial^4\psi}{\partial z^4} - \frac{\rho}{c_{11}}e_{15}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_2\psi -$$
$$-\frac{\rho}{c_{11}}e_{33}\frac{\partial^4\psi}{\partial z^2\partial t^2} + \left[e_{15}\frac{e_{15}+e_{31}}{c_{11}} + \varepsilon_{11}\frac{c_{13}+c_{44}}{c_{11}}\right]\frac{\partial}{\partial z}\Delta_2\varphi + \left[e_{33}\frac{e_{15}+e_{31}}{c_{11}} + \varepsilon_{33}\frac{c_{13}+c_{44}}{c_{11}}\right]\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3} = 0$$

(1.6)

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\alpha_1 = \frac{c_{33}c_{11} - c_{13}(c_{13}+2c_{44})}{2c_{11}c_{44}}, \alpha_2 = \frac{c_{33}}{c_{11}}, c_1^2 = \frac{c_{11}}{\rho}, c_2^2 = \frac{c_{44}}{\rho}$$

Из второго уравнения системы (1.5)

$$\begin{aligned} &\chi = Ce^{-p_4\Gamma z}\times\exp i(wt - k_1x - k_2y) \\ &p_4 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}}\sqrt{1-\alpha_3\eta} \\ &\alpha_3 = \frac{2c_{44}}{c_{11}-c_{12}}, \quad \eta = \frac{\omega^2\rho}{c_{44}\Gamma^2} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Решения уравнений системы (1.6) представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi &= Ae^{-p\Gamma z} \times \exp i(wt - k_1 x - k_2 y) \\ \varphi &= Be^{-p\Gamma z} \times \exp i(wt - k_1 x - k_2 y) \end{aligned} \qquad (1.8)$$

Подстановка (1.8) в систему (1.6) приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных A, B:

$$\begin{aligned} &\left[(1-\eta)(1-\theta\eta) + p^2\theta\eta - 2p^2\alpha_1 + p^2(p^2+\eta)\alpha_2\right]\Gamma A + \\ &+\frac{e_{15}}{c_{11}}\left[p^2\theta^{-1}((\alpha_4+\theta)\beta_2 - \alpha_2(1+\beta_1)) - \eta(1+\beta_1) - \alpha_4\theta^{-1} + \beta_1\right]pB = 0 \\ &e_{15}\left[1-\theta\eta + p^2(p^2+\eta)\theta\beta_2 - p^2(\beta_2 - \alpha_4(1+\beta_1) - \beta_1\theta)\right]\Gamma A + \\ &+\varepsilon_{11}\left[\gamma_1(1+\beta_1) + \alpha_4 + \theta - p^2(\gamma_1\beta_2(1+\beta_1) + (\alpha_4+\theta)\varepsilon)\right]pB = 0 \end{aligned} \qquad (1.9)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\gamma_1 = \frac{e_{15}^2}{c_{11}\varepsilon_{11}},\ \ \varepsilon = \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}},\ \ \beta_1 = \frac{e_{31}}{e_{15}},\ \ \beta_1 = \frac{e_{33}}{e_{15}}$$

$$\alpha_4 = \frac{c_{13}}{c_{11}},\ \ \theta = \frac{c_{44}}{c_{11}}$$

Отметим, что когда пьезоэффект не рассматривается, то ¥$_1 = 0$.

Равенство нулю детерминанта системы (1.9) приводит к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} &\left[(1-\eta)(1-\theta\eta) + p^2\theta\eta - 2p^2\alpha_1 + p^2(p^2+\eta)\alpha_2\right]\times \\ &\times\left[\gamma_1(1+\beta_1) + \alpha_4 + \theta - p^2(\gamma_1\beta_2(1+\beta_1) + (\alpha_4+\theta)\varepsilon)\right] - \\ &-\gamma_1\left[1-\theta\eta + p^2(p^2+\eta)\theta\beta_2 - p^2(\beta_2 - \alpha_4(1+\beta_1) - \beta_1\theta)\right]\times \\ &\times\left[p^2\theta^{-1}((\alpha_4+\theta)\beta_2 - \alpha_2(1+\beta_1)) - \eta(1+\beta_1) - \alpha_4\theta^{-1} + \beta_1\right] = 0 \end{aligned} \qquad (1.10)$$

В частном случае, когда пьезоэффект не рассматривается, уравнение (1.10) приводится к уравнению

$$\left\{(1-\eta)(1-\theta\eta) + p^2\theta\eta - 2p^2\alpha_1 + p^2(p^2+\eta)\alpha_2\right\}\times(\alpha_4+\theta)(1-p^2\varepsilon) = 0$$

Уравнение $(1-\eta)(1-\theta\eta) + p^2\theta\eta - 2p^2\alpha_1 + p^2(p^2+\eta)\alpha_2 = 0$ совпадает с характеристическим уравнением для трансверсально-изотропных сред [1].

Уравнение (1.10) из себя представляет линейное уравнение шестой степени, из корней этого уравнения только три удовлетворяют условиям затухания. Следовательно, функции · и ¨ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi &= \left\{A_1 e^{-p_1\Gamma z} + A_2 e^{-p_2\Gamma z} + A_3 e^{-p_3\Gamma z}\right\}\times \exp i(wt - k_1 x - k_2 y) \\ \varphi &= \left\{B_1 e^{-p_1\Gamma z} + B_2 e^{-p_2\Gamma z} + B_3 e^{-p_3\Gamma z}\right\}\times \exp i(wt - k_1 x - k_2 y) \end{aligned} \qquad (1.11)$$

Из второго уравнения системы (1.9) имеем:

$$\begin{aligned} &B_1 = -\frac{e_{15}\Gamma}{\varepsilon_{11}}\frac{f(p_1)}{p_1}A_1,\quad B_2 = -\frac{e_{15}\Gamma}{\varepsilon_{11}}\frac{f(p_2)}{p_2}A_2,\quad \text{A}_3 = -\frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}\Gamma}\frac{p_3}{f(p_3)}B_3 \\ &f(p) = \frac{1-\theta\eta + p^2(p^2+\eta)\theta\beta_2 - p^2(\beta_2 - \alpha_4(1+\beta_1) - \beta_1\theta)}{\gamma_1(1+\beta_1) + \alpha_4 + \theta - p^2(\gamma_1\beta_2(1+\beta_1) + (\alpha_4+\theta)\varepsilon)} \\ &g(p) = \frac{p^2\theta^{-1}((\alpha_4+\theta)\beta_2 - \alpha_2(1+\beta_1)) - \eta(1+\beta_1) - \alpha_4\theta^{-1} + \beta_1}{(1-\eta)(1-\theta\eta) + p^2\theta\eta - 2p^2\alpha_1 + p^2(p^2+\eta)\alpha_2} \end{aligned} \qquad (1.12)$$

Из уравнения (1.10) приходим к следующим соотношениям:

$$\frac{f(p_2)}{f(p_3)} = \gamma_1 f(p_2) g(p_3), \quad \frac{f(p_1)}{f(p_3)} = \gamma_1 f(p_1) g(p_3) \tag{1.12a}$$

Подставляя (1.12) в (1.11), получим:

$$\begin{gathered}
\psi = \left\{ A_1 e^{-p_1 \Gamma z} + A_2 e^{-p_2 \Gamma z} - \frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}\Gamma} \frac{p_3}{f(p_3)} B_3 e^{-p_3 \Gamma z} \right\} \times \exp i(wt - k_1 x - k_2 y) \\
\varphi = \left\{ -\frac{e_{15}\Gamma}{\varepsilon_{11}} \frac{f(p_1)}{p_1} A_1 e^{-p_1 \Gamma z} - \frac{e_{15}\Gamma}{\varepsilon_{11}} \frac{f(p_2)}{p_2} A_2 e^{-p_2 \Gamma z} + B_3 e^{-p_3 \Gamma z} \right\} \times \exp i(wt - k_1 x - k_2 y)
\end{gathered} \tag{1.13}$$

Учитывая первое уравнение системы (1.5),

$$\begin{gathered}
w = \left\{ \frac{\Gamma}{\alpha_4 + \theta} \times \right. \\
\left\{ \frac{\gamma_1 (1+\beta_1) f(p_1) + \theta \left[p_1^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta) \right]}{p_1} A_1 e^{-p_1 \Gamma z} + \frac{\gamma_1 (1+\beta_1) f(p_2) + \theta \left[p_2^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta) \right]}{p_2} A_2 e^{-p_2 \Gamma z} \right\} - \\
\left. - \frac{c_{44}\Gamma}{c_{13} + c_{44}} \left\{ \frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}\Gamma} \frac{p_3}{f(p_3)} \frac{p_3^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta)}{p_3} + \frac{e_{15} + e_{31}}{c_{44}\Gamma} \right\} B_3 e^{-p_3 \Gamma z} \right\} \exp i(wt - k_1 x - k_2 y)
\end{gathered} \tag{1.14}$$

При $e_{ij} = 0$, учитывая (1.12a), (1.14) приводится к аналогичному выражению в [1].

2. Рассматривается полупространство, на границе которого равны нулю все напряжения и потенциал:

$$\sigma_{zz} = 0, \ \sigma_{zx} = 0, \ \sigma_{zy} = 0, \ \varphi = 0 \text{ при } z = 0 \tag{2.1}$$

Граничные условия (2.1) в перемещениях имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \mathrm{c}_{13} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] + c_{33} \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \ddot{\ } = 0 \tag{2.2}$$

Учитывая (1.3), (1.13), (1.14) и подставляя выражения $u, v, w, \ddot{\ }$ в (2.2), находим, что $C = 0$ и получаем следующую систему однородных и алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_1, A_2, B_3:

$$\begin{gathered}
\left[p_1 - \frac{\gamma_1 (1+\beta_1) f(p_1) + \theta (p_1^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta))}{(\alpha_4 + \theta) p_1} \right] A_1 + \left[p_2 - \frac{\gamma_1 (1+\beta_1) f(p_2) + \theta (p_2^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta))}{(\alpha_4 + \theta) p_2} \right] A_1 + \\
+ \left\{ \frac{c_{44}}{c_{13} + c_{44}} \left[\frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}\Gamma} \frac{p_3}{f(p_3)} \frac{p_3^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta)}{p_3} + \frac{e_{15} + e_{31}}{c_{44}\Gamma} \right] - \frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}\Gamma} \frac{p_3^2}{f(p_3)} \right\} B_3 = 0 \\
\left[\frac{\alpha_4}{\alpha_2} + \frac{\gamma_1 (1+\beta_1) f(p_1) + \theta (p_1^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta))}{\alpha_4 + \theta} \right] A_1 + \left[\frac{\alpha_4}{\alpha_2} + \frac{\gamma_1 (1+\beta_1) f(p_2) + \theta (p_2^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta))}{\alpha_4 + \theta} \right] A_2 - \\
- \left\{ \frac{c_{44}}{c_{13} + c_{44}} \left[\frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}\Gamma} \frac{p_3}{f(p_3)} (p_3^2 - \theta^{-1}(1-\theta\eta)) + \frac{p_3 (e_{15} + e_{31})}{c_{44}\Gamma} \right] + \frac{\alpha_4}{\alpha_2} \frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}\Gamma} \frac{p_3}{f(p_3)} \right\} B_3 = 0 \\
- \frac{e_{15}\Gamma}{\varepsilon_{11}} \frac{f(p_1)}{p_1} A_1 - \frac{e_{15}\Gamma}{\varepsilon_{11}} \frac{f(p_2)}{p_2} A_2 + B_3 = 0
\end{gathered} \tag{2.3}$$

В частном случае, когда пьезоэффект не рассматривается, из (2.3) получается, что $B_3 = 0$ и система (2.3) приводтся к аналогичной системе для трансверсально-изотропных сред [1].
Детерминант системы (2.3) обозначим через $R(¦)$. Предполагается, что детерминант системы (2.3) равен нулю:

$$R(\eta) = 0 \tag{2.4}$$

Решив уравнение (2.4), можно найти безразмерный параметр η фазовой скорости поверхностной волны.

В табл.1 представлены модули упругости для некоторых материалов гексагональной системы.

Таблица1

материал	класс	10^{10} Па c_{11}	10^{10} Па c_{12}	10^{10} Па c_{13}	10^{10} Па c_{33}	10^{10} Па c_{44}
ZnO	6mm	20,97	12,11	10,51	21,09	4.25
CdS	6mm	8,565	5,32	4,62	9,36	1,49

В табл.2 представлены пьезоэлектрические модули и диэлектрические проницаемости для некоторых материалов гексагональной системы.

Таблица2

материал	класс	$Кл/м^2$ e_{15}	$Кл/м^2$ e_{31}	$Кл/м^2$ e_{33}	$10^{-11} Ф/м$ ε_{11}	$10^{-11} Ф/м$ ε_{33}
ZnO	6mm	-0,59	-0,61	1,14	7,38	7,83
CdS	6mm	-0,21	-0,24	0,44	7,99	8,44

В табл.3 представлены решения уравнения $R(\eta) = 0$ для некоторых материалов гексагональной системы.

Таблица3

материал	класс	$\sim_3^{-1}$	$e_{ij} = 0$ [1]	η
ZnO	6mm	1,0423	0,9131	0.9874
CdS	6mm	1,088	0,9374	0,965724

Работа выполнена при финансовой поддержке NFSAT.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян В. М., Мгерян Д. Э. Пространственная задача распространения поверхностных волн в трансверсально-изотропной упругой среде. // Изв. НАН Армении. Механика. 2006. № 2. С. 3-9.
2. Аветисян А. С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде. //Изв.НАН Армении. Механика.1985. Т. 38. № 2. С. 12-19.
3. J. D. Achenbach. Wave propagation in elastic solids, NORTH–HOLLAND. 425p.
4. Белубекян В. М., Белубекян М. В. Трехмерная задача поверхностных волн Релея. // Докл. НАН Армении. 2005. Т. 105. №4. С. 362 –369.
5. Мгерян Д.Э. Распространение пространственной поверхостной волны, когда на границе полупространства одно касательное перемещение равно нулю. // Изв. НАН Армении. Механика. 2006. Т. 59. №2. С. 18-23.
6. Wàng Z., Zheng B. The general solution of the three – dimensional prob- lems in piezoelectric media.// Int. J. Solids and Structures. 1995. Vol. 32. №1. PP. 105 – 115.
7. Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сеник Н.А. Распространение волн в электромагнитоупругих средах. М.: УРСС, 2003. 334с.

Сведения об авторе

Мгерян Давит Энзелович
Аспирант, Институт механики НАН РА
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24[б],
Тел: (+37410) 52-48-90; E-mail: davidmher@mail.ru

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСТАТОЧНОЙ ВИБРОПРОЧНОСТИ ГЛИНИСТЫХ ГРУНТОВ ПРИ ЗАДАННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПОСТОЯННЫХ УСКОРЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ

Месчян С.Р., Таслагян К.А.

Для расчета оснований и сооружений из грунтовых материалов по первому предельному состоянию - по прочности, их основными прочностными свойствами являются остаточное τ_r и виброостаточное $\tau_{м,к}$ сопротивление сдвигу. Для определения этих свойств глинистого грунта следует испытать на одноплоскосной, кольцевой срез, кручение и на трехосное сжатие не менее трех образцов-близнецов, под действием не менее трех различных значений постоянного нормального σ_z или среднего нормального σ_m напряжений.

При определении указанных выше свойств глинистых грунтов возникает проблема испытания под действием различных по величине уплотняющих напряжений образцов-близнецов, обладающие различными начальными состояниями плотности-влажности. Проблема определения остаточной прочности (сопротивления сдвигу) образцов-близнецов, обладающих практическими равными значениями начальной влажности-прочности, частично решена их испытанием по ветви разгрузки компрессионной кривой.Она остается не решенной при определении динамической прочности-остаточного вибросопротивленния сдвигу глинистых грунтов, поскольку при постоянной частоте колебаний как амплитуды, так и ускорения колебаний существенно зависят от величины нормального напряженния σ_z. Отметим,что для определения виброостаточной прочности глинистых грунтов под действием заданного постоянного нормального напряжения σ_z, при различных значениях частоты и амплитулы крутильных колебаний, использоан разработанный нами метод определения виброостаточной прочности при повторном вибрационном воздействий [1].

Ниже приведен пример определения параметров остаточной и виброостаточной прочности глинитого грунта при данных значениях постоянного ускорения крутильных колебаний. Испытаны методом кручения на устройстве М-11 [2]образцы-близнецы глины нарушенного строения (ρ=1.974, w=0.292, w_L=0.522, w_P=0.218, I_P=0.304) по ветви разгрузки компрессионной кривой [3]. Образцы-близнецы предварительно уплотнены в течение 45 дней под действием наибольшего значения нормального напряжения 0,3МПа, а после стабилизации деформаций уплотнения разгружены до σ_z = 0.05, 0.1, 0.2 и 0.3 МПа. Образцы-близнецы испытаны под действием отмеченных выше нормальных напряжений $\pm_z$ в кинетическом режиме – в режиме контроля касательных напряжений τ. Под действием данного постоянного нормального напряжения в начале определены остаточные сопротивления образцов-близнецов сдвигу τ_r [2], а затем выброостаточная прочность под действием возрастающих ступеней частоты крутильных колебаний ω_0.Для каждого значения двукратной амплитуды колебаний 2а фиксировались как величины виброостаточной прочности $\tau_{v,r}$, так и частоты крутильных колебаний виброизмерительным прибором ВИП-2.

По опытным данным, для каждого значения постоянного нормального напряжения σ построена кривая зависимости – остаточное и виброостаточное сопротивление сдвигу грунта $\tau_{v,r}$ –двукратная амплитуда крутильных колебаний 2а, которые показаны на рис.1 в виде семейства кривых.

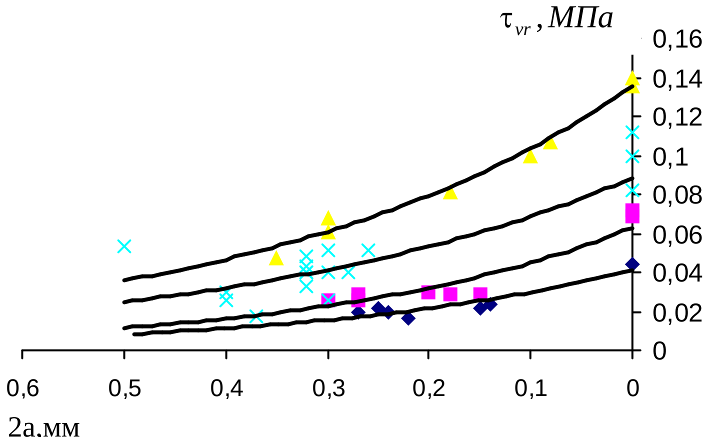


Рис.1.Кривые сопротивления сдвигу грунта τ_{vr} -двукратная амплитуда крутильных колебаний 2а, при четырех значениях нормального напряжения (сверху вниз): σ =0.3; 0.2; 0.1и 0,05 МПа

Используя значения частоты крутильных колебаний, соответствующие каждому значению двукратной амплитуды крутильных колебаний 2а (рис.1), данного постоянного нормального напряжения σ, вычислены относительные ускорения крутильных колебаний j_0. Используя средние значения ускорений крутильных колебаний j_0 (табл.1), вместо изображенного на рис.1 семейства кривых, построено семейство кривых $\tau_{vr} - j_0 - \sigma$ (рис.2) для четерех значений постоянного нормального напряжения σ =0,05; 0,1; 0,2 и 03 МПа.В этом случае фактором изменяемости виброостаточной прочности грунта ${}^2{}_{vr}$ является не амплитуда , а относительное ускорение крутильных колебаний j_0.

Таблица1

j_0=0		σ, МПа	Виброостаточное сопротивление грунта сдвигу τ_{vr} в МПа,при:							
σ, МПа	τ_{vr}, МПа		j_0=0,1	j_0=0,2	j_0=0,3	j_0=0,4	j_0=0,5	j_0=0,6	j_0=0,7	j_0=0,8
0,05	0,04695	0,05	0,035	0,03	0,026	0,022	0,019	0,016	0,014	0,012
0,05	0,04395	0,1	0,054	0,046	0,038	0,033	0,028	0,024	0,020	0,012
0,1	0,07131	0,2	0,079	0,070	0,061	0,054	0,048	0,043	0,038	0,033
0,1	0,06861	0,3	0,119	0,105	0,092	0,081	0,071	0,063	0,055	0,049
0,2	0,11227									
0,2	0,08195									
0,2	0,09939									
0,3	0,13554									
0,3	0,14									

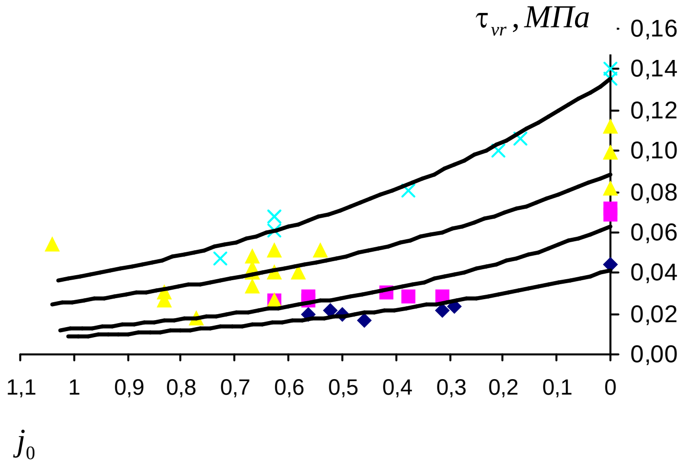


Рис.2. Кривые сопротивления сдвигу грунта τ_{vr} – относительное ускорение крутильных колебаний J_0 при четырех значениях нормального напряжения (сверху вниз): σ =0.3; 0.2:0.1 и 0.05 МПа

Диаграммы $\tau_{vr} - \sigma$ остаточного τ_r (j_0=0) и виброостаточного τ_{vr} (j_0>0) сопротивления сдвигу (прочности) рассматриваемого глинистого грунта, определенные для восьми значений относительных ускорений крутильных колебаний j_0, приведены на рис.3, а параметры φ и c – сопротивления грунта сдвигу закона Кулона:

$$\tau_r = \sigma \mathrm{tg}\varphi + c , \varphi \ ,$$

приведены в табл. 2.

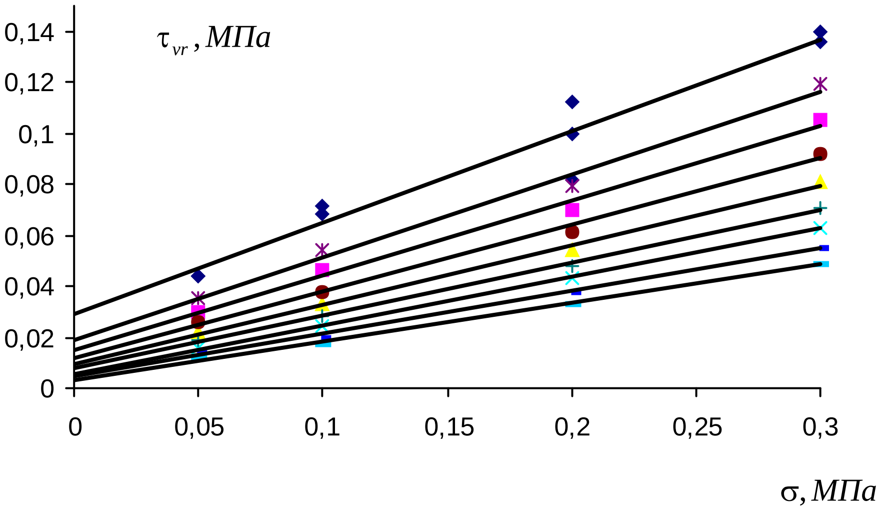


Рис.3.Диаграммы сопротивления сдвигу глинистого грунта при девяти значениях относительного постоянного ускорения крутильных колебаний j_0=0; 0.1; 0.2 0.3; 0.4 0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8 (сверху вниз).

Таблица 2

j_0	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$tg\varphi^0$	0,359,	0,326	0,293	0,261	0,234	0,208	0,189	0,167	0,151
φ^0	19,76	18,04	15,34	14,65	13,16	11,76	10,71	9,49	8,58
c ,МПа	0,0287	0,0188	0,0151	0,0118	0,0095	0,0077	0,0058	0,0046	0,0032

Кривые изменяемости параметров сопротивления испытанного грунта сдвиг в зависимости от относительных ускорений крутильных колебаний показаны на рис. 4 и 5.

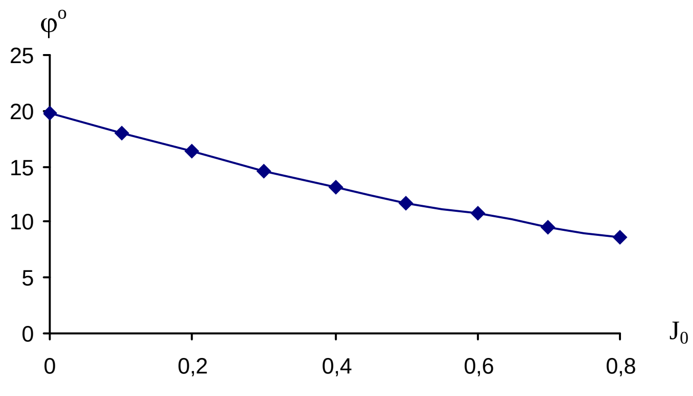


Рис.4

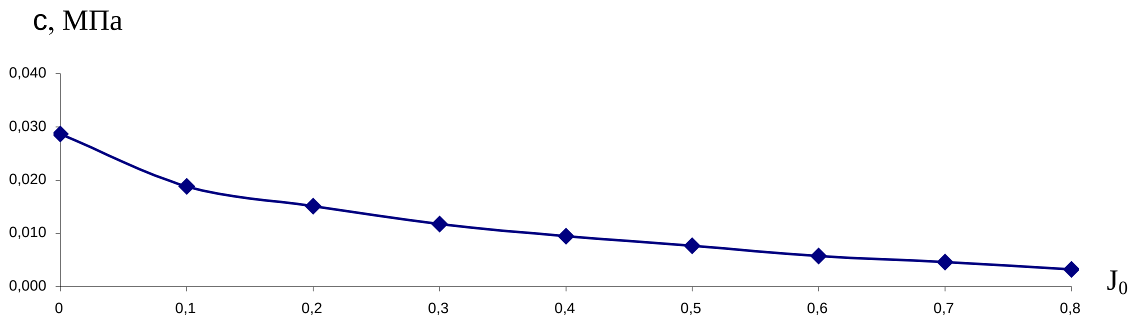


Рис.5

ЛИТЕРАТУРА

1. Месчян С.Р.,Таслагян К.А.Поведение остаточной прочности глинистых грунтов при повторном вибрационном воздействий //Изв.НАН РА. Науки о Земле. 2005. Т.58. №3. С.58-61.
2. Месчян С.Р. Экспериментальная реология глинистых грунтов.Ереван: Изд-во “Гитутюн”, 2002. 498 с.
3. Месчян С.Р. Реологические процессы в глинистых грунтах. Ереван: Айастан, 1992. 395с.

Сведения об авторах

Месчян Степан Рубенович
Доктор техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт механики НАН РА
Адрес: Армения, Ереван, Ленинградян 2, кв.8
Тел: (37410) 26-28-14 E-mail: meschyan_sr@yahoo.com

Таслагян Карен Андреасович
Кандидат геологических наук, младший научный сотрудник, Институт механики НАН РА

АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СЛОЯ С ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ

Мирзоян С.Е., Акопян В.В.

В постановке теории ползучести неоднородно наследственно-стареюших тел рассматривается антиплоская задача о контактном взаимодействии бесконечного слоя с полупространством. При различных вязкоупругих характеристиках слоя и поупространства и при наличии определенной внешней нагрузки, определяется закон распределения контактных касательных напряжений. Решение задачи, с помощью преобразования Фурье сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода. Проводится численный анализ задачи и делаются определенные выводы.

Теория ползучести неоднородно наследственно-стареюших тел [1] наиболее точно отражает физико-механические процессы, происходящие в телах и конструкциях, изготовленных из стареющих вязкоупругих материалов. В рамках этой теории и рассматривается задача о контактном взаимодействии между бесконечным слоем и полупространством в условиях антиплоской деформации.

Пусть бесконечный слой толщины h и полупространство отнесены к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, соединены между собой по плоскости $y=0$ и полученное таким образом составное полупространство в направлении оси Oz находится в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига). В результате, в базовой плоскости Oxy происходит контакт слоя с полуплоскостью.

Предполагается, что полоса и полуплоскость имеют разные меры ползучести на сдвиг $\omega_i(t,\tau)$, разные модули сдвига $G_i(t)$ и возрасты τ_i $(i=1,2)$.

При таких предположениях требуется определить закон распределения касательных контактных напряжений $q(x,t)$ на линии контакта, если в момент времени $t=\tau_0$ к полосе в направлении оси Oz приложены силы интенсивности $p_0(x,t)$.

Условие контакта имеет следующий вид:

$$(1-L_1)\frac{\partial}{\partial x}u_z^{(1)}(x,0,t)=(1-L_2)\frac{\partial}{\partial x}u_z^{(2)}(x,0,t)\ \ \left(x\in(-\infty,\infty),\ t\geq\tau_0\right) \tag{1}$$

где

$$L_i\left[y(t)\right]=\int_{\tau_0}^{t}G_i^*(\tau)K_i^*(t,\tau)y(\tau)d\tau,\ \ G_i^*(t)=G_i(t+\rho) \tag{2}$$

$$K_i^*(t,\tau)=K_i(t+\rho_i,\tau+\rho_i),\ \ \rho_i=\tau_i-\tau_0\ \ (i=1,2)$$

$$K_i(t,\tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}\left[G_i^{-1}(\tau)+\omega_i(t,\tau)\right],\ \ G_i(t)=\frac{E_i(t)}{2[1+\nu_i(t)]}$$

$u_z^i(x,0,t)$ $(i=1,2)$ упруго-мгновенные перемещения соответственно полосы и полуплоскости на линии контакта в направлении оси Oz.

Предварительно решая упруго-мгновенные задачи в перемещениях для полосы и полуплоскости при антиплоской деформации и подставляя в условие контакта (1) выражения перемещений $u_z^i(x,0,t)$, после некоторых преобразований получим двумерное интегральное уравнение относительно контактного напряжения $q(x,t)$ следующего вида:

$$(1-L_1)\frac{1}{2hG_1^*(t)}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{cth}\frac{\pi(x-s)}{2\mathrm{h}}q(s,t)ds-\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{th}\frac{\pi(x-s)}{2\mathrm{h}}p_0(s,t)ds\right]=$$
$$=(1-L_1)\frac{1}{\pi G_2^*(t)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q(s,t)ds}{s-x} \tag{3}$$

Применяя к уравнению (3) преобразование Фурье по координате x, после некоторых выкладок придем к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно функций $\Phi(s,t)$:

$$\Phi(s,t)-\int_{\tau_0}^{t}K^*(t,\tau)\Phi(s,\tau)d\tau=P(s,t) \tag{4}$$

где
$$K^*(t,\tau)=\frac{G_1^*(t)\left[K_1^*(t,\tau)+\text{th}kK_2^*(t,\tau)\right]}{1+\lambda(t)\text{th}k},\ \ \lambda(t)=\frac{G_1^*(t)}{G_2^*(t)}$$

$$P(s,t)=(1-L_1)\overline{P}_0(s,t)/\left[\text{ch}k+\lambda(t)\text{sh}k\right],\ \ k=|s|h$$

$\Phi(s,t)$ и $\overline{P}_0(s,t)$ – трансформанты Фурье, соответственно, $q(x,t)$ и $p_0(s,t)$.

После двукратного дифференцирования уравнения (4) по времени, известным способом относительно функции $\Phi(s,t)$ получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами [3,4]:

$$\Phi''(s,t)+A_0(s,t)\Phi'(s,t)=F(s,t) \tag{5}$$

при начальных условиях

$$\Phi(s,t)\Big|_{t=\tau_0}=P(s,\tau_0)/A(s,\tau_0) \tag{6}$$

$$\Phi(s,t)=\Phi(s,\tau_0)+\Phi'(s,\tau_0)\int_{\tau_0}^{t}e^{-\eta(s,\tau)}d\tau+\int_{\tau_0}^{t}e^{-\eta(s,t)}dt\int_{\tau_0}^{\tau}e^{\eta(s,z)}F(s,z)dt$$

$$\Phi'(s,t)\Big|_{t=\tau_0}=\left\{P'(s,\tau_0)-\gamma\left[\varphi_1(\tau_1)+A_2(s)\varphi_2(\tau_2)\right]\right\}/A(s,\tau_0)$$

где
$$A_0(s,t)=\left\{A'(s,t)+\gamma\left[A(s,t)+\varphi_1^*(t)+A_2(s)\varphi_2^*(t)\right]\right\}/A(s,t)$$

$$A(s,t)=\frac{1}{G_1^*(t)}+\frac{A_2(s)}{G_2^*(t)},\ \ A_2(s)=\text{th}k,\ k=|s|h$$

$$F(s,t)=\left[P''(s,t)+\gamma P'(s,t)\right]/A(s,t)$$

Решение дифференциального уравнения (5) при начальных условиях (6) можно записать в виде

$$\Phi(s,t)=\Phi(s,\tau_0)+\Phi'(s,\tau_0)\int_{\tau_0}^{t}e^{-\eta(s,\tau)}d\tau+\int_{\tau_0}^{t}e^{-\eta(s,t)}dt\int_{\tau_0}^{t}e^{\eta(s,z)}F(s,z)dz \tag{7}$$

$$\eta(s,t)=\int_{\tau_0}^{t}A_0(s,u)du$$

Окончательно решение уравнения (3) определится при помощи обратного преобразованя Фурье:

$$q(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(s,t)e^{-isx}ds \tag{8}$$

Для получения более простых результатов рассмотрим случай, когда внешняя нагрузка имеет вид:

$$p_0(x,t)=p_0(x)H(t-\tau) \tag{9}$$

где $H(t)$ –единичная фунция Хевисайда.

При указанной нагрузке из (7) и (8) получим

$$q(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{P}_0(s)H(t-\tau)}{\text{ch}k+\lambda_0(\tau_0)\text{sh}k}\left[1+\gamma\frac{a_1(\tau_0)\,\text{th}\,k}{\lambda^{-1}(\tau_0)+\text{th}\,k}\int_{\tau_0}^{t}e^{-\eta(s,\tau)}d\tau\right]e^{-isx}ds \tag{10}$$

$$a_1(\tau_0) = G_1(\tau_1)\varphi_1(\tau_1) - G_2(\tau_2)\varphi_2(\tau_2)$$

Из формулы (10) следует, что если деформации ползучести полосы и полуплоскости пропорциональны их упруго мгновенным деформациям, то есть $G_1(\tau_1)\varphi_1(\tau_1) = G_2(\tau_2)\varphi_2(\tau_2)$, то контактные напряжения не зависят от времени и совпадают с их упруго-мгновенными значениями.

Если предположить, что $G_1(t) \to \infty,\ h \to 0$, но $G_1(t)h = \text{const}$, то из (10) получим

$$q(x,t) = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{P}_0(s)H(t-\tau)}{\lambda_0 + |s|}\left[1 + \gamma\frac{a_1(\tau_0)|s|}{\lambda_0 + |s|}\int_{\tau_0}^{t} e^{-\eta^*(s,\tau)}d\tau\right]e^{-isx}ds \tag{11}$$

$$\eta^*(s,t) = \gamma\int_{\tau_0}^{t}\left[1 + \frac{\lambda_0 G_1\varphi_1^*(\tau) + |s|G_2\varphi_2^*(\tau)}{\lambda_0 + |s|}\right]d\tau,\ \lambda_0 = \frac{G_2(\tau_2)}{G_1(\tau_1)h}$$

то есть получается решение задачи о контактном взаимодействии стрингера с полуплоскостью, рассмотренной в [3,4]. Если предположить также $G_i^*(t) = G_1 = \text{const}\ (i = 1,2)$, то из (11) после некоторых преобразований получим:

$$q(x,t) = q(x,\tau_0)H(t,\tau_0,\tau_1,\tau_2) + R(x,t) \tag{12}$$

где $q(x,\tau_0)$ –упруго-мгновенное напряжение

$$H(t,\tau_0,\tau_1,\tau_2) = 1 + \gamma a_1(\tau_0)\int_{\tau_0}^{t} e^{-\eta_0(\tau)}d\tau \tag{13}$$

$$\eta_0(t) = \gamma\int_{\tau_0}^{t}\left[1 + G_1\varphi_1^*(\tau) + G_2\varphi_2^*(\tau)\right]d\tau$$

$$R(x,t) = \frac{1}{2\pi}\gamma a_1(\tau_0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{P}_0(s)e^{-isx}ds}{\text{ch}k + \lambda\text{sh}k}\int_{\tau_0}^{t}\left[\frac{\text{th}\,ke^{-\eta(s,u)}}{\lambda^{-1} + \text{th}\,k} - e^{-\eta_0(u)}\right]du$$

$$R(x,\tau_0) = 0,\ H(t,\tau_0,\tau_1,\tau_2)\Big|_{t=\tau_0} = 0$$

Отметим, что функция $H(t,\tau_0,\tau_1,\tau_2)$ при условии $G_1\varphi_1(\tau_1) > G_2\varphi_2(\tau_2)$ во времени возрастает, а при условии $G_1\varphi_1(\tau_1) < G_2\varphi_2(\tau_2)$, наоборот, убывает.

Численный анализ задачи, при $p_0(x) = p_0\delta(x)$ и значениях параметров

$$G_1 = G_2 = 0.87\times10^4\,\text{МПа},\ \nu_1 = \nu_2 = 0.1,\ h = 5\times10^{-3},\ |\gamma = 0.026\text{сут}^{-1}$$

$$c_0 = \tau_0 = 9\times10^{-5}\text{МПа},\ A_0 = \tilde{A}_0 = 4.82\times10^{-4}\,\text{сут}\times\text{МПа}^{-1}$$

показывает:

1. при условии $\tau_1 < \tau_2$ контактные напряжения вблизи точки приложения сосредоточенной нагрузки во времени возрастают и стремятся к некоторому предельному значению, которая тем больше, чем больше разность возрастов $\tau_2 - \tau_1$, а в достаточно удаленных точках убывая стремится к некоторому предельному значению;
2. при условии $\tau_1 > \tau_2$ наблюдается обратное явление ;
3. при $\tau_2 \to \tau_1$ контактные напряжения стремятся к соответствующим значениям упругой задачи;
4. при условии $\tau_1 < \tau_2$ $(\tau_1 > \tau_2)$ функция $H(t,\tau_0,\tau_1,\tau_2)$ в точке приложения по времени возрастает (убывает);
5. при условии $\tau_1 < \tau_2$ $(\tau_1 > \tau_2)$ по мере возрастания τ_2 контактные напряжения вблизи точки приложения увеличиваются (уменьшаются), а в удаленных точках уменьшаются (увеличиваются).

В табл. 1 и 2 приведены значения функции $H(t,\tau_0,\tau_1,\tau_2)$ для двух вариантов τ_0 и τ_1

$H(t,\tau_0,\tau_1,\tau_2)$ $\tau_0=\tau_1=7$ (суток) Таблица 1

τ_2 \ t	7	14	28	42	60	90	150
7	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1.126	1.174	1.197	1.205	1.217	1.218
28	1	1.213	1.282	1.327	1.336	1.352	1.353
42	1	1.314	1.335	1.347	1.362	1.386	1.386
90	1	1.367	1.409	1.416	1.418	1.423	1.424
150	1	1.386	1.421	1.424	1.426	1.427	1.428

$H(t,\tau_0,\tau_1,\tau_2)$ $\tau_0=7,\ \tau_1=45$ (суток) Таблица 2

τ_2 \ t	7	14	27	42	60	90	150
7	1	0.825	0.713	0.697	0.682	0.670	0.667
14	1	0.881	0.872	0.864	0.857	0.852	0.851
28	1	0.983	0.974	0.962	0.953	0.949	0.948
42	1	0.992	0.987	0.973	0.968	0.967	0.966
90	1	0.998	0.996	0.995	0.995	0.994	0.993
150	1	1	1	1	1	1	1

Эти результаты качественно совпадают с результатами, полученными другими авторами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел. // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. №3. С. 153-164.
2. Арутюнян Н. Х. О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих тел. // ДАН СССР, 1976, №3. С. 569-571.
3. Арутюнян Н. Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336с.
4. Мхитарян С.М. О некоторых задачах контактного взаимодействия между бесконечными стрингерами и полосами с учетом неоднородности старения материалов. //Изв. АН АрмССР.Механика. 1981. Т.34. №5. С. 27-40.

Сведения об авторах

Мирзоян Саак Езникович
Кандидат физ.-мат.наук, старший научный сотрудник Института механики
НАН РА, Адрес: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б,
Тел: (+37410) 568188; E-mail: mechins@sci.am

Акопян Вазгануш Велихановна
Кандидат физ.-мат.наук, научный сотрудник Института механики
НАН РА, Адрес: 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б,
Тел: (+37410) 568188; E-mail: mechins@sci.am

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК И СТЕРЖНЕЙ

Мовсисян Л.А.

Приводятся решения ряда задач для вязкоупругих (в основном, типичное тело) цилиндрических оболочек и стержней.

1. Пусть в начальный момент времени на конце полубесконечной оболочки прикладывается сжимающее осевое усилие и удерживается постоянным в некотором интервале времени –

$$T_1=\frac{Eh}{R\left(1-\nu^2\right)}\left(1-\Gamma^*\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-w\right)=-T_0 \quad \text{при} \quad \xi=0\ ,\ 0\le\tau\le\tau_0 \tag{1.1}$$

Задача рассматривается в безмоментной постановке с применением операционного метода. Но дело в том, что даже в упругой постановке удается получить только асимптотическое решение. В [1] было получено решение упругой задачи в виде ряда по малому параметру– коэффициенту Пуассона. Здесь оказывается, что и это не спасает положение. Оно удается для среды типа Максвелла.

Для типичной среды решение разлагается еще по новому малому параметру –

$$\varepsilon=\frac{HR}{Ena}\ ,\ a=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{1.2}$$

Вот выражение осевого и кольцевого усилий во втором приближении:

$$\begin{gathered}-\frac{T_1}{T_0}=\left[1+\frac{\varepsilon k}{2}\left(\tau-\xi\right)\right]H\left(\tau-\xi\right)-\left[1+\frac{\varepsilon k}{2}\left(\tau-\tau_0-\xi\right)\right]H\left(\tau-\tau_0-\xi\right)-\\ -\frac{\varepsilon k}{2}\tau_0 H\left(\tau-\tau_0-\xi\right),\quad k=\frac{E-H}{H}\\ -\frac{T_2}{\nu T_0}=-\frac{T_1}{T_0}+\cos\left(\tau-\xi\right)-\cos\left(\tau-\tau_0-\xi\right)+\frac{\varepsilon k}{4}\left\{\sin\left(\tau-\xi\right)-\right.\\ -\sin\left(\tau-\tau_0-\xi\right)-\left(\tau-\xi\right)\cos\left(\tau-\xi\right)+\left(\tau-\tau_0-\xi\right)\cos\left(\tau-\tau_0-\xi\right)+\\ \left.+2\tau_0\left[\cos\left(\tau-\tau_0-\xi\right)-1\right]+2\left[\cos\left(\tau-\xi\right)-\cos\left(\tau-\tau_0-\xi\right)\right]\right\}\end{gathered} \tag{1.3}$$

Ниже приводятся выражения продольных усилий для стержня соответственно для сред Максвелла и Фохта –

$$-\frac{T_1}{T_0}=1-\frac{1}{\pi}\int_0^G\frac{1}{z}\sin\xi\sqrt{z\left(G-z\right)}dz\ ,\ G=\frac{E-H}{H}\alpha \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered}-\frac{T_1}{T_0}=\sqrt{\frac{n}{\pi\tau}}e^{-\frac{\tau}{n}}\int_0^\infty I_0\left(2\sqrt{\frac{\xi z}{n}}\right)\exp\left[-\frac{n}{\tau}\left(z+\frac{\xi}{n}\right)^2\right]dz+\\ +\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty I_0\left(2\sqrt{\frac{\xi y}{n}}\right)dy\int_0^{\sqrt{\frac{\tau}{n}}}\exp\left\{-\frac{1}{4z^2}\left[4z^2+\left(y+\frac{\xi}{n}\right)^2\right]\right\}dz\end{gathered} \tag{1.5}$$

2. Устойчивость цилиндрической оболочки изучается при движущихся нагрузках. В частности, рассмотрены случаи, когда нормальное давление или гидростатическое давление с одного конца цилиндра движется к другому концу с постоянной скоростью.

Решение уравнения устойчивости

$$\tilde{E}\left[\frac{h^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\Delta^4 w+\frac{h}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(T_2^0\Delta^2 w\right)=0 \tag{2.1}$$

для свободно опертой оболочки ищется в виде

$$w=\cos\mu_m y\sum_{m=1}^{\infty} f_m(t)\sin\lambda_m x,\quad \mu_n=\frac{n}{R},\ \lambda_m=\frac{m\pi}{l} \tag{2.2}$$

При этом, кольцевое усилие также представляется в виде ряда, и для определения $f_m(t)$ получается бесконечная система интегральных уравнений.

$$2\left(1-\Gamma^*\right)A_{mn}f_m=\mu_n^2\Delta_m^2\left[\sum_{p=1}^{\infty}a_m f_p+\sum_{p=m}^{\infty}a_{p-m}f_p-\sum_{p=1}^{\infty}a_{m+p}f_p\right]=0$$

$$A_{mn}=\frac{h^2}{12\left(1-\nu^2\right)}\Delta_{mn}^4+\frac{1}{R^2}\lambda_m^4,\qquad \Delta_{mn}=\lambda_m^2+\mu_n^2 \tag{2.3}$$

Для подобных задач, помимо мгновенной и длительной критических нагрузок, (если считать нагрузку неподвижной), имеется также понятие критического момента времени – это такое время, при котором для вывода системы из начального состояния необходимо меньшее внешнее воздействие, чем в другой момент времени. Тогда в (2.3), заменяя $\int_0^t\Gamma(t-\tau)f_m(\tau)d\tau$ на $f_m\int_0^t\Gamma(t-\tau)d\tau$ вместо системы (2.3), будем иметь алгебраическую систему с переменными коэффициентами. Критическое время определяется из условия разрешимости этой системы.

Такая задача решена для цилиндра из композиционного материала [2].

3. Для составного стержня, края которого неподвижны и в точке соединения различных материалов приложена сосредоточенная сила в одной части будем иметь растягивающую силу, а в другой – сжимающую [3] –

$$P_1=\frac{\tilde{E}_1\left(1-\xi_1\right)}{\tilde{E}_1\left(1-\xi_1\right)+\tilde{E}_2\xi_1},\qquad P_2=-\frac{\tilde{E}_2\xi_1}{\tilde{E}_1\left(1-\xi_1\right)+\tilde{E}_2\xi_1} \tag{3.1}$$

Решение задачи и критерий потери устойчивости аналогичны приведенной в предыдущем пункте.

Здесь интересно, что возможны случаи, когда длительная критическая сила больше, чем мгновенная.

4. Одномерные контактные задачи для бесконечного цилиндра замкнутых или открытых профилей для вякоупругих материалов решаются, как и для упругих, в замкнутом виде. Другое дело, если имеется неоднородность. В частности, если неоднородность возникла вследствие температуры и верна температурно-временная аналогия, то для стационарного случая вязкоупругие соотношения принимают вид [4]

$$\begin{gathered} T_2=Eh\left(1-\Gamma_1^*\right)\varepsilon-EJ\Gamma_2^*x \\ M_2=EJ\left(1-\Gamma_1^*\right)x-EJ\Gamma_2^*\varepsilon \\ N_2=Ehk^2\left(1-\nu\right)(1-\Gamma_1^*)\omega \end{gathered} \tag{4.1}$$

$$\Gamma_1^*u=\gamma a_0\int_0^t e^{-\alpha a_0(t-\tau)}ud\tau,\quad \Gamma_2^*u=\gamma a_1\int_0^t e^{-\alpha a_0(t-\tau)}\left[1-\alpha a_0\left(t-\tau\right)\right]u(\tau)d\tau$$

Коэффициенты a_i есть разложение функции температурной зависимости $a(T)$ по степеням нормальной координаты.

Сосредоточенная сила передается через симметричный штамп, расположенный в центре свободно опертой круговой арки. Подвергая в преобразовании Лапласа все расчетные величины, в том числе и действующее на арку давление, представляются в виде рядов, удовлетворяющих граничным условиям

$$T_2=\sum_{m=1}^{\infty}T_m\sin\lambda_m\theta\ ,\ldots,\qquad q=\sum_{m=1}^{\infty}q_m\sin\lambda_m\theta\ ,\ \lambda_m=\frac{m\pi}{\theta_1}$$
$$T_m=\frac{Rq_m}{\lambda_m^2-1}\quad ,\qquad M_m=RT_m\ \ ,\ N_m=\lambda_m T_m \tag{4.2}$$

Определяется выражение для изменения кривизны под штампом, которое дает

$$\frac{12R^2}{h^2\left(\lambda_m^2-1\right)}Q_m=\left\{1-\gamma a_0\left(1-e^{\alpha a_0 t}\right)-\frac{h^2a_1^2\gamma^2}{12}\left[\sum_{k=1}^{3}A_k t^{k-1}e^{-\alpha a_0 t}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\left(\alpha-\gamma\right)^2}{a_0\gamma^3}e^{-(\alpha-\gamma)a_0 t}\right]\right\}\left(1-\frac{R}{R_1}\right) \tag{4.3}$$

$Q_m=\dfrac{Rq_m}{Eh}$, $\quad R_1$ – радиус кривизны штампа.

Интервал контакта определяется из условия

$$P=R\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\theta_0}^{\theta_1-\theta_0}q_m\cos\theta\sin\lambda_m\theta d\theta \tag{4.4}$$

5. Постановка задачи оптимального управления движением вязкоупругих систем такая же, как и для упругих: благодаря начальным условиям и вынуждающей нагрузке имеется некоторое движение и требуется в заданный момент времени привести систему в определенное положение, при этом, чтобы управляющее воздействие минимизировало некоторый функционал.

После того, как изгиб и управляющая функция представляются в виде рядов по фундаментальным функциям, вопрос сводится к решению системы [5]

$$\frac{d^3f_m}{dt^3}+\alpha\frac{d^2f_m}{dt^2}+\omega_m^2\frac{df_m}{dt}+\omega_m^2\left(\alpha-\gamma\right)f_m=\frac{dq_m}{dt}+\alpha q_m \tag{5.1}$$

При этом управляющая функция должна минимизировать функционал

$$I=\int_0^T q_m^2\left(\tau\right) \tag{5.2}$$

Характеристическое уравнение (5.1) имеет один действительный и два комплексных корня. Строится фундаментальная матрица и по формуле Коши– решение (5.1). После удовлетворения начальным и конечным условиям методом проблемы моментов при условии (5.2) определяется оптимальная нагрузка

$$q_m^{(0)}=Ce^{-\alpha\tau}+\int_0^{\tau}e^{-\alpha(\tau-\theta)}\frac{\sum_{i=1}^{3}A_ih_i\left(\theta\right)}{\sum_{i=1}^{3}A_iC_i}d\theta \tag{5.3}$$

Можно рассмотреть и задачу оптимального изгиба (статика). Если предположить, что нагрузка действует на некотором участке объекта, то прогиб имеет вид

$$w=\Phi\left(x,t\right)+\gamma\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\Phi\left(x,\tau\right)d\tau$$
$$\Phi=\int_{x_1}^{x}Q\left(\xi,t\right)u_1\left(x,\xi\right)d\xi+\int_{x_1}^{x_2}Q\left(\xi,t\right)u_2\left(x,\xi\right)d\xi \tag{5.4}$$

Минимизируемый функционал такой же, как (5.2). Вопрос ставится таким образом: в данной точке (или в ряде точек) иметь заданный прогиб. Задача типичная, изопериметрическая задача и для оптимальной нагрузки получается

$$Q = w_0 u\left(x_0 , x\right) \frac{e^{-\alpha\left(t_0 - t\right)}}{\gamma\left[1 - \frac{\gamma}{\alpha}\left(1 - \overline{e}^{2\alpha t_0}\right)\right]} \tag{5.5}$$

$$u = \begin{cases} u_1\left(x_0 , \xi\right) + u_2\left(x_0 , \xi\right) , & 0 \le \xi \le x_0 \\ u_2\left(x_0 , \xi\right) , & x_0 \le \xi \le 1 \end{cases} \tag{5.6}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А. О потере устойчивости цилиндрических оболочек при продольном ударе. //Изв. АН Арм.ССР. Сер. физ.-мат. н.) 1964. Т. №6. С. 57-64.
2. Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г. Об устойчивости вязкупругой цилиндрической оболочки при движущейся нагрузке. //Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №2. С.28-33.
3. Мовсисян Л.А. К упругой и вязкоупругой устойчивости составного стержня. Изв. АН Армении. Механика. 1991. Т.44. №4. С.3-11.
4. Мовсисян Л.А. Два типа задач прочности для неоднородной вязкоупругой цилиндрической оболочки и пластин. //Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №3. С.66–73.
5. Габриелян М.С., Мовсисян Л.А. К управлению движением вязкоупругой балки.//Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №1. С.76-81.

Сведения об авторе

Лаврентий Александрович Мовсисян
Доктор техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт механики НАН РА
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}
Тел: (+37410) 52-48-90, E-mail: mechins@sci.am

МИКРОМЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

Мовчан А.А., Казарина С.А., Мовчан И.А.

Уникальные механические свойства сплавов с памятью формы (СПФ) связаны с происходящими в них термоупругими фазовыми и структурными превращениями. В простейшем случае СПФ может состоять из двух фаз – высокотемпературной, аустенитной, обладающей более симметричной кристаллической решеткой и низкотемпературной мартенситной, кристаллическая решетка которой менее симметрична. Под прямым мартенситным превращением понимается переход из аустенитной фазы в мартенситную, который может происходить при охлаждении в определенном температурном интервале и (или) росте напряжений. Под обратным превращением понимается переход из мартенсита в аустенит, который может происходить при нагреве и (или) разгрузке. При прямом превращении под действием постоянных напряжений с отличной от нуля интенсивностью в СПФ накапливается макроскопическая фазовая деформация формоизменения, нелинейно возрастающая с ростом приложенных напряжений, и доходящая в некоторых случаях до величин порядка 10%. Деформация прямого превращения ограничена сверху кристаллографической деформацией соответствующего фазового перехода.

При нагреве и обратном превращении приобретенная таким образом деформация снимается (явление монотонной памяти формы). Для СПФ характерны также: изменение объема при фазовых переходах, не зависящее от действующих напряжений, явления сверхупругости и ориентированного превращения и после специальных термообработок - явление обратимой памяти формы.

Мартенситная фаза может находиться в различных структурных состояниях, отличающихся степенью ориентированности низкосимметричных мартенситных ячеек. Множество структурных состояний мартенсита ограничивается, с одной стороны, состоянием полностью хаотического мартенсита, низкосимметричные ячейки которого не имеют преимущественной ориентации, а с другой стороны, гипотетическим для поликристаллов состоянием полностью ориентированного мартенсита, в котором все мартенситные ячейки имеют одинаковую ориентацию. Девиаторная составляющая деформации хаотического мартенсита по отношению к исходному аустенитному состоянию равна нулю, а для полностью ориентированного состояния эта деформация максимальна и равна кристаллографической деформации превращения аустенита в мартенсит. Структурные превращения сводятся к росту ориентированности мартенситной фазы, происходящем при увеличении напряжений. При этом возникает деформация мартенситной неупругости, которая также снимается при обратном превращении, как и деформация прямого превращения. Процессы фазовых и структурных превращений в СПФ нельзя считать независимыми, поскольку соответствующая им суммарная деформация не может превосходить кристаллографическую деформацию фазового перехода.

В [1-4] предложена модель поведения СПФ при фазовых переходах, описывающая явления прямого, обратного и ориентированного превращения. Следуя этой модели, интенсивность деформации полного прямого превращения, происходящего под действием постоянных напряжений, пропорциональна интенсивности этих напряжений. Модель неплохо описывает поведение СПФ при малых напряжениях, но противоречит тезису об ограниченности фазовых деформаций при высоких напряжениях. В [5,6] предложены модели нелинейного деформирования СПФ, следуя которым зависимость интенсивности деформации, накапливаемой при прямом превращении под действием достаточно высоких постоянных напряжений от интенсивности этих напряжений, выходит на горизонтальную асимптоту, ограничивающую сверху величину этих деформаций. Модели [5,6] описывают явления прямого и обратного превращения, но не описывают явления ориентированного превращения и обратимой памяти формы. Явления, связанные со структурными превращениями в упомянутых выше моделях [1-6] не рассматривались.

В данной работе в рамках подходов механики деформируемого твердого тела с учетом основных микромеханических особенностей термоупругих фазовых и структурных превращений построена модель нелинейного деформирования СПФ количественно и качественно правильно описывающая перечисленные выше явления.

Предполагается, что представительный объем поликристаллического СПФ состоит из большого количества зерен с различной ориентацией кристаллической структуры исходной аустенитной фазы. Прямое превращение сводится к одновременно происходящим процессам зарождения и развития мартенситных пластин. В процессе зарождения из всех возможных направлений преобразования аустенитной кристаллической структуры в мартенситную выбирается то, для которого работа локальных напряжений на соответствующих деформациях максимальна. При этом учитываются не только внешние действующие макроскопические напряжения, но и случайным образом распределенные по представительному объему микронапряжения. Предполагается, что при развитии мартенситных элементов их ориентация не меняется, а приращение объема мартенситной пластины пропорционально текущему значению этого объема с коэффициентом пропорциональности, постоянным, по крайней мере, для всех пластин представительного объема. Обратное превращение сводится лишь к уменьшению до полного исчезновения мартенситных пластин, зародившихся ранее при прямом превращении.

Перечисленные выше соображения позволили построить следующую одномерную модель нелинейного деформирования СПФ:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon^{ph} + \varepsilon^{st} \tag{1}$$

$$d\varepsilon^{ph\,\prime} = \left(c(\sigma)(1-qf(q)) + f(q)\varepsilon_1\right)dq\,,\quad c(\sigma) = 0.5(\rho^0 + \delta^0)\left(1-2F(-\sigma)\right) \tag{2}$$

$$\varepsilon_V^{ph} = 0.5(\rho^0 - \delta^0)q \tag{3}$$

$$d\varepsilon^{st} = (\rho^0 + \delta^0)qp(-\sigma)d\sigma \tag{4}$$

$$d\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_1}{q}dq \tag{5}$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon^{ph\,\prime}, \varepsilon_V^{ph}, \varepsilon^{st}$ - неупругая деформация, девиаторная и объемная компоненты фазовой деформации и структурная деформация СПФ, q - объемная доля мартенситной фазы, ρ^0, δ^0 - точные верхние грани величины неупругой деформации растяжения и модуля такой же деформации сжатия, $f(q)$ - материальная функция, удовлетворяющая условиям

$$0 \le f(q) \le 1/q \tag{6}$$

Соотношение (2) справедливо для случая прямого превращения $dq > 0$, соотношение (4) выполняется при условии $dq \ge 0$, $d\sigma > 0$, иначе $d\varepsilon^{st} = 0$, соотношение (5) справедливо для обратного превращения, когда $dq < 0$ (величина $d\sigma$ может иметь любой знак). В (2) и (4) $F(\sigma)$ - интегральная функция распределения микронапряжений в представительном объеме материала, $p(\sigma)$ - соответствующая плотность распределения. Конкретный анализ в работе производился для равномерного и нормального распределения микронапряжений, а также некоторого аналога распределения Вейбулла.

Можно показать, что для любого процесса, при котором не происходит обратного превращения или разгрузки $dq \ge 0, d\sigma \ge 0$ решение системы (1), (2), (4) для девиаторной компоненты неупругой деформации $\varepsilon_1{}'$ при начальном условии $\varepsilon_1{}'(q_0, \sigma_0) = \varepsilon_0$ имеет вид

$$\varepsilon_1{}' = c(\sigma)q + \left(\varepsilon_0 - c(\sigma_0)q_0\right)\exp\left(\int_{q_0}^{q} f(\xi)d\xi\right) \tag{7}$$

Пусть начальное условие удовлетворяет соотношению $\varepsilon_0 = c(\sigma_0)q_0$. В этом случае, следуя (7), решение системы (1), (2), (4) от $f(q)$ не зависит и равно

$$\varepsilon_1{}' = c(\sigma)q \tag{8}$$

т.е., не зависимо от характера изменения напряжений (лишь бы они не убывали) деформация пропорциональна параметру фазового состава с коэффициентом пропорциональности, зависящим от текущего значения напряжений. В частности, решение (8) справедливо для процесса без разгрузок и обратного превращения, происходящего из полностью аустенитного состояния.

Согласно (8), (3) и свойствам функции распределения, деформация полного прямого превращения ($q=1$) монотонно возрастает с ростом приложенного напряжения от величины $-\delta^0$, соответствующей бесконечным сжимающим напряжениям до величины $+\rho^0$, соответствующей бесконечным растягивающим напряжениям. Объемный эффект реакции прямого превращения ε_V^{ph}, следуя (3), равен полуразности максимальной и модуля минимальной деформации прямого превращения.

При прямом превращении в отсутствии внешних напряжений структурные изменения отсутствуют, а фазовая деформация, следуя (8), равна $\varepsilon^{ph}{}' = c(0)q$. Если медиана распределения микронапряжений отлична от нуля: $F(0) \neq 0.5$, то следуя (2) $c(0) \neq 0$, и будет происходить накопление деформаций. Этот процесс лежит в основе явления обратимой памяти формы. Для распределений микронапряжений с нулевой асимметрией при отличной от нуля медиане математическое ожидание микронапряжений отлично от нуля, т.е. в представительном объеме присутствуют ориентированные микронапряжения. Таким образом, в рамках данной модели явление обратимой памяти формы связано с наличием ориентированных микронапряжений.

Пусть теперь происходит монотонное нагружение от значения напряжения σ_0 и деформации ε_0 при фиксированном значении параметра фазового состава $q = q_0$, т.е. происходит структурный переход без фазового превращения. Для этого случая, исходя из (7), получается

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + q_0\left(c(\sigma) - c(\sigma_0)\right) \tag{9}$$

В частности, при $\sigma_0 = \varepsilon_0 = 0, q_0 = 1$ из (9) получается уравнение диаграммы мартенситной неупругости, т.е. монотонного нагружения материала в полностью мартенситном состоянии (хаотический мартенсит): $\varepsilon_1 = c(\sigma) - c(0)$.

При $f(q) > 0$ модель качественно правильно описывает явление ориентированного превращения, заключающееся в следующем. Пусть материал в аустенитном состоянии был нагружен напряжением $\sigma = \sigma_1$ и под действием этого напряжения произведено охлаждение и соответствующее прямое превращение, в процессе которого величина q возросла от нуля до значения q_1. После этого напряжение изотермически уменьшено до нуля. Далее в отсутствие напряжений охлаждение продолжено до полного прямого превращения. Согласно экспериментальным данным, в процессе охлаждения после снятия напряжений деформации будут возрастать, хотя и с меньшей скоростью, чем в случае, когда напряжения продолжают действовать. Легко видеть, что решение системы (1)-(4) для второго этапа процесса $q_1 \le q \le 1$ в случае отсутствия эффекта обратимой памяти формы имеет вид

$$\varepsilon_1{}' = c(\sigma_1) q_1 \exp\left(\int_{q_1}^{q} f(\xi) d\xi\right) \tag{10}$$

Следуя (10) при условии (6) деформация действительно возрастает с ростом q после снятия напряжений, однако темп этого возрастания ниже, чем в случае наличия напряжения σ_1.

Можно предложить следующее феноменологическое обобщение частного случая описанной выше одномерной микромеханической модели нелинейного деформирования СПФ на трехмерный случай. Рассматривается аналог теории пластичности с изотропным упрочнением и следующим уравнением поверхности нагружения:

$$F(\sigma_{ij}', q, L) = \rho^0 qc(\sigma_i) - L = 0\,,\ L = \int \sqrt{2d\varepsilon_{ij}' d\varepsilon_{ij}'/3} \qquad (11)$$

Здесь ε_{ij}'- девиатор неупругой деформации, L- аналог параметра Одквиста, Считается, что суммарная фазовая и структурная деформации подчиняются ассоциированному закону течения

$$d\varepsilon_{ij}' = d\lambda\sigma_{ij}' \qquad (12)$$

Из (11) и (12) для активного процесса можно получить

$$d\varepsilon_{ij}' = \frac{3}{2}\rho^0 \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i}\left(F(\sigma_i)dq + \frac{3}{2}qp(\sigma_i)\frac{\sigma_{mn}'}{\sigma_i}d\sigma_{mn}' \right) \qquad (13)$$

Здесь $F(\sigma_i)$, $p(\sigma_i)$ - функция и плотность распределения интенсивности микронапряжений. В одномерном случае соотношение (13) дает тот же результат, что и система (1)-(4) при $f(q) = 0, \delta^0 = \rho^0$. Учет трансляционного упрочнения позволяет обобщить модель (13) на случай $f(q) \neq 0$.

Работа выполнена при финансовом содействии РФФИ, проект № 05-01-00841

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовчан А.А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы. //Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 6. С. 47-53.
2. Мовчан А.А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы. //Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 1. С. 197-205.
3. Мовчан А.А., Ньюнт Со. Термодинамическое описание поведения сплавов с памятью формы с помощью аддитивного потенциала Гиббса. //Журнал прикладной механики и технической физики. 2006. Т.47. № 4. С. 98-103.
4. Мовчан А.А., Мишустин И.В. Анализ неаддитивных добавок к потенциалу Гиббса сплава с памятью формы // Изв. РАН. Серия физическая. 2006. Т. 70. № 9. С. 1388-1395.
5. Мовчан А.А., Мишустин И.В. Термодинамический анализ механического поведения сплавов с памятью формы // «Упругость и неупругость» Сб. труд. Международного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященный 95-летней годовщине со дня рождения А.А. Ильюшина. М.: Изд-во МГУ. 2006 г. С.195-203.
6. Мовчан А.А., Мишустин И.В. Термодинамическое описание нелинейного деформирования сплавов с памятью формы. //Журнал функциональных материалов. 2007. Т. 1. №6. С. 221-226.

<u>Сведения об авторах</u>

Мовчан Андрей Александрович
Доктор физ.-мат. наук, главный научный сотрудник института прикладной механики РАН
Адрес: Москва, Литовский бульвар, д.3, корп. 2, кв. 279
Тел. 426-14-55 (Московский); E-mail: movchan47@mail.ru

Казарина Светлана Александровна
Кандидат технических наук, старший научный сотрудник института прикладной механики РАН
Адрес: Московская обл., пос. Купавна г. Железнодорожного, ул. Чехова,
д. 1 кв. 4
Тел. 527-85-90 (Московский); E-mail: svetlans@mail.ru

Мовчан Игорь Андреевич
Аспирант института прикладной механики РАН

ВЛИЯНИЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ НА ДИФФУЗИОННЫЙ РОСТ ТОНКИХ ПЛЕНОК

Мочалова Ю.А.

Рассматривается задача о влиянии динамических эффектов на рост островков на поверхности тонких пленок. Пленка моделируется тонким смачивающим слоем, лежащим на твердой подложке. Образование и рост на ее поверхности островков вызван упругими напряжениями, возникающими в смачивающем слое, которые вызывают диффузию атомов от более напряженных участков пленки к менее напряженным. Математическая постановка задачи сводится к анализу системы нелинейных уравнений, описывающих эволюцию роста зародыша островка и распространение волн в тонких пленках. Показано, что внешнее возмущение приводит при определенных параметрах системы к образованию стоячих волн, локализованных в области включений, и при отсутствии трения эти локализованные колебания могут не затухать бесконечно долго, что приводит к созданию дополнительного поля напряжений. Явление локализации волн, таким образом, может вызывать значительное увеличение скорости роста островков.

1. Введение.

Конденсация пленок и их рост – это очень сложный многостадийный процесс, сопровождающийся различными нелинейными явлениями. Будем рассматривать стадию образования зародышей островков и их сепаратного роста, то есть тот момент времени, когда на поверхности тонких пленок образуются и растут островки новой фазы. Будем считать, что зарождение происходит из атомов самой пленки. В качестве физической модели, описывающий этот процесс, выберем модель, предложенную С.А.Кукушкиным и А.В.Осиповым в работе [1], где подробно описан механизм образования когерентных островков.

Скорость роста островка пропорциональна градиенту химического потенциала и эволюционное уравнение может быть записано в следующей известной форме:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{D}{k_b T_a} \nabla\mu S \tag{1}$$

где V – объем островка, D – коэффициент диффузии, k_a – константа Больцмана, T_b – температура, $\nabla\mu$ – градиент химического потенциала, вызванный упругими напряжениями, S – площадь, через которую атомы встраиваются в островок (см. [1], [2]). Для простоты градиент химического потенциала может быть представлен разностью химических потенциалов в слое и в островке

$$\nabla\mu = \frac{\Delta\mu}{2\lambda_c R}$$

Здесь λ_c – параметр обрезания величины упругих напряжений, показывающий насколько далеко от островка распространяется упругое напряжение, R – радиус островка. Будем моделировать пленку упругим изотропным слоем. Химический потенциал определяется как

$$\mu = \mu_0 + \nu[\Delta U + \gamma k] \tag{2}$$

где ν – атомный объем, ΔU – плотность упругой энергии, γ – поверхностное натяжение, k – средняя кривизна пленки. Определим плотность упругой энергии как сумму статической упругой энергии состояния равновесия U_{st} и динамической составляющей упругой энергии U_d, которая является результатом распространения волн по поверхности пленки

$$U(x,t) = U_{st}(x) + U_d(x,t) \tag{3}$$

Заметим, что обычно упругая энергия определяется статическим напряженным состоянием пленочной структуры [1] и динамические волновые процессы, возникающие в смачивающем слое, не рассматриваются.

2. Модель тонкой пленки. Постановка задачи.

Декартову систему координат (x, y) выберем так, чтобы ось x совпадала с невозмущенной свободной (инерционной) поверхностью, а ось y направлена вертикально вверх. Для определения статического напряженного состояния будем рассматривать пленку как двумерный тонкий упругий слой под действием однородной осевой нагрузки. Тогда, считая толщину пленки постоянной и равной h за исключением областей роста островков, получим

$$U_{st} \approx \frac{1}{2} E\varepsilon_0^2 [1 - 2\tilde{h}/h]$$

где E – модуль Юнга, ε_0 – осевое напряжение, вызванное несоответствием кристаллических решеток пленки и подложки, $\tilde{h}(x,t)$ – функция, определяющая высоту островков. Последнее выражение может быть записано в виде

$$U_{st} \approx \frac{1}{2} E\varepsilon_0^2 [1 - 2M/M_F] \tag{4}$$

где M – масса островка, M_F – погонная масса пленки.

Будем рассматривать пленку как волновод с островками-включениями, масса которых изменяется во времени. В качестве моделей пленки-волновода могут быть рассмотрены следующие механические модели: струна на упругом основании, балка Бернулли-Эйлера на упругом основании, смачивающий слой, заполненный идеальной тяжелой жидкостью с инерционной свободной поверхностью, которая представляет собой упругую мембрану. В самом общем виде волновой процесс на поверхности тонкой пленки-волновода может быть описан следующим уравнением:

$$Lu + \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\rho + M(t)\delta(x - x_m)\right) \frac{\partial u}{\partial t} \right] = F(x)\delta(t) \quad \text{при} \quad -\infty < x < +\infty \tag{5}$$

Здесь Lu – линейный дифференциальный оператор второго или четвертого порядка (в зависимости от модели пленки), $u(x,t)$ – перемещение поверхности пленки, ρ – плотность пленки, $M(t)$ – погонная масса островка, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, x_m – точка, где сосредоточен островок, $F(x) = F_0\,\delta(x - x_F)$ – плотность импульса внешней возмущающей силы, приложенной в $x = x_F$. Пусть начальные условия нулевые: $u(x,0) = \partial u(x,0)/\partial t = 0$, и волновой процесс затухает на бесконечности, то есть, для любого фиксированного момента времени u удовлетворяет следующему условию

$$u,\ \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty, \quad k = 1,\ldots,m-1 \tag{6}$$

где m – порядок оператора L. Таким образом, движение пленки-волновода с растущей сосредоточенной массой (островком) описывается уравнениями (5)–(6) и эволюционным уравнением (1). Плотность упругой энергии U можно представить как

$$U(x,t) = U_{st} + U_d(x,t), \quad U_d\,|_{x=x_F} = Pu \tag{7}$$

где U_{st} – статическая составляющая упругой энергии, Pu – дифференциальный оператор, определяющий динамическую составляющую упругой энергии U_d.

Используя (2)-(4) и (7), запишем эволюционное уравнение (1) в виде

$$\frac{dM}{dt} = \bar{D}\left\{\lambda\left[1 - 2M/M_F\right] + Pu\right\} \tag{8}$$

где $\lambda = E\varepsilon_0^2/2$, $\bar{D}$ – константа, определяемая кинетическими параметрами роста пленки. Вид оператора Pu определяется моделью пленки. Цель нашей работы заключается в том, чтобы исследовав полученную систему уравнений, показать влияние распространения волн в тонких пленках на скорость роста островка.

3.Метод решения.

Фазовая скорость распространения волн в пленке имеет порядок $\sqrt{gh}$, где g – гравитационная постоянная, h – толщина пленки. Скорость роста островков пропорциональна $\varepsilon = D / k_b T_a$ и зависит от многих факторов (напыляемого материала, материала подложки, температурного режима и других). Опыт показывает, что скорость распространения волн значительно превосходит скорость нуклеации ($\varepsilon << \sqrt{gh}$), и если в пленке существуют только распространяющиеся волны, то влияние волновых процессов на рост островков не значительно, так как возбуждаемый волновой процесс "быстро" затухает, в то время как рост островков продолжается. Ситуация меняется, если в пленке-волноводе возможна локализация волнового процесса в области островка. Существование стоячих волн, локализованных в области включения, означает, что соответствующая спектральная задача имеет не только непрерывный, но и дискретный спектр собственных частот.

Приведенные выше соображения определяют схему решения задачи. Вначале необходимо проверить имеет ли выбранная нами модель пленки-волновода дискретный спектр. Считая массу островка постоянной, решаем соответствующую спектральную задачу. Если дискретный спектр существует, то продолжаем решение исходной нестационарной задачи (5)–(6), (8). Введя два масштаба времени t и $\tau = \varepsilon t$, будем искать решение в виде разложения по степеням ε и используя метод многих масштабов. В полученной нестационарной задаче для нулевого приближения масса M_0 зависит только от τ, тогда u_0 найдем используя метод разложения по собственным функциям соответствующей спектральной задачи

$$u_0(x,t) = X(x,\omega_*, M_0)\sin(\omega_* t) + \int_{[\omega_b,\infty]} X_\omega(x,\omega,M_0)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}\omega \tag{9}$$

Здесь X – локализованная в окрестности сосредоточенной массы мода колебаний, соответствующая дискретной частоте ω_* (ловушечная мода), X_ω – семейство собственных функций соответствующих частотам непрерывного спектра ω (бегущие моды), ω_b – частота отсечки пленки-волновода. Заметим, что разложение (9) справедливо, если $\omega_* < \omega_b$. Для некоторых рассматриваемых моделей пленки дискретный спектр расположен на оси непрерывного и схема решения задачи имеет ряд особенностей. Таким образом, определим M_0 и u_0. Аналогично используя уравнения, полученные для первого приближения, найдем M_1 и u_1, и т.д.

4. Влияние локализованных волн на рост островков. Примеры моделей пленки-волновода.

В качестве модели пленки-волновода рассмотрим смачивающий слой, заполненный идеальной тяжелой жидкостью с инерционной свободной поверхностью, которая представляет собой упругую мембрану и, на которой имеются два растущих массовых включения. Постановка и решение этой задачи даны в работе [3]. Заметим, что в этом случае метод решения, описанный выше, имеет особенности. Получено следующее выражение, определяющее рост массы островка:

$$M(t) = M_F + (M_0 - M_F)\exp\left[-\varepsilon\lambda_g t\right] + \beta\left\{1 - \exp[-\varepsilon\lambda_g t] + \frac{\varepsilon\lambda_g}{2\overline{\omega}_*}\times\right.$$
$$\left.\times\sin 2\overline{\omega}_*\left[t + \frac{M_F - M_0 + \beta}{2\lambda_g}\left(1 + \varepsilon\lambda_g t - \exp\left[-\varepsilon\lambda_g t\right]\right)\right]\right\} + O(\varepsilon^2)$$

Здесь, $\overline{\omega}_*$ – собственная частота, поддерживающая локализованную моду, $\lambda_g = \lambda h/g$, $T_g = T_a h/g$, β – константа, определяемая начальными условиями.

Последнее выражение описывает рост островка качественно. Первые два слагаемых соответствуют росту островка, вызванному статическим напряженным состоянием. Влияние на рост островка локализованной волны определяется третьим слагаемым.

Таким образом, существование локализованной волны на поверхности тонкой пленки ведет к увеличению скорости роста островка и при определении размеров островков этот фактор должен учитываться.

5.Заключение. Заметим, что предложенная модель, основанная на феноменологическом законе (1), определяющем скорость роста островков на поверхности пленки, имеет ряд недостатков. Прежде всего это трудности, возникающие при определении химического потенциала и упругой энергии в области островка. Поэтому для описания динамики тонкой пленочной структуры, изменение поверхности которой вызвано диффузионным переносом вещества, разработан новый подход, основанный на модели двухкомпонентной среды, позволяющий учитывать взаимное влияние структурных превращений в материале и динамики пленки. Первая материальная компонента представляет собой кристаллическую решетку, подверженную упругим напряжениям, вторая моделируется идеальной несжимаемой жидкостью. Полученное на основе данной модели нелинейное уравнение изменения поверхности пленки позволяет описывать как диффузионный рост пленки, так и распространение волн на поверхности пленки, а также исследовать их взаимное влияние.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-00785-а) .

ЛИТЕРАТУРА

1. Гегузин Я.Е. Диффузионные зоны. М.: Наука, 1979. С.344.
2. Кукушкин С.А., Осипов А.В., Шмитт Ф., Хесс П. Зарождение когерентных островков при росте Странского-Крастанова, индуцированное упругой энергией // ФТП. 2002. Т.36. Вып.10. С.1177-1184.
3. Indeitsev D.A., Mochalova Yu.A. Problem of Low-frequency Localized Oscillations in a Thin Films with Growing Islands // Mechanica. 2006. V.41. P.311-320.

<u>Сведения об авторе:</u>
Мочалова Юлия Алексеевна
Кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, Институт Проблем Машиноведения РАН
Адрес: В.О., Большой проспект, 61, Санкт Петербург, Россия, 199178
Тел.: +7-812-3214778, Fax +7-812-3214771, E-mail: yulia@hydro.ipme.ru

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ СЛОЖНО АРМИРОВАННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ОБОЛОЧЕК И ПЛИТ

Немировский Ю.В., Янковский А.П.

Сформулирована и решена методом линейного программирования задача определения верхней кинематической границы несущей способности сложно армированных железобетонных заглубленных куполов вращения под действием массовой нагрузки с учетом активного воздействия грунта. Показано, что разным железобетонным композициям соответствуют разные рациональные структуры армирования, обеспечивающие наибольшую предельную нагрузку. Исследованы различные «механизмы» разрушения куполов и показана возможность существования неединственного решения задачи предельного равновесия армированных оболочек.

Известно, что несущая способность реальных конструкций в рамках упругого деформирования, как правило, низка и далека от своего полного исчерпания. Особенно это касается железобетонных конструкций, несущая способность фазовых материалов которых отличается на порядки как в рамках упругости, так и за ее пределами. Кроме того, при деформировании железобетонных конструкций ситуация дополнительно осложняется практически пренебрежимо малым сопротивлением бетона растяжению. В связи с этим особую актуальность приобретает вопрос об определении предельной внешней нагрузки, выдерживаемой армированной железобетонной конструкцией при полном исчерпании несущей способности всеми субструктурными элементами композиции. Однако полное решение или близкие (верхнюю и нижнюю) границы несущей способности можно получить лишь для некоторого узкого круга задач [1], поэтому выдвигаемые практикой новые задачи требуют привлечения численных методов решения математической задачи о предельном статическом равновесии армированных конструкций в рамках жесткопластической модели. Настоящее исследование посвящено определению верхней границы несущей способности железобетонных куполов вращения и круглых (кольцевых) плит, а также «механизмов» их разрушения с использованием теории линейного программирования.

Рассматриваются тонкие купола вращения постоянной или переменной толщины $H = 2h(\theta)$, осесимметрично нагруженные и армированные. Нагрузки в окружном направлении отсутствуют, армирование осуществляется по меридионально-окружным или меридионально-симметричным спиральным траекториям двумя семействами арматуры. При таких структурах армирования, нагружении и геометрии куполов (оболочек) в них отсутствует скручивание, поэтому направления главных напряжений и скоростей деформаций в связующем и в композиции в целом совпадают с меридиональным и окружным направлениями.

Кромки оболочки задаются значениями $0 \le \theta_* < \theta_{**} < \pi$ ($\theta_* \le \theta \le \theta_{**}$; θ – угол между осью вращения и нормалью к срединной поверхности), угол θ_{**} определяет опорный контур купола, θ_* – полюсное отверстие в вершине купола; при $\theta_* = 0$ имеем замкнутый в вершине купол, при $\theta_* > 0$ – в окрестности вершины купола имеется полюсное отверстие, которое предполагается закрытым абсолютно жесткой круглой плитой (крышкой), жестко скрепленной с верхней кромкой купола.

Согласно формулировке кинематического метода [1], для определения верхней (кинематической) границы несущей способности оболочки требуется найти минимум параметра p^* нагрузки, действующей на поверхность купола,

$$p^* = \iint_S D\,dS - \iint_S \left(g_1 v_1 + g_3 v_3 \right) dS - G\dot{\delta} \qquad \left(v_2 \equiv 0 \right) \tag{1}$$

при условии нормировки

$$\overline{P}\dot{\delta} + \iint_S \left(\overline{p}_1 v_1 + \overline{p}_3 v_3 \right) dS = 1 \qquad \left(v_2 \equiv 0 \right) \tag{2}$$

и ограничениях-неравенствах

$$D \ge \sum_{j=1}^{n} Q_{j,r}\dot{q}_j, \quad r = 1,\, 2,\, ...,\, \varsigma \quad \left(D \ge 0\right) \tag{3}$$

где $P = p^*\overline{P}$ – результирующая поверхностной нагрузки, действующей на крышку вертикально вниз; $p_i = p^*\overline{p}_i$ $(i = 1,\, 2,\, 3)$ – компоненты поверхностной нагрузки, действующей на купол (здесь и далее нижний индекс 1 означает меридиональное, 2 – окружное, 3 – нормальное к срединной поверхности направления); G – вес крышки совместно с подвешенными к ней грузами (величины $\overline{P}$, G и функции $\overline{p}_i(\theta)$ заданы); $\dot{\delta}$ – скорость вертикального смещения крышки; $v_i = \dot{u}_i$ $(i = 1,\, 2,\, 3)$ – кинематически допустимые скорости смещения точек срединной поверхности купола ($v_2 \equiv 0$, так как смещение в окружном направлении отсутствует, u_3 – прогиб), поэтому к (1)–(3) следует добавить кинематические граничные условия; g_i – компоненты приведенной нагрузки, действующей на единицу площади срединной поверхности и независящей от параметра p^*; S – площадь срединной поверхности купола; D – диссипация, отнесенная к единице площади срединной поверхности; ς – количество угловых точек линеаризованной предельной поверхности (поверхности текучести) материала железобетонной оболочки; $Q_{j,r}$ – значения *j*-х обобщенных напряжений в *r*-й угловой точке предельной поверхности; $\dot{q}_j$ – обобщенные скорости деформаций, определяемые кинематически допустимыми скоростями; *n* – количество обобщенных напряжений и скоростей; нижний индекс после запятой означает номер угловой точки поверхности текучести; точка над функцией означает частную производную по времени.

К соотношениям (1)–(3) следует добавить кинематические условия совместного смещения крышки и верхней кромки купола, которые предполагаются жестко связанными,

$$v_1(\theta_*) = \dot{\delta}\sin\theta_*, \quad v_3(\theta_*) = -\dot{\delta}\cos\theta_*, \quad v_3'(\theta_*) - v_1(\theta_*) = 0 \tag{4}$$

и условия закрепления опорного контура, который считается жестко заделанным,

$$v_1(\theta_{**}) = v_3(\theta_{**}) = 0, \quad v_3'(\theta_{**}) = 0 \tag{5}$$

где штрих означает дифференцирование по θ.

Чтобы избежать построения гиперповерхности текучести для железобетонных оболочек со сложными и неоднородными структурами армирования в обобщенных напряжениях (в четырехмерном фазовом пространстве усилий-моментов), далее рассматривается двухслойная модель купола. Расчеты, проведенные в [1] для изотропных бетонных и стальных оболочек, показывают, что двухслойная модель оболочки гарантирует вполне приемлемую точность. Уточнение же верхней границы несущей способности таких оболочек за счет использования *N*-слойной модели ($N \ge 3$) с практической точки зрения пренебрежимо мало, но порождает значительные технические трудности. Кроме того, для железобетонных куполов выбор двухслойной модели наиболее естественен, так как обычно армирование тонкостенных бетонных конструкций осуществляется в двух слоях, в каждом из которых структура армирования в общем случае может быть своя.

З а м е ч а н и е. Заменив во всех предыдущих рассуждениях угол θ на полярный радиус *r*, получим формулировку задачи об определении верхней границы несущей способности круглых и кольцевых железобетонных плит при осесимметричном нагружении, закреплении, армировании и деформировании.

Подробное описание кинематического метода определения верхней границы несущей способности осесимметрично армированных куполов вращения и круглых (кольцевых) плит, фазовые материалы которых различно сопротивляются растяжению и сжатию, с применением двухслойной модели тонкостенной конструкции, анализ линеаризованных предельных кривых материала композиции при разных структурах армирования, дискретизация задачи и адаптация ее к методам линейного программирования подробно изложены в [1–4], поэтому не будем здесь останавливаться на обсуждении этих вопросов.

Исследуем несущую способность сферических и эллипсоидальных куполов, представляющих собой обделку заглубленного бункера. Предполагается, что грунт, окружающий бункер, относится к категории мягких, землистых, сыпучих и плывучих грунтов с коэффициентом крепости $f=1$ и объемной плотностью $\rho_*=1800$ кг/м^3 [5]. Тогда под параметром p^* можно понимать толщину грунта над крышкой, а $\bar{P}$, $\bar{p}_i$, g_i в (1), (3) задаются равенствами

$$\bar{P}=g\pi r_*^2\rho_*,\quad g_1=\bar{g}\sin\theta+\bar{p}_1h_\theta,\quad g_3=-\bar{g}\cos\theta+\bar{p}_3h_\theta$$
$$\bar{p}_1=0,5g\rho_*\left(1-\kappa\right)\sin 2\theta,\quad \bar{p}_3=-g\rho_*\left(\kappa\sin^2\theta+\cos^2\theta\right) \tag{6}$$

где

$$\bar{g}\left(\theta\right)=gH\left(\theta\right)\left(a\rho_0+\sum_{k=1}^{2}\rho_k\omega_k\right),\quad a=1-\sum_{k=1}^{2}\omega_k\left(\theta\right),\quad \kappa=\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$\varphi=\mathrm{arctg}\,f,\quad h_\theta\left(\theta\right)=\frac{R_0}{1+\gamma}\left(\frac{\cos\theta_*}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta_*}}-\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}}\right) \tag{7}$$

$g=9,81$ м/с^2 – ускорение свободного падения; r_* – радиус крышки купола; ρ_0, ρ_k – объемные плотности материалов связующего и арматуры k-го семейства соответственно; ω_k – плотность армирования силовыми элементами k-го семейства; φ – угол внутреннего трения грунта [5]; R_0 – значения радиусов кривизны при $\theta=0$ (в полюсной точке оболочки или, что то же самое, в вершине замкнутого купола); γ – параметр, задающий геометрию оболочки (подробное описание геометрии оболочки через параметры r_*, R_0, γ и радиус r_0 основания купола приведено в [3]); h_θ – расстояние вдоль оси вращения от крышки до текущей точки срединной поверхности купола.

Первые слагаемые в выражениях для g_i определяются удельным весом материала самого купола, а вторые слагаемые характеризуют влияние веса грунта, лежащего ниже крышки, которое не зависит от толщины грунта над крышкой.

При определении нагрузок (6) с учетом равенств (7) использовалась гипотеза М. М. Протодьяконова для вычисления вертикального и активного бокового давлений, действующих на обделку в слабых и неустойчивых грунтах [5].

Рассматриваются купола, изготовленные из мелкозернистого или тяжелого бетона и армированные низкопрочной или высокопрочной проволочной арматурой, причем срединная поверхность на опорном контуре пересекает опорную плоскость под прямым углом ($\theta_{**}=\pi/2$). Физико-механические характеристики фазовых материалов приведены в таблице, где σ^*, σ^{**} – предельно допустимые напряжения (пределы текучести) материала соответствующей фазы композиции при растяжении и сжатии.

Физико-механические характеристики фаз железобетона [1, 6]

Фазовый материал композиции	σ^*, МПа	σ^{**}, МПа	ρ, кг/м^3
Тяжелый бетон	1,65	33,0	2400
Мелкозернистый бетон	0,26	2,1	2400
Высокопрочная арматура	1240	400	7800
Низкопрочная арматура	360	360	7800

Так как арматура предполагается постоянного поперечного сечения и обрывается только на кромках купола, то интенсивность армирования k-м семейством определяется равенством [7]

$$\omega_k(\theta)=h_*\omega_{k*}\cos\psi_{k*}R_{2*}\sin\theta_*/\left[h(\theta)\cos\psi_k(\theta)R_2(\theta)\sin\theta\right]$$
$$h_*=h(\theta_*),\quad \omega_{k*}=\omega_k(\theta_*),\quad \psi_{k*}=\psi_k(\theta_*),\quad R_{2*}=R_2(\theta_*) \tag{8}$$

где ω_{k*} – постоянные, которые можно варьировать; ψ_k – углы армирования силовыми элементами k-го семейства, отсчитываемые от меридионального направления; R_2 – радиус кривизны срединной поверхности в окружном направлении. Равенство (8) не выполняется лишь при окружном армировании (так как $\cos\psi_k \equiv 0$), в этом случае $\omega_k(\theta)$ – произвольная функция [7].

На рис. 1, 2 изображены зависимости предельно допустимой толщины ($L = p^*$) грунта над крышкой от толщины $H = \text{const}$ сферического купола с геометрическими характеристиками: $r_0 = R_0 = 20$ м ($\gamma = 1$), $r_* = 3$ м. (Использованы соотношения (6), (7), а величина G в (1) принята равной $G = 1{,}664$ МН.) На рис. 1 приведены зависимости для купола из мелкозернистого бетона, усиленного низкопрочной арматурой, а на рис. 2 – из тяжелого бетона с высокопрочной арматурой.

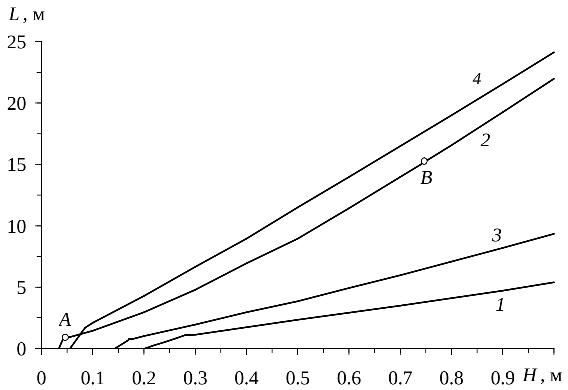


Рис. 1

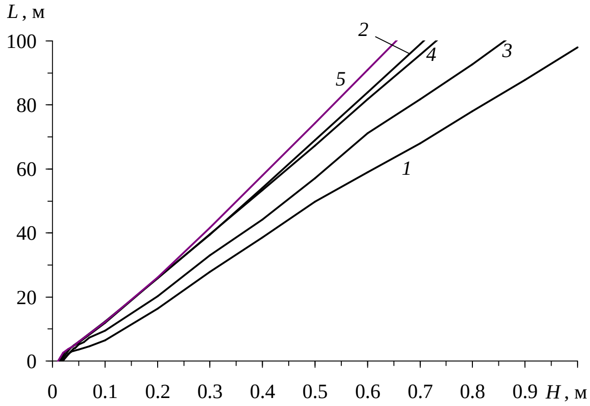


Рис. 2

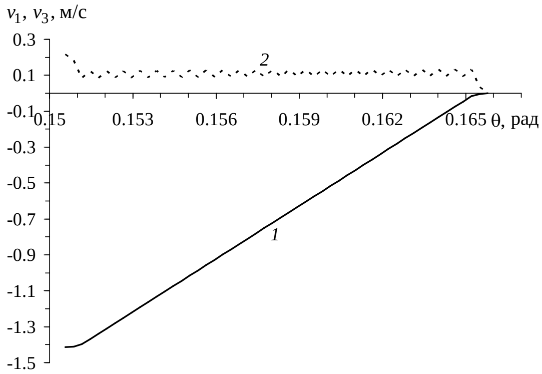


Рис. 3

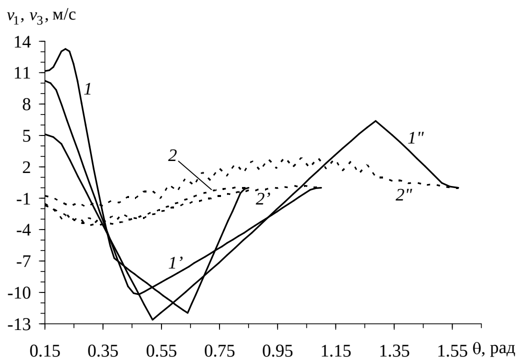


Рис. 4

Кривые *1* на рис. 1, 2 характеризуют несущую способность неармированных бетонных куполов; линии *2* – куполов, армированных в меридиональном направлении $\psi_1 = 0$. Во всех армированных куполах плотности армирования ω_{k*} в (8) подбирались так, чтобы общий объем арматуры V_a в куполе, определяемый по формуле

$$V_a = 2\pi \int_{\theta_*}^{\theta_{**}} \sum_{k=1,2} \omega_k(\theta) R_1 R_2 H \sin\theta d\theta, \quad V = 2\pi \int_{\theta_*}^{\theta_{**}} R_1 R_2 H \sin\theta d\theta$$

составлял 1 % от объема купола V. (Здесь R_i $(i = 1,\, 2)$ – главные радиусы кривизны купола.) Кривые *3* на рис. 1, 2 соответствуют куполам с окружным армированием ($\psi_1 = \pi/2$, $\omega_1(\theta)$ определяется по закону (8) в предположении, что $\cos\psi_{k*}/\cos\psi_k = 1$), линии *4* – куполам с меридионально-окружным армированием ($\psi_1 = 0,\ \psi_2 = \pi/2$, функции $\omega_1(\theta) = \omega_2(\theta)$

задаются равенством (8)). Следовательно, во всех армированных куполах суммарная плотность армирования $\omega_1 + \omega_2$ монотонно убывает от их вершины к основанию.

Из рис. 1, 2 видно, что наименьшей несущей способностью обладают бетонные купола, а наибольшей – купол с меридионально-окружным армированием в случае композиции мелкозернистый бетон – низкопрочная арматура (кривая *4* на рис. 1) и купол с меридиональной структурой в случае композиции тяжелый бетон – высокопрочная арматура (линия *2* на рис. 2). Следовательно, разным железобетонным композициям соответствуют разные рациональные структуры армирования, обеспечивающие наибольшую предельную нагрузку.

На всех кривых рис. 1, 2 при малых толщинах *H* наблюдается излом (например, в точке *A* на кривой *2* рис. 1), гладким участкам линий соответствуют разные «механизмы» разрушения куполов. Нижним участкам кривых соответствует «срез» крышки, когда разрушение купола происходит в малой окрестности точек скрепления купола с крышкой, остальная же часть купола остается целой (абсолютно жесткой). На рис. 3, 4 изображены кривые, характеризующие скорости смещения точек срединной поверхности в меридиональном (v_1 – штриховые линии с номерами *2, 2', 2"*) и нормальном (v_3 – сплошные линии с номерами *1, 1', 1"*) направлениях и соответствующие разным «механизмам» разрушения куполов. На рис. 3 приведены кривые, характеризующие «срез» крышки при $H_A = 0,044$ м (см. точку *A* на рис. 1). Из этого рисунка видно, что участок пластического деформирования составляет $\Delta\theta = 0,1658 - 0,1506 = 0,0152$ рад, т.е. всего 1,07 % от всей меридиональной протяженности купола (от разности $\theta_{**} - \theta_* = 1,4202$ рад). Верхним частям кривых на рис. 1, 2 (например, правее точки *A* на кривой *2* рис. 1) соответствует частичное разрушение купола в некоторой окрестности крышки ($\theta_* \le \theta \le \theta_p$, $0,7 \le \theta_p \le 1,1$ рад); «механизмы» такого разрушения при $H_A = 0,044$ м и $H_B = 0,74$ м характеризуются кривыми *1*, *2* и *1'*, *2'* на рис. 4, где точкам изломов соответствуют пластические шарниры.

На кривой *2* рис. 1 наблюдается еще одна точка ветвления «механизма» разрушения купола – точка *B* ($H_B = 0,74$ м). При подходе к точке *B* слева ($H \to H_B - 0$) «механизм» разрушения характеризуется кривыми *1'*, *2'* на рис. 4 (частичное разрушение на участке $\theta_* \le \theta \le 1,1$ рад), а при $H \to H_B + 0$ наблюдается полное разрушение купола, характеризующееся кривыми *1"*, *2"* на рис. 4. Всем точкам, лежащим правее точки *B* на линии *2* рис.1, соответствует полное разрушение купола.

Таким образом, при некоторых входных данных задачи предельного равновесия оболочки могут реализоваться несколько «механизмов» их разрушения, обеспечивающих одно и то же значение предельной нагрузки. Неединственность решения в задачах предельного равновесия оболочек вращения ранее была обнаружена авторами в [3, 8].

Так как для всех кривых на рис. 1, 2 (исключение составляет лишь линия *2* на рис. 1) реализуются лишь два «механизма» разрушения: «срез» крышки при малых значениях толщины купола и частичное разрушение купола в окрестности крышки для больших значений *H*, то целесообразно в этих случаях армировать не весь купол, а лишь некоторую его часть в окрестности крышки. Кривая *5* на рис. 2 получена для композиции тяжелый бетон – высокопрочная арматура при армировании части купола (на участке $\theta_* \le \theta \le 1,1$ рад) в меридиональном направлении с прежним общим расходом арматуры $V_a = 0,01V$. Кривая *5* лежит выше линии *2*, что свидетельствует о повышении несущей способности меридионально армированного купола с концентрацией силовых элементов в окрестности крышки. Дополнительно повысить несущую способность таких куполов можно за счет рационального профилирования их толщины $H(\theta)$, задавая большую толщину в окрестности крышки и меньшую в окрестности опорного контура.

Кривые *1*, *1'*, *1"* на рис. 4 в окрестности точки $\theta_* = 0,1506$ рад имеют положительные значения. Это означает, что при соответствующих «механизмах» разрушения куполов крышка выдавливается вверх. Следовательно, если дополнительно догрузить крышку (увеличить величину G в (1)), например за счет дополнительного подвешивания к ней полезных грузов, то можно увеличить несущую способность купола. Расчеты показывают, что при малых толщинах ($H \approx H_A$, $H > H_A$) куполов такое догружение может существенно сказаться на величине $L = p^*$ (она может возрасти в разы), с увеличением же H этот эффект уменьшается и при $H \approx 1$ м составляет лишь несколько процентов.

Расчеты эллипсоидальных куполов показали, что несущая способность «сплюснутых» куполов при том же объеме пространства под куполом и соответствующих структурах армирования ниже, чем у сферических, а вытянутых по вертикали куполов – выше. В первом случае доминирует «механизм» разрушения типа «среза» крышки, а во втором – частичное разрушение купола в верхней части.

В заключение отметим, что выше всюду крышка купола предполагалась абсолютно жесткой и не разрушалась. В действительности же следовало бы оценить и несущую способность крышки в предположении об абсолютной жесткости купола. Для круглых бетонных и железобетонных плит (каковой и предполагается крышка) это можно сделать методами, изложенными в [4, 9]. Изучение этого вопроса выходит за рамки настоящего исследования в силу ограниченного объема статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума СО РАН (Постановление № 54 от 09.02.06, номер проекта 2.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерхов М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978. 352 с.
2. Nemirovsky Yu.V. Yield surfaces for reinforced concrete Axis-symmetrical plates and shells // Archiwum inžynierii ladowej. 1974. T. XX, № 4. P.575 – 590.
3. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Предельное равновесие железобетонных куполов вращения // Изв. вузов. Строительство. 2005. № 8. С. 4–11.
4. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Влияние структуры армирования и формы профиля на предельное равновесие поперечно изгибаемых кольцевых пластин // Вестник ННГУ. Сер. Механика. 2006. Вып. 1 (7). С. 123–133.
5. Мосты и тоннели на железных дорогах: Учебник для вузов / В.О. Осипов, В.Г. Храпов, Б.В. Бобриков и др.; Под ред. В.О. Осипова. – М.: Транспорт, 1988. 367 с.
6. СНиП 2.03.01–84 Бетонные и железобетонные конструкции / Госстрой СССР. М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1989. 80 с.
7. Немировский Ю.В., Янковский А.П. О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композиционных материалов и конструкций. 1997. Т. 3. № 2. С. 20 – 40.
8. Налимов А.В., Немировский Ю.В. Неединственность решений задач статики жесткопластического тела // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XVIII Межресп. конф., Кемерово, 1–3 июля 2003 г. / Под ред. В.М. Фомина. – Новосибирск: Изд-во «Нонпарель», 2003. С. 115–121.
9. Ржаницын А.Р. Предельное равновесие пластинок и оболочек. М.: Наука, 1983. 288 с.

Сведения об авторах
Немировский Юрий Владимирович
Доктор физ.-мат.наук,главный научный сотрудник.
Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН.
Адрес: 630090, Новосибирск, Институтская ул., 4/1
Тел: (383) 3303804;E-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Янковский Андрей Петрович
Кандидат физ.-мат.наук,старший научный сотрудник

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Оганесян Р.Ж.

Асимптотическим методом решена трехмерная динамическая задача теории упругости о собственных колебаниях многослойных ортотропных пластин, при полном контакте между слоями. Нижняя грань нижнего слоя жестко закреплена, а верхняя грань верхнего слоя свободна. С использованием программы *Mathematica* построен алгоритм для вычисления главных значений частот собственных колебаний при произвольном количестве слоев.

1. Задача определения частот и форм собственных колебаний сводится к нахождению ненулевого решения системы динамических уравнений пространственной задачи теории упругости:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}^{(k)}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(k)}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}^{(k)}}{\partial z}=\rho_k\,\frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial t^2}\quad\left(x,y,z;u^{(k)},v^{(k)},w^{(k)}\right)$$

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x}=a_{11}^{(k)}\sigma_{xx}^{(k)}+a_{12}^{(k)}\sigma_{yy}^{(k)}+a_{13}^{(k)}\sigma_{zz}^{(k)}\quad\left(1,2,3;\ u^{(k)},v^{(k)},w^{(k)}\right)$$

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y}+\frac{\partial v^{(k)}}{\partial x}=a_{66}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k)},\ \frac{\partial w^{(k)}}{\partial x}+\frac{\partial u^{(k)}}{\partial z}=a_{55}^{(k)}\sigma_{xz}^{(k)},\ \frac{\partial w^{(k)}}{\partial y}+\frac{\partial v^{(k)}}{\partial z}=a_{44}^{(k)}\sigma_{yz}^{(k)}\tag{1.1}$$

при нулевых граничных условиях на лицевых поверхностях и условиях полного контакта между слоями. Здесь и в дальнейшем $k=I,II...$ соответствуют номерам, приписываемым слоям пластинки.

Решение поставленной задачи будем искать в виде [1]:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}(x,y,z,t)=\sigma_{ij}^{(k)}(x,y,z)\exp(\mathbf{i}\omega t)\quad \alpha,\beta=x,y,z\tag{1.2}$$

$$(u^{(k)},\ v^{(k)},\ w^{(k)})=(u_x^{(k)},\ u_y^{(k)},\ u_z^{(k)})\exp(\mathbf{i}\omega t)\quad i,\ j=1,2,3\tag{1.3}$$

где ω – искомая частота собственных колебаний. После подстановки (1.2), (1.3) в (1.1) получим систему:

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(k)}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{12}^{(k)}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{13}^{(k)}}{\partial z}+\rho_k\omega^2u_x^{(k)}=0\quad\left(x,y,z;1,2,3\right)$$

$$\frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial x}=a_{11}^{(k)}\sigma_{11}^{(k)}+a_{12}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)}+a_{13}^{(k)}\sigma_{33}^{(k)}\quad\left(x,y,z;1,2,3\right)\tag{1.4}$$

$$\frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial y}+\frac{\partial u_y^{(k)}}{\partial x}=a_{66}^{(k)}\sigma_{12}^{(k)},\ \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial x}+\frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial z}=a_{55}^{(k)}\sigma_{13}^{(k)},\ \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial y}+\frac{\partial u_y^{(k)}}{\partial z}=a_{44}^{(k)}\sigma_{23}^{(k)}$$

В (1.4) перейдем к безразмерным переменным и безразмерным компонентам вектора перемещения:

$$\xi=x/l,\qquad \eta=y/l,\qquad \zeta=z/h,\qquad h=\sum_{k=1}^{n}h_k$$

$$U^{(k)}=u_x^{(k)}/l,\quad V^{(k)}=u_y^{(k)}/l,\quad W^{(k)}=u_z^{(k)}/l\tag{1.5}$$

где h_k – толщина k-ого слоя, l – характерный тангенциальный размер пластинки, n – число слоев, считается, что $h<<l$. В результате получим следующую сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon=h/l$ систему:

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(k)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}^{(k)}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{13}^{(k)}}{\partial\zeta}+\rho_k\left(\omega_*\right)^2\varepsilon^{-2}U^{(k)}=0\quad\left(1,2,3;\ U^{(k)},V^{(k)},W^{(k)}\right)$$

$$\frac{\partial U^{(k)}}{\partial\xi}=a_{11}^{(k)}\sigma_{11}^{(k)}+a_{12}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)}+a_{13}^{(k)}\sigma_{33}^{(k)},\ \frac{\partial V^{(k)}}{\partial\eta}=a_{12}^{(k)}\sigma_{11}^{(k)}+a_{22}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)}+a_{23}^{(k)}\sigma_{33}^{(k)}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial W^{(k)}}{\partial\zeta}=a_{13}^{(k)}\sigma_{11}^{(k)}+a_{23}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)}+a_{33}^{(k)}\sigma_{33}^{(k)}$$

$$\frac{\partial U^{(k)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(k)}}{\partial\xi}=a_{66}^{(k)}\sigma_{12}^{(k)},\quad \frac{\partial W^{(k)}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial U^{(k)}}{\partial\zeta}=a_{55}^{(k)}\sigma_{13}^{(k)} \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial W^{(k)}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial V^{(k)}}{\partial\zeta}=a_{44}^{(k)}\sigma_{23}^{(k)},\qquad \omega_*=h\omega$$

Решение этой сингулярно возмущенной системы складывается из решений внутренней задачи (I^{int}) и пограничного слоя (I_b). Решение внутренней задачи будем искать в виде асимптотического разложения:

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{int}(k)}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{ij}^{(k,s)}$$

$$(U^{\mathrm{int}(k)},V^{\mathrm{int}(k)},W^{\mathrm{int}(k)})=\varepsilon^{s}(U^{(k,s)},V^{(k,s)},W^{(k,s)}) \tag{1.7}$$

$$\omega_*^2=\varepsilon^s\omega_{*s}^2,\quad s=\overline{0,S}$$

Обозначение $s=\overline{0,S}$ означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование от 0 до числа приближений S. Подставив (1.7) в (1.6) и применив правило Коши умножения рядов, для определения коэффициентов разложения (1.7) получим непротиворечивую систему:

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(k,s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}^{(k,s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{13}^{(k,s)}}{\partial\zeta}+\rho_k\left(\omega_{*m}\right)^2U^{(k,s-m)}=0$$

$$\left(1,2,3;\ U^{(k)},V^{(k)},W^{(k)}\right);\ m=\overline{0,s}$$

$$\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\xi}=a_{11}^{(k)}\sigma_{11}^{(k,s)}+a_{12}^{(k)}\sigma_{22}^{(k,s)}+a_{13}^{(k)}\sigma_{33}^{(k,s)};\ \left(1,2,3;\ U^{(k)},V^{(k)}\right)$$

$$\frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial\zeta}=a_{13}^{(k)}\sigma_{11}^{(k,s)}+a_{23}^{(k)}\sigma_{22}^{(k,s)}+a_{33}^{(k)}\sigma_{33}^{(k,s)} \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial\xi}=a_{66}^{(k)}\sigma_{12}^{(k,s)}\quad \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial\zeta}=a_{55}^{(k)}\sigma_{13}^{(k,s)}$$

$$\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial\zeta}=a_{44}^{(k)}\sigma_{23}^{(k,s)}$$

$$Q^{(k,s)}\equiv 0,\ \text{при}\ s<0.$$

В (1.8) все искомые величины можно выразить через $U^{(k,s)},V^{(k,s)},W^{(k,s)}$ по формулам:

$$\sigma_{11}^{(k,s)}=-A_{23}^{(k)}\frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial\zeta}+A_{22}^{(k)}\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\xi}-A_{12}^{(k)}\frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial\eta}$$

$$\sigma_{22}^{(s)}=-A_{13}^{(k)}\frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial\zeta}-A_{12}^{(k)}\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\xi}+A_{33}^{(k)}\frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial\eta}$$

$$\sigma_{33}^{(s)}=A_{11}^{(k)}\frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial\zeta}-A_{23}^{(k)}\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\xi}-A_{13}^{(k)}\frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial\eta} \tag{1.9}$$

$$\sigma_{12}^{(k,s)}=\frac{1}{a_{66}^{(k)}}\left[\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial\xi}\right],\ \sigma_{13}^{(k,s)}=\frac{1}{a_{55}^{(k)}}\left[\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial\zeta}\right]$$

$$\sigma_{23}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{44}^{(k)}}\left[\frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial\zeta}\right]$$

где $$A_{11}^{(k)} = \frac{a_{11}^{(k)}a_{22}^{(k)} - a_{12}^{(k)2}}{\Delta^{(k)}},\ A_{22}^{(k)} = \frac{a_{22}^{(k)}a_{33}^{(k)} - a_{23}^{(k)2}}{\Delta^{(k)}},\ A_{33} = \frac{a_{11}^{(k)}a_{33}^{(k)} - a_{13}^{(k)2}}{\Delta^{(k)}}$$

$$A_{12}^{(k)} = \frac{a_{33}^{(k)}a_{12}^{(k)} - a_{13}^{(k)}a_{23}^{(k)}}{\Delta^{(k)}},\ A_{13}^{(k)} = \frac{a_{11}^{(k)}a_{23}^{(k)} - a_{12}^{(k)}a_{13}^{(k)}}{\Delta^{(k)}},\ A_{23}^{(k)} = \frac{a_{22}^{(k)}a_{13}^{(k)} - a_{12}^{(k)}a_{23}^{(k)}}{\Delta^{(k)}}$$

$$\Delta^{(k)} = a_{11}^{(k)}a_{22}^{(k)}a_{33}^{(k)} + 2a_{12}^{(k)}a_{13}^{(k)}a_{23}^{(k)} - a_{22}^{(k)}a_{13}^{(k)2} - a_{11}^{(k)}a_{23}^{(k)2} - a_{33}^{(k)}a_{12}^{(k)2} \tag{1.10}$$

Для определения функций $U^{(k,s)}, V^{(k,s)}, W^{(k,s)}$ получаются уравнения:

$$\frac{\partial^2 U^{(k,s)}}{\partial\zeta^2} + a_{55}^{(k)}\rho_k\left(\omega_{*m}\right)^2 U^{(k,s-m)} = R_U^{(k,s)}\quad \left(U, V; a_{55}, a_{44}\right)$$

$$A_{11}^{(k)}\frac{\partial^2 W^{(k,s)}}{\partial\zeta^2} + \rho_k\left(\omega_{*m}\right)^2 W^{(k,s-m)} = R_W^{(k,s)}\quad m = \overline{0,s} \tag{1.11}$$

где $$R_U^{(k,s)} = -\frac{\partial^2 W^{(k,s-1)}}{\partial\xi\,\partial\zeta} - a_{55}^{(k)}\left[\frac{\partial\sigma_{11}^{(k,s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{12}^{(k,s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

$$R_V^{(k,s)} = -\frac{\partial^2 W^{(k,s-1)}}{\partial\eta\,\partial\zeta} - a_{44}^{(k)}\left[\frac{\partial\sigma_{12}^{(k,s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{22}^{(k,s-1)}}{\partial\eta}\right] \tag{1.12}$$

$$R_W^{(k,s)} = A_{23}^{(k)}\frac{\partial^2 U^{(k,s-1)}}{\partial\xi\,\partial\zeta} + A_{13}^{(k)}\frac{\partial^2 V^{(k,s-1)}}{\partial\eta\,\partial\zeta} - \frac{\partial\sigma_{13}^{(k,s-1)}}{\partial\xi} - \frac{\partial\sigma_{23}^{(k,s-1)}}{\partial\eta}$$

Очевидно что $R_U^{(k,0)} = R_V^{(k,0)} = R_W^{(k,0)} = 0$.

2. Для определения значений частот рассмотрим приближение s = 0. Уравнения (1.11) будут однородны и независимы, следовательно, их можно рассматривать как обыкновенные дифференциальные уравнения относительно $U^{(k,0)}, V^{(k,0)}, W^{(k,0)}$. Решив эти уравнения, получим:

$$U^{(k,0)} = C_{U1}^{(k,0)}(\xi,\eta)\cos\sqrt{a_{55}^{(k)}\rho_k}\,\omega_{*0}\zeta + C_{U2}^{(k,0)}(\xi,\eta)\sin\sqrt{a_{55}^{(k)}\rho_k}\,\omega_{*0}\zeta,\ \left(U, V; a_{55}, a_{44}\right)$$

$$W^{(k,0)} = C_{W1}^{(k,0)}(\xi,\eta)\cos\sqrt{\frac{\rho_k}{A_{11}^{(k)}}}\omega_{*0}\zeta + C_{W2}^{(k,0)}(\xi,\eta)\sin\sqrt{\frac{\rho_k}{A_{11}^{(k)}}}\,\omega_{*0}\zeta \tag{2.1}$$

Рассмотрим следующие граничные условия:

$$\sigma_{xz}^{I} = \sigma_{yz}^{I} = \sigma_{zz}^{I} = 0 \text{ при } z = h \tag{2.2}$$

$$u^{(n)} = v^{(n)} = w^{(n)} = 0 \text{ при } z = 0 \tag{2.3}$$

и условия на плоскостях контакта $z = z_k$:

$$\sigma_{xz}^{(k)} = \sigma_{xz}^{(k+1)},\ \sigma_{yz}^{(k)} = \sigma_{yz}^{(k+1)},\ \sigma_{zz}^{(k)} = \sigma_{zz}^{(k+1)}$$

$$u^{(k)} = u^{(k+1)},\ v^{(k)} = v^{(k+1)},\ w^{(k)} = w^{(k+1)}\quad k = \overline{1, n-1} \tag{2.4}$$

Удовлетворив граничным и контактным условиям, т.е. подставив (2.1) в (2.2)–(2.4), получим три линейных однородных систем алгебраических уравнений, для существования ненулевых решений которых необходимо, чтобы определители этих систем обращались в нуль. В результате получим три трансцендентных уравнений относительно ω_{*0}.

3. С помощью программного пакета *Mathematica 5.1* написана программа, посредством которой удовлетворяются граничные и контактные условия и вычисляются главные значения собственных колебаний нулевого приближения для n-слойной пластинки. Необходимо ввести количество слоев, а также их толщины, упругие и физические характеристики. Ниже

приведены вводимые данные для слоев из стеклопластиков и вычисленные на выходе программы частоты тангенциальных колебаний.

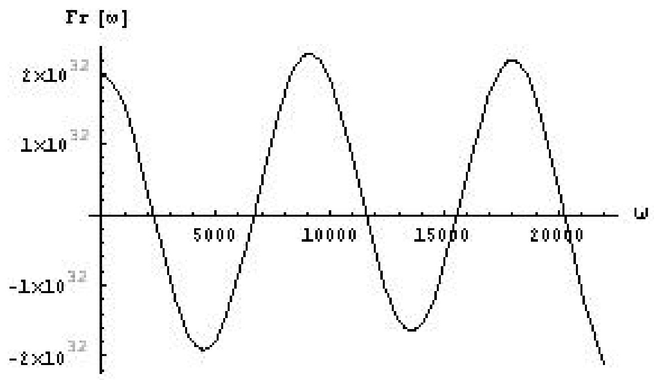
$n = 5;$

$h_1 = 0.2;\ h_2 = 0.4;\ h_3 = 0.3;\ h_4 = 0.6;\ h_5 = 0.25$

$\rho_1 = 2000;\ \rho_2 = 1950;\ \rho_3 = 1900;\ \rho_4 = 1800;\ \rho_5 = 2100$

$$a_{55}^{(I)} = \frac{1}{6.4746*10^9};\ a_{55}^{(II)} = \frac{1}{3.8357*10^9};\ a_{55}^{(III)} = \frac{1}{2.3544*10^9}\ \ a_{55}^{(IV)} = \frac{1}{4.20849*10^9};$$

$$a_{55}^{(V)} = \frac{1}{5.592*10^9}$$



$\omega_* = 2262.91;\ \omega_* = 6649.28;\ \omega_* = 11550.8$

$\omega = 1293.09;\ \omega = 3799.59;\ \omega = 6600.46$

При помощи того же алгоритма, введя соответствующие характеристики, можно получить частоты продольных колебаний.

Отметим, что для двухслойной или трехслойной пластинок результаты, полученные этой программой, совпадают с результатами, приведенными в работах [3], [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука-Физматлит. 1997. 414с.
2. Агаловян Л.А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел. // Межд. научн. журнал. Прикл. Мех. 2002. Т. 38. №7. С. 3-24.
3. Оганесян Р.Ж. Собственные колебания двухслойной ортотропной пластинки при смешанных краевых условиях. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №4. С. 33-44.
4. Агаловян Л.А., Оганесян Р.Ж. Асимптотика собственных колебаний трёхслойной ортотропной пластинки при смешанных краевых условиях. // V Межд. конф. “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред.” Ереван: Изд-во ”Гитутюн” НАН РА, 2005. С. 10-18.
5. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510с.
6. Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455с.
7. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Оганесян Рубен Жораевич
Кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник, Институт механики НАН РА
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б
Тел.: (+37410) 52-48-90, E-Mail: ruben_rob@mail.ru

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРЕХСЛОЙНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ, ЖЕСТКО ЗАЩЕПЛЕННОГО ОДНИМ ТОРЦОМ И НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ ТЯЖЕСТИ

Оганесян Э.К.

Рассматривается несиметричная деформация трехслойного в радиальном направлении полого цилиндра конечной длины L, когда один торец цилиндра полностью закреплен, боковая поверхность и другой торец цилиндра свободны от напряжений и цилиндр деформируется только под действием собственного веса, действующего перпендикулярно к оси цилиндра.

Для решения задачи методом конечных элементов компоненты перемещения представим в виде

$$\begin{aligned} U_r(r,z,\varphi) &= U(r,z)\cos\varphi \\ U_z(r,z,\varphi) &= V(r,z)\cos\varphi \\ U_\varphi(r,z,\varphi) &= W(r,z)\sin\varphi \end{aligned} \tag{1}$$

Компоненты объемной силы $\underline{P}(r, z, \ddot{\ })$ в данном случае представляются в виде

$$\begin{aligned} P_r &= -\gamma\cos\varphi \\ P_z &= 0 \\ P_\varphi &= \gamma\sin\varphi \end{aligned} \tag{2}$$

где γ – удельный вес цилиндра (объемный весовой коэффицент).

В соответствии с процедурой приведения нагрузки к узлам элемента, будет иметь для i-го узла

$$F_i^{(n)} = \begin{Bmatrix} R_{ri}^{(n)} \\ R_{zi}^{(n)} \\ R_{\varphi i}^{(n)} \end{Bmatrix} = \int\limits_{S^e} \begin{pmatrix} -\gamma N_i \\ 0 \\ \gamma N_i \end{pmatrix} rdrdz$$

или

$$\begin{aligned} R_{ri}^{(n)} &= -\gamma\int\limits_{S^e} N_i rdrdz \\ R_{zi}^{(n)} &= 0 \\ R_{\varphi i}^{(n)} &= \gamma\int\limits_{S^e} N_i rdrdz \end{aligned} \tag{3}$$

Аналогично записываются для остальных узлов $j, m, i, j, jm, mi\,j$.

Здесь S^e – площадь треугольного элемента на плоскости $\ddot{\ } = 0$, соответствующему кольцевому элементу “e” (рис.1)

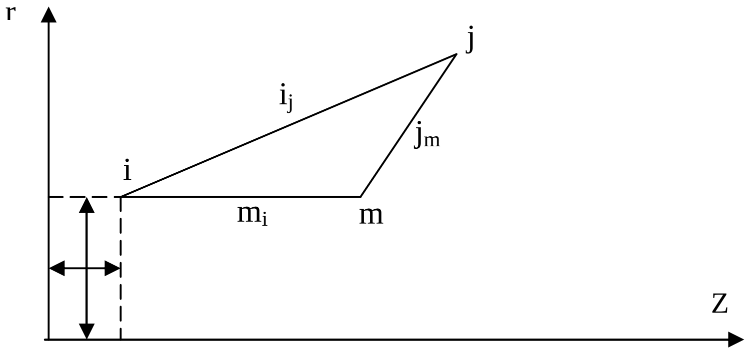


Рис.1

N_i – функция формы сечения кольцевого элемента с треугольным сечением.

Отметим, что введены следующие обозначения:

$$N_i = \frac{1}{\Delta}(\Delta_1^i + \Delta_2^i r + \Delta_3^i z + \Delta_4^i r^2 + \Delta_5^i rz + \Delta_6^i z^2) \tag{4}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i & r_i^2 & r_i z_i & z_i^2 \\ 1 & r_j & z_j & r_j^2 & r_j z_j & z_j^2 \\ 1 & r_m & z_m & r_m^2 & r_m z_m & z_m^2 \\ 1 & r_{ij} & z_{ij} & r_{ij}^{\ 2} & r_{ij} z_{ij} & z_{ij}^{\ 2} \\ 1 & r_{jm} & z_{jm} & r_{jm}^{\ 2} & r_{jm} z_{jm} & z_{jm}^{\ 2} \\ 1 & r_{mi} & z_{mi} & r_{mi}^{\ 2} & r_{mi} z_{mi} & z_{mi}^{\ 2} \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$\Delta_k^i = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & \ldots & z_i^2 \\ 1 & \ldots & 0 & \ldots & z_j^2 \\ 1 & \ldots & 0 & \ldots & z_m^2 \\ 1 & \ldots & 0 & \ldots & z_{ij}^2 \\ 1 & \ldots & 0 & \ldots & z_{jm}^2 \\ 1 & \ldots & 0 & \ldots & z_{mi}^2 \end{vmatrix} \quad \text{(k=1,2,3,4,5,6)} \tag{6}$$

k-й столбец

Коэффициенты $\Delta_1^j \ldots \Delta_6^j, \Delta_1^m \ldots \Delta_6^m, \Delta_1^{ij} \ldots \Delta i_6^{ij}, \Delta_1^{jm} \ldots \Delta_6^{jm}, \Delta_1^{mi} \ldots \Delta_6^{mi}$ определяются по выражениям (6) с заменой индексов в циклическом порядке.

Можно показать, что подсчет интегралов (3), подынтегральное выражение которых являются многочленами по r третьей степени, а по z второй степени можно стандартизовать. Элементы типового блока матрицы жесткости $[k]^e$ для элемента “e” имеют вид:

$$K_{pq}^e = \pi \int_{S^e} \left\{ [\overline{B_p}]^T [D] [\overline{\overline{B_q}}] + [\overline{\overline{B_p}}]^T [D] [\overline{B_q}] \right\} rdrdz \tag{7}$$

где $[\overline{B_p}]$ и $[\overline{\overline{B_p}}]$ определяются из представления

$$[B_p] = [\overline{B_p}]\sin\varphi + [\overline{\overline{B_p}}]\cos\varphi$$

причем

$$[\overline{B_p}] = \left| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{N_p}{r} & 0 & -\dfrac{\partial N_p}{\partial r} - \dfrac{N_p}{r} \\ 0 & -\dfrac{N_p}{r} & -\dfrac{N_p}{z} \end{matrix} \right|, \quad [\overline{\overline{B_p}}] = \left| \begin{matrix} \dfrac{\partial N_P}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_P}{\partial z} & 0 \\ \dfrac{N_P}{r} & 0 & \dfrac{N_P}{r} \\ \dfrac{\partial N_P}{\partial z} & \dfrac{\partial N_P}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right|$$

Значение интеграла в (7) находится численным интегрированием. Уравнение равновесия узловых окружностей для всего тела вращения приводится к виду

$$[K]\{\delta\}+\{F\}=0$$

Численное решение задачи. В качестве примера рассмотрим деформацию трехслойного полого цилиндра $L=8R$, который изгибается только под действием собственного веса. Предполагаем, что внешний диаметр внешнего цилиндра равен $3R$, внутреннего цилиндра R, а внутренний диаметр внутреннего цилиндра равен $R/2$, далее предполагаем, что материалы внешнего и внутренних цилиндров разные. Физико-механические параметры материалов составляющих цилиндров приводятся в таблице.

	E	¬	¥
I	$3*10^6$	0.4	$8.7*10^{-3}$
I I	$2*10^6$	0.3	$7.8*10^{-3}$
I II	$0.7*10^6$	0.22	$2.48*10^{-3}$

В одном варианте осевое полого цилиндра содержит 80 треугольных элементов с 55 узловыми точками, во втором варианте сечение содержит 92 треугольных элемента с 67 узловыми точками, в третьем варианте сечение содержит 120 треугольных элементов с 95 узловыми точками. При помощи ЭВМ типа IBM PC определены амплитудные значения смещений узловых окружностей, соответствующих узловым точкам в указанном разбиении осевого сечения. Вычисления показывают, что деформации поперечных сечений деформируемого только под действием собственного веса незначительны и формы этих сечений почти не отличаются от трехсотного кругового кольца. Распределение напряжений σ_z на двух участках $z=z_i$ и $z=1.6R$ осевого сечения при $\varphi=0$ приводится на рис.2 и 3. В первом варианте $z=z_1\approx 0.3R$ а во втором варианте $z=z_2\approx 0.14R$.

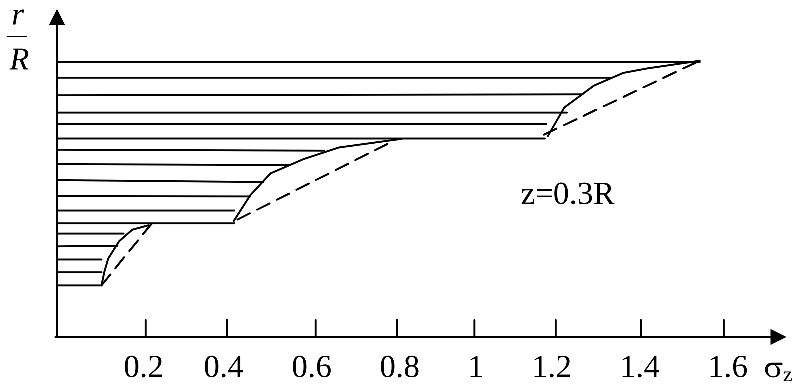


Рис. 2

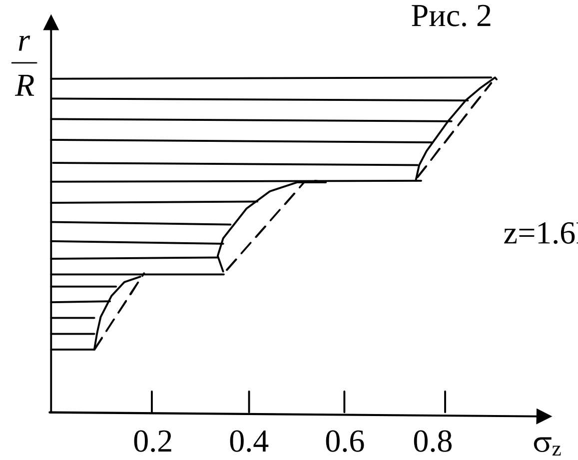


Рис. 3

Характер распределения нормальных напряжений σ_z по другим участкам $z = const > 2R$ осевого сечения остается таким же, как указывается на рис.2, однако интенсивность распределения этих напряжений по мере увеличения расстояния от закрепленного основания уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541с.
2. Зенкевич О.К.Метод конечных элементов. /В сб.: От интуиции к общности “Механика”. 1970. №6. С. 90-103
3. Вильсон Е.Л. (E.L.Wilson) Расчет на прочность осесимметричных тел. //Ракетная техника и космонавтика. 1965. Т.3. №12. С. 124-131
4. Соляник-Красса К.В.К задаче об упругом равновесии тел. Вращения //ДАН СССР. 1957. Т.114. №1. С.49-52.

<u>Сведения об авторе:</u>

Оганесян Эмин Казарович
Кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник, Институт механики НАН РА
Адрес: г. Ереван, ул. Гюлбенкяна дом 43 кв. 60; Тел: (+37410) 22-00-48

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СУПИНАТОРА И ПУТИ УЛУЧШЕНИЯ ЕГО ПАРАМЕТРОВ

Папоян А.Р., Манукян А.О.

Исследование относится к обувной промышленности. Рассматривается задача оптимального проектирования основного несущего элемента обуви на высоком каблуке – супинатора.

Супинаторы представляют собой штампованные термообработанные фигурные пластины из стальной холодно-катанной ленты определенных марок, изогнутой по профилю следа гелено-пяточной части обуви. Супинатор на одном из концов, обращенный к пяточной части обуви, имеет два отверстия для прикрепления гвоздями. Толщина супинатора составляет 1 мм с допуском +0,1 и -0,2 мм. Ширина для обуви на среднем и высоком каблуке составляет от 12 до 14 мм при длине от 100 до 130 мм, для средних размеров обуви.

Супинатор предназначен для придания конструкции обуви необходимой жесткости и устойчивости формы. Кроме этого супинаторы приподнимают ногу в необходимом месте, т.е. по внутреннему краю стопы и между основанием первого и пятого пальцев. Важные функции супинаторов заключаются в следующем:

- смягчение неизбежных при ходьбе колебаний;
- профилактика развития плоскостопия;
- улучшение кровоснабжения стопы и голени.

Исходя из вышесказанного, можно заключить, что обоснованный выбор параметров супинатора обуви является важнейшей задачей. Недопустимо большие деформации супинатора приводят к разным заболеваниям стопы и сухожилья, а его поломка: к немедленному выходу из эксплуатации обуви, а иногда и к травме стопы. Поэтому моделирование напряженно-деформированного состояния супинатора актуально для оптимального проектирования этого элемента обуви.

Особенно важен правильный подбор супинатора при проектировании женской обуви на среднем и высоком каблуках. Изящная женская обувь должна иметь супинатор идеальной формы: жесткий для фиксации положения каблука, и достаточно податливый, чтобы не травмировать сухожилия стопы.

В работе супинатор рассмотрен как балка переменной кривизны, нагруженная неравномерно распределенной нагрузкой, при разных способах закрепления их концов. В работе моделированы основные силовые факторы в сечениях балки (изгибающий момент, нормальная и поперечная сила) в зависимости от закона распределения нагрузки, высоты каблука и способа закрепления супинатора. Алгоритм расчета приспособлен к программной среде MathCAD и позволяет рассчитать оптимальные параметры супинатора для определенной возрастной группы и модели обуви.

Расчетная схема супинатора представлена на рис.1а.

Балка правым концом защемлена в каблуке (точка B). Рассмотрены два варианта закрепления левого конца супинатора (точка A). Первый вариант, когда супинатор левым концом опирается на опорную поверхность (рис. 1б) и имеет возможность свободного перемещения в горизонтальном направлении. Второй вариант, когда левый конец супинатора опирается в специальный стопор, закрепленный с низом обуви (рис. 1в). Такой стопор проявляет себя как шарнир, не допуская линейного перемещения конца супинатора, но при этом и не ограничивая его поворот в опоре.

Как отмечалось выше, идеальная форма недеформированной балки (супинатора) должна повторять форму колодки и описывается функцией $y(x)$, полученной путем интерполяции значений замеров высоты низа колодки обуви от горизонтали по линии установки супинатора. Например, при высоте каблука $H = 60$ мм, форма недеформированной балки описывается многочленом четвертого порядка

$$y(x) = 0,8866x + 0,0010969x^2 - 0,0066989x^3 + 0,000322x^4 \qquad (1)$$

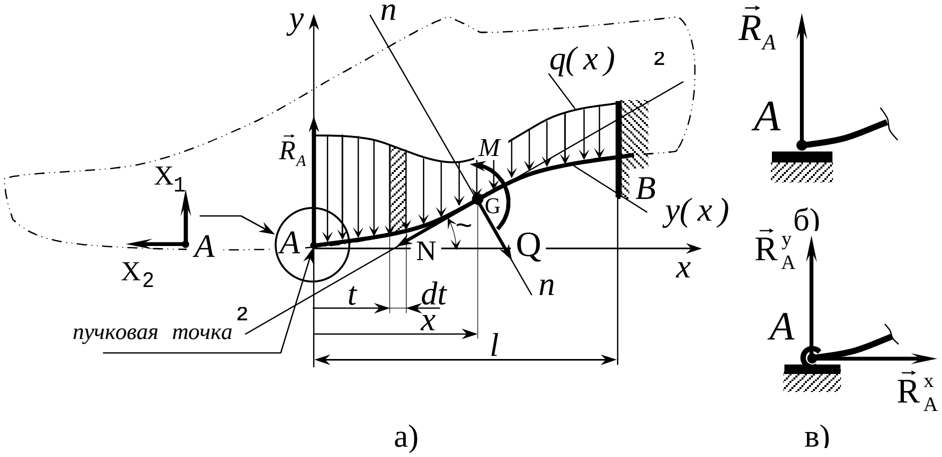


Рис.1. Расчетная схема супинатора обуви

Для описания неравномерно распределенной нагрузки на гелено-пяточную часть обуви за основу были взяты результаты исследований Ю.П. Зыбина. Согласно этим исследованиям для обуви на среднем и высоком каблуке на эту часть стопы приходится примерно 40%-ов от общего веса человека, в момент, когда он опирается на одну ногу. Форма распределения нагрузки получена экспериментальным путем, и она описывается функцией

$$q(x) = 20 - 0,3x - 0,69x^2 + 0,11x^3 + 0,0044x^4 \tag{2}$$

Из расчетной схемы видно, что в задаче балка (супинатор) статически неопределима в первой схеме одиножды (рис. 1б), а во втором случае – дважды (рис. 1в).

Реакция в опоре A рассчитана с помощью интеграла Мора, где учтены перемещения от изгибного момента и нормальной силы

$$y_A = \int_0^{\ell} \frac{Mx_P Mx_1}{EJ} dx + \int_0^{\ell} \frac{Nx_P Nx_1}{EF} dx \tag{3}$$

$$x_A = \int_0^{\ell} \frac{Mx_P Mx_2}{EJ} dx + \int_0^{\ell} \frac{Nx_P Nx_2}{EF} dx \tag{4}$$

где: Mx_P – момент от внешних сил относительно текущего сечения балки G с координатой x; Mx_1 и Mx_2 – моменты относительно того же сечения G от единичных сил X_1 и X_2, приложенных в точке A ($Mx_1 = x$, $Mx_2 = y(x)$); E – модуль упругости первого рода, J и F – соответственно, момент инерции и площадь сечения супинатора; y_A и x_A – соответственно, перемещение супинатора в точке A в направлении координат x и y. Отметим, что в этой задаче учет перемещений от нормальных сил обязательный, так как расчет второго варианта может привести к ошибочным результатам, если форма балки близка к прямой линии.

С учетом формы балки (1) и нагрузки (2), для перемещений y_A и x_A получим выражения:

$$\begin{aligned} y_A = {} & \frac{1}{EJ} \cdot \int_0^{\ell} \left[R_A^y \cdot x - R_A^x \cdot y(x) - \int_0^x q(x)\left(x - t\right) dt \right] x dx + \\ & + \frac{1}{EF} \cdot \int_0^{\ell} \left[R_A^y \cdot \sin\alpha(x) + R_A^x \cdot \cos\alpha(x) - \int_0^x q(x) \sin\alpha(x) dx \right] \sin\alpha(x) dx \end{aligned} \tag{5}$$

$$
x_A = \frac{1}{EJ}\cdot\int_0^{\ell}\left[R_A^y\cdot x - R_A^x\cdot y(x) - \int_0^x q(x)\left(x-t\right)dt\right]y(x)dx -
$$

$$
-\frac{1}{EF}\cdot\int_0^{\ell}\left[R_A^y\cdot\sin\alpha(x) + R_A^x\cdot\cos\alpha(x) - \int_0^x q(x)\sin\alpha(x)dx\right]\cos\alpha(x)dx \tag{6}
$$

Приравнивая y_A и x_A к нулю, после интегрирования и решения системы уравнений получим реакции $R_A^x(x)$ и $R_A^y(x)$ в точке A в зависимости от длины супинатора. Например, в рассматриваемом примере супинатор изготовлен из листовой стали. Его сечение имеет вид прямоугольника с размерами 12 мм и 1 мм, а длина – 130 мм. После расчетов получены реакции в опоре A: в первом варианте $R_A = 76{,}16H$, а во втором $R_A = 250{,}58H$ с составляющими $R_A^x = 176{,}99H$ *и* $R_A^y = 177{,}36H$.

Далее можно приступить к расчету основных силовых факторов в сечениях балки. Для этого необходимо записать условия равновесия сил и моментов для элемента балки длиною x. Уравнения равновесия элемента составлены соответственно по нормали сечения (направление $n-n$), по касательной сечения (направление $\tau-\tau$) и в виде момента относительно точки G (рис.1).

$$
N(x) = R_A^y\cdot\sin(\alpha(x)) + R_A^x\cdot\cos(\alpha(x)) - I_1(x)\cdot\sin\alpha(x) \tag{7}
$$

$$
Q(x) = -R_A^y\cdot\cos(\alpha(x)) + R_A^x\cdot\sin(\alpha(x)) + I_1(x)\cdot\cos\alpha(x) \tag{8}
$$

$$
M(x) = R_A^y\cdot x - R_A^x\cdot y(x) - I_1(x)\cdot(x - x_c(x)) \tag{9}
$$

где: $\cos\alpha(x) = 1\Big/\sqrt{1+y'(x)^2}$, $\sin\alpha(x) = y'(x)\Big/\sqrt{1+y'(x)^2}$ с учетом, что $\operatorname{tg}\alpha(x) = y'(x)$. $x_c(x) = I_2(x)/I_1(x)$ –координата центра приложения равнодействующей от распределенной нагрузки на отрезке длиною x. Значения интегралов $I_1(x)$ и $I_2(x)$ приведены ниже:

$$
I_1(x) = \int_0^x q(x)dx \text{ и } I_2(x) = \int_0^x q(x)xdx
$$

После расчетов в соответствии с приведенным алгоритмом по формулам (7)-(9) получены графики изгибающего момента, нормальной и поперечной сил по длине рассматриваемой балки (рис.2). По этим параметрам можно в любом сечении балки рассчитать напряжения, оценить прочность и долговечность супинатора обуви.

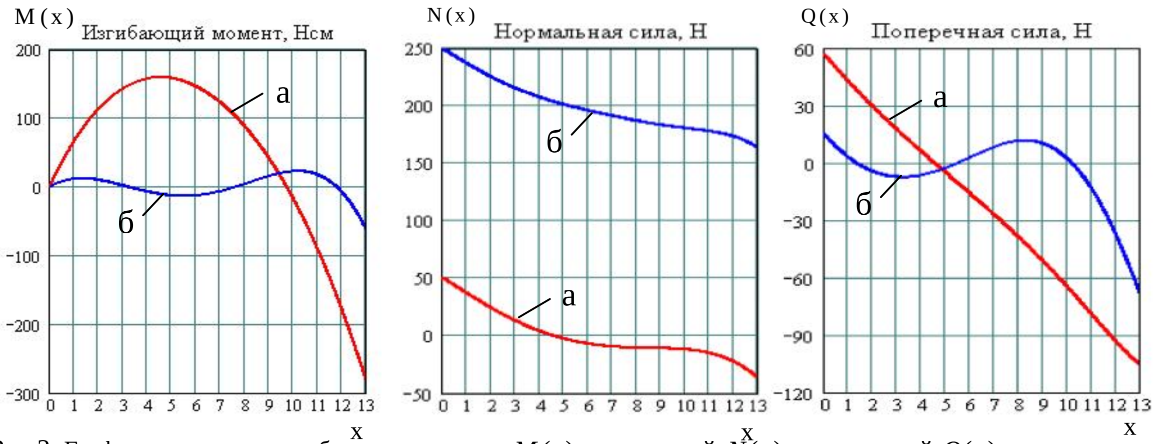


Рис.2. Графики изменения изгибающего момента $M(x)$, нормальной $N(x)$ и поперечной $Q(x)$ сил в сечениях а – опора свободна (вариант 1), б – опора в замке (вариант 2)

Как показывает анализ графиков, новый способ фиксации конца супинатора позволяет существенно снизить изгибающий момент в сечениях. Именно этим фактором (главным образом) обусловлены деформация и нормальные напряжения в сечениях, из-за чего возникает поломка супинатора. Максимальный изгибающий момент в обоих случаях возникает вблизи каблука, где и происходит в практике поломка. Но в этом случае значение максимального момента уменьшается примерно в 4,5 раза. Отметим, что при этом увеличивается нормальное усилие в сечениях. Но здесь запас прочности значительный. В работе также получено дифференциальное уравнение деформированной оси супинатора

$$\frac{d^2w}{dx^2}+y''(x)^2\cdot\left(1+y'(x)^2\right)\cdot w=-\frac{M(x)}{EJ}\cdot\left[1+y'(x)^2\right] \qquad (10)$$

где w – перемещение сечения в направлении центра кривизны балки. Расчеты подтверждают, что деформации супинатора в направлении оси y во втором способе установки значительно уменьшаются (рис. 3).

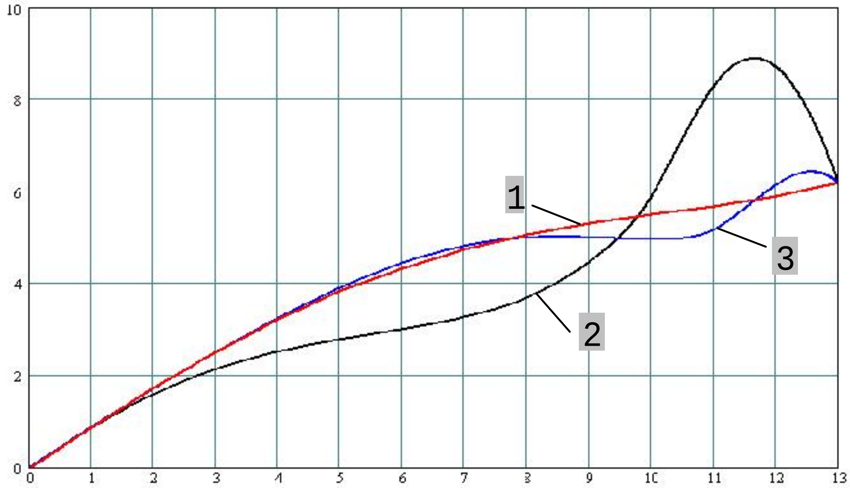


Рис.3. Линия оси супинатора: 1 – недеформированный,
2 – деформированный при первом способе установки,
3 – деформированный при втором способе установки

Параллельно также изучены изменения значений нормального и касательного напряжений в сечениях супинатора. Эти результаты также подтверждают существенное снижение эквивалентных напряжений в супинаторе. Это позволит уменьшить размеры его сечения, одновременно повышая несущую способность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зыбин Ю.П. и др. Справочник обувщика. М.: Легкая индустрия, 1967. 447с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 512с.

Сведения об авторах

Папоян Ашот Рафикович

Доктор технических наук, доцент кафедры прикладной механики, Гюмрийский филиал Государственного инженерного университета Армении
Адрес: 3103, Гюмри, ул. М.Мкртчяна 2
Тел.: 0312-36583 (раб.), 091-459326 (моб.)факс 0312-31528
E-mail: papash@mail.ru

Манукян Арусяк Оганесовна
Соискатель

ПРОБЛЕМЫ НАРАЩИВАНИЯ УПРУГИХ И ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ В ПОЛЯХ МАССОВЫХ СИЛ

Паршин Д.А.

Работа посвящена изучению закономерностей эволюции напряженно-деформированного состояния (НДС) твердых тел в процессе их кусочно-непрерывного наращивания в полях массовых сил различной природы. Рассматриваются квазистатические процессы деформирования, сопровождающиеся малыми деформациями. Исследования проводятся в рамках линейной теории ползучести однородно стареющих изотропных тел [1, 2]. Частным случаем принимаемых определяющих соотношений являются уравнения состояния линейно упругого материала. Однако в каждой рассматриваемой задаче случай чисто упругого поведения материала ввиду его особой значимости анализируется отдельно. Как показано в данной работе, именно в этом частном случае все неклассические особенности поведения наращиваемых тел проявляются наиболее ярко. Все изучаемые проблемы сводятся к *неклассическим* задачам механики деформируемого твердого тела. Их решения строятся для произвольного числа этапов непрерывного роста с произвольными по длительности паузами между ними с помощью метода, разработанного в [3] и приводящего в итоге к решению последовательности краевых задач математической теории упругости, содержащих время как вещественный параметр и поставленных для определенных величин на различных этапах процесса в области, занимаемой в текущий момент растущим телом, и последующему восстановлению эволюции поля напряжений по специальным формулам «расшифровки». Последняя процедура эквивалентна решению для каждой точки тела интегральных уравнений Вольтерра, правые части которых получаются интегрированием по параметру величин, найденных в результате решения указанных краевых задач. Важным с математической точки зрения является то обстоятельство, что при наличии у материала свойства ползучести в роли интенсивности объемной нагрузки в решаемых краевых задачах даже при самой простой структуре истинного силового поля выступают, вообще говоря, разрывные в рассматриваемой пространственной области функции, изменяющиеся в ней сложным образом и зависящие от реологических свойств материала и всей истории формирования тела.

1. Исследуется влияние *сил взаимного или центрального притяжения частиц материала* на НДС формируемых под их воздействием твердых тел на примере задачи о наращивании шара в произвольном притягивающем центрально-симметричном силовом поле интенсивности $f(r) > 0$. Деформирование растущего шара происходит только за счет действующих на него массовых сил, а присоединяемый материал считается изначально свободным от напряжений. Процесс роста начинается с возникновения притока дополнительного материала к некоторому уже существующему шаровому телу или, в частном случае, к точечному центру. В работе найдено НДС исходного шара до начала его наращивания, поставлены краевые задачи, определяющие эволюцию НДС шара на произвольном этапе его непрерывного роста, в паузах между этапами и после окончательного прекращения наращивания, построены их замкнутые аналитические решения. Доказана разрешимость задачи в квадратурах на всех указанных временных этапах в случае, когда $\int_0 f(r)\,dr < +\infty$ или $r^2 f(r) \to 0$, $r \to 0$.

Показано, в частности, что в исходно существующем ядре шара поле девиатора напряжений стационарно, а в каждой точке дополнительной части его эволюция определяется историей формирования тела только до момента включения в его состав данной точки. При достаточно продолжительной паузе перед k-м этапом непрерывного роста девиатор напряжений в материальном слое, присоединенном к телу в самом начале k-го этапа, на всем протяжении дальнейшего процесса деформирования будет сколь угодно мало отличаться от нуля. А в чисто упругом случае вся сформированная в результате наращивания часть твердого шара независимо от вида силового поля загружена *как жидкость*. Проведены числовые расчеты для вязкоупругого шара, растущего в поле сил собственной гравитации. Выявлено, например, что положения и значения максимумов интенсивности касательных напряжений и наибольшего касательного напряжения существенно зависят от режима роста, но в любом случае эти значения не превышают соответствующих максимумов в аналогичном ненаращиваемом гравитирующем шаре, где указанные характеристики пропорциональны квадрату удаления от центра. Давление в центре растущего шара всегда выше, чем у мгновенно сформированного шара соответствующего размера.

2. Изучается воздействие *центробежных сил* на состояние твердых тел, изготавливаемых в процессе вращения. Рассматривается задача о постепенном формировании слоя материала

произвольной толщины на внутренней или внешней поверхности круговой цилиндрической оправки, вращающейся вокруг своей оси с переменной угловой скоростью $\omega(t)$. Изменение скорости во времени предполагается достаточно медленным, $|\dot{\omega}(t)| \ll \omega^2(t)$, так что тангенциальными силами инерции можно пренебречь по сравнению с центробежными силами. Оправка считается существенно более жесткой, чем формируемый на ней слой, и поэтому ее собственная деформация в расчет не берется. Учет деформации оправки не представляет принципиальных трудностей, но отказ от него делается с целью иллюстрации таких процессов, в которых на деформирование возникшей в результате наращивания части механической системы не влияет деформирование ее исходно существующей части. Присоединение элементарных слоев материала может осуществляться с произвольным предварительным натягом, зависящим от их радиуса. Это позволяет управлять НДС получаемого в итоге тела. Поставлены краевые задачи, определяющие НДС кусочно-непрерывно наращиваемого слоя при плоской деформации. Построены их замкнутые аналитические решения, содержащие квадратуры.

Изучены остаточные напряжения, возникающие в изготовленном слое после остановки его вращения и, возможно, отсоединения от оправки. Доказано, что их предельные значения не зависят от программы остановки, способа отсоединения и момента начала данных манипуляций и равны разности финальных напряжений в задаче наращивания *вязкоупругого стареющего* слоя при произвольном законе $\omega(t)$, не предполагающем остановки вращения, и напряжений в соответствующем ненаращиваемом *упругом* полом цилиндре, вращающемся с угловой скоростью $\omega(+\infty)$, одна из боковых поверхностей которого сцеплена с жесткой втулкой (если речь идет только об остановке вращения готового слоя) или свободна (в случае остановки вращения и отсоединения от оправки), а на другой задано соответственно нулевое напряжение или равномерное давление $p(+\infty)$, равное установившемуся при законе $\omega(t)$ значению давления изготовленного слоя на оправку.

В качестве примеров рассмотрены задачи о силовой намотке и о внутреннем напылении слоя на оправку, вращающуюся с постоянной скоростью. Выявлена принципиальная необходимость совместного учета факторов постепенного притока к телу нового материала и действия на это тело центробежных сил при расчете его НДС как в процессе, так и после изготовления. Показано, например, что пренебрежение учетом центробежных сил при моделировании процесса намотки в некоторых случаях может дать радикально неверные представления о законе изменения давления на поверхность оправки и привести к сильному завышению оценки прочности изделия на этапе его изготовления, а также значений предсказываемых остаточных напряжений. Остаточные напряжения в изделиях, получаемых в результате напыления материала на вращающуюся поверхность, могут оказаться соизмеримыми с напряжениями, действующими в процессе изготовления, или даже значительно превысить их. Напряженное состояние вязкоупругих тел, остающееся после их изготовления, определяющим образом зависит от характера протекания данного процесса. Так, наличие пауз в процессе намотки или напыления приводит к качественному и весьма существенному количественному изменению картины остаточного напряженного состояния по сравнению с получаемой в непрерывном процессе.

3. Анализируется влияние *сил тяжести* на состояние постепенно формируемых в их присутствии объектов. Рассматривается инженерная задача о последовательном сооружении на гладком жестком основании тяжелой круговой арочной конструкции методом послойного утолщения по внутренней поверхности некоторой первоначально установленной заготовки, выполненной заранее без остаточных напряжений, при закреплении подошв наращиваемой арки скользящей заделкой, запрещающей их отслоение от основания, но не препятствующей свободному скольжению. Исследован случай плоской деформации арки. Поставлена краевая задача, описывающая деформирование заготовки под действием собственного веса и произвольной нагрузки на ее наружной поверхности с момента установки на основание и до начала наращивания, а также краевые задачи для кусочно-непрерывно наращиваемой тяжелой арки, на внешнюю поверхность которой продолжает действовать некоторая переменная

нагрузка. Учтена возможность использования в процессе наращивания предварительно напряженных конструктивных элементов. Построены решения поставленных краевых задач в рядах и квадратурах.

Подробно изучено воздействие сил тяжести на постепенно возводимую арочную конструкцию при отсутствии предварительных напряжений и поверхностной нагрузки. Выделены и проанализированы центральные тенденции, взаимодействие которых определяет процесс формирования НДС тела, наращиваемого ненапряженными весомыми элементами. Выполнены многочисленные числовые расчеты для различных режимов возведения тяжелых тонкостенных и толстостенных сводов из тонкостенной заготовки и усиления исходно толстостенных сводов.

При достаточно быстром изготовлении конструкции из молодого материала закладывается большой потенциал к перераспределению возникающих в ней напряжений. Поскольку все элементы деформируются при этом в достаточной степени согласованно, то финальное состояние в целом оказывается близким к классическому — тому, которое имело бы место при загружении собственным весом уже готовой конструкции (но эта близость все же не может быть неограниченной из-за возникающих разрывов напряжений, не зависящих от скорости протекания процесса наращивания). Это приводит в конечном итоге к очень сильному разгружению исходно существующей части арки. Однако при быстром пополнении тела новыми элементами происходит и его интенсивное утяжеление, которое может вызывать рост напряжений до тех пор, пока ползучесть не успеет повлиять на этот процесс. Поэтому на начальной стадии утолщения арка испытывает напряжения, превышающие первоначальные. В случае тонкой заготовки это превышение весьма значительно. Если же возведение начинается достаточно поздно (в смысле возраста материала), перед началом наращивания выдерживается достаточно продолжительная пауза или само наращивание протекает слишком медленно, то изменение НДС конструкции в процессе изготовления обусловливается, в основном, ее догружением весом новых дополнительных элементов. Состояние тела после такого изготовления оказывается чрезвычайно далеким от классического. Материал, присоединенный на завершающей стадии возведения, остается практически не напряженным. Уровень напряжений в исходной части арки при этом значительно возрастает по сравнению с первоначальным. Если заготовка является достаточно тонкостенной, то в начальный момент в ней возникают весьма высокие напряжения. В результате в готовой конструкции будут иметься области с уровнем напряжений, многократно превышающим максимальный уровень при ее расчете по конечной конфигурации. Изготовление тяжелого тела из чисто упругого материала является наиболее характерным вариантом процессов второго типа.

Показано, что, варьируя надлежащим образом в процессе возведения скорость наращивания вязкоупругой конструкции, можно добиться в итоге весьма ощутимого снижения в ней напряжений относительно начального состояния, не превысив при этом допустимых значений во время изготовления.

Обнаружено, что даже весьма толстостенная заготовка после установки на гладкое основание стремится отслоиться от него на периферийных участках опорных площадок под действием собственного веса. Избавиться от зон отрывающих контактных напряжений за счет последующего усиления такой заготовки без принятия специальных мер невозможно даже в том случае, когда контактное давление на подошвах ненаращиваемой арки окончательной толщины было бы всюду положительным. При изготовлении арки из достаточно толстой заготовки удается получить в готовой конструкции заметно более низкие напряжения по сравнению с теми, которые бы она имела, будучи установленной на основание сразу в готовом виде.

Исследован вариант наращивания арочной конструкции слоями, равномерно растянутыми в окружном направлении напряжением, зависящим от радиуса слоя. При таком способе возведения также не удается избежать не ограниченного по времени сохранения удерживающих связей на части подошвы готовой арки, препятствующих ее отслоению. Однако созданием в присоединяемых слоях надлежащих начальных напряжений возможно добиться гораздо более выгодного результирующего напряженного состояния всей конструкции, чем при ее наращивании ненапряженными элементами, — в смысле минимизации отрицательного давления на основание и общего уровня напряжений в теле.

Рассмотрен также такой вариант процесса, когда вершина арки закрепляется на подвесе с контролируемой силой натяжения, компенсирующей во время возведения заданную долю текущего веса арки и убывающей до нуля после окончательного завершения ее формирования. Использование такой технологии позволяет получить во всей готовой конструкции значительно более низкие напряжения, чем при обычном наращивании в том же временном режиме. При этом также оказывается возможным получение как непрерывной и практически совпадающей с классической, так и гораздо более оптимальной, чем в классическом случае, финальной эпюры контактных напряжений. Если же, помимо организации силовой поддержки, еще подвергать присоединяемые к конструкции элементы некоторому начальному растяжению, то удается добиться того, что даже тонкостенная арка будет оказывать в итоге на основание *всюду положительное* контактное давление (что невозможно в том случае, если эта арка установлена уже в готовом виде), причем распределенное по подошве достаточно эффективно.

Следует отметить, что при самых различных вариантах и режимах наращивания конструкции характеристики ее напряженного состояния могут достигать в процессе изготовления величин, значительно превышающих финальные, причем в других по отношению к последним зонам.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ (НШ-1245.2006.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05-01-00693 и 06-01-00521).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести.М.–Л.: Гостехиздат, 1952. 323 с.
2. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1990; Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.
3. Манжиров А.В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела. // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 836–848.

Сведения об авторе:

Паршин Дмитрий Александрович
Кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник, Институт проблем механики Российской академии наук
Адрес: 119526, Россия, г. Москва, проспект Вернадского, д. 101, корп. 1
Тел.: +7 495 434 3456; Факс:+7 499 739 9531; E-mail: parshin@ipmnet.ru

ТРЕЩИНОСТОЙКОСТЬ КОМПОЗИТОВ, ПОДКРЕПЛЕННЫХ НАНОВОЛОКНАМИ[1]

Перельмутер М.Н.

Значительное увеличение трещиностойкости нанокомпозитов с полимерной или керамической матрицей обусловлено упрочняющим влиянием нанотрубок и нановолокон. Экспериментально установлено, что связи между берегами трещины, образованные нанотрубками и нановолокнами, препятствуют развитию разрушения. Причем, в большинстве случаев размер части трещины, занятой связями (далее - концевой области трещины) сравним с размером всей трещины [1-4]. Приближенные методы оценки трещиностойкости, основанные на рассмотрении трещины с малой концевой областью, при этом неприменимы.

В данной работе модель трещины с концевой областью используется для описания трещиностойкости нанокомпозитов. Участок ослабленных или нарушенных связей в нанокомпозите моделируется трещиной, между берегами которой действуют силы сцепления, обусловленные присутствием нанотрубок или нановолокон, сдерживающих раскрытие трещины. Размер зоны взаимодействия берегов трещины (концевая область) может меняться в процессе роста трещины и не является малым по сравнению с размером всей трещины.

Математическое описание модели трещины со связями в концевой области состоит из трех основных этапов: 1) установления зависимости сил сцепления в концевой области от раскрытия трещины; 2) определения напряженного состояния в близи трещины с учетом внешних нагрузок и сил сцепления; 3) анализа предельного равновесия трещины на основе критерия разрушения.

Для связей между берегами трещины образованных нанотрубками и нановолокнами в работе получен закон деформирования связей, основанный на рассмотрении сдвигового взаимодействия между волокном и матрицей. Система сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (СИДУ) для определения напряжений в связях и перемещений берегов трещины получена исходя из принципа суперпозиции для случая трещины, расположенной на границе между полуплоскостями из различных материалов. [5-7].

Для анализа квазистатического роста трещины с концевой областью, заполненной связями, предложен критерий разрушения [6,8-9], учитывающий работу по деформированию связей в концевой области трещины. В рамках этого критерия состоянию предельного равновесия вершины трещины соответствует энергетическое (необходимое) условие – равенство скорости высвобождения энергии деформации в вершине трещины $G_{\mathrm{tip}}(d,\ell)$ и скорости потребления энергии деформации связями в концевой области трещины $G_{\mathrm{bond}}(d,\ell)$. Разрыв связей на краю концевой области определяется условием их предельной вытяжки (достаточное условие разрушения):

$$G_{\mathrm{tip}}(d,\ell) = G_{\mathrm{bond}}(d,\ell), \quad u(\ell - d) = \delta_{\mathrm{cr}} \tag{1}$$

Здесь ℓ - длина трещины, d - размер концевой области, $u(\ell - d)$ - раскрытие трещины на краю концевой области. Параметр δ_{cr} определяется свойствами связей в концевой области трещины, а также может зависеть от масштаба трещины. Из совместного решения уравнений (1) можно определить размер концевой области d_{cr} и критическое внешнее напряжение σ_{cr} в состоянии предельного равновесия трещины. Скорость потребления энергии деформации $G_{\mathrm{bond}}(d_{cr},\ell)$, полученная из совместного решения уравнений (1), является энергетической характеристикой сопротивления адгезионному разрушению, $G_{\mathrm{cr}} = G_{\mathrm{bond}}(d_{cr},\ell)$, причем величина G_{cr} не остается постоянной при изменении длины трещины. После определения критического внешнего напряжения могут быть также определены критический коэффициент интенсивности напряжений и поток энергии в вершину трещины, обусловленные внешней нагрузкой σ_{cr}.

Рассмотрим условия:

$$\begin{array}{lll} \textit{Условие}\ 1: & а)\ G_{\mathrm{tip}}(d,\ell) \ge G_{\mathrm{bond}}(d,\ell), & б)\ G_{\mathrm{tip}}(d,\ell) < G_{\mathrm{bond}}(d,\ell) \\ \textit{Условие}\ 2: & а)\ u(\ell - d) < \delta_{\mathrm{cr}}, & б)\ u(\ell - d) \ge \delta_{\mathrm{cr}} \end{array} \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты №05-01-000191и №05-08-18207)

При монотонном нагружении тела, для заданных начальных размеров трещины и ее концевой области, можно выделить режимы равновесия и квазистатического роста трещины. При выполнении условий 1а и 2а происходит продвижение вершины трещины с одновременным возрастанием длины концевой области без разрыва связей. Этот этап роста трещины можно рассматривать как процесс приспособляемости трещины к заданному уровню внешних нагрузок (докритический рост трещины). Продвижение вершины трещины с одновременным разрывом связей на краю концевой области (квазистатический рост трещины) происходит при одновременном выполнении условий 1а и 2б. При выполнении условий 1б и 2б происходит разрыв связей без продвижения вершины трещины и размер концевой области сокращается, стремясь к предельному значению для данного уровня нагрузки. В рамках рассматриваемой модели положение концевой области и вершины трещины не меняется при одновременном выполнении условий 1б и 2а.

Для задачи о прямолинейной трещине в однородном теле с постоянными и не зависящими от внешней нагрузки напряжениями в связях рассмотрены предельные случаи трещины, полностью заполненной связями, и трещины с малой концевой областью. На основе предложенного критерия разрушения для случая трещины, полностью заполненной связями (зона ослабленных связей в материале), даны оценки прочности «бездефектного» (при отсутствии начальной трещины-разреза) материала.

Выполним сравнительный анализ рассмотренного выше критерия разрушения для трещины со связями в концевой области (далее – энергетический критерий) и критерия разрушения с силовым условием продвижения вершины трещины [10] (далее– силовой критерий) для задачи с постоянными напряжениями в концевой области.

Будем полагать, что условия разрыва связей на краю концевой области в обоих критериях совпадают и определяются вторым уравнением (1). Уравнение для силового критерия разрушения при постоянных напряжениях в концевой области трещины $\sigma_y = P_0$, соответствующее первому из уравнений (1), имеет вид [10]

$$K_\infty - K_b = K_{Ic}, \quad K_{Ic} = \sqrt{EG_c} = \sqrt{\eta E G_b} = \sqrt{EP_0\delta_{cr}}, \ \eta = \frac{G_c}{G_b} \tag{3}$$

где K_{Ic} – трещиностойкость материала, G_c – критическая энергия деформации материала матрицы, G_b – плотность энергии деформации, выделяющейся при разрыве связей на краю концевой области ($x = \ell - d$), E – модуль упругости материала матрицы.

Из совместного решения уравнений для силового критерия разрушения также можно определить размер концевой области $d_{\rm cr}$ и критическое внешнее напряжение σ_{cr} в состоянии предельного равновесия трещины.

Для сравнительного анализа энергетического и силового критериев разрушения рассмотрим в состоянии предельного равновесия зависимость величины обратной критической длине трещины $R_{cr} = d_0 / \ell_{cr}$ от относительной длины концевой области трещины $t_{cr} = d_{cr} / \ell_{cr}$ для этих двух критериев разрушения ($d_0 = \pi E \delta_{cr} / 8P_0$). При малых значениях t_{cr} оба критерия дают близкие результаты (см. рис. 1, $\eta = 1$), с увеличением относительного размера концевой области различие возрастет. Заметим, что при фиксированном относительном размере концевой области энергетический критерий дает большее значение параметра R_{cr}, чем силовой, что, в свою очередь, соответствует более короткой трещине и большим критическим внешним напряжениям. Увеличение критической нагрузки при использовании энергетического критерия объясняется учетом работы, совершаемой при деформировании связей. При $\eta \to \infty$ оба критерия дают близкие результаты для $0 < t_{cr} \le 1$ и $R_{cr} \to 2\eta$ при $t \to 1$.

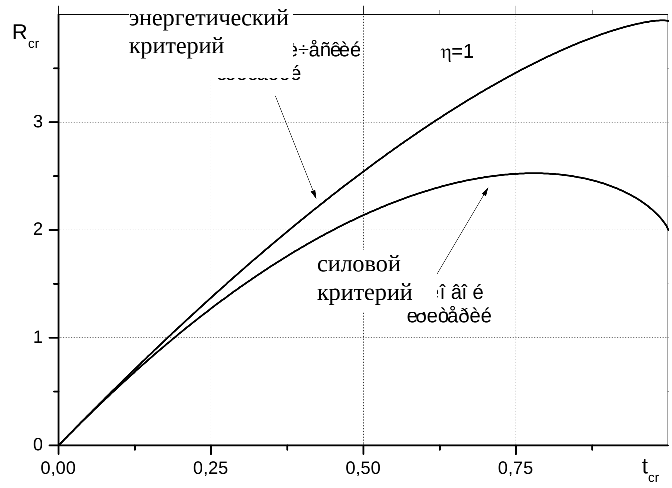


Рис. 1. Зависимости параметра R_{cr} от длины концевой области трещины для энергетического и силового критериев, учет трещиностойкости материала

Принципиально различаются результаты в случае малой величины трещиностойкости материала матрицы ($\eta = 0$) (рис.2). При малой длине концевой области результаты близки, но уже при $t_{cr} > 0.1$ наблюдается существенное расхождение. На рис. 2 при $t_{cr} = 1$ имеем для силового критерия разрушения $R_{cr} = 0$, что формально соответствует трещине бесконечной длины и, соответственно, бесконечному размеру концевой области. Максимальное значение параметра $R_{cr}^m \approx 0.368$ достигается при $t_{cr} \approx 0.632$. При $R_{cr} > R_{cr}^m$ в рамках силового критерия разрушения не существует трещины, удовлетворяющей условиям предельного равновесия.

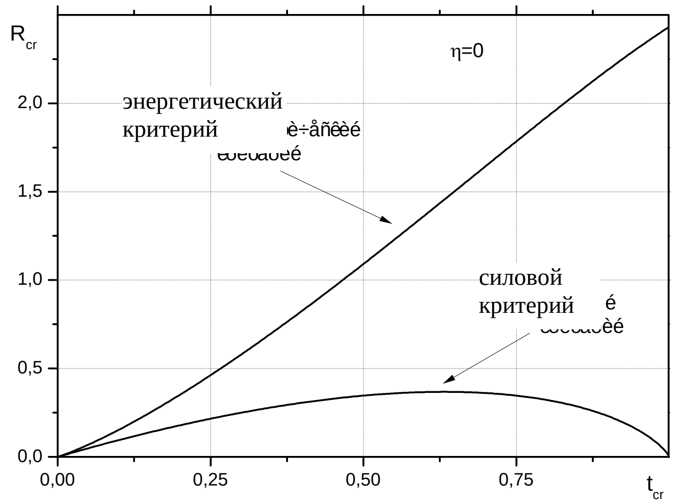


Рис. 2 Зависимости параметра R_{cr} от длины концевой области трещины для энергетического и силового критериев, малая трещиностойкость материала

Энергетический и силовой критерии развития трещины дают близкие оценки параметров разрушения для трещин с малой концевой областью, а также в случае композитов, обладающей высокой трещиностойкостью материала матрицы. Таким образом, для композитов, подкрепленных нановолокнами ($\eta < 1$), является целесообразным использование энергетического критерия разрушения, позволяющего учесть работу по деформированию связей в концевой области трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Qian D., Dickey E.C., Andrews R. and Rantell T., Load transfer and deformation mechanisms on carbon nanotube-polystyrene composites, *App. Phys. Let.* 76 (20). 2868 (2000).
2. Xia Z. at al. Direct observation of toughening mechanisms in carbon nanotube ceramic matrix composites, *Acta Materiala*, vol. 52, pp. 931-944 (2004).
3. Srivastava D., Wei C., Cho K. Nanomechanics of carbon nanotubes and composites, *App. Mech. Rev.*, vol. 56, no 2, pp.215-230 (2003).
4. Watts P.,C.P., Hsu W.K. Behaviours of embedded carbon nanotubes during film cracking, *Nanotechnology*, vol. 14, L7-L10 (2003).
5. Goldstein R. V., Perelmuter M. N. Modeling of bonding at an interface crack, *International J. of Fracture*, (1-2), 53-79 (1999).
6. Гольдштейн Р.В. Перельмутер М.Н. Трещина на границе соединения материалов со связями между берегами // МТТ. 2001. №1 С. 94-112.
7. Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н., Пост трещин по границе соединения материалов, «Проблемы механики», сб. статей. К 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского. М.: Физматлит. С. 221-238 (2003).
8. Perelmuter M. N. Fracture criterion for cracks with bridged zone, pp. 261-270, In: IUTAM Symposium on Asymptotics, Singularities and Homogenisation in Problems of Mechanics, A.B. Movchan (Ed.), Kluwer Academic Publishers (2003).
9. Перельмутер М.Н. Критерий роста трещин со связями в концевой области // ПММ. 2007. Вып.1. С. 152-171.
10. Cox B.N., Marshall D.B. Concepts for bridged cracks in fracture and fatigue. // Acta Metall Mater. 1994. V.4., № 2. P.341-363.

Сведения об авторе:

Перельмутер Михаил Натанович

Кандидат техн. наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики РАН
Адрес: Россия, 119526 Москва, проспект Вернадского 101-1, ИПМех РАН
Тел.: (495) 433-62-57; E-mail: perelm@ipmnet.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ МАТЕРИАЛОВ ПРИ УБЫВАНИИ НАПРЯЖЕНИЯ

Петросян Т.Л., Симонян А.М.

Ползучесть материалов при убывании напряжения изучена значительно менее чем при их возрастании. Обычно теории ползучести строятся на базе ступенчато-возрастающих напряжений. При ступенчато-убывающих напряжениях теории ползучести, как правило, плохо описывают деформации ползучести. Например, теория упрочнения (гипотеза уравнения состояния) [1] вообще не описывает обратную ползучесть даже при полном снятии нагрузки, теория наследственности [1,2], наоборот, описывает значительно большую обратную ползучесть, чем это имеет место в действительности, а в случае экспоненциального ядра при полной разгрузке деформации ползучести прогнозируются полностью обратимыми. В работах [2-5] утверждалось, что при частичной разгрузке имеет место так называемый «инкубационный период», в течение которого скорость ползучести равна нулю, после чего деформации вновь растут в направлении действия оставшейся нагрузки. Показано, что продолжительность инкубационного периода тем больше, чем значительнее уменьшение нагружения. В работах [6,8] показано, что деформации обратной ползучести линейно зависят от напряжения предшествующей ползучести. В работе [7] показано, что у монокристаллического алюминия обратная ползучесть вообще отсутствует. У органопластиков, бетонов и грунтов уменьшение напряжений, как правило, сопровождается деформациями ползучести обратного направления.

В работах [8,9], в целях описания ползучести при убывании напряжений, предлагается: деформации ползучести делить на обратимую и необратимую составляющие, при этом обратимую часть деформаций ползучести предлагается описывать теорией наследственности, а необратимую – теорией упрочнения.

В работе [10] рассматривался вариант теории наследственности с «запаздывающей пластичностью» в форме [11].

1.При изучении ползучести хромо-никелевой стали Х18Н10Т при $600\,^0$С деформации ползучести описывались следующим соотношением [12]:

$$\varepsilon_c(t)=\int_0^t\left\{\beta_0\left[\sigma(\tau)\right]\gamma e^{-\gamma(t-\tau)}+\alpha\left[\sigma(\tau)\right]\right\}d\tau+\int_0^{\theta_1(t)}\beta_1\left[\sigma\left(\tau+\theta_2(\tau)\right)\right]\gamma e^{-\gamma\left(\theta_1(\tau)-\tau\right)}d\tau \qquad (1.1)$$

что соответствует следующей аппроксимации ползучести при постоянных напряжениях

$$\varepsilon_c(t)=\left[\beta_0(\sigma)+\beta_1(\sigma)\right]\left(1-e^{-\gamma t}\right)+\alpha(\sigma)t \qquad (1.2)$$

Здесь $\beta_0(\sigma)$ соответствует обратимой деформации ползучести, а $\beta_1(\sigma)$ необратиной, $\sim(\pm)$ соответствует установившейся скорости. $\theta(t)$ представляет собой сумму промежутков времени до момента t, в течение которых напряжение не ниже достигнутого до этого момента, $\theta_2(t)=t-\theta_1(t)$.

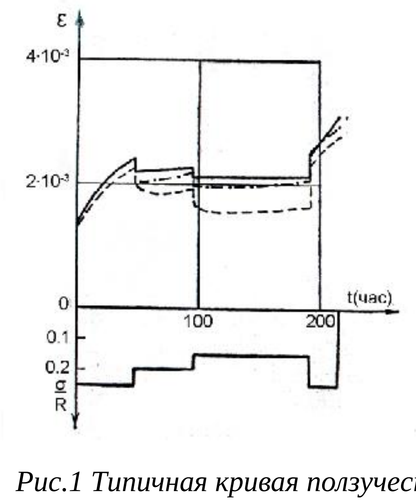


Рис.1 Типичная кривая ползучести стали при ступенчатом изменении напряжения

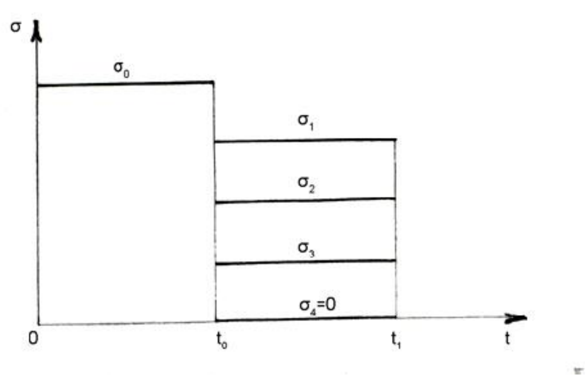


Рис.2 Программа изменения компрессионного напряжения

На рис.1 приводится типичная кривая ползучести стали при ступенчатом изменении напряжения. Сплошными линиями показана экспериментальная кривая, штрих-пунктирной линией – теоретическая кривая, построенная по формуле (1.1), штриховой линией – построенная согласно обычной теории наследственности:

$$\varepsilon_c\left(t\right)=\int_0^t\left\{\left[\beta_0\left(\sigma\left(\tau\right)\right)+\beta_1\left(\sigma\left(\tau\right)\right)\right]\gamma e^{-\gamma\left(t-\tau\right)}+\alpha\left(\sigma\left(\tau\right)\right)\right\}d\tau \qquad (1.3)$$

Аналогичные результаты были получены и при других опускаемых здесь программах нагружения. При построении теоретических кривых были осуществлены следующие процедуры: на основании кривых ползучести при постоянных напряжениях были определены $_0(\pm)+\ _1(\pm)$, ¥ и $\alpha\left(\sigma\right)$; затем на основании кривых обратной ползучести были определены функции $_0(\pm)$, при этом не было необходимости аппроксимировать функции $\beta_0\left(\sigma\right),\beta_1\left(\sigma\right)$ и $\alpha\left(\sigma\right)$, так как для расчета деформаций по формулам (1.1) или (1.3) при ступенчато-изменяющихся напряжениях требуются лишь значения этих функций при использованных напряжениях. Как можно заключить из рис.1, уравнение (1.1) описывает деформации ползучести точнее обычной теории наследственности (1.3).

2. В работе [11] рассматривалось уравнение «запаздывающей пластичности» в применении к многоступенчатому возрастанию и убыванию напряжения для случая, когда деформации ползучести при постоянном напряжении описываются экспоненциальным законом:

$$£_c(t)=\int_0^t\ _0[\pm(²)]¥e^{-¥(t-²)}d²+\int_0^{-(²)}\ _1[\pm(²(¶))]¥e^{-¥[^-(²)-¶]}d¶ \qquad (2.1)$$

где $\tau\left(\theta\right)$ есть функция обратная $\theta\left(\tau\right)$. В сущности, соотношения (1.1) и (2.1) тождественны при $\alpha\left(\sigma\right)=0$. В условиях, когда длительность нахождения под некоторым напряжением является «достаточной», то есть когда $e^{-\gamma\left(t_i-t_{i-1}\right)}<<1$ (t_i соответствует моменту приложения σ_i), деформации ползучести оказываются практически завершенными в конце ступени, что позволяет на основе экспериментов при ступенчатом возрастании с последующим убыванием напряжения определить значения $\beta_0\left(\sigma_i\right)$ и $\beta_1\left(\sigma_i\right)$, как и было сделано в работе [11] в применении к ползучести грунтов. Ниже рассмотрим применимость соотношения (2.1) для следующей программы изменения напряжения (рис.2)

$$\sigma\left(t\right)=\begin{cases}\sigma_0 & t\le t_0 \quad \sigma_i<\sigma_0\\ \sigma_i & t>t_0 \quad i=1,2,3,4\end{cases} \qquad (2.2)$$

Используя соотношения (2.1) в применении к (2.2), получим

$$\begin{aligned}&\varepsilon_c\left(t\right)=\left[\beta_0\left(\sigma_0\right)+\beta_1\left(\sigma_0\right)\right]\left(1-e^{-\gamma t}\right) \qquad t<t_0\\&\varepsilon_c\left(t\right)=\beta_0\left(\sigma_i\right)+\beta_1\left(\sigma_0\right)\left(1-e^{-\gamma t_0}\right)+\left[\beta_0\left(\sigma_0\right)-\beta_0\left(\sigma_i\right)\right]e^{-\gamma\left(t-t_0\right)} \qquad t>t_0\end{aligned} \qquad (2.3)$$

В случае, когда длительность нахождения образца на каждой ступени является значительной, то есть $e^{-\gamma t_0}<<1$ и $e^{-\gamma\left(t_1-t_0\right)}<<1$, для значений деформаций ползучести в конце каждой ступени можно записать следующие приближенные формулы:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_c\left(t_0;\sigma_0\right)=\beta_0\left(\sigma_0\right)+\beta_1\left(\sigma_0\right)\\&\varepsilon_c\left(t_1;\sigma_i\right)=\beta_0\left(\sigma_i\right)+\beta_1\left(\sigma_0\right)\end{aligned} \qquad (2.4)$$

учитывая соотношение (2.4), формулы (2.3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}&\varepsilon_c\left(t;\sigma_0\right)=\varepsilon_c\left(t_0;\sigma_0\right)\left(1-e^{-\gamma t}\right) \qquad t<t_0\\&\varepsilon_c\left(t;\sigma_i\right)=\varepsilon_c\left(t_1;\sigma_i\right)+\left[\varepsilon_c\left(t_0;\sigma_0\right)-\varepsilon_c\left(t_1;\sigma_i\right)\right]e^{-\gamma\left(t-t_0\right)} \qquad t>t_0\end{aligned} \qquad (2.5)$$

В качестве примера испытаны два вида глинистого грунта (глина, супесь).

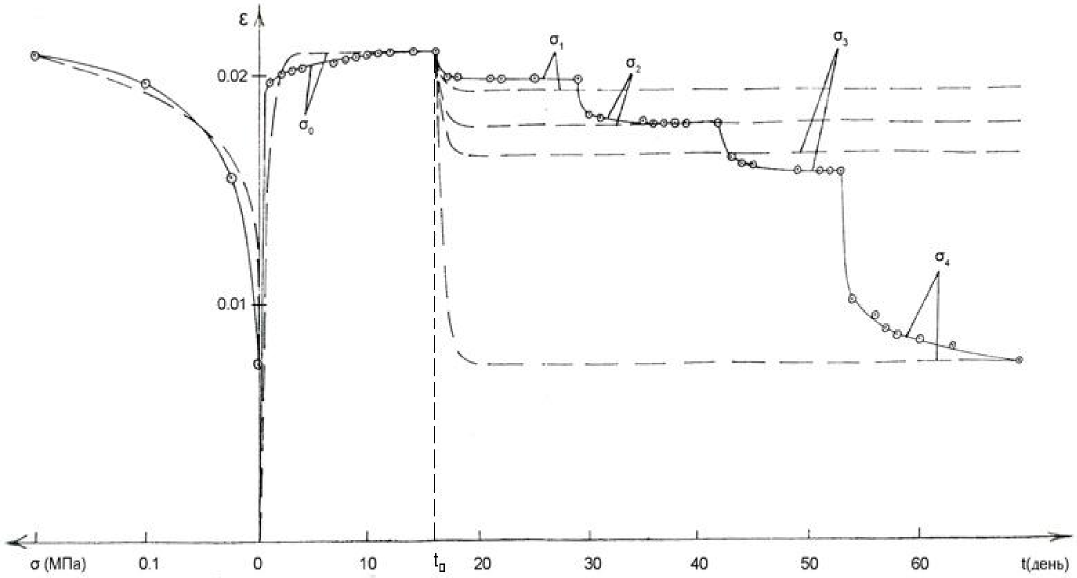


Рис.3 Кривые обратной компрессионной ползучести при ступенчатом убывании напряжения (глина).

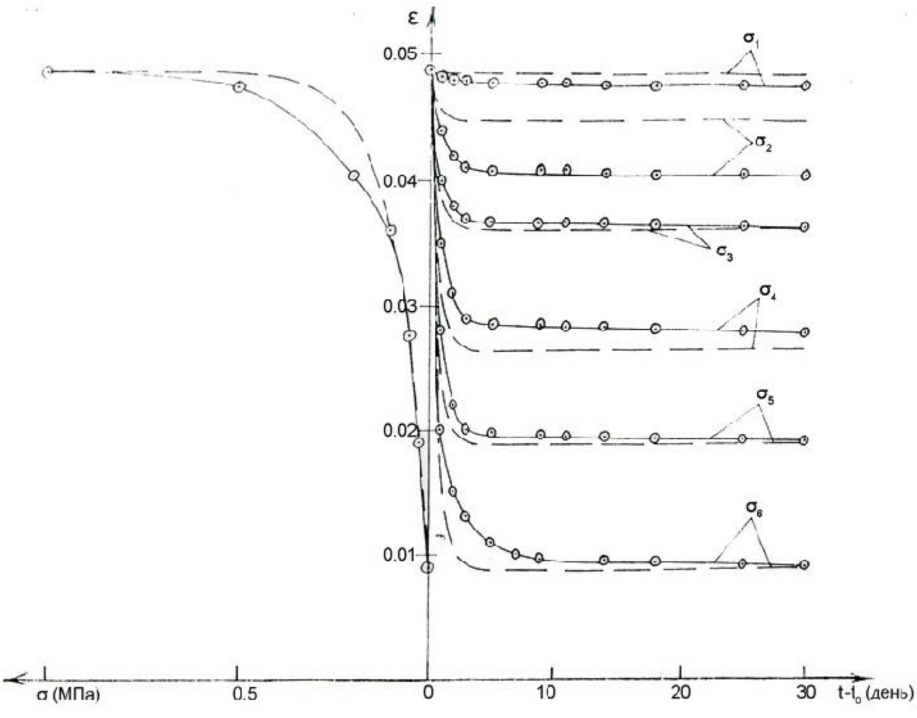


Рис.4. Семейства кривых обратной компрессионной ползучести при убывании напряжения (глина).

Кривые обратной компрессионной ползучести грунтов, построенные по результатам испытания, приведены на рис.3 и рис.4 (глина). В правых частях графиков сплошными линиями показаны кривые зависимости $\varepsilon - t$. В левых частях тех же графиков сплошными линиями показаны кривые зависимости $\varepsilon - \sigma$ при достижении деформациями обратной ползучести своих асимптот. Кривые $\varepsilon - \sigma$ для $\sigma_0 = 0,2$ Мпа при ступенчатом убывании нагрузки после практического достижения асимптот аппроксимированы зависимостью (фиг.3)

$$\varepsilon_c\left(\sigma; t = t_0\right) = a\sigma^m + b \qquad \sigma < \sigma_0 \qquad (2.6)$$

где a, m и b – параметры, определяемые из опыта. Следует отметить, что выбор параметров соотношения (2.6) для аппроксимации кривых $\varepsilon-\sigma$ зависит от значения σ_0. Для значения $\sigma_0 = 1$ Мпа аппроксимация кривых $\varepsilon-\sigma$ осуществлялась формулой (рис.4)

$$\varepsilon_c\left(\sigma; t=t_0\right) = C_0\left(1-e^{-\gamma_1\sigma}\right)+b \qquad \sigma<\sigma_0 \tag{2.7}$$

Подставляя (2.6) и (2.7) в (2.5), получим соответственно

$$\varepsilon_c\left(t\right) = \varepsilon_c\left(t_0\right)\left(1-e^{-\alpha t}\right) \qquad 0<t<t_0 \tag{2.8}$$

для $\sigma = 0,2$ Мпа

$$\varepsilon_c\left(t\right) = \left(a\sigma^m+b\right)+\left[\varepsilon_c\left(t_0;\sigma_0\right)-\left(a\sigma^m+b\right)\right]e^{-\alpha\left(t-t_0\right)} \qquad t>t_0 \tag{2.9}$$

для $\sigma = 1.0$ Мпа

$$\varepsilon_c\left(t\right) = \left[C_0\left(1-e^{-\gamma_1\sigma}\right)+b\right]+\left\{\varepsilon_c\left(t_0;\sigma_0\right)-\left[C_0\left(1-e^{-\gamma_1\sigma}\right)+b\right]\right\}e^{-\alpha\left(t-t_0\right)} \qquad t>t_0 \tag{2.10}$$

В левых частях графиков (рис.3,4.) штриховыми линиями показаны кривые по соотношениям (2.6) и (2.7). В правых частях тех же графиков штриховыми линиями показаны кривые зависимости $\varepsilon-\sigma$, построенные по формулам (2.8), (2.9) и (2.10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкции. М.: Наука, 1966.
2. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960.
3. Lay J.S. , Findley W.N. Creep of 2618 aliuminium under sterp stress changes predicted by a viscous-viscoelastic model. //Trans.ASME. Appl. Mech. 47. №1.
4. Takahashi Yasuo, Nakagawa Konich, Yamane Toshimi. Stress drop experiments during high temperature creep of an austenic 25Cr-20NI stainless steel between 1133 and 1193 ^{0}K. Z. metallk. 1980. 71. № 9.
5. Gansa-Neri R. , Ahlguist C. N., Nix W. D. A phenomenological theory of transient creep. Acta met. 1970. 18. №6.
6. Henderson J. Snedden J.D. Creep recovery of commercially pure copper. J.Mech. Engn. Sci. 1968. 10 №1.
7. Симонян А.М. Исследование ползучести алюминиевых монокристаллов. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1979. Т.32. №6.С.27–40.
8. Брызгалин Г.И. О ползучести при переменных напряжениях. //ПМТФ. 1962. №3.
9. Jakowluk Anatoliusz, Mideszko Eugeniusz. Destriptive method for creep of alloys by non-stationary loadigs on the example of creep in aliuminium alloy. “Bull. Acad. Pol. sci. Ser. sci. techn.” 1977. 25. №4.
10. Петросян Т.Л. Симонян А.М. Об описании деформаций ползучести при многоступенчатом возрастании и убывании напряжения. //Тезисы докладов международной конференции «Механика композитов и оптимальное проектирование». 25-28 сентября 2006. Ереван.
11. Симонян А.М. Некоторые вопросы ползучести. Ереван: ”Гитутюн”, 1999.
12. Симонян А.М. Исследование высокотемпературной ползучести хромо-никелевой стали в условиях ступенчатых изменений напряжения. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1974. Т.27. № 4. С.57–66.

Сведения об авторах

Петросян Тигран Людвигович
Адрес: Ереван, Джрвеж ул.14, дом8
Тел: (+37410) 67-43-04

Симонян Арег Михайлович
Доктор техн. наук, ведущий науч. Сотрудник, Институт механики НАН РА
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б, Тел: (+37410) 52-58-35

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЗМА САМОСМАЗЫВАНИЯ И ИЗНОСА В МЕТАЛЛОПОЛИМЕРНОМ ТРИБОКОНТАКТЕ

Погосян А.К., Исаджанян А.Р., Оганесян К.В.

Модель для расчета параметров металлополимерного трибоконтакта построена на молекулярно-механической теории трения [1] и адгезионно-энергетическом механизме фрикционного переноса [2]. Моделирование предлагается для определения трибологических характеристик путем проведения виртуальных экспериментов, а также для анализа возможных путей улучшения свойств металлополимерного узла трения.

Модель основана на следующем представлении механизма самосмазывания и износа.

В процессе трения полимерного материала (2) по поверхности металлического контртела (1) под действием выделяющегося тепла (q) когезионная прочность (F_c) полимерного материала снижается (рис. 1). На рисунке представлен контакт единичной шероховатости полимерного тела моделируемый как шаровой сегмент с радиусом (R) и образующий контактную площадь (A_r) радиуса (r_0).

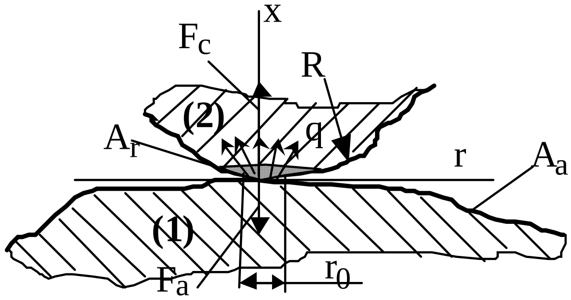


Рис. 1. Снижение когезионной прочности полимерного материала под действием фрикционного тепла

Объем полимерного материала, когезионная прочность которого оказывается ниже порогового, переносится на поверхность металлического контртела под действием адгезионных сил (F_a) и образует пленку фрикционного переноса толщиной (h) (рис.2) [3].

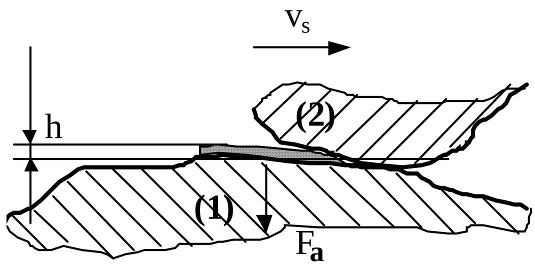


Рис. 2. Перенос ослабленного объема на поверхность металлического контртела

Пленка фрикционного переноса, находясь между полимерным материалом и металлическим контртелом, подвергается периодическому нагружению (рис.3).

Рис. 3. Периодическое нагружение пленки фрикционного переноса

Под действием нагрузок пленка переноса подвергается усталостному разрушению и выносится из зоны контакта (рис.4).

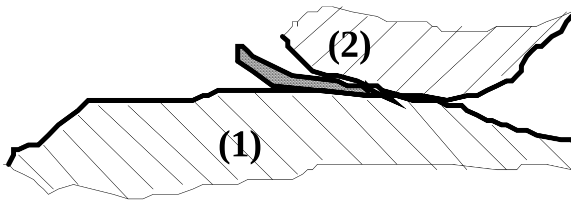


Рис. 4. Разрушение пленки фрикционного переноса

Объем разрушенной пленки переноса образует частицы износа.

Методика моделирования состоит из следующих этапов:

а) Расчет реальной площади контакта, осуществляемый путем моделирования трущихся поверхностей сферическими сегментами, распределенными по высоте в соответствии с базовой кривой реальной поверхности. Зависимость реальной площади контакта от удельного давления (p_c) рассматривается для четырех возможных режимов работы: упругий ненасыщенный, упругий насыщенный, пластический ненасыщенный и пластический насыщенный контакты [1]. Например, расчет реальной площади контакта для упругого ненасыщенного контакта производится по следующей формуле:

$$A_r = \frac{A_c}{2} \cdot \left(\frac{p_c \cdot \left(1-\mu^2\right)}{0.21 \cdot \nu \cdot \left(\nu - 1\right) \cdot k_1 \cdot E_0 \cdot e^{-\gamma \cdot \left(\bar{\theta} - \theta_0\right)} \cdot \sqrt{\Delta}} \right)^{\frac{2 \cdot \nu}{2 \cdot \nu + 1}} \tag{1}$$

где μ – коэффициент Пуассона, ν, k_1 – параметры базовой кривой поверхности, E_0 – модуль упругости при начальной θ_0 температуре, Δ – характеристика микрогеометрии.

б) Расчет двух компонентов силы трения: механического, образующегося от деформации поверхности, и молекулярного, создающегося от действия адгезионных сил – в соответствии с молекулярно-механической теорией трения [1].

Молекуляная составляющая коэффициента трения на реальной площади контакта рассчитывается по следующей формуле:

$$f_m = A_r \cdot \tau_{n_{\max}} \cdot \left(-\psi \frac{\theta}{\theta_m} \right) / N \tag{2}$$

где $\tau_{n_{\max}}$ – максимальная прочность адгезионных мостиков (принимается равной прочности полимерного материала), θ – поверхностная температура, θ_m – температура плавления полимерного материала, ψ – коэффициент, зависящий от типа материала, N – сила по нормали [4].

Механическая (или деформационная) составляющая коэффициента трения рассчитывается с учетом двух видов контакта – упругого и пластического. Для металлополимерной пары более свойственен упругий контакт, при котором деформационная составляющая коэффициента трения рассчитывается учитывая гистерезисные потери (α_{ef}) при деформации тела с более низкой жесткостью (полимерного):

$$f_d = 0.25 \cdot \alpha_{ef} \cdot p_c^{\frac{1}{5}} \cdot \Delta^{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{1-\mu^2}{E_0 \cdot e^{-\gamma \cdot \left(\bar{\theta} - \theta_0\right)}} \right)^{\frac{1}{5}} \tag{3}$$

Полагая, что вся работа, совершаемая силой трения, обращается в тепло, рассчитывается количество выделяемого тепла, при этом количество тепла, проникающее в полимерное тело, определяется по следующей формуле:

$$q_c = \left(1 - \alpha_{hd}\right) \cdot N \cdot f \cdot v_s / A_r \tag{4}$$

где α_{hd} – коэффициент распределения тепловых потоков.

в) Определение толщины пленки фрикционного переноса, полагая, что некоторый объем полимера, ослабленный фрикционным теплом, переносится на металлическую поверхность под действием адгезионных сил и формирует пленку [3].

В результате выделения тепла температура микронеровностей повышается. Для определения мгновенной температуры применяется нестационарная задача нагрева полупространственного тела через круговой контакт радиусом r_0. Решение данной задачи при упругом контакте, полагая постоянный поток тепла, выглядит следующим образом:

$$\theta(0,x,t) - \theta' = \frac{4 \cdot (1-\alpha_{hd}) \cdot N \cdot f \cdot v_s \cdot \sqrt{t}}{b \cdot A_c \cdot \left(\dfrac{p_c \cdot (1-\mu^2)}{0.21 \cdot \nu \cdot (\nu - 1) \cdot k_1 \cdot E_0 \cdot e^{-\gamma(\bar{\theta}-\theta_0)} \cdot \sqrt{\Delta}} \right)^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}} \times$$
$$\times \left(ierfc\left(\frac{x}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}} \right) - ierfc\left(\frac{\sqrt{x^2 - r_0^2}}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}} \right) \right) \tag{5}$$

Толщина пленки переноса рассчитывается численным методом, полагая, что объем полимерного материала, нагретый выше температуры θ_t, переносится на поверхность контртела. В случае высоких значений адгезионной энергии объем перенесенного полимерного материала высок, что приводит к большой толщине пленки переноса (рис.5).

г) Расчет долговечности пленки, исходя из следующего условия, пленка разрушается, когда накопленная в ней энергия W_e упругих напряжений (σ_0) становится равной или превосходит поверхностную адгезионную энергию W_{12} “пленка-контртело”. Значение энергии упругих напряжений, накпливающихся при циклическом нагружении пленки фрикционного переноса, определяется по следующей формуле [3]:

$$W_e = \frac{\mu^2 \cdot {\sigma_0}^2 \cdot V}{2 \cdot E} \tag{6}$$

д) Расчет интенсивности износа, полагая, что износ полностью состоит из разрушенной пленки переноса, на основе приведенных выше формул (2)-(5) можно вывести зависимость

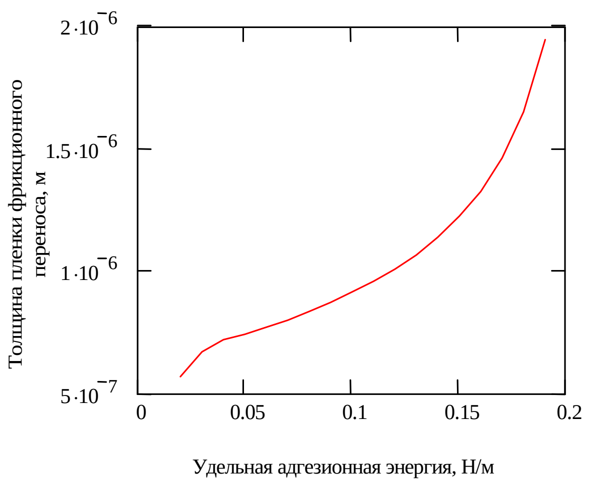


Рис.5. Зависимость толщины пленки фрикционного переноса от поверхностной энергии контртела

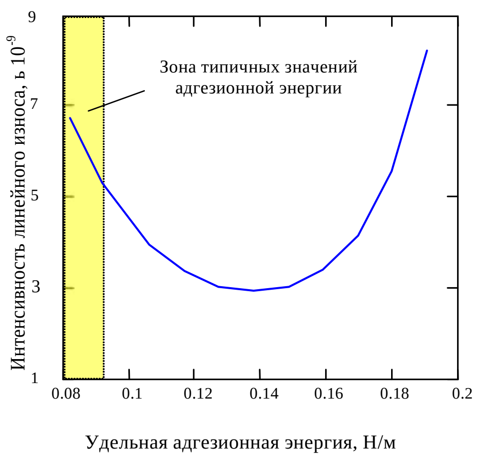


Рис.6. Зависимость интенсивности износа от поверхностной энергии контртела

интенсивности износа:

$$I_w = \frac{N^2 \cdot \nu^2 \cdot \omega \cdot h(N, v_s, W_{1_2}, W_{c0}, \Delta)^2}{2 \cdot W_{1_2} \cdot E_0 \cdot e^{-\gamma \cdot \left(\bar{\theta} - \theta_0\right)} \cdot A_r} \tag{7}$$

Зависимость интенсивности линейного износа от удельной адгезионнной энергии металлополимерного контакта приведена на рис.6. Наблюдается значение энергии, обеспечивающее минимум интенсивности износа, при этом износ можно значительно снизить, повысив значение адгезионной энергии до 2 раз по сравнению с типовыми значениями.

Предлагаемая модель дает возможность расчета основных параметров металлополимерного трибоконтакта и указывает на факторы, воздействующие на трибологические характеристики металлополимерных узлов трения. Она может быть использована как практическая реализация явления фрикционного переноса – для целенаправленного создания износостойких антифрикционных материалов на полимерной основе, работающих в условиях отсутствия смазки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Камбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 525с.
2. Погосян А.К. Оганесян К.В. Явление фрикционного переноса: основные закономерности и методы исследования // Трение и износ. 1986. Т.7. №6. С. 998-1008.
3. Погосян А.К. Расчет толщины пленки фрикционного переноса и условий ее работоспособности // Трение и износ. 1984. Т.5. №2. С. 204-211.
4. Pogosian A.K., Hovhannisyan K.V., Isajanyan A.R. Self-lubricating mechanism of polymer-based composites with a mineral fillers. In "World Tribology Congress", Vienna, 2001, pp.101-104.

Сведения об авторах

Погосян Альберт Князевич
Доктор технических наук, заведующий аспирантским отделением ГИУА
Адрес:0009 Ереван ул. Теряна 105
Тел: 589884; E-mail: pogosian@seua.am

Исаджанян Аршак Робертович
Кандидат технических наук, Государственный инженерный университет Армении
E-mail: aisajanyen@rambler.ru

Оганесян Карине Валиковна
Кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики, Государственный инженерный университет Армении
E-mail: khovhan@netsys.am

ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ АВТОРА В ТЕЧЕНИЕ 1997 – 2007 Г.Г.
ПО КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ

Попов Г.Я.

В указанный период исследования автора [1–34] велись по следующим направлениям:

1. Методы вывода интегральных преобразований и их применение к решению краевых задач механики.
2. Метод разрывных решений в сочетании с методом Винера – Хопфа или методом ортогональных многочленов.
3. Новые преобразования уравнений движения упругой среды и их использование при решении краевых задач механики.
4. Вывод нового спектрального соотношения для многочленов Чебышева – Лагерра и его использование при решении динамических задач теории упругости.
5. Задачи для слоистых сред.

Такое разделение указанных исследований является условным, т.к. некоторые публикации относятся к нескольким из указанных направлений.

Целью обзора является охарактеризовать наиболее важные результаты в публикациях в указанный период, а также указать допущенные неточности и ошибки и пути их устранения. Обзор будем вести последовательно согласно нумерации указанных направлений.

1. Методы вывода интегральных преобразований базируются на предварительном решении краевой задачи Штурма – Лиувилля. Часто используется метод Титчмарша [35], который базируется на предварительном приведении дифференциального уравнения к специальному виду с последующим решением задачи Штурма – Лиувилля методом, основанным на контурном интегрировании и теории вычетов, позволившим избежать привлечения теории интегральных уравнений и общей теории линейных операторов. Метод Титчмарша пригоден, как в случае регулярной задачи Штурма – Лиувилля, так и в случае сингулярной задачи.
В работе [14] методом Титчмарша построено интегральное преобразование для функции $f(\theta)$, заданной на отрезке $\omega_0 \le \theta \le \omega_1$, лежащем внутри интервала $0 < \theta < \pi$:

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \sin\theta \varphi_e^m(\theta, v_k)\, f(\theta)\, d\theta = f_k^e; \quad k, m = 0, 1, 2, \ldots; \quad e = a, b, c \tag{1.1}$$

ядром которого являются собственные функции решенных задач Штурма – Лиувилля и представляющих линейную комбинацию сферических функций

$$\varphi_e^m(\theta, v_k) = P_{v_k}^m(\cos\theta)\, l_1^e Q_{v_k}^m(\cos\theta) - Q_{v_k}^m(\cos\theta)\, l_1^e P_{v_k}^m(\cos\theta) \tag{1.2}$$

где $l_i^e \ (i = 0, 1; \ e = a, b, c)$ – граничные функционалы, определяющие граничные условия в решенных краевых задачах Штурма – Лиувилля, а $v = v_k, \ k = 0, 1, 2, \ldots$ – собственные числа этих задач. Эти функционалы определяются формулами

$$l_i^a \varphi(\theta, v) = \varphi(\omega_i, v), \; l_i^b \varphi(\theta, v) = \dot{\varphi}(\omega_i, v) + h_i \varphi(\omega_i, v), \; l_i^c \varphi(\theta, v) = \dot{\varphi}(\omega_i, v) \tag{1.3}$$

$i = 0, 1; \ h_i$ - произвольные вещественные числа, точка над символом означает дифференцирование по переменной θ.

В работе [14] указаны формулы обращения для интегральных преобразований (1.1). К работе [14] примыкает работа [18], где тем же методом получено такое же интегральное преобразование с теми же формулами обращения и дополнительно получены асимптотические (для больших номеров) формулы для собственных чисел, а также дано применение полученных интегральных преобразований для получения точного решения нескольких начально краевых задач теории теплопроводности для усеченного кругового полого конуса:

$$a_0 < r < a_1, \ \omega_0 < \theta < \omega_1, \ -\pi < \varphi \le \pi \tag{1.4}$$

В работе же [14] с помощью интегральных преобразований (1.1) получено точное решение для упругого конуса (1.4), когда на конических поверхностях $(\theta=\omega_i,\ i=0,1)$ задана скользящая заделка, а на сферических поверхностях $(r=a_i,\ v=0,1)$ заданы нулевые касательные напряжения и отличные от нуля нормальные напряжения. Точное решение этой же задачи с помощью тех же интегральных преобразований, но при ударном загружении торцев, получено в работе [15], но при обратном преобразовании Лапласа использован асимптотический метод для больших значений параметра преобразования Лапласа. С помощью интегрального преобразования (1.1) в работе [13] получено точное решение для бесконечного сплошного упругого конуса, т.е. $a_0=0,\ a_1=\infty,\ \omega_0=0$ при загружении у острия конуса центром вращения. На основе полученного решения установлен важный механический факт: при нагружении упругого бесконечного конуса центром вращения у острия по коническим поверхностям $\theta=\omega\le\omega_1$ отсутствуют напряжения, т.е. наличие трещины на этой поверхности не вызывает концентрации напряжений.

Другой метод построения интегральных преобразований как на основе регулярной, так и сингулярной задачи Штурма – Лиувилля предложен в работе [35] и воспроизведен в [37]. Этим методом, на основе сингулярной задачи Штурма – Лиувилля

$$-y''(x,\lambda)=\lambda y(x,\lambda),\ 0<x<\infty;\ \cos\alpha y(0,\lambda)-\sin\alpha y'(0,\lambda)=0 \tag{1.5}$$

в [34] получено интегральное преобразование

$$g_\lambda=\int_0^\infty g(x)\varphi_\lambda(x)dx,\ g(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\varphi_\lambda(x)g_\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda}\left(\lambda+ctg^2\alpha\right)} \tag{1.6}$$

где

$$\varphi_\lambda(x)=\mathrm{ctg}\alpha\sin\left(x\sqrt{\lambda}\right)+\sqrt{\lambda}\cos\left(x\sqrt{\lambda}\right)$$

Последняя удовлетворяет краевой задаче

$$-\varphi_\lambda''(x)=\lambda\varphi_\lambda(x),\quad 0<x<\infty;\quad \varphi_\lambda'(v)-\mathrm{ctg}\alpha\varphi_\lambda(0)=0 \tag{1.7}$$

Задачу Штурма-Лиувилля (1.5) можно решить и методом Титчмарша. В его книге [34] рассмотрен пример, близкий к (1.5).

Еще один метод построения интегральных преобразований предложен в работе [30] и воспроизведен в учебном пособии [31]. Изложим узловые моменты этого метода.

В начале решается регулярная задача Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned}&L_s y(x,\lambda)-\lambda\left[r(x)\right]^{-1}y(x,\lambda)=0,\quad a_0<x<a_1,\quad r(x)>0\\&l_i y(x,\lambda)\equiv\alpha_{10}y(a_i,x)+\alpha_{01}y'(a_i,\lambda)=0,\quad i=0,1\end{aligned} \tag{1.8}$$

где L_s – самосопряженный оператор Штурма-Лиувилля, определяемый формулой

$$L_s y(x)\equiv-\left[p(x)y'(x)\right]'+q(x)y(x) \tag{1.9}$$

Считается, что $p(x),\ p'(x),\ q(x),\ r^{-1}(x)$ – непрерывные функции на отрезке $[a_0,a_1]$. Для регулярности достаточно выполнения условий [36,37]

$$\int_{a_0}^{a_1}\left\{\left|\frac{p'(x)}{p(x)}\right|,\left|\frac{q(x)}{p(x)}\right|,\left|\frac{1}{p(x)}\right|\right\}dx<\infty \tag{1.10}$$

Если известная фундаментальная система решений $\varphi_0(x,\lambda)$ и $\chi_0(x,\lambda)$ дифференциального уравнения из (1.8), то решение краевой задачи строим в виде

$$y(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)l_1\chi_0(x,\lambda)-\chi_0(x,\lambda)l_1\varphi_0(x,\lambda) \tag{1.11}$$

что позволит удовлетворить не только дифференциальному уравнению, но и граничному условию $l_1y(x,\lambda)=0$, а удовлетворение второму граничному условию $l_0y(x,\lambda)=0$ приводит к трансцендентному уравнению

$$l_0\varphi_0(x,\lambda)l_1\chi_0(x,\lambda)-l_0\chi_0(x,\lambda)l_1\varphi_0(x,\lambda)=0 \qquad (1.12)$$

Корни этого уравнения $\lambda=\lambda_j;\ j=0,1,2,...$ и будут давать собственные числа, а функции (1.11) при этих значениях λ будут давать собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.8). Последующее сведение задачи (1.8) к интегральному уравнению с симметричным и непрерывным ядром позволяет доказать, что уравнение (1.12) имеет счетное множество вещественных некратных корней, а также ортогональность собственных функций с весом $r^{-1}(x)$. На основе построенных собственных функций (1.11) при $\lambda=\lambda_j$ вводится интегральное преобразование

$$\int_{a_0}^{a_1}\frac{y(x,\lambda_j)f(x)}{r(x)}dx=f_i$$

Использование теоремы разложения Стеклова [38] позволяет получить формулу обращения

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y(x,\lambda_j)}{\left\|y(x,\lambda_j)\right\|^2}f_j$$

Записанный ряд равномерно сходится, если функция имеет непрерывную вторую производную и удовлетворяет граничным условиям $l_i f(x)=0,\ i=0,1$. В работе [38] показано, что требование относительно непрерывности $f''(x)$ можно ослабить.

Этим методом в работе [26] получено интегральное преобразование для функции $f(r)$, заданной на отрезке $[a_0,a_1]$

$$\int_{a_0}^{a_1}y_*(r,\lambda_j^*)f(r)dr=f_j^*,\quad f(r)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y_*(r,\lambda_j)}{\left\|y_*(r,\lambda_j)\right\|^2}f_j^* \qquad (1.13)$$

где

$$y_*(r,\lambda)=r^{-1/2}\left[A_\lambda(r)B_\lambda(a_1)-B_\lambda(r)A_\lambda(a_1)\right],\quad \lambda=\lambda_j^*,\quad j=0,1,2,...$$

$$\begin{bmatrix}A_\lambda(r)\\ B_\lambda(r)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin(\lambda\ln r)\\ \cos(\lambda\ln r)\end{bmatrix},\quad \left\|y_*(r,\lambda)\right\|^2=\frac{\gamma}{2}-\frac{\sin\lambda\gamma\cos\lambda\gamma}{2\lambda},\quad \gamma=\ln\frac{a_1}{a_0} \qquad (1.14)$$

Собственные числа $\lambda_j^*=\gamma^{-1}\mu;\ j=0,1,2,...$ находятся из трансцендентного уравнения: $\mu^{-1}tg\mu=-\chi^{-1},\ \chi=\left(3/2\right)\gamma$, корни которого $\mu_j,\ j=0,1,2,...$ подсчитаны в [39] для некоторых значений входных параметров.

Собственные функции (1.14) удовлетворяют краевой задаче

$$\left[r^2y_*'(r,\lambda)\right]'=-\left(\lambda^2+1/4\right)y_*(r,\lambda);\quad a_0<r<a_1,\quad \lambda=\lambda_j^*,\quad j=0,1,2,...$$

$$y_*'(a_0,\lambda)-a_0^{-1}y_*(a_0,\lambda)=0,\quad y_*(a_1,\lambda)=0 \qquad (1.15)$$

С помощью интегрального преобразования (1.13) в работе [26] получено точное решение задачи о кручении упругого вала (1.4), конические поверхности которому свободны от напряжения, один торец $(r=a_1)$ которого защемлен, а по второму $(r=a_0)$ приложены касательные напряжения: $\tau_{r\varphi}(a_0,\theta)=A\sin\theta,\ \omega_0\le\theta\le\omega_1,\ A=\mathrm{const}$.

В работе [30] получено интегральное преобразование для функции $f(\theta)$, заданной на отрезке $0<\omega_0\le\theta\le\omega_1<\pi$

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} y_m(\theta,v_j)\sin\theta f(\theta)\,d\theta = f_j^{(m)},\ f(\theta)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y_m(\theta,v_j)}{\left\|y_m(\theta,v_j)\right\|^2} f_j^{(m)},\quad m=0,1, \qquad (1.16)$$

где

$$y_m(\theta,v)=P_\nu^\mu(\cos\theta)\,l_1^m Q_\nu^\mu(\cos\theta)-Q_\nu^\mu(\cos\theta)\,l_1^m P_\nu^\mu(\cos\theta),\quad m=0,1 \quad (1.17)$$

Здесь, как и в (1.2), фигурируют сферические функции, но в отличие от (1.2) верхние индексы не целые числа. а произвольные вещественные числа. Граничные функционалы $l_i^m\ (i=0,1)$ определены формулами

$$l_i^0 y(\theta)=y(\omega_i),\ l_i^1 y(\theta)=y^{\bullet}(\omega_i)+h_i y(\omega_i),\quad h_i=\text{const},\quad i=0,1$$

Собственные числа $v_j,\ j=0,1,2,\ldots$ представляют собой корни трансцендентных уравнений:

$$l_0^m P_\nu^\mu(\cos\theta)\,l_1^m Q_\nu^\mu(\cos\theta)-l_0^m Q_\nu^\mu(\cos\theta)\,l_1^m P_\nu^\mu(\cos\theta)=0,\quad m=0,1.$$

Квадрат нормы собственных функций, содержащихся в (1.16), следует вычислять по формуле

$$\left\|y_m(\theta,v_j)\right\|^2=\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left[y_m(\theta,v_j)\right]^2\sin\theta\,d\theta,\quad m=0,1 \qquad (1.18)$$

Содержащийся в (1.18) интеграл вычислен в [30]. Интегральное преобразование (1.18) применено в [30] к решению краевой задачи стационарной теплопроводности для конуса (1.4), в котором сделан вырез вдоль образующей, т.е. $\varphi_0\le\varphi\le\varphi_1$ вместо $-\pi\le\varphi<\pi$, а также связанной термоупругости для такого же конуса в работе [25].

Интегральное преобразование (1.16) применено также в работе [33], где рассмотрена осесимметричная смешанная задача о напряженном состоянии упругого конуса (1.4) при скользящей заделке на конических поверхностях $(\theta=\omega_i,\ i=0,1)$, отсутствии касательных напряжений на сферических поверхностях $(r=a_i,\ i=0,1)$ и при действии на них сжимающих нормальных напряжений, т.е. как и в работе [14]. В отличие от [14] здесь полагается, что уравнения Ламе неоднородные за счет наличия собственного веса материала конуса, либо за счет действия температуры. Получено точное решение задачи. Кроме того, показано, что в случае однородных уравнений Ламе, и когда сжимающие давления на торцах постоянные, то задача допускает простое элементарное решение.

При получении интегральных преобразований (1.1), (1.13) и (1.16) существенным является, что $\omega_0\ne 0$ и $a_0\ne 0$, так как в противном случае соответствующие задачи Штурма-Лиувилля, на которых основан вывод перечисленных интегральных преобразований, становится сингулярным, т.е. не выполняются условия (1.10). При этом в работах [13,14,30] показано, что в интегральных преобразованиях (1.1) и (1.16) формально предельный переход $\omega_0\to 0$ можно выполнить, что и проделано в этих работах. Строгое обоснование этому предельному переходу дано в работе [32] и тем самым показано, что для получения интегрального преобразования, связанного с предварительным решением сингулярной задачи Штурма-Лиувилля, следует ее сформулировать в виде подходящей регулярной задачи построить интегральное преобразование по схеме работ [30,31], а затем совершить нужный предельный переход.

Однако такой подход не всегда приводит к цели. Это можно видеть на примере интегрального преобразования (1.13). В нем предельный переход $a_0\to 0$ совершить не удается и потому соответствующую сингулярную задачу Штурма-Лиувилля следует решить методами, изложенными в работах [36,37].

2. Чтобы дать определение разрывного решения уравнения теории упругости, вводится понятие дефекта [40], под которым понимаем часть поверхности (линии в двумерном случае), при переходе через которую терпят разрыв непрерывности первого рода смещения или напряжения, либо и те и другие. Будем считать, что дефект занимает часть координатной поверхности ортогональной системы координат ξ, η, ζ, связанной с декартовыми зависимостями $x = f_1(\xi, \eta, \zeta), y = f_2(\xi, \eta, \zeta), z = f_3(\xi, \eta, \zeta)$ имеет место и обратная связь $\xi = \tilde{f}_1(x, y, z), \eta = \tilde{f}_2(x, y, z), \zeta = \tilde{f}_3(x, y, z)$. Пусть дефект находится на поверхности $\xi = \xi_0$. При отсутствии дефекта по этой поверхности внутри упругого тела в общем случае будут возникать смещения $u_\xi(\xi_0, \eta, \zeta), u_\eta(\xi_0, \eta, \zeta), u_\zeta(\xi_0, \eta, \zeta)$ и напряжения $\sigma_\xi(\xi_0, \eta, \zeta)$, $\tau_{\xi\eta}(\xi_0, \eta, \zeta), \tau_{\xi\zeta}(\xi_0, \eta, \zeta)$. Под разрывным решением уравнений теории упругости, записанных в координатах ξ, η, ζ, для дефекта $\xi = \xi_0$, будем понимать такое их решение, которое удовлетворяет этим уравнениям всюду, кроме точек дефекта $\xi = \xi_0$. В этих точках должны быть заданы скачки смещений и напряжений:

$$
\begin{gathered}
u_\xi(\xi_0 - 0, \eta, \zeta) - u_\xi(\xi + 0, \eta, \zeta) = \langle u_\xi(\xi_0, \eta, \zeta) \rangle,\ u_\eta(\xi_0 - 0, \eta, \zeta) - \\
- u_\eta(\xi_0 + 0, \eta, \zeta) = \langle u_\eta(\xi_0, \eta, \zeta) \rangle \\
u_\zeta(\xi_0 - 0, \eta, \zeta) - u_\zeta(\xi + 0, \eta, \zeta) = \langle u_\zeta(\xi_0, \eta, \zeta) \rangle,\ \sigma_\xi(\xi_0 - 0, \eta, \zeta) - \\
- \sigma_\xi(\xi_0 - 0, \eta, \zeta) = \langle \sigma_\xi(\xi_0, \eta, \zeta) \rangle \qquad (2.1) \\
\tau_{\xi\eta}(\xi_0 - 0, \eta, \zeta) - \tau_{\xi\eta}(\xi_0 + 0, \eta, \zeta) = \langle \tau_{\xi\eta}(\xi_0, \eta, \zeta) \rangle,\ \tau_{\xi\zeta}(\xi_0 - 0, \eta, \zeta) - \\
- \tau_{\xi\zeta}(\xi_0 - 0, \eta, \zeta) = \langle \tau_{\xi\zeta}(\xi_0, \eta, \zeta) \rangle
\end{gathered}
$$

При этом, часть скачков будут заданы из постановки задачи, а остальные должны находиться по ходу решения задачи. Например, если дефектом является трещина, берега которой незагружены, то в этом случае

$$\langle \sigma_\zeta(\xi_0, \eta, \zeta) \rangle = \langle \tau_{\xi\eta}(\xi_0, \eta, \zeta) \rangle = \langle \tau_{\xi\zeta}(\xi_0, \eta, \zeta) \rangle = 0$$

Если же дефектом является тонкое включение и оно полностью сцеплено с упругой средой, то в этом случае

$$\langle u_\xi(\xi_0, \eta, \zeta) \rangle = \langle u_\eta(\xi_0, \eta, \zeta) \rangle = \langle u_\zeta(\xi_0, \eta, \zeta) \rangle = 0$$

Если имеются интегральные преобразования по всем трем ξ, η, ζ переменным, то имеются два пути построения разрывного решения для дефекта, расположенного на координатной поверхности $\xi = \xi_0$.

Первый путь заключается в применении интегрального преобразования по переменной ξ, используя обобщенную схему [40], что приводит к появлению заранее неизвестных трансформант скачков (2.1). Последующее применение интегральных преобразований (по классической схеме) для переменных η и ζ и реализация условий на дефекте приводит к системам одномерных интегральных или интегро-дифференциальных уравнений, относительно заранее неизвестных скачков (2.1).

Второй путь заключается в том, что сперва применяются интегральные преобразования по переменным η и ζ по классической схеме. В результате по оставшейся переменной ξ получается одномерная разрывная задача. Метод решения одномерных разрывных задач изложен в [40,12]. После решения полученной одномерной разрывной задачи и реализации условий на дефекте и здесь приходим к одномерным интегральным или интегро-дифференциальным уравнениям.

Разрывные решения уравнений теории упругости можно также строить с помощью потенциалов простого и двойного слоя теории упругости [41]. Этот метод приводит после реализации условий на дефекте к двумерным граничным интегральным или интегро-дифференциальным уравнениям. Этот метод, обладая значительно большей общностью, но теряет в том, что приходится решать более сложные двумерные уравнения.

В обозреваемых работах автора разрывные решения строились методом интегральных преобразований, привязываясь к конкретной системе координат.

Разрывное решение в цилиндрической системе координат статических уравнений теории упругости для конечного дефекта, расположенного на цилиндрической поверхности $r=R$, построено в работе [1] и, в частности, для осесимметричных задач, включая кручение. Используя это разрывное решение задачи о кручении неограниченной среды под действием произвольной крутящей нагрузки при наличии конечной и полубесконечной трещины на указанной поверхности сведены в работе [16] к одномерному интегро-дифференциальному уравнению с разностным ядром. В случае конечной длины трещины решение получено приближенным методом ортогональных многочленов на основе спектрального соотношения А 10.4 из [40] и дана формула для коэффициентов интенсивности напряжений.

В случае полубесконечной трещины получено точное решение указанного интегро-дифференциального уравнения методом Винера-Хопфа. Приведена формула для коэффициента интенсивности напряжений.

Разрывное решение динамической теории упругости в цилиндрической системе координат для дефектов на цилиндрической поверхности $r=R$ построено в работе [11]. В этой же работе дано определение динамического центра вращения, приложенного в начале координат, и построено поле смещений и напряжений от такого загружения. Поставлена такая задача: в неограниченной упругой среде в начале координат приложен динамический центр вращения. Требуется определить поле смещений, если в упругой среде имеется трещина на поверхности $r=R$. Задача сведена с помощью построенного разрывного решения к одномерному интегро-дифференциальному уравнению, решенному приближенно методом ортогональных многочленов с помощью спектрального соотношения А 10.4 из [40]. Вычислены коэффициенты интенсивности напряжений. В работе [19] рассмотрен случай полубесконечной трещины и указанное интегро-дифференциальное уравнение решено точно методом факторизации. Дана формула для коэффициента интенсивности и проведены по ней вычисления.

Разрывное решение статических уравнений теории упругости для конического дефекта:

$$a\le r\le R,\quad \theta=\omega,\quad -\pi\le\varphi<\pi \tag{2.2}$$

построено в [3] для случая $a=0, b=R$. Используя это разрывное решение и ограничиваясь случаем кручения неограниченной среды, в которой имеется дефект (2.2) в виде трещины, проблема отыскания поля напряжения в такой среде сведена к одномерному интегро-дифференциальному уравнению с ядром, зависящим от отношения аргументов. Получено точное решение последнего методом Винера-Хопфа, дана формула для подсчета коэффициента интенсивности касательных напряжений.

Однако, гарантировать правильность полученного в [3] разрывного решения нельзя по следующей причине: при построении разрывного решения автор исходил из представления поля напряжений и смещений в упругой среде, предложенного Мичелем [42], который получил его в результате дифференцирования уравнений Ламе, и поэтому решение, полученное с помощью уравнения Мичеля, могут не удовлетворять уравнениям Ламе. Однако при построении указанного разрывного решения уравнения упругости нужно было предварительно построить разрывное решение уравнения Лапласа для дефекта (2.2), которое затем использовалось в последующих работах.

Разрывное решение, правильность которого сомнительна, использовано в работе [13], где рассмотрено кручение упругого конуса: $0\le r<\infty, \theta=\omega_0>\omega, -\pi\le\varphi\le\pi$, имеющего дефект (2.2) при $a=R, b=\infty$ в виде трещины. Коническая поверхность конуса $\theta=\omega_0$ загружена крутящими напряжениями, а берега трещины $\theta=\omega\mp0$ свободны от напряжений. При этом поверхность конуса $\theta=\omega_0$ считается тоже коническим дефектом (2.2) при $a=0, b=\infty$. Проблема сведена к системе двух одномерных интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, зависящими от отношения аргументов. Получено их точное решение методом Винера-Хопфа.

Следует заметить, что разрывное решение для статических уравнений теории упругости, полученное в [3], которое подвергается здесь сомнению, использовано для задач кручения. В этом случае уравнения Ламе вырождаются только в одно уравнение и нет необходимости пользоваться представлением Мичеля. Нужно было построить разрывное решение для уравнения кручения, как это сделано в работе [21] в динамическом случае. Не исключено, что при этом придем к необходимости решать те же уравнения, к которым пришли в работах [3,13] при переходе к кручению.

Правильное разрывное решение статической теории упругости для конического дефекта (2.2) получено в работе [20] с использованием разрывного решения для уравнения Лапласа из работы [3]. На основе полученного разрывного решения задача (2.2) о напряженном состоянии упругой среды, имеющей дефект (2.2) в виде тонкого абсолютно жесткого включения (сцепленного с упругой средой), и загруженной в начале координат центром вращения, сведена к одномерному интегральному уравнению первого рода с логарифмической особенностью в ядре. Последнее решено методом ортогональных многочленов на основе спектрального соотношения А 6.8 из [40]. Аналогичная задача, но в случае дефекта (2.2) в виде трещины и при загружении упругой среды центром вращения на расстоянии от начала координат, сведена к одномерному интегро-дифференциальному уравнению. Приближенное решение последнего дано методом ортогональных многочленов на основе спектрального соотношения А 10.4 из [40]. Даны формулы для подсчета коэффициентов интенсивности касательных напряжений.

В работе [10] построено разрывное решение уравнений динамической теории упругости для конического дефекта (2.2) с использованием решения уравнений движений через волновые потенциалы. Показано использование этого разрывного решения для решения задачи о напряженном состоянии неограниченной среды под действием произвольной динамической крутящей нагрузки. При этом среда содержит дефект (2.2) в виде тонкого абсолютно жесткого включения, сцепленного с упругой средой. Проблема с помощью построенного разрывного решения сведена к одномерному интегральному уравнению первого рода (в трансформантах Лапласа).

В работе [27] также с использованием решения уравнений упругой среды через волновые потенциалы построено разрывное решение уравнений динамической теории упругости для сферического дефекта, определяемого соотношениями:

$$r = R, \quad 0 \le \theta \le \omega, \quad -\pi \le \varphi < \pi \tag{2.3}$$

и проиллюстрировано его использование на примере задач о дифракции ударной волны кручения на дефекте (2.3) в двух вариантах: 1) дефект– трещина, 2) дефект – тонкое абсолютно жесткое включение, сцепленное с упругой средой, и является неподвижным. Обе задачи сведены к одномерным интегральным уравнениям первого рода относительно трансформант Лапласа. Обратив точно трансформанты Лапласа ядер уравнений и воспользовавшись теоремой о свертки, указанные уравнения преобразованы в двумерные интегральные уравнения, содержащие операторы Фредгольма по пространственной переменной и Вольтерра по временной переменной. Проведя дискретизацию этих уравнений по времени, приходим к системе одномерных интегральных уравнений по пространственной переменной, которые решаются методом ортогональных многочленов. При этом, в случае трещины используется спектральное соотношение А 5.5 из [40]. В случае же включения, где в качестве основной неизвестной взята производная от скачка напряжения (это привело к неинтегрируемой особенности) использовано спектральное соотношение, полученное в [43]:

$$\int_0^1 \frac{W_m(x,y)\,P_{k+1}^{m,-3/2}\left(1-2y^2\right)}{y^{-m-1}\left(1-y^2\right)^{3/2}}\,dy = \frac{\Gamma\left(m+3/2\right)\Gamma\left(k+1/2\right)}{\Gamma\left(k+1+m\right)2\left(k+1\right)!}\,x^m P_k^{m,1/2}\left(1-2x^2\right),\ 0\le x\le 1,$$

$$W_m(x,y) = \int_0^\infty J_m(tx)\,J_m(ty)\,dt; \quad m,k = 0,1,2,\ldots \tag{2.4}$$

Интеграл здесь следует понимать в регуляризованном смысле [40]. По полученным приближенным решениям проведен счет. Однако полученными результатами воспользоваться нельзя, так как ударная волна кручения взята из работы [44]. Она оказалась ошибочной, ибо не удовлетворяет волновому уравнению. В работе [27] рассмотрен случай такого же сферического включения, но который не закреплен неподвижно, и загружение упругой среды осуществляется не ударной волной кручения, а приложением ударного крутящего момента непосредственно к тонкому включению. Использовано такое же приближенное решение и проведен по нему счет.

3. В работе [23] было показано, что динамические уравнения упругой среды, состоящие из трех совместно решаемых уравнений, после введения в качестве новых неизвестных функций, представляющих линейную комбинацию из первых производных от смещений, переходят для новых неизвестных в систему, состоящую из двух совместно решаемых уравнений и одного отдельно решаемого уравнения. При этом, если определены новые неизвестные, то указана процедура нахождения исходных неизвестных. Кроме того, показано, что такой развал уравнений движения упругой среды удается сделать только в трех системах координат: декартовой, круговой цилиндрической и сферической. Использование этого развала начато в статических задачах теории упругости. Так, в работе [28] было получено точное решение смешанной краевой задачи для упругого четверть-пространства с помощью развала уравнений Ламе в декартовой системе координат. Используя такой развал в цилиндрической системе координат в работе [22] получено точное решение статической первой основной задачи для толстой клиновидной бесконечно упругой плиты.

Указанный выше развал имеет место и для уравнений несвязанной термоупругости. Для статической термоупругости в сферической системе координат это показано в работе [17]. Использование его в сочетании с интегральным преобразованием (1.1), а также со способом решения одномерных векторных задач (изложенным в [12]), позволило в [17] получить точное решение смешанной задачи стационарной несвязанной термоупругости для конуса (1.4), а в работе [25] тем же методом, только в сочетании с интегральным преобразованием(1.16) для того же конуса, но с вырезом вдоль образующей (вместо $-\pi \le \varphi < \pi$ реализуется $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$).

Развал уравнений несвязанной термоупругости в цилиндрической системе координат использован в работе [24] при построении точных решений смешанных задач несвязанной термоупругости для конечного кругового полого цилиндра с вырезом вдоль образующей.

Следует указать, что перечисленные точные решения в этом разделе получены в результате решения уравнений теории упругости после развала уравнений Ламе, но эти уравнения получены после дифференцирования двух уравнений Ламе и нет гарантии, что полученные решения будут удовлетворять и непродифференцированным уравнениям Ламе. Поскольку это не доказано, то и перечисленные точные решения краевых задач теории упругости и термоупругости не могут считаться решениями. Этот факт был отмечен в работе [29]. Там же показано, что полученное в [28] точное решение действительно становится точным, если сделать некоторые ограничения на заданные функции краевых задач. В этой же работе показано, что полученное решение в [28] удовлетворяет одному из двух непродифференцированных уравнений Ламе, а второе оказывается неудовлетворенным. Там же показано, как модифицировать метод, примененный в [28], чтобы получить правильное решение. Подобную модификацию следует провести и в других работах, перечисленных в этом разделе. Важно отметить, что в работе [29] рассмотрена классическая задача о напряженном состоянии упругого полупространства, загруженного произвольной сжимающей нагрузкой. Решение дано с использованием уравнений после развала уравнений Ламе и показана правильность этого решения, доказано, что непродифференцированные уравнения тоже удовлетворены. При этом оказалось, что сделать это проще на уровне интегральных преобразований, нежели на уровне оригиналов.

Отметим еще работу [2], в которой впервые введены вспомогательные функции, которые приводят к развалу уравнений Ламе в сферической системе координат, т.е. к уравнениям, близким к тем, что и в представлении Мичеля [42]. Эти вспомогательные функции использованы в работе [23] для развала уравнений движения в сферической системе координат.

4. В работе [8] было получено спектральное соотношение для многочленов Чебышева-Лагерра:

$$\left(1-\frac{d^2}{d\xi^2}\right)\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{K}_0\left(\left|\xi-\sigma\right|\right)e^{-\sigma}\sqrt{\sigma}L_n^{1/2}\left(2\sigma\right)d\sigma=\frac{\sqrt{2}\Gamma\left(n+3/2\right)L_n^{1/2}\left(2\xi\right)}{n!e^{\xi}}$$

$$0\le\xi\le\infty,\quad n=0,1,2,... \tag{4.1}$$

В этой же работе оно было использовано для получения точного решения антиплоской задачи о дифракции нестационарной SH – волны на полубесконечной трещине в виде ряда. Точное решение родственных задач было известно [45] и оно выражено довольно сложно через сингулярные квадратуры.

В этой же работе было указано, как можно использовать спектральное соотношение (3.1) для получения приближенных решений более сложных динамических задач теории упругости.

В работе [21] это спектральное соотношение применено к решению такой задачи. Неограниченная упругая среда, содержащая полубесконечную цилиндрическую трещину, поверхность которого описывается соотношениями:

$$r = R, \quad -\pi \le \varphi < \pi, \quad a \le z < \infty \tag{4.2}$$

подвергается динамическому центру вращения в начале координат. Берега трещины $r = R \mp 0$ считаются свободными от напряжений. Требуется определить поле смещений и напряжений в упругой среде и подсчитать коэффициент интенсивности касательных напряжений. Предварительно строится разрывное решение динамического уравнения кручения. Его использование позволяет свести проблему к однородному интегро-дифференциальному уравнению, записанному в трансформантах Лапласа заданных и искомых функций. Главная часть ядра полученного уравнения представляет собой функцию Макдональда, зависящую от параметра преобразования Лапласа, и разности пространственных переменных. Выполнив точно обращение по Лапласу трансформанты ядра и воспользовавшись теорией о свертке для трансцендент Лапласа, как и в работе [27], указанное одномерное интегро-дифференциальное преобразование в двумерное интегро-дифференциальное уравнение, содержащего интегро-дифференциальные операторы Фредгольма с разностным ядром по пространственным переменным и операторы Вольтерра тоже с разностным ядром по временным переменным. Как и в работе [27], проводится дискретизация полученного двумерного уравнения по времени. В результате приходим к системе интегро-дифференциальных уравнений, содержащих только операторы Фредгольма. При этом главная часть содержит операторы, совпадающие с оператором, содержащем в левой части спектрального соотношения (4.1), использование которого приводит к последовательному решению числовых бесконечных систем. Эти системы решаются методом редукции, применение которого обосновано. На основе полученного приближенния вычислен коэффициент интенсивности касательных напряжений, приводятся соответствующие графики.

В работе [9] с использованием разрывного решения для динамического уравнения кручения исследуется напряженное состояние неограниченной упругой среды, содержащего трещину (4.2) при $a = 0$, берег которого $r = R - 0$ загружен ударной крутильной нагрузкой. Требуется определить коэффициент интенсивности касательных напряжений. Как и в работе [21, проблема сведена к однородному интегро-дифференциальному уравнению, в трансформантах Лапласа, главная часть ядра которого содержит оператор, подобный левой части соотношения (4.1). Последующее использование спектрального соотношения (4.1) приводит полученное интегро-дифференциальное уравнение к бесконечной системе алгебраической системы, относительно коэффициентов, зависящих от параметра преобразования Лапласа. Полученное асимптотическое решение этой бесконечной системы справедливо для больших значений параметра преобразования. Таким образом, получено решение для малых значений времени.

5. Пусть, как и в разделе 3, уравнения упругости записаны в произвольной ортогональной системе координат: ξ, η, ζ и пусть слоистость имеет место по координате ξ. Это означает, что участок изменения этой переменной разбит на участки (слои) $\xi_i < \xi < \xi_{i+1}, \ i = 0, 1, 2, ..., m-1$, на каждом из которых скачкообразно изменяются упругие постоянные. Если допустить, что имеются интегральные преобразования по переменным η и ζ, после применения которых придем к одномерной краевой задаче, общее решение которой будет содержать N постоянных, совпадающем с порядком дифференциального уравнения или системы из них. При этом для каждого слоя будут свои N постоянные, т.е.всего их будет Nm. Их следует находить из граничных условий на поверхностях $\xi = \xi_0, \ \xi = \xi_{m-1}$, а также из условия сопряжения слоев, т.е. количество уравнений для их определения будет равно Nm.

Основная проблема при решении краевых задач для слоистых сред заключается в сокращении количества уравнений до N. Например, в работе [46] это сделано так. Исходные дифференциальные уравнения записываются в виде системы уравнений первого порядка относительно неизвестных функций, входящих в формулировку условий сопряжения по поверхности $\xi=\xi_i,\ i=0,1,\ldots,m-1$. Если совокупность этих неизвестных обозначим через вектор $\vec{z}$, то указанную одномерную задачу можно записать в виде

$$P_0\frac{d\vec{z}_i}{d\xi}+P_1\vec{z}_i=\vec{f}_i,\ \xi_i<\xi<\xi_{i+1},\ i=0,1,2,\ldots,m-1$$

где $P_j\left(j=0,1\right)$ – квадратные матрицы N-го порядка, общее решение которого записывается через матрицант [47], указывается его построение в случае $P_j=\mathrm{const}$. Условие сопряжения для слоев записывается в виде рекуррентных соотношений, которые удалось свернуть.

Совсем иной подход был принят в работах [4,5]. где рассмотрены сферически слоистые среды, т.е. когда упругие постоянные скачкообразно меняются на сферических поверхностях $r=R_i,\ i=0,1,2,\ldots,m-1,\ R_0=0,R_m=\infty$. Рассматривается неограниченная упругая среда, произвольно загруженная статически объемными силами, имеющая дефекты типа трещин или тонких включений, на указанных поверхностях смены упругих постоянных, т.е. на этих поверхностях условия непрерывности напряжений и смещений выполняются всюду, кроме тех участков, где имеются указанные дефекты и где задаются скачки названных функций. Требуется определить поле смещений и напряжений в рассматриваемой слоистой среде с учетом их регулярности в нуле и на бесконечности. Для решения этой задачи вводятся такие же вспомогательные, которые были введены в работах [2,23] при развале уравнений Ламе в сферической системе координат. Только в отличие от [2,23] вспомогательные функции находятся не из уравнений после развала уравнений, а из условия удовлетворения самим уравнениям Ламе в каждом слое $R_{i-1}<r<R_i$. После применения конечного интегрального преобразования Фурье по переменной φ и интегрального преобразования Лежандра [35] по переменной θ приходим к одномерной краевой задаче по переменной r с $N=6$, т.е. на каждом слое имеем по шести констант. При этом благодаря введению вспомогательных функций, две из этих констант находятся независимо от остальных четырех. Для них из условия сопряжения слоев получаем рекуррентные соотношения, которые удается свернуть, и получить явные выражения для этих двух коэффициентов для любого слоя, выраженные через операции умножения матриц (2x2). Для остальных четырех коэффициентов получаются аналогичные результаты, но там необходима операция с матрицами (4x4). Для окончательного решения проблемы получаем систему алгебраических уравнений порядка не выше N=6.

В работе [4] дано обобщение полученного результата на случай конечной слоистой среды, когда $0<r<R_m$ с некоторыми граничными условиями на внешней поверхности $r=R_m$, кроме того, дано применение полученного решения к задаче о напряженном состоянии двухслойной неограниченной упругой среды, в которой на поверхности $r=R_0$ имеется сферическая трещина $0\le\theta\le\omega<\pi$, а в точке $r=0$ приложен центр вращения. Задача сведена к интегральному уравнению, приближенно решаемому методом ортогональных многочленов. Однако при изложении полученного результата использовано ошибочное соотношение, правильный вид которого имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{2k\left(k+1\right)}P_k\left(\cos\theta\right)P_k\left(\cos t\right)=-\frac{1}{2}-\ln\left[\frac{1}{2}\sin\frac{\theta+t}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{\left|\theta-t\right|}{2}\right],0<\theta,t<\pi$$

В работе [7] рассмотрена в динамической постановке напряженное состояние неограниченной плоско-параллельной упругой среды в цилиндрической системе координат: r,φ,z. Слоистость имеет место по переменной z. Скачкообразное изменение упругих постоянных проходит на плоскостях $z=h_i,i=0,1,\ldots,n+1$. На этих плоскостях обеспечивается непрерывность смещений и напряжений всюду, за исключением области дефекта, на которых заданы скачки названных функций. В каждом из слоев: $h_{i-1}<z<h_i$ $\left(i=0,1,\ldots,m+1; h_{-1}=-\infty, h_{m+1}=+\infty\right)$ удовлетворяются уравнения движения в цилиндрической системе координат со своими упругими постоянными и решение которых выражены через три волновых потенциала. Описанная слоистая среда полагается загруженными объемными силами, приложенными в каждом слое, причем в полупространствах $\left(-\infty<z<0\right)$ и $\left(h_m<z<\infty\right)$ могут быть заданы падающие упругие волны. Требуется определить поля смещений и напряжений в слоистой среде. Как и в работе [4], в число основных неизвестных вводятся вспомогательные функции, которые приводят согласно [23] к развалу уравнение движений, но в отличие от [23] они находятся из условия удовлетворения исходным уравнениям движения. Исключая время с помощью преобразования Лапласа, переменную φ с помощью конечного преобразования Фурье, а переменную r с помощью преобразования Ханкеля, приходим к одномерной краевой задаче, общее решение которой содержит по 6 произвольных постоянных в каждом слое, как и в [4] два из них находятся независимо от остальных четырех. С помощью тех же процедур, что и в [4], окончательное решение проблемы сведено к системе алгебраических уравнений не более шести.

Двухслоистая (состоящая из двух полупространств с различными упругими свойствами) среда, но в статической постановке, рассмотрена в работе [6]. Здесь сперва строится разрывное решение для неограниченной среды, считая плоскость $z=0$ (по которой осуществляется полное сцепление указанных полупространств) дефектом. Используя построенное разрывное решение, получено решение задачи Кельвина для составного упругого пространства.

Полученное разрывное решение обобщено на случай, когда полупространство сцеплено всюду, кроме круговой области, в которой имеется дефект в виде тонкого отслоившегося [40] включения, и ставится задача определить поле смещений и напряжений в этом случае. Эта задача является обобщением задачи, поставленной в [40] для однородного полупространства и в общем случае тоже сводится к решению системы из шести двумерных интегральных уравнений. Используя метод, изложенный в [40], получено и здесь их точное решение. Как и в [40], рассмотрены различные частные случаи этой задачи.

Как уже указывалось, в работе [13] показано, что если к бесконечному конусу $\left(0\le r<\infty, 0\le\theta\le\omega, -\pi\le\varphi<\pi\right)$ к острию приложен центр вращения, то любая трещина, лежащая на поверхности $\theta=\omega_0\le\omega$, не ослабляет конуса. Сохранится ли это заключение, если конус слоистый? Для выяснения этого вопроса была опубликована работа [34], где рассмотрен составной (слоистый) конус: $0\le r<\infty, 0\le\theta\le\omega, -\pi\le\varphi\le\pi$, модуль сдвига которого скачкообразно изменяется на поверхности $\theta=\omega_0<\omega$ и на ней выполняются непрерывные смещения и напряжения. К острию конуса приложен центр вращения. Эта задача оказалась достаточно сложной. Для сведения ее к одномерной краевой задаче пришлось решить сингулярную краевую задачу Штурма-Лиувилля (1.5). Полученное точное решение позволило дать утвердительный ответ на поставленный вопрос.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я., Кевли Б. К решению задач о концентрации упругих напряжений возле дефектов на цилиндрических поверхностях // Прикл.мех. – 1997, Том 33, № 10 – С.67 – 73.
2. Попов Г.Я. Об одном новом представлении решения уравнений Ламе в сферической системе координат // Докл.АН – 1997. Том 356, № 1. – С.47 – 49.
3. Попов Г.Я. Задача о концентрации упругих напряжений возле конического дефекта // ПММ – 1997. Том 61, вып.3 – С. 510 – 519.
4. Попов Г.Я. Задачи концентрации упругих напряжений возле дефектов в сферических слоистых средах // ПММ – 1998. Том 62, вып.5 – С.840 – 853.
5. Попов Г.Я. К вопросу об одном представлении решения уравнений Ламе // Изв.РАН. МТТ – 1998, № 3 – С.167 – 172.

6. Ефимов В.В., Кривой А.Ф., Попов Г.Я. Задачи о концентрации напряжений возле кругового дефекта в составной упругой среде // Изв.РАН. МТТ – 1998, № 2 – С.42 – 58.
7. Попов Г.Я. Построение разрывного решения динамических уравнений теории упругости для слоистой среды с межфазными дефектами // Докл.АН – 1999, том 364, № 6 – С.769 – 773.
8. Попов Г.Я. Об одном спектральном соотношении для многочленов Чебышева – Лагерра и его приложения к динамическим задачам механики разрушения // ПММ – 1999, том 63, вып.1 – С.71 – 79.
9. Попов Г.Я., Морозов Ю.А., Усов А.В. О коэффициенте интенсивности касательных напряжений у края полубесконечной цилиндрической трещины при ударном нагружении ее берегов // Проблемы прочности – 1999, № 3 (339) – С.63 – 72.
10. Попов Г.Я. Построение разрывного решения уравнений динамической упругости для конического дефекта // Докл.АН – 1999, том 368, № 5 – С.624 – 628.
11. Попов Г.Я., Морозов Ю.А., Вайсфельд Н.Д. К решению динамических задач о концентрации упругих напряжений возле дефектов на цилиндрических поверхностях // Прикл.мех. – 1999, том 35, № 1 – С.28 – 34.
12. Попов Г.Я., Абдыманапов С.А., Ефимов В.В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. – Алматы: Изд.Рауан, 1999. – 113 с.
13. Попов Г.Я. Задачи о напряженном состоянии упругого конуса, ослабленного трещинами // ПММ – 2000, том 64. Вып.2 – С.337 – 348.
14. Попов Г.Я. Осесимметричная смешанная задача теории упругости для усеченного кругового полого конуса //ПММ – 2000, том 64, вып.3 – С.431 – 443.
15. Попов Г., Вайсфельд Н. Динамічна нестаціонарна задача для зрізаного кругового порожнистого конуса .. Вісник Львів. ун-ту, серія мех.-мат. – 2000. Віп.57 – С.133 – 136.
16. Popov G.and Kebli B. On the Integro-differential Equation of an Elastic Medium Including a Cylindrical Crack. // Operator Theory: Advances and Applications. Vol.117 – 2000 Birkhäuser Verlag Basel /Switzerland – P.273 – 280.
17. Попов Г.Я. Явное решение смешанной задачи стационарной несвязной термоупругости для усеченного кругового полого конуса // Докл.АН – 2—1, том 380, № 3 – С.349 – 354.
18. Попов Г.Я. О некоторых интегральных преобразованиях и о их применении к решению краевых задач математической физики // Укр.мат.журн. – 2001. том 53, № 6 – С.810 – 819.
19. Попов Г.Я., Морозов Ю.А. Дифракция волны кручения, излучаемой центром вращения на полубесконечной цилиндрической трещине // Прикл.мех. – 2001, том 37, № 11 – С.92 – 97.
20. Вайсфельд Н.Д., Пастух А.И., Попов Г.Я. Задачи о напряженном состоянии упругой среды, содержащей конический дефект // Вісник Дніпропетр.ун-ту, механіка – 2001, том 1, віп.4 – С.16 – 24.
21. Вайсфельд Н.Д., Попов Г,Я. О концентрации напряжений возле полубесконечной цилиндрической трещины при ударном загружении упругой среды центром вращения // ПММ – 2001, том 65, вып.3 – С.525 – 535.
22. Попов Г.Я. Точное решение первой основной задачи теории упругости для толстой клиновидной плиты // Докл.АН – 2001, том 381, № 6. – С.782 – 785.
23. Попов Г.Я. О приведении уравнений движения упругой среды к одному независимому и к двум совместно решаемым уравнениям // Докл.АН – 2002, том 384, № 2. – С.193 – 196.
24. Попов Г.Я. Точные решения некоторых смешанных задач несвязанной термоупругости для конечного кругового полого цилиндра с вырезом вдоль образующей // ПММ – 2002, том 66, вып.4. – С.694 – 704.
25. Попов Г.Я. Точные решения некоторых смешанных задач несвязанной термоупругости для усеченного кругового полого конуса с вырезом вдоль образующей // ПММ – 2002, том 66, вып.4. – С.681 – 694.
26. Попов Г.Я. Построение точного решения одной задачи кручения упругого вала переменного поперечного сечения // Прикл.мех. – 2002. том 38, №8. – С.83 – 89.
27. Вайсфельд Н.Д.. Попов Г.Я. Нестационарные динамические задачи концентрации упругих напряжений возле сферического дефекта // Изв.РАН. МТТ. – 2002, № 3. – С.90 – 102.

28. Попов Г.Я. Точное решение смешанной задачи теории упругости для четвертьпространства // Изв.РАН. МТТ. – 2003, № 6. – С. 31 – 39.
29. Попов Г.Я. О новых преобразованиях разрешающих уравнений теории упругости и новых интегральных преобразованиях и их применении к краевым задачам механики // Прикл.мех. – 2003, том 39, № 12. – С. 46 – 73.
30. Попов Г.Я. Об одном методе получения интегральных преобразований с применением к построению точных решений краевых задач математической физики // Мат.методи та фiз.-мех.поля – 2003, том 46, № 3. – С.74 – 89.
31. Попов Г.Я., Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. Рiвняння математичної фiзики. Метод iнтегральних перетворень. – Одеса: "Астропринт", 2005. – 113 с.
32. Попов Г.Я. Уточнение и дополнение к статье «Об одном методе получения интегральных преобразований с применением к построению точных решений краевых задач математической физики» // Мат.методи та фiз.-мех.поля – 2005. том 48, № 3. – С.75 – 81.
33. Попов Г.Я. Об осесимметричных задачах теории упругости для усеченного полого конуса // ПММ – 2005, том 69. Вып.3. С. 458 – 468.
34. Напряженное состояние упругого составного конуса при наличии центра вращения у острия конуса // ПММ – 2006. том 70. Вып.4 – С.660 – 672.
35. Титчмарш Є.Ч. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка (часть I). – М.: Изд-во иностр.лит., 1960. – 278 с.
36. Коддингтон Э.А.. Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностр.лит.. 1958. – 474 с.
37. Кошляков Н.С.. Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики.- М.: Высш.шк., 1970. – 710 с.
38. Смирнов В.И. Курс высшей математики в 5 т. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1951 – Т.4. – 804 с.
39. Мартыненко Н.А.. Пустыльников Л.М. Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1986. – 303 с.
40. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 342 с.
41. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
42. Michel J.H. Sume elementary distribution of Stress in three dimension // Proc.Math. Soc.London. – 1901, V.32. – P.23 – 30.
43. Назаренко О.А.. Попов Г.Я. О дифракции упругих волн на сферических дефектах // ПММ – 1996, том 60, вып.5. – С.835 – 847.
44. Грилицкий Д.В., Поддубняк А.П. Рассеяние нестационарной волны кручения на жесткой неподвижной сфере в упругой среде // Изв.АН СССР. МТТ. – 1980, № 5. – С.86 – 92.
45. Черепанов Г.П. Дифракция упругих волн на разрезе // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука – 1972. – С.615 – 622.
46. Попов Г.Я. К решению краевых зазач механики и математической физики для слоистых сред // Изв.АН Арм.ССР. Механика – 1978, том XXXI, № 2. – С.34 – 47.
47. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Гостехтеориздат – 1954. – 491 с.

Сведения об авторе

Попов Геннадий Яковлевич
Доктор физ.-мат.наук, профессор, зав. кафедрой методов мат. физики Одесского национального университета им. И.И. Мечникова
Институт математики, экономики и механики
Адрес: Французский бульвар 16 кв. 21 65044 Одесса, Украина
Тел: +(38)(0482)37-62-47; E-mail : popov@onu.edu.ua popovgya@mail.ru

НОВЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ НДС УПРУГИХ СРЕД С МНОЖЕСТВЕННЫМИ ДЕФЕКТАМИ

Пряхина О.Д., Смирнова А.В.

Исследование динамических задач для полуограниченных сред, содержащих совокупность неоднородностей различной природы, является непростой задачей, поскольку вследствие зависимости напряженно-деформированного состояния (НДС) системы от многих параметров традиционные аналитические и численные методы анализа становятся неэффективными, а с ростом числа дефектов многие из них неприменимы. В связи с этим актуальными становятся как исследования рассматриваемого класса задач в новой постановке, так и разработка новых численно-аналитических методов их решения. Особенно важным является создание методов, направленных на изучение резонансных свойств механических систем.

В настоящей работе рассматривается совокупность простейших типов дефектов – плоских трещин и жестких включений, расположенных в параллельных плоскостях. Основное внимание при этом уделено тому факту, что количество неоднородностей носит множественный характер.

Динамические смешанные задачи для слоистых полуограниченных сред сводятся к решению системы интегральных уравнений I рода (СИУ)

$$\mathcal{K}\mathcal{Q}(\alpha,\beta) = \int\limits_{\delta_1}\int\limits_{\delta_2} \mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)\mathcal{Q}(\alpha,\beta)\mathrm{e}^{-i(\alpha x+\beta y)}\,d\alpha d\beta = \mathbf{v}(x,y) \qquad (1)$$

$(x,y)\in\Omega$

Матрица-символ $\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ ядра СИУ является блочной, ее элементы – матрицы $\mathbf{K}_{ij}$, размерность которых определяется физико-механическими свойствами среды. Для упругих материалов это матрицы размерности 3×3.

Предлагаемый в работе новый метод построения блочных матриц-символов $\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ основан на введении специальных матриц, связанных с типом дефекта и его положением в слоистой среде, что позволило преобразовать блочные матрицы-символы большой размерности к блочным треугольным матрицам. В общем случае получено представление определителя матрицы-символа в виде произведения определителей специальных матриц. Между определенными классами «вирусов» вибропрочности и функциями, описывающими особые множества определителей их матриц-символов Грина, установлено взаимнооднозначное соответствие. Для определителей матриц-символов ядер СИУ, соответствующих произвольному количеству и различным сочетаниям неоднородностей, расположенных в параллельных плоскостях пакета изотропных слоев на жестком основании, получено представление в виде отношения целых функций. Числителем является произведение функций, каждая их которых зависит только от геометрических и механических параметров среды, заключенной между указанными плоскостями. Знаменателем является знаменатель определителя матрицы-символа Грина многослойной среды, не содержащей дефектов. Достоинством такого представления является исключение на стадии аналитического построения функций, описывающих корневые и полярные множества определителя, имеющих пересечения при произвольных значениях параметров механической системы, что является важным при определении условий локализации вибрационного процесса системой дефектов.

Изложим метод на примере задачи о гармонических колебаниях пакета N упругих изотропных слоев, занимающего объем ($-\infty < x, y < +\infty; \quad -H \le z \le 0$), с жестко защемленной нижней гранью, вызванных вибрацией берегов трещин, расположенных в $\tilde{N} = N-1$ уровнях по глубине пакета. Перемещения $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$ точек среды описываются системой дифференциальных уравнений Лямэ в частных производных со следующими граничными условиями (общий множитель $\mathrm{e}^{-i\omega t}$ опущен):

на верхней грани

$$\mathbf{t}(x,y,z)\big|_{z=0}=0,\ -\infty<x,y<+\infty \tag{2}$$

в плоскостях расположения трещин

$$\begin{cases}\mathbf{t}_k=\mathbf{t}_k^0, & (x,y)\in\tilde{\Omega}_k\\ \Delta\mathbf{w}_k=0, & (x,y)\notin\tilde{\Omega}_k\end{cases},\ z=-z_k,\ k=1,2,\ldots,N-1 \tag{3}$$

на нижней грани пакета

$$\mathbf{w}(x,y,-H)=0,\ -\infty<x,y<+\infty. \tag{4}$$

Здесь $\Delta\mathbf{w}_k=\mathbf{w}_k^+-\mathbf{w}_k^-$, $\mathbf{w}(x,y,z)\big|_{z=-z_k\pm 0}=\mathbf{w}_k^\pm$, $\mathbf{t}(x,y,z)\big|_{z=-z_k\pm 0}=\mathbf{t}_k^\pm$.

Задача сводится к СИУ вида (1), где $\mathbf{v}(x,y)=\left\{\mathbf{t}_1^0,\mathbf{t}_2^0,\ldots,\mathbf{t}_{\tilde{N}}^0\right\}$ – многомерный вектор, компонентами которого являются векторы усилий $\mathbf{t}_k^0$, заданные на берегах трещин в области $\tilde{\Omega}_k$ ($k=1,2,\ldots,\tilde{N}$); $\Omega=\left\{\tilde{\Omega}_1,\tilde{\Omega}_2,\ldots,\tilde{\Omega}_{\tilde{N}}\right\}$; $Q=\left\{\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_{\tilde{N}}\right\}$ – многомерный вектор, имеющий своими компонентами трансформанты Фурье скачков перемещений $\Delta\mathbf{w}_k(x,y)$ на берегах трещин. Носителем каждой из вектор-функций $\Delta\mathbf{w}_k(x,y)$ является соответствующая область из Ω.

В силу линейной постановки решение исходной задачи представимо в виде суперпозиции решений вспомогательных задач о колебаниях одной трещины, расположенной на границе между слоями p и $(p+1)$ в N-слойном пакете, взятых для $p=1,2,\ldots,N-1$.

Для построения решения вспомогательной задачи проведем формальное разделение среды плоскостью $z=-z_p$ и для каждой части сформулируем краевые задачи, решения которых строятся методом, предложенным в [1].

Трансформанта Фурье вектора перемещений точек верхней отсеченной части среды запишется в виде

$$\mathbf{W}(\alpha,\beta,z,\omega)=\mathbf{K}_p^-(\alpha,\beta,z,\omega)\mathbf{T}_p^+,\quad (-z_p+0)\le z\le 0$$

$$\mathbf{W}(\alpha,\beta,z,\omega)=\mathbf{W}_p^+=\mathbf{K}_p^-(h_p)\mathbf{T}_p^+,\quad z=-z_p+0$$

Элементы матрицы $\mathbf{K}_p^-(h_p)$ зависят от частоты колебаний ω, параметров преобразования Фурье α,β, а также от геометрических и механических параметров слоев с номерами $k=1,2,\ldots,p$.

Трансформанта Фурье вектора перемещений точек нижней отсеченной части среды

$$\mathbf{W}(\alpha,\beta,z,\omega)=\mathbf{K}_{N-p}(\alpha,\beta,z,\omega)\mathbf{T}_p^-,\quad -H\le z\le(-z_p-0)$$

$$\mathbf{W}(\alpha,\beta,z,\omega)=\mathbf{K}_{N-p}(h_{p+1})\mathbf{T}_p^-,\quad z=-z_p-0$$

Элементы матрицы $\mathbf{K}_{N-p}(h_{p+1})$ зависят от частоты колебаний, параметров преобразования Фурье, а также от геометрических и механических параметров слоев с номерами $k=p+1,p+2,\ldots,N$.

Учитывая, что на берегах трещины

$$\mathbf{T}_p^+=\mathbf{T}_p^-=\mathbf{T}_p,\ \mathbf{W}_p^+=\mathbf{W}_p^-+\mathbf{f}_p,$$

получим систему функционально-матричных соотношений

$$\mathbf{T}_p=\mathbf{S}_{Np}^{-1}\mathbf{f}_p,\ \mathbf{W}_p(-h_p)=\mathbf{K}_p^-\mathbf{S}_{Np}^{-1}\mathbf{f}_p,\ \mathbf{W}_{p+1}(h_{p+1})=\mathbf{K}_{N-p}\mathbf{S}_{Np}^{-1}\mathbf{f}_p \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{S}_{Np}=\mathbf{K}_p^--\mathbf{K}_{N-p}$ – матрица, определяемая расположением трещины в слоистой среде.

Напряжения $\mathbf{T}_k$ и перемещения $\mathbf{W}_k$ точек, принадлежащих плоскостям раздела слоев для $k \neq p$, определяются через скачок вектора перемещений $\mathbf{f}_p$ из соотношений

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}_k = \mathbf{R}^{-}_{kp}\mathbf{S}^{-1}_{Np}\mathbf{f}_p, \quad k \le p \\ &\mathbf{T}_k = \mathbf{R}_{kp}\mathbf{S}^{-1}_{Np}\mathbf{f}_p, \quad k > p \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{W}_1(h_1) = \mathbf{B}_-(h_1)\mathbf{R}^{-}_{1p}\mathbf{S}^{-1}_{Np}\mathbf{f}_p \\ &\mathbf{W}_k(-h_k) = \mathbf{K}^{-}_k\mathbf{R}^{-}_{kp}\mathbf{S}^{-1}_{Np}\mathbf{f}_p, \ k \le p \\ &\mathbf{W}_k(h_k) = \mathbf{K}_{N-k+1}(h_k)\mathbf{R}_{(k-1)p}\mathbf{S}^{-1}_{Np}\mathbf{f}_k, \ k \ge p+1 \end{aligned} \tag{7}$$

Матрицы $\mathbf{R}_{km}$ и $\mathbf{R}^{-}_{km}$ даются формулами

$$\mathbf{R}_{km} = \begin{cases} \mathbf{I}, & k = m \\ (-1)^{(k-m)} \prod\limits_{i=k}^{m+1} \mathbf{F}^{-1}_{N+1-i}(h_i)\mathbf{B}_+(-h_i), & k \ne m \end{cases}$$

$$\mathbf{R}^{-}_{km} = \begin{cases} \mathbf{I}, & k = m \\ \prod\limits_{i=k+1}^{m} \Phi^{-1}_i(h_1, h_2, \dots, h_i)\mathbf{B}_-(h_i), & k \ne m \end{cases}$$

а матрицы $\mathbf{F}_m, \mathbf{K}_m, \Phi_m, \mathbf{K}^{-}_m$, $\mathbf{B}_{\pm}$ имеют структуру, приведенную в [1,2].

Используя (6), (7) для всех $p = 1, 2, \dots, N-1$, получим следующую систему функционально-матричных соотношений:

для напряжений

$$\mathbf{T} = \mathbf{DQ} \tag{8}$$

для перемещений

$$\mathbf{U} = \mathbf{MQ} \tag{9}$$

$\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots \mathbf{T}_{N-1}\}$, $\mathbf{Q} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{N-1}\}$, $\mathbf{U} = \{\mathbf{W}_2(h_2), \mathbf{W}_3(h_3), \dots, \mathbf{W}_{N-1}(h_{N-1})\}$ – многомерные векторы,

$\mathbf{D} = \left\|\mathbf{D}_{ij}\right\|_{i,j=1}^{N-1}$, $\mathbf{M} = \left\|\mathbf{M}_{ij}\right\|_{i,j=1}^{N-1}$ – блочные матрицы, элементы которых вычисляются по формулам

$$\mathbf{D}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{S}^{-1}_{Ni}, & i = j, \\ \mathbf{R}^{-}_{ij}\mathbf{S}^{-1}_{Nj}, & i < j, \\ \mathbf{R}_{ij}\mathbf{S}^{-1}_{Nj}, & i > j; \end{cases} \qquad \mathbf{M}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{K}^{-}_i\mathbf{R}^{-}_{ij}\mathbf{S}^{-1}_{Nj}, & i < j \\ \mathbf{K}_{N-i}\mathbf{R}_{ij}\mathbf{S}^{-1}_{Nj}, & i \ge j \end{cases} \tag{10}$$

Матрицы $\mathbf{D}_{ij}$, $\mathbf{M}_{ij}$ в (10) определяют соответственно напряжения и перемещения в плоскости $z = -z_i$, вызванные скачком перемещений на берегах трещины, расположенной в плоскости $z = -z_j$.

Соотношения (10) позволяют выписать матрицу-символ ядра СИУ (1) при произвольном расположении трещин в слоистой среде. Например, если в пакете, состоящем из $N = 7$ слоев, имеются две трещины, расположенные на границах с номерами 2 и 5, то $\mathbf{Q} = \{0, \mathbf{f}_2, 0, 0, \mathbf{f}_5, 0, 0\}$ и $\mathbf{T}_2 = \mathbf{S}^{-1}_{72}\mathbf{f}_2 + \mathbf{R}^{-}_{25}\mathbf{S}^{-1}_{75}\mathbf{f}_5$, $\mathbf{T}_5 = \mathbf{R}_{52}\mathbf{S}^{-1}_{72}\mathbf{f}_2 + \mathbf{S}^{-1}_{75}\mathbf{f}_5$ или $\mathbf{T} = \mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega)\mathbf{Q}$, $\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_5\}$, $\mathbf{Q} = \{\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_5\}$, $\mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega) = \left\|\mathbf{K}_{ij}\right\|_{i,j=1}^{2}$.

Здесь

$$\mathbf{S}_{72} = \mathbf{K}^{-}_2(h_1, h_2) - \mathbf{K}_5(h_3, h_4, \dots, h_7)$$

$$\mathbf{S}_{75} = \mathbf{K}_5^{-}\left(h_1, h_2, \ldots, h_5\right) - \mathbf{K}_2\left(h_6, h_7\right)$$

Блочная матрица $\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ является матрицей-символом СИУ относительно скачков векторов перемещений на берегах трещин.

Матрица $\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ с помощью обобщенного метода Гаусса приводится к треугольному виду и ее определитель равен произведению определителей матриц, расположенных на главной диагонали [2]

$$\det\ \mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega) = \prod_{i=1}^{N-1} \det \mathbf{S}_{(N-k+1)1}^{-1}$$

Для приведенного примера

$$\det\ \mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega) = \det \mathbf{S}_{72}^{-1} \det \mathbf{S}_{53}^{-1},\ \mathbf{S}_{53} = \mathbf{K}_3^{-}\left(h_3, h_4, h_5\right) - \mathbf{K}_2\left(h_6, h_7\right)$$

Решение для задачи о гармонических колебаниях пакета N упругих слоев с жестко защемленной нижней гранью, вызванных поверхностными усилиями и вибрацией границ жестких включений, расположенных в $\tilde{N} = N - 1$ уровнях по глубине пакета строится аналогично.

Используя полученные представления для определителей матриц-символов ядер СИУ^ можно путем подбора физико-механических и геометрических характеристик целенаправленно управлять динамическими, в том числе резонансными, свойствами сложной механической системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (05-01-00811, 06-01-96600, 06-01-96638, 06-01-96639, 06-01-96632, 06-08-00671, 06-01-08017-офи), гранта Президента РФ (НШ-4839.2006.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999.
2. Пряхина. О.Д., Смирнова А.В. Построение определителей матриц-символов Грина многослойных сред с дефектами на основе теории «вирусов» вибропрочности. //Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. №2. С. 44–53.

Сведения об авторах

Пряхина Ольга Донатовна

Доктор физ.-мат. наук, профессор, зав.кафедрой высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций
Адрес: 350040 Краснодар, ул. Ставропольская, д. 149, Кубанский госуниверситет
Тел.: 8(861) 2199603; Факс 8(861) 219517; E-mail: donna@kubsu.ru

Смирнова Алла Васильевна
Доктор физ.-мат. наук, профессор

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА С Т-ОБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Саакян А.В., Акопян Л.В., Даштоян Л.Л.

Рассмотрено антиплоское напряженное состояние однородного упругого пространства, ослабленного Т-образной трещиной: на берегах которой заданы смешанные условия.

Выведены определяющие уравнения поставленной задачи в виде системы сингулярных интегральных уравнений, решение которой построено численно-аналитическим методом дискретных особенностей.

Пусть однородное упругое пространство, ослабленное Т-образной трещиной, занимающее область $\{-a < x < a;\quad y = 0\}$ и $\{x = 0;\quad 0 < y < b\}$, деформируется под воздействием касательных нагрузок, приложенных к верхнему берегу горизонтальной трещины. При этом считается, что нижний берег этой трещины жестко защемлен, а берега вертикальной трещины свободны от напряжений.

Ставится задача: изучить поведение напряженний возле концевых точек трещины и определить коэффициенты разрушающих напряжений в этих точках.

Ввиду кососимметричности поставленной задачи относительно оси Oy, в полярной системе координат математически ее можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} W_1(r,0) = W_2(r,0) & \\ \tau_{\varphi z}^{(1)}(r,0) = \tau_{\varphi z}^{(2)}(r,0) & (a < r < \infty) \\ W_1\left(r,-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 & (0 < r < \infty) \\ W_2\left(r,\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 & (b < r < \infty) \\ W_2(r,0) = 0 & \\ \tau_{\varphi z}^{(2)}(r,0) = \tau_0(r) & (0 < r < \infty) \\ \tau_{\varphi z}^{(2)}\left(r,\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 & (0 < r < b) \end{cases} \qquad (1.1)$$

Здесь $W_j(r,\varphi)$ $(j = 1,2)$–смещения точек нижнего $y < 0$ и верхнего $y > 0$ полупространств соответственно, удовлетворяющие в области своего определения уравнению Лапласа, а $\tau_{\varphi z}^{(j)}(r,\varphi)$ $(j = 1,2)$ – напряжения, действующие в этих полупространствах и связанные с компонентами смещений известными формулами.

Для решения поставленной задачи введем в рассмотрение функции скачка напряжений и разности смещений по формулам

$$\begin{aligned} &\tau_{\varphi z}^{(2)}(r,0) - \tau_{\varphi z}^{(1)} = \tau(r) && \\ &W_2(r,0) - W_1(r,0) = W(r) && (0 < r < a) \\ &W_2\left(r,\frac{\pi}{2}\right) = U(r) && (0 < r < b) \end{aligned} \qquad (1.2)$$

и решим вспомогательную задачу, состоящую из первых четырех условий (1.2). С этой целью смещения точек верхнего и нижнего полупространств представим в виде интегралов Меллина [1]

$$W_j(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[A_j\sin\varphi s+B_j\cos\varphi s\right]r^{-s}ds \tag{1.3}$$

Тогда напряжения в соответствующих полупространствах имеют следующий вид:

$$\tau_{\varphi z}^{(j)}(r,\varphi)=-\frac{G}{2\pi ir}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[A_j\cos\varphi s-B_j\sin\varphi s\right]sr^{-s}ds\quad\left(-1<\operatorname{Re}s<0\right) \tag{1.4}$$

Используя представления (1.3) и (1.4), удовлетворим условиям вспомогательной задачи и выразим неизвестные коэффициенты A_j и B_j $(j=1,2)$ через функции скачков. Далее, удовлетворяя остальным трем условиям (1.1), для определения функций $\tau(r)$, $W(r)$ и $U(r)$ получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\tau(r)}{r}-\dfrac{G}{\pi r}\displaystyle\int\limits_0^a\dfrac{r_0^2W'(r,0)}{r_0^2-r^2}dr_0+\dfrac{G}{\pi r}\displaystyle\int\limits_0^b\dfrac{r_0^2U'(r)}{r_0^2+r^2}dr_0=\tau_0(r)\\ \dfrac{W'(r)}{r}-\dfrac{1}{\pi G}\displaystyle\int\limits_0^a\dfrac{r_0\tau(r_0)\,dr_0}{r_0^2-r^2}dr_0+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^b\dfrac{r_0U'(r_0)}{r_0^2+r^2}dr_0=0 & (0<r<a)\\ \dfrac{G}{\pi r}\displaystyle\int\limits_0^b\dfrac{r_0U'(r_0)}{r_0-r}dr_0-\dfrac{G}{\pi r}\displaystyle\int\limits_0^a\dfrac{r_0^2W'(r_0)}{r_0^2+r^2}dr_0+\displaystyle\int\limits_0^a\dfrac{r_0\tau(r_0)}{r_0^2+r^2}dr_0=0 & (0<r<b)\end{cases} \tag{1.5}$$

При этом искомые функции $W(r)$ и $U(r)$ должны удовлетворять условиям

$$U(b)=W(a)=0;\ U(0)=W(0) \tag{1.6}$$

Из первых двух уравнений (1.5) нетрудно установить, что функции $\tau(r)$, $W(r)$ в концевой точке $r=a$ имеют особенность типа $(a-r)^{-\frac{3}{4}}$.

Из последнего уравнения (1.5) явствует, что $U'(r)$ в концевой точке $r=b$ имеет корневую особенность. В точке же $r=0$ методом Мусхелишвили [2] легко установить, что все три искомые функции ограничены.

Чтобы решить систему интегральных уравнений (1.5) методом дискретных особенностей, продолжим функции $\tau(r)$ и $W(r)$, а также первые два уравнения (1.5) на интервал $(-a,0)$ соответственно нечетным и четным образом.

Получим

$$\begin{cases}\tau(r)-\dfrac{G}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-a}^a\dfrac{W'(r_0)}{r_0-r}dr_0-\dfrac{2rG}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^b\dfrac{U'(r_0)}{r_0^2+r^2}dr_0=\tau_0(|r|)\operatorname{sgn}r\quad(-a<r<a)\\ W'(r)-\dfrac{1}{\pi G}\displaystyle\int\limits_{-a}^a\dfrac{\tau(r_0)}{r_0r}dr_0+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^b\dfrac{r_0U'(r_0)}{r_0^2+r^2}dr_0=0\\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^b\dfrac{U'(r_0)}{r_0-r}dr_0+\dfrac{r}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{-a}^a\dfrac{W'(r_0)\,dr_0}{r_0^2+r^2}+\dfrac{1}{2\pi G}\displaystyle\int\limits_{-a}^a\dfrac{r_0\tau(r_0)}{r_0^2+r^2}dr_0=0\quad(0<r<b)\end{cases} \tag{1.7}$$

Далее, в системе (1.7) перейдем к новым переменным $r=ax,\ r_0=as$ в первых двух уравнениях и $r=b(x+1)/2;\ r_0=b(s+1)/2$ в последнем уравнении.

В итоге, обозначив

$$\varphi_1(x)=\frac{\tau(ax)}{G}+W'(ax);\ \varphi_2=\frac{\tau(ax)}{G}-W'(ax)$$

$$\varphi_3(x)=U'\left(\frac{b}{2}(x+1)\right);\quad \frac{\tau_0\left(a|x|\right)}{G}\operatorname{sgn}x=f(x)$$

придем к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases}\varphi_1(x)-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{\varphi_1(s)}{s-x}ds-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{(2\lambda x-s-1)\varphi_3((s))}{\left((1+s)^2+4\lambda^2x^2\right)}ds=f(x)\\ \varphi_2(x)+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{\varphi_2(s)}{s-x}ds-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{(2\lambda x+s+1)\varphi_3(s)}{\left((1+s)^2+4\lambda^2x^2\right)}ds=f(x)\\ \displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{\varphi_3(s)}{s-x}ds+\dfrac{\lambda}{2\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{(2\lambda s+x+1)\varphi_1(s)}{\lambda^2s^2+(x+1)^2}ds+\dfrac{\lambda}{2\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{(2\lambda s-x-1)\varphi_2(s)}{\lambda^2s^2+(x+1)^2}ds=0\end{cases}\tag{1.8}$$

$$\left(\lambda=a/b;\quad -1<x<1\right)$$

Условия же (1.6) при помощи функций $\varphi_j(x)$ $(j=1,2,3)$ записываются в следующем виде:

$$\int_{-1}^{1}\left[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\right]dx=0;\quad \lambda\int_{0}^{1}\left[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right]dx=\int_{-1}^{1}\varphi_3(x)dx\tag{1.9}$$

Используя результаты работы [3], решения системы (1.8) представим в виде

$$\varphi_1(x)=\frac{\varphi_1^*(x)}{(1+x)^{\frac{1}{4}}(1-x)^{\frac{3}{4}}};\quad \varphi_2(x)=\frac{\varphi_2^*(x)}{(1+x)^{\frac{3}{4}}(1-x)^{\frac{1}{4}}};\ \varphi_3(x)=\frac{\varphi_3^*(x)}{\sqrt{1-x}}$$

где функции $\varphi_j^*(x)$ $(j=1-3)$ на отрезке $[-1,1]$ удовлетворяют условию Гельдера.

Подставляя значения функций $\varphi_j(x)$ в (1.9), (1.7) и используя соотношения

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{s-z}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx\approx\sum_{i=1}^{n}W_i\frac{f(\xi_i)}{\xi_i-z}\left[1-q(z)\right]$$

$$z=\pm1;\quad \operatorname{Re}\alpha,\operatorname{Re}\beta>-1$$

где ξ_i – корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha+\beta)}(\xi_i)=0$

$$W_i=-2^{\alpha+\beta+1}\left(\frac{2}{\xi_i-1}\right)^{n+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)}\times$$

$$\times\frac{F\left(n+1,n+\alpha+1,2n+\alpha+\beta+1;\dfrac{2}{1-\xi_i}\right)}{(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\xi_i)}$$

$$q(z)=\begin{cases}\left(\dfrac{\xi_i-1}{z-1}\right)^{n+1}\dfrac{F\left(n+1,n+\alpha+1,2n+\alpha+\beta+1;\dfrac{2}{1-z}\right)}{F\left(n+1,n+\alpha+1,n+\alpha+\beta+1;\dfrac{2}{1-\xi_i}\right)} & (z\notin[-1,1])\\ \left(q(z+i0)+q(z-i0)\right)/2 & (-1<z<1)\end{cases}$$

придем к системе алгебраических уравнений относительно значений $\varphi_j^*(\xi_i)$ $(j=1-3;\quad i=1,....n)$.

Проведен численный расчет, результаты которого приведены в виде графиков (рис.1). В табл. 1 приведены значения коэффициента интенсивности приведенных контактных напряжений в концевой точке горизонтальной трещины $r = a$, а на рис. 1 показаны графики смещений точек берегов вертикальной трещины в зависимости от изменения параметра λ.

Таблица 1. Значения коэффициента интенсивности приведенных контактных напряжений в концевой точке $r = a$ горизонтальной трещины

a	0.5	1	1.5	2	3
K_{III}	0.1744	0.1617	0.1535	0.1475	0.1394

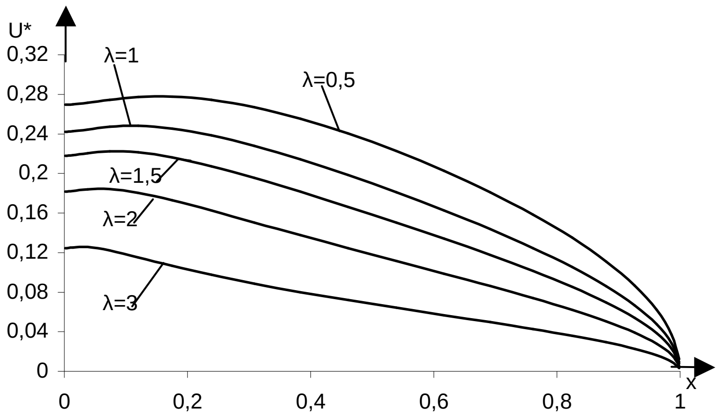


Рис.1

Как видно из графиков и таблицы, при увеличении параметра λ коэффициент интенсивности и максимальное раскрытие трещины уменьшаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теори упругости. Л.: Наука, 1968. 402с.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.М.:Наука, 1968. 511с.
3. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. //Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. №3. С.12–19.

Сведения об авторах

Саакян Аветик Вараздатович

Кандидат физ.-мат. наук, зам. директора института механики НАН РА
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б} ,
Тел: (+37410) 56-81-88, E-mail: avsah@mechins.sci.am

Акопян Лусине Ваграмовна
Младший научный сотрудник института механики НАН РА

Даштоян Лилит Левоновна
Кандидат физ.-мат. наук, ученый секретарь института механики НАН РА
Тел: (+37410) 56-81-89; E-mail: Lilit_Dashtoyan@mechins.sci.am

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛН В ФЕРРОУПРУГОМ СЛОЕ

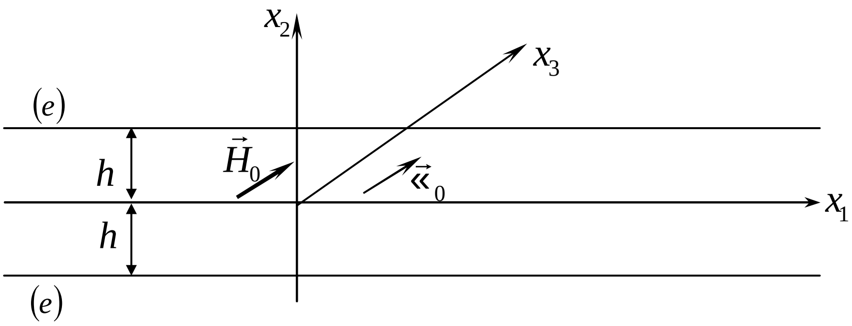
Саакян С.Л.

Работа посвящена изучению взаимодействия магнитных (спиновых) и сдвиговых упругих волн в однородном ферроупругом слое. Находясь в постоянном магнитном поле, материал намагничен до насыщения. Вектор напряженности магнитного поля совпадает с направлением легкой намагниченной среды и с направлением вектора равновесного значения магнитного спина. Направления векторов упругих перемещений и магнитного поля также совпадают. Вектор возмущения магнитного спина перпендикулярен вектору магнитного поля.

Получено дисперсионное уравнение для определения частот в зависимости от волнового числа. С помощью полученного дисперсионного уравнения исследуются вопросы существования и распространения антиплоских магнитоупругих волн в среде по перпендикулярному направлению поля, которые затухают в вакууме. Показано существование рассматриваемого типа волн, а также существование зон молчания

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть однородный ферроупругий слой толщиной $2h$ отнесен к прямоугольной декартовой системе координат $x_1x_2x_3$ (фиг. 1.1). Находясь во внешнем постоянном магнитном поле $\vec{H}_0=(0,0,H_0)$ ($H_0=\text{const}>0$), среда намагничена до насыщения. Направление внешнего магнитного поля и направление легкого намагничения среды совпадают: $\vec{H}_0 \uparrow\uparrow \vec{\mu}_0 \uparrow\uparrow x_3$ ($\vec{\mu}_0=(0,0,\mu_0)$; $\mu_0=\text{const}$), а компонента возмущения вектора магнитного спина перпендикулярна к направлению x_3: $\vec{\mu}=(\mu_1,\mu_2,0)$. Рассмотрим задачу распространения сдвиговых поверхностных волн в предположении, что в среде единственной отличной от нуля компонентой вектора упругих перемещений является функция $u_3=u_3(x_1,x_2,t)$.



Фиг. 1.1 Ферроупругий слой в постоянном магнитном поле

Уравнения движения имеют вид [1,2]:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_0\ddot{u}_3=G\nabla_\perp^2 u_3+M_0 f\nabla_\perp^2\Phi\\
&\nabla_\perp^2\Phi=\rho_0\left(\nabla_\perp\cdot\vec{\mu}\right)\\
&\dot{\mu}_1-\omega_M\hat{b}\mu_2=\gamma_0\mu_0\left(\Phi+\bar{b}M_0u_3\right)_{,2}\\
&\dot{\mu}_2+\omega_M\hat{b}\mu_1=-\gamma_0\mu_0\left(\Phi+\bar{b}M_0u_3\right)_{,1}
\end{aligned}\right\}\ \text{в ферроупругой среде} \tag{1.1}$$

$$\nabla_\perp^2\Phi^{(e)}=0\ \text{ в вакууме} \tag{1.2}$$

Здесь все функции зависят только от x_1, x_2 и t, а основные обозначения следующие:

$\nabla_\perp=\left(\partial/\partial x_1,\partial/\partial x_2,0\right)$; Φ – потенциал возмущенного магнитного поля ($\vec{h}=\nabla_\perp\Phi$); $M_0=\rho_0\mu_0$; $\omega_M=\gamma_0 M_0$; $\hat{b}=b+H_0/M_0$; $\bar{b}=b+f$; $b\geq 0$ – постоянная магнитной анизотропии; ρ_0 – плотность среды; $\gamma_0 \approx 1.76 \cdot 10^7$ (Э·с)$^{-1}$ – гиромагнитное отношение; G – модуль сдвига; f – коэффициент пьезомагнетизма, созданный магнитострикцией.

Граничные условия будут [1]

$$\left.\begin{aligned} &\Phi - \Phi^{(e)} = 0 \\ &\Phi_{,2} - \rho_0 \mu_2 = \Phi^{(e)}_{,2} \\ &G u_{3,2} + \rho_0 M_0 \bar{b} \mu_2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ на поверхностях } x_2 = -h \text{ и } x_2 = h \tag{1.3}$$

Кроме того, предполагается, что все искомые функции стремятся к нулю при $x_2 \to \pm\infty$, что является необходимым условием существования поверхностных волн.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решения уравнений (1.1) отыскиваются в виде

$$(u_3, \mu_1, \mu_2, \Phi) = \left(\tilde{u}_3, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\Phi}\right) e^{i(\omega t - \sigma k x_1) - m x_2} \tag{2.1}$$

с условиями

$$\operatorname{Im}\left(m\right) = 0;\ \omega > 0;\ k > 0;\ \sigma = \pm 1 \tag{2.2}$$

соответствующие тому, что мы ищем волны по направлениям $\pm x_1$.

Подставляя (2.1) в (1.1) получим решения системы (1.1) в следующем виде:

$$u_3 = \tilde{u}_3^{\pm} e^{i(\omega t - \sigma k x_1) \pm k\beta x_2};\ \Phi = \left[\tilde{\Phi}_0^{\pm} e^{\pm k x_2} - M_0 \bar{b} u \cdot \tilde{u}_3^{\pm} e^{\pm k\beta x_2}\right] e^{i(\omega t - \sigma k x_1)} \tag{2.3}$$

$$\rho_0 \mu_1 = i\sigma k \left[P^{\mp} \tilde{\Phi}_0^{\pm} e^{\pm k x_2} + M_0 \bar{b} \left(u \pm v\beta\right) \cdot \tilde{u}_3^{\pm} e^{\pm k\beta x_2}\right] e^{i(\omega t - \sigma k x_1)} \tag{2.4}$$

$$\rho_0 \mu_2 = \mp k \left[P^{\mp} \tilde{\Phi}_0^{\pm} e^{\pm k x_2} \pm M_0 \bar{b} \left(v \pm u\beta\right) \cdot \tilde{u}_3^{\pm} e^{\pm k\beta x_2}\right] e^{i(\omega t - \sigma k x_1)} \tag{2.5}$$

Здесь обозначения следующие:

$$P^{\mp} = \frac{\omega_M}{\hat{b}\omega_M \mp \sigma\omega},\ u = \frac{\hat{b}\omega_M^2}{\omega_M^2 \hat{b}\left(\hat{b}+1\right) - \omega^2},\ v = \frac{\omega_M \sigma\omega}{\omega_M^2 \hat{b}\left(\hat{b}+1\right) - \omega^2} \tag{2.6}$$

$$\beta = \sqrt{1 - \rho_0 \omega^2 \left[\omega^2 - \omega_M^2 \hat{b}\left(\hat{b}+1\right)\right] \Big/ G k^2 \left[\omega^2 - \omega_M^2 \hat{b}\left(\hat{b} + 1 - M_0^2 f \bar{b}\right)\right]} \tag{2.7}$$

Отметим, что при отсутствии упругих перемещений в формулах (2.3)-(2.6) следует подставить $\tilde{u}_3^{\pm} = 0$, а в вакууме имеем

$$\Phi^{(e)} = \tilde{\Phi}^{(e)\pm} e^{i(\omega t - \sigma k x_1) \pm k x_2} \tag{2.8}$$

Используя решения (2.3)-(2.6) и (2.8) с удовлетворением условий затухания и граничных условий (1.3) для определения частот получим следующую однородную систему алгебраических уравнений:

$$e^{-kh} C + e^{kh} D - \bar{b} M_0 u \left(e^{-k\beta h} E + e^{k\beta h} F\right) - e^{-kh} A = 0$$

$$-e^{-kh} \left(1 + P^{+}\right) C + e^{kh} \left(1 + P^{-}\right) D + \bar{b} M_0 v \left(e^{-k\beta h} E + e^{k\beta h} F\right) + e^{-kh} A = 0$$

$$\bar{b} M_0 \left(P^{+} e^{-kh} C - P^{-} e^{kh} D\right) - \left[M_0^2 \bar{b}^2 \left(v - u\beta\right) + G\beta\right] e^{-k\beta h} E -$$

$$- \left[M_0^2 \bar{b}^2 \left(v + u\beta\right) - G\beta\right] e^{k\beta h} F = 0$$

$$e^{kh} C + e^{-kh} D - M_0 \bar{b} u \left(e^{k\beta h} E + e^{-k\beta h} F\right) - e^{-kh} B = 0$$

$$-e^{kh} \left(1 + P^{+}\right) C + e^{-kh} \left(1 + P^{-}\right) D + \bar{b} M_0 v \left(e^{k\beta h} E + e^{-k\beta h} F\right) - e^{-kh} B = 0$$

$$\bar{b}M_0\left(P^+e^{kh}C-P^-e^{-kh}D\right)-\left[M_0^2\bar{b}^2\left(v-u\beta\right)+G\beta\right]e^{k\beta h}E-$$
$$-\left[M_0^2\bar{b}^2\left(v+u\beta\right)-G\beta\right]e^{-k\beta h}F=0$$

Чтобы эта система имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно чтобы определитель ее главной матрицы был равен нулю. Это условие дает следующее дисперсионное уравнение:

$$\beta=\frac{\left(1-e^{2\alpha\beta}\right)\left(\Omega^2-\tilde{\Omega}_{SV}^2\right)^{-1}\left(\Delta^2A+\beta^2B\right)}{2\Delta\left[\left(e^{2\alpha}-1\right)\left(e^{2\alpha\beta}+1\right)\hat{b}+2\left(e^{2\alpha}-2e^{\alpha(1+\beta)}+e^{2\alpha(1+\beta)}\right)\left(\hat{b}^2-\Omega^2\right)\right]} \tag{2.9}$$

Здесь обозначения следующие:

$$A=\hat{b}^2\left(1-e^{2\alpha}\right)+4e^{2\alpha}\left(\Omega_{SV}^2-\Omega^2\right)\Omega^2\ ;\quad B=\left[1-4e^{2\alpha}\left(\Omega_{DE}^2-\Omega^2\right)\right]\left(\Omega^2-\tilde{\Omega}_{SV}^2\right)^2$$

$$\Omega=\frac{\omega}{\omega_M}\ ;\quad \lambda_T=\sqrt{\frac{G}{\rho_0\omega_M^2}}\ ;\quad \Omega_T=k\lambda_T\ ;\quad \alpha=2kh=2h\frac{\Omega_T}{\lambda_T}\ ;\quad \varepsilon_p=\frac{\bar{b}\cdot fM_0^2}{\rho_0\omega_M^2}\ ;\quad \mu=\frac{\hat{b}}{\lambda_T^2}$$

$$\Omega_{SV}^2=\hat{b}\left(\hat{b}+1\right);\quad \bar{\Omega}_{SV}^2=\Omega_{SV}^2-\mu\varepsilon_p\ ;\quad \tilde{\Omega}_{SV}^2=\hat{b}\left(\hat{b}+1-\Delta\right);\quad \Omega_{DE}=\hat{b}+1/2$$

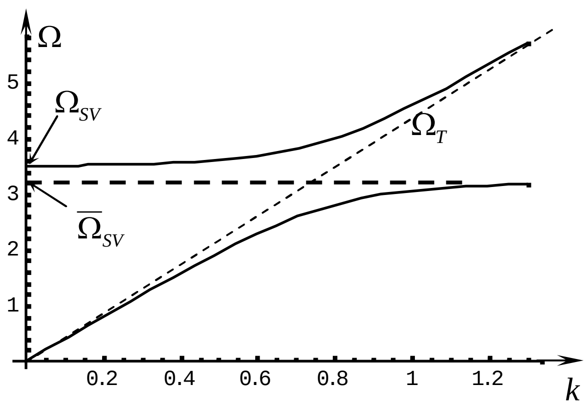
$$\Delta=M_0^2\bar{b}^2/G\ ;\ \beta=\sqrt{\left\{\Omega_T^2\left(\Omega^2-\bar{\Omega}_{SV}^2\right)-\Omega^2\left(\Omega^2-\Omega_{SV}^2\right)\right\}\Big/\Omega_T^2\left(\Omega^2-\bar{\Omega}_{SV}^2\right)} \tag{2.10}$$

Для сильно магнитострикционных материалов, таких как никель и иттрий-железный гранат, ε_p (коэффициент магнитоупругого взаимодействия) имеет порядок $10^{-4}\div10^{-2}$ [1,2].

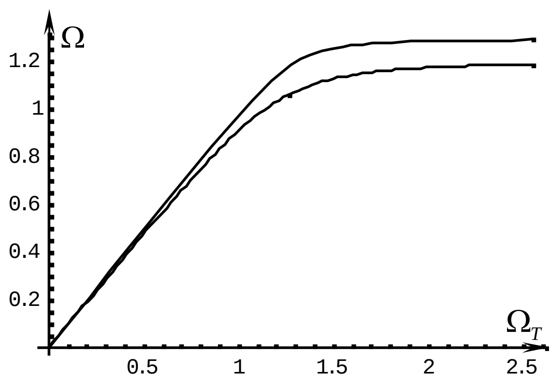
Уравнение (2.9) удовлетворяется при $\beta=0$. Последнее есть дисперсионное соотношение для взаимосвязанных объемных магнитоупругих волн в ферромагнетиках [1,2]. Зависимость частот таких волн от волнового числа приведена на фиг. 2.1.

Уравнение (2.9) удовлетворяется также при $\Omega=\Omega_{SV}$. Это есть частота объемных спиновых волн в жестких феромагнетиках [1,2].

Другое решение уравнения (2.9), приведенное на фиг.2.2, получается только численными методами. На этой фигуре верхняя ветвь соответствует нижней ветви на фиг.2.1, т.е одному из решений уравнения $\beta=0$. Нижняя же ветвь на фиг.2.2, в отличие от первой, прерывается при довольно больших значениях $\Omega_T\equiv\lambda_T k$. Это доказывает существование зон молчания для такого типа волн. Также с увеличением толщины ферроупругого слоя нижняя ветвь “укорачивается” до полного ее изчезновения. На фигурах для наглядности расстояния между кривыми сильно увеличены.



Фиг. 2.1. Зависимость частот объемных магнитоупругих волн от k.



Фиг. 2.2. Зависимость частот поверхностных магнитоупругих волн от Ω_T.

Таким образом, в основном, мы имеем четыре поверхностые волны, одна из которых перестает существовать при больших значениях волновых чисел. Также утверждаем существование и других волн, особенно в области, заключенной между линией $\Omega = \bar{\Omega}_{SV}$ и верхней ветвью на фиг.2.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560с.
2. Багдасарян Г.Е., Асанян Д.Д., Саакян С.Л. Распространение взаимосвязанных упругих и спиновых волн в кусочно-однородной ферромагнитной среде. / В сб.: ”Проблемы механики тонких деформируемых тел”. Ереван. Институт механики НАН Армении. 2002, С.48-60.

<u>Сведения об авторе:</u>

Саакян Саак Левонович
Научный сотрудник, Институт механики НАН Армении
Адрес: Ереван, Зейтун, 8-ая улица (ул. Суренянц), д. 4, кв. 37
Тел. 238678 (дом.), 091-776432 (моб.); E-mail: sahaklevon@yahoo.com

ЕДИНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ОСТРЫХ И ЗАКРУГЛЕННЫХ УГЛОВЫХ ВЫРЕЗОВ

Саврук М.П., Казберук А.

Механика разрушения занимается исследованием процессов деформирования и разрушения твердых тел, содержащих как трещины, так и угловые вырезы. На сегодня наиболее развиты методы решения задач механики разрушения для тел с трещинами. Значительно в меньшей степени исследованы проблемы разрушения тел с острыми угловыми вырезами. Такое состояние исследований в этом направлении можно объяснить большими математическими трудностями, возникающими при решении задач теории упругости для тел с угловыми вырезами. Данная работа посвящена разработке приближенного метода решения такого класса задач на основе данных о концентрации напряжений в вершинах закругленных вырезов.

Зависимость между коэффициентами интенсивности и концентрации напряжений для острых и закругленных вырезов [1]. Пусть упругая плоскость содержит угловой вырез с углом раствора 2α $(\pi/2 < \alpha < \pi)$, закругленный в вершине по дуге окружности радиуса ρ (рис. 1). Предполагается, что контур выреза свободен от нагрузки, а на бесконечности напряженное состояние описывается комплексными потенциалами напряжений

$$\Phi_0(z) = -\frac{K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{V}}}{\sqrt{2\pi}} z^{-\lambda} \frac{\lambda-1}{A(\lambda)} \sin(2\alpha), \quad \Psi_0(z) = \frac{K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{V}}}{\sqrt{2\pi}} z^{-\lambda} \frac{\lambda-1}{A(\lambda)} \sin(2\lambda\alpha)$$

$$A(\lambda) = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)\sin(2\alpha) + (\lambda - 1)\sin(2\lambda\alpha)$$

где λ – наименьший положительный корень характеристического уравнения

$$(1-\lambda)\sin 2\alpha + \sin\left(2\alpha(1-\lambda)\right) = 0$$

Здесь $K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{V}}$ – обобщенный коэффициент интенсивности напряжений (КИН) в вершине соответствующего острого углового выреза ($\rho = 0$).

Численное решение задачи получено методом сингулярных интегральных уравнений [2]. Максимальные напряжения в вершине закругленного выреза можно представить в виде

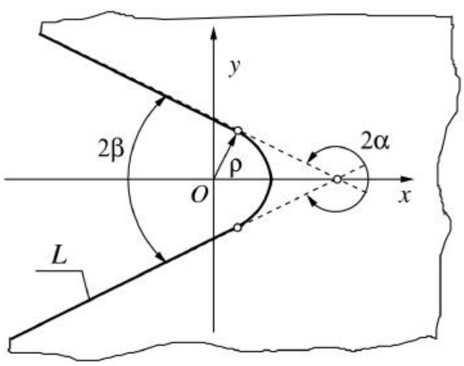


Рис. 1.

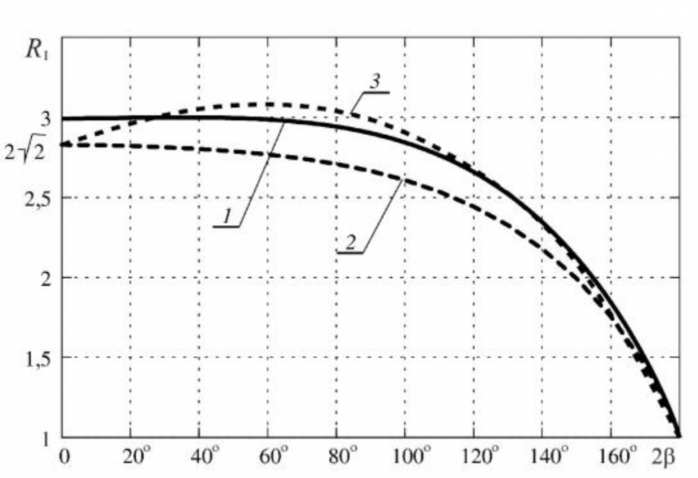


Рис. 2.

$$(\sigma_s)_{\max} = \frac{K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{V}}}{\sqrt{2\pi}} R_{\mathrm{I}} \rho^{-\lambda} \tag{1}$$

где коэффициент R_{I} зависит от угла раствора выреза (кривая 1 на рис. 2). Для коэффициента R_{I} построена аппроксимирующая зависимость от угла β

$$R_{\mathrm{I}} = \frac{1 + 28,75\gamma + 98,04\gamma^2 - 102,1\gamma^3 + 47,4\gamma^4 - 8,436\gamma^5}{1 + 20,71\gamma}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \beta \tag{2}$$

относительная погрешность которой не превышает 0,1% для всех $\beta \in [0, \pi/2]$, кроме диапазона $\beta \in [83\pi/180, \pi/2]$, где она меньше 0,4%.

На рис. 2 приведены также известные данные для гиперболического выреза [3] (кривая 2) и для закругленного углового выреза в полуплоскости [4] (кривая 3). Автору работы [4] не удалось получить численных результатов при малых углах β. Он считал, как и другие исследователи, что для узких U-подобных вырезов ($\beta = 0$) известно точное значение коэффициента $R_{\mathrm{I}} = 2\sqrt{2}$, следующее из известного решения для эллиптического отверстия [5]. Проведенный анализ [1] показывает, что соотношение между коэффициентами интенсивности и концентрации напряжений для острых и закругленных вырезов и радиусом кривизны в вершине выреза (1) неоднозначно: при одинаковой кривизне в вершине выреза оно различно для разных форм ее окрестности. Так, для оценки концентрации напряжений около узких U-подобных вырезов вместо значения $R_{\mathrm{I}} = 2\sqrt{2}$ более корректно использовать решение $R_{\mathrm{I}} = 2{,}989$, следующее из формулы (3).

Аналитическую зависимость (2) можно использовать для приближенной оценки КИН в вершине острого углового выреза при использовании коэффициента концентрации напряжений для закругленного выреза или, наоборот, для оценки концентрации напряжений в вершине закругленного выреза по известному КИН. Это дает возможность единым подходом рассматривать проблему концентрации напряжений около острых и закругленных вырезов.

Концентрация напряжений около ромбического отверстия. Рассмотрим бесконечную упругую плоскость, ослабленную ромбическим отверстием, вершины которого закруглены по окружностям радиусов ρ и R. Край отверстия (контур L) считаем свободным от внешней нагрузки. На бесконечности приложены растягивающие усилия интенсивности p и q, действующие во взаимно перпендикулярных направлениях (рис. 3).

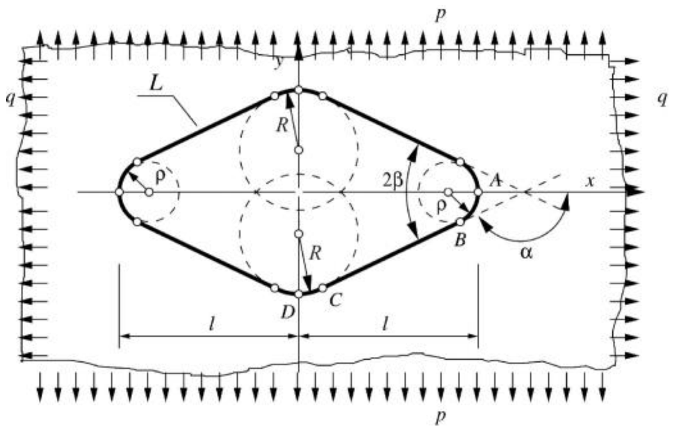


Рис. 3.

Численное решение задачи получено методом сингулярных интегральных уравнений [2] для ромбического отверстия с закругленными вершинами, а также для овального отверстия (при отсутствии прямолинейных участков контура L). На этой основе при использовании соотношения (2) построены зависимости безразмерного КИН $F_{\mathrm{I}}^{\mathrm{V}} = K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{V}} / (pl^{\lambda}\sqrt{\pi})$ в вершине A

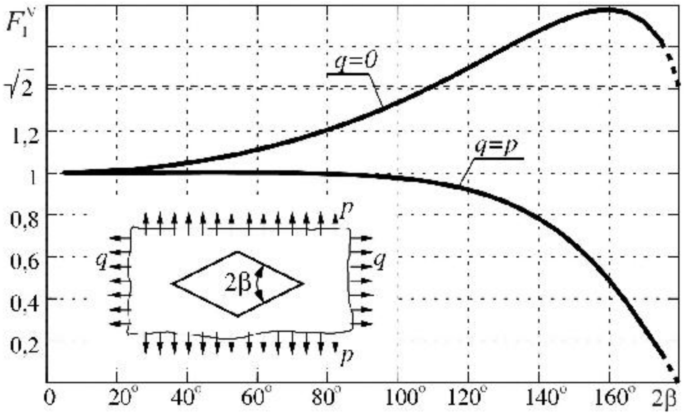


Рис. 4.

остроугольного отверстия от угла 2β при одноосном ($q = 0$) и всестороннем ($p = q$) растяжении для ромбического (рис. 4) и лункообразного (рис. 5) отверстий.

Приведенные данные хорошо согласуются с известными частными результатами, полученными другими методами [6-8].

Имея значения КИН для остроугольных отверстий при использовании зависимости (2) легко построить интерполяционные формулы для коэффициентов концентрации напряжений k_A в гладкой вершине A с произвольным радиусом закругления ρ [9]. Расчеты показывают, что такую интерполяционную формулу удобно представить в виде

$$k_A = 1 - q/p + 2\left\{1 - b\tanh\left[c\ln\varepsilon\right]\right\}/\varepsilon^{\lambda}, \quad 0 < \varepsilon = \rho/l \le 1 \tag{3}$$

где параметр b находится из равенства

$$2(1+b) = \lim_{\varepsilon\to 0}[\varepsilon^{\lambda}k_A] = \lim_{\varepsilon\to 0}[\varepsilon^{\lambda}(\sigma_s)_{\max}]\Big/p = F_{\mathrm{I}}^{\mathrm{V}}R_{\mathrm{I}}\Big/\sqrt{2}$$

а постоянную c можно определить, например, методом наименьших квадратов.

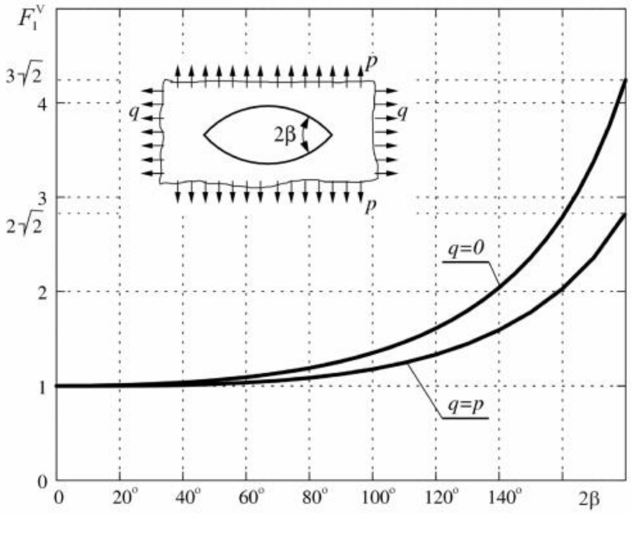


Рис. 5.

Приведем их значения в случае узкой щели (физическая трещина) длиной $2l$ постоянной ширины 2ρ, вершины которой представляют собой полуокружности радиуса ρ, и квадратного отверстия с закругленными вершинами. Имеем:

для узкой щели ($\beta = 0$, $\lambda = 0{,}5$, $R_{\mathrm{I}} = 2{,}989$) –

$$F_{\mathrm{I}}^{\mathrm{V}} = 1,\ b = 0{,}05677,\ c = 0{,}3718\ \ (q = 0)$$

$$F_{\mathrm{I}}^{\mathrm{V}} = 1,\ b = 0{,}05677,\ c = 0{,}6502\ \ (q = p)$$

для квадратного отверстия ($2\beta = \pi/2$, $\lambda = 0{,}45552$, $R_{\mathrm{I}} = 2{,}901$) –

$$F_{\mathrm{I}}^{\mathrm{V}} = 1{,}484,\ b = 0{,}2995,\ c = 0{,}244\ \ (q = 0)$$

$$F_{\mathrm{I}}^{\mathrm{V}} = 1{,}158,\ b = 0{,}01427,\ c = 2{,}715\ \ (q = p)$$

Относительная погрешность формулы (3) при выбранных значениях постоянных b и c не превышает 0,5% для всего диапазона изменения параметра ε.

На практике коэффициент концентрации напряжений для такого вида отверстий вычисляют, используя понятие «эквивалентного эллипса» [10], т.е. эллипса, описанного около рассматриваемого концентратора напряжений, с большей полуосью, равной длине концентратора, и с минимальным радиусом кривизны, равным радиусу закругления вершины отверстия. Так полученные коэффициенты концентрации напряжений имеют малую относительную погрешность для не очень малых значений параметра ε, однако при стремлении параметра ε к нулю погрешность неограниченно возрастает для $\beta > 0$ и только в случае узкой щели ($\beta = 0$) стремится к конечному значению 5,4% .

Краевой угловой вырез в упругой полуплоскости. Рассмотрим упругую полуплоскость ($y \le 0$), ослабленную краевым угловым вырезом с закругленной вершиной по дуге окружности радиуса ρ. Глубина выреза и его угол раствора равны l и 2β соответственно. Контур выреза L и край полуплоскости свободны от нагрузки, а на бесконечности заданы растягивающие напряжения $\pm_{x} = p$ (рис. 6). Численное решение задачи получено [9] методом сингулярных интегральных уравнений [2] при использовании соотношения (2). Зависимость безразмерного КИН в вершине углового выреза от угла раствора 2β приведена на рис. 7.

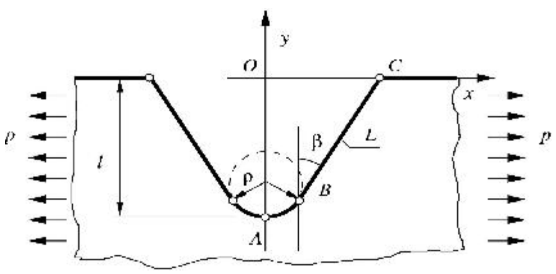


Рис. 6.

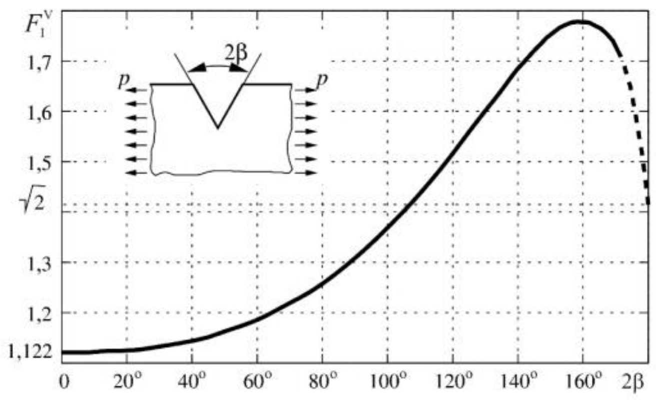


Рис. 7.

Для краевых угловых вырезов с закругленной вершиной также построены в виде (3) аппроксимирующие зависимости коэффициента концентрации напряжений в вершине выреза от параметра ε [9].

Работа выполнена в соответствии с планом комплексного научного проекта W/WM/9/06 Политехники Белостоцкей, Польша.

ЛИТЕРАТУРА

1. Savruk M.P., Kazberuk A. Relationship between the stress intensity and stress concentration factors for sharp and rounded notches // Mater. Sci. 2006. **42**, № 6. P. 725-738.
2. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
3. Benthem J.P. Stresses in the region of rounded corners // Int. J. Solids Struct. 1987. **23.** ¹ 2. P. 239-252.
4. Strandberg M. A numerical study of the elastic stress field arising from sharp and blunt V-notches in a SENT-specimen // Int. J. Fract. 1999. 100, № 4. P. 329-342.
5. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами // Мех. разрушения и прочность материалов / Справ. пособие под ред. В.В. Панасюка. – Киев: Наукова думка, 1988. **2**. 620 с.
6. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
7. Noda N.-A., Oda K., Inoue T. Analysis of newly-defined stress intensity factors for angular corners using singular integral equations of the body force method // Int. J. Fract. 1996. **76**. P. 243-261.
8. Dunn M.L., Suwito W., Cunningham S. Stress intensities at notch singularities // Eng. Fract. Mech. 1997. **57**. P. 417-430.
9. Саврук М.П., Казберук А. Единый подход к решению задач о концентрации напряжений около острых и закругленных угловых вырезов // Прикл. механика. 2007. **43.** № 2. С. 70-87.
10. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений. М.: Мир, 1977. 304 с.

Сведения об авторах

Саврук Михаил Петрович
Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом физико-механического института НАН Украины
Адрес: Ул. Лисеницкая, 4, кв. 16, 79032 Львов, Украина
Тел: 380(322)513966; E-mail: savruk@ipm.lviv.ua

Казберук Анджей (Kazberuk Andrzej)
Доктор-инженер (Dr inż) адюнкт Белостоцкой Политехники, Польша
Адрес: Katedra Mechaniki i Informatyki, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka,
ul. Wiejska 45C, 15-351 Białystok
E-mail: a.kazberuk@pb.bialystok.pl

ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩИХ СИЛ В ЗАДАЧАХ ИЗГИБА ПЛАСТИН ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННЫХ ПО ДВУМ ПРОТИВОПОЛОЖНЫМ СТОРОНАМ И СВОБОДНЫХ ПО ДВУМ ДРУГИМ

Саноян Ю.Г., Василян Н.Г.

Теория пластин со дня своего создания всегда сталкивалась с проблемами при расчёте напряжений и перемещений [1,2]. Это связано с тем, что расчёт прогиба пластин осуществляется решением бигармонического уравнения с двумя граничными условиями, однако для пластин конечной толщины естественнее было бы потребовать на краях выполнения трёх граничных условий. Для разрешения этой проблемы в граничные условия были введены обобщённые перерезывающие силы, эквивалентные действию перерезывающих сил и крутящих моментов. В этом варианте под названием теории Кирхгофа она широко использовалась в теоретических исследованиях и инженерных расчётах различных конструкций. Однако, достаточно точно описывая перемещения и изгибающие моменты, теория Кирхгофа испытывает большие затруднения при расчёте усилий в области пластин, примыкающих к её контуру и в особенности к угловым точкам. Рейснером Е.[3], Амбарцумяном С.А.[4] и другими в середине прошлого столетия была разработана уточнённая теория, в которой прогиб пластины описывается дифференциальным уравнением в частных производных шестого порядка с тремя граничными условиями, которая лишена недостатков, присущих теории Кирхгофа и достаточно точно описывает прогибы и усилия на всей поверхности пластины. Это позволяет рассмотреть вопрос применимости теории Кирхгофа и прояснить физический смысл сосредоточенных усилий, которые появляются в углах пластины рассчитываемых по теории Кирхгофа. С этой целью рассчитаем прогиб равномерно нагружённой пластины, у которой два противоположных края свободно опёрты, а два других свободны. Выбор именно этой задачи связан с тем, что в углах пластины сходятся два края, один из которых шарнирно закреплён, а второй свободен, а во-вторых, эта задача имеет решение в замкнутом виде, что позволяет провести подробный анализ расчётов. Размеры пластины и система координат приведены на рис.1. Толщина пластины *d*. Срединная плоскость пластины расположена в плоскости *x0y*, а ось *Z* направлена в направлении приложенной нагрузки (рис.1).

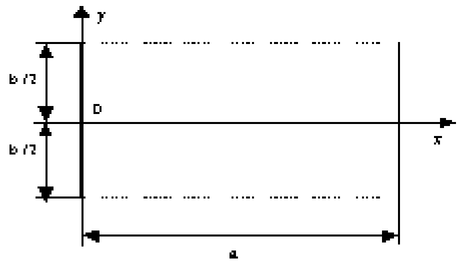


Рис.1

Решение этой задачи по теории Кирхгофа описывается бигармоническим уравнением

$$D\Delta^2 w\left(x,y\right)=q\left(x,y\right) \tag{1}$$

Функция *w(x,y)* непрерывна вместе с первой производной в замкнутой области *S+C*, имеет производные до 4-го порядка в *S*, удовлетворяет уравнению (1) в *S* и двум граничным условиям на *C* для каждой её точки. На шарнирно закреплённых краях *x=0, x=a* прогиб *w=0* и интенсивности изгибающих моментов $M_x=0$; на свободных краях $y=\pm b/2$ интенсивность изгибающих моментов $M_y=0$ и интенсивность обобщённых перерезывающих сил $\tilde{Q}_x=0$.Общее решение уравнения (1) при указанных краевых условиях имеет вид [1]

$$w(x,y)=\frac{qa^4}{D}\left(\frac{x^4-2ax^3+a^3x}{24a^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{ch}(\chi_n y)}{a^4\chi_n^4\mathrm{ch}(\chi_n b/2)}\left(A_n+B_n y\chi_n\mathrm{th}(\chi_n y)\right)\sin(\chi_n x)\right) \tag{2}$$

где $¡_n = ® n/a$.Неизвестные A_n и B_n определяются из краевых условий. Изгибающие моменты, крутящие моменты, перерезывающие силы и обобщённые перерезывающие силы вычисляются по известным формулам [1].

Решение этой же задачи по уточнённой теории описывается системой уравнений в частных производных шестого порядка [5]

$$\Delta\Phi = \frac{3}{4h}q \ , -D\Delta w + \frac{16h^3}{15(1-\nu)}\Delta\Phi - \frac{4h}{3}\Phi = 0 \ , \Delta\Psi - \frac{5}{2h^2}\Psi = 0 \tag{3}$$

где $D = 2Eh^3 / 3(1-¬^2)$, $h=d/2$, E – модуль упругости.

Задача решается для следующих краевых условий: на шарнирно закреплённых краях $x=0$, $x=a$ прогиб $w=0$, интенсивности изгибающих моментов $M_x=0$ и углы поворота нормали к срединной поверхности $\theta_y=0$, на свободных краях $y=\pm b/2$ интенсивности изгибающих моментов $M_y=0$, крутящих моментов $M_{yx}=0$ и перерезывающих сил $Q_н = 0$. Общее решение системы уравнений (3) может быть представлено в виде

$$\Phi(x,y) = qa\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{3a_n}{4ha\chi_n^2} + D_n\frac{\mathrm{ch}(\chi_n y)}{\mathrm{ch}(\chi_n b/2)}\right)\sin(\chi_n y)$$

$$W(x,y) = \frac{qa^4}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a^4\chi_n^4}\left(1+\frac{2\chi_n^2h^2}{1-\nu}\right) + A_n\frac{\mathrm{ch}(\chi_n y)}{\mathrm{ch}(\chi_n b/2)} + D_n\frac{2hy\,\mathrm{sh}(\chi_n y)}{3a^3\chi_n\mathrm{ch}(a\chi_n)}\right)\sin(\chi_n y) \tag{4}$$

$$\Psi(x,y) = qa\sum_{n=1}^{N}F_n\frac{\mathrm{sh}[p_n y]}{\mathrm{ch}(p_n b/2)}\cos(\chi_n x)$$

где $p_n = \sqrt{5/2h^2 + \chi_n^2}$.

Моменты M_x, M_y, M_{xy}, перерезывающие силы Q_x, Q_y и углы наклона $¯_x$ и $¯_y$ выражаются через функции с и · следующим образом [5]:

$$M_x = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{4}{5G}\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\right)\right]$$

$$M_y = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{4}{5G}\left(\frac{\partial\varphi_y}{\partial y} + \nu\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}\right)\right] \tag{5}$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{2}{5G}\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial y} + \nu\frac{\partial\varphi_y}{\partial x}\right)\right]$$

$$Q_x = \frac{4h}{3}\varphi_x , \ Q_y = \frac{4h}{3}\varphi_y \tag{6}$$

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{16h^3}{15(1-\nu)}\varphi_x \ , \ \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{16h^3}{15(1-\nu)}\varphi_y \tag{7}$$

где

$$\varphi_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} , \varphi_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

На рис. 2 представлены графики интенсивностей крутящих моментов M_{xy} на стороне $x=0$, M_{yx} на стороне $y=-b/2$ (интенсивности изгибающих моментов на краях пластины равны нулю) и интенсивностей перерезывающих сил на крае $x=0$, рассчитанных по теории Кирхгофа рис.2 (а,б,в) и по уточнённой теории для пластин толщиной d/a=0.01 (г,д,е) и d/a=0,1(ж,з,и).

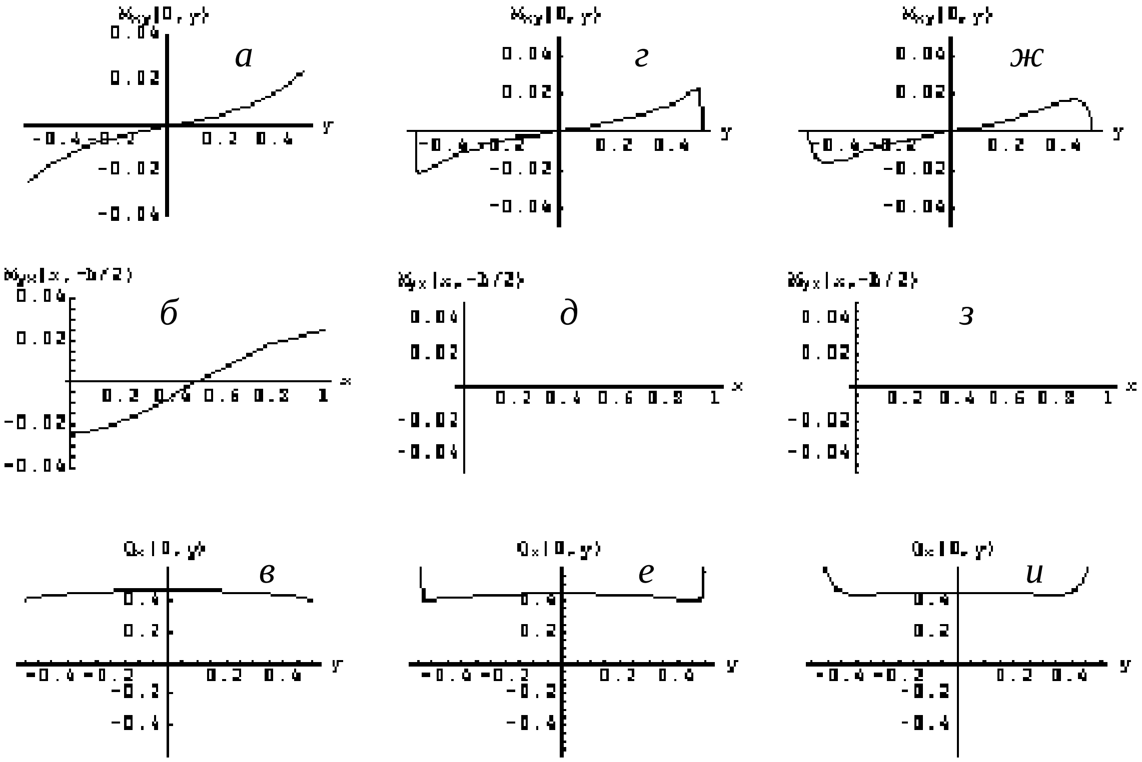


Рис.2

Интенсивности крутящих моментов M_{xy} и M_{yx} в углах пластины, рассчитанных по теории Кирхгофа, на шарнирно опёртых и свободных краях одинаковы и равны $0.0240\ qa^2$. Крутящие пары в углах пластины, согласно интерпретации Томсона и Тэта, создают сосредоточенные силы, по величине равные M_{xy} и M_{yx}. Совместно с распределёнными реакциями от обобщенных перерезывающих сил они уравновешивают заданную нагрузку в уравнении (1).

В отличие от теории Кирхгофа величина крутящих моментов, рассчитанная по уточнённой теории, равна нулю на свободных сторонах и в углах пластины (рис.2 *г,д,ж,з*). Интенсивности перерезывающих сил, рассчитанных по теории Кирхгофа и по уточнённой теории, отличаются только в окрестности углов пластины на длине, равной толщине пластины h (рис.2 *в,е,и*). С уменьшением толщины пластины величина интенсивности перерезывающих сил в углах линейно возрастает. На рис.3 показаны графики перерезывающих сил в углу для пластин толщиной $d/a=0{,}01,\ 0{,}015$ и $0{,}03$ кривые 1, 2, 3 соответственно.

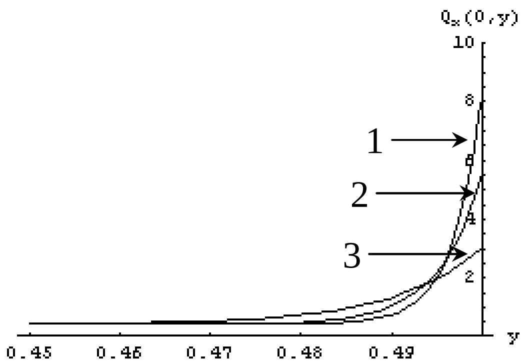


Рис.3

Силы, действующие на этих участках длиной d, расположенных на концах шарнирно опёртых сторон пластины, равны

$$F = \int_{b/2-d}^{b/2} Q_x(0, y)dy .$$

В таблице приведены значения сил F для пластин различных толщин

d/a	0.01	0.001	0.0001	0.00001
F/qab	0.0274	0.0235	0.0231	0.023

Из таблицы видно, что у пластин малой толщины ($d/a<0.001$), сила, действующая на примыкающий к углу участок шарнирно опёртого края пластины длиной d/a, не зависит от толщины пластины, мало отличается от крутящего момента в углах пластины M_{xy} и фактически является сосредоточенной силой. Однако в уточнённой теории эта сила действует только на шарнирно опёртой стороне, поскольку на свободной стороне крутящие моменты равны нулю. В теории Кирхгофа, поскольку невозможно приравнять крутящие моменты на свободных сторонах нулю, величина сосредоточенных сил в углах равна, как это было отмечено выше, $2M_{xy}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П.,Войновский–Кригер С.Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963.
2. Васильев В.В. К дискуссии по классической теории пластин. //Изв. РАН. МТТ. 1995. № 4.С.140.
3. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates. Trans. ASME. 1944. V.23.№4. P.184.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.:Наука, 1987.
5. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин учитывающих поперечные сдвиги. //В сб.: ”Проблемы механики тонких деформируемых тел.” (Посв.80-летию С. А. Амбарцумяна). Ереван: Гитутюн, 2002. С.67-88.

Сведения об авторах

Саноян Юрий Геворкович
к.ф.-м.н., научный сотрудник, Институт механики НАН РА
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б,
Тел: (+37410) 52-48-90
E-mail: : yusanoyan@mechins.sci.am

Василян Нарине Гургеновна

Институт механики НАН РА
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б,
Тел: (+37410) 52-48-90
E-mail: : yusanoyan@mechins.sci.am

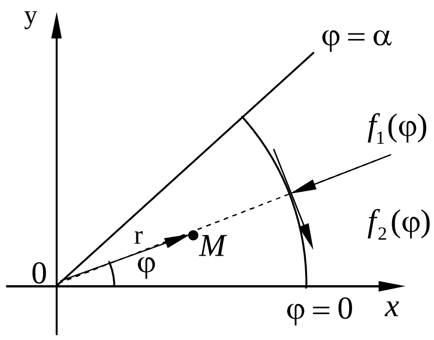
УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ КРУГОВОГО СЕКТОРА ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ГЛАДКОГО КОНТАКТА НА РАДИАЛЬНЫХ СТОРОНАХ

Саргсян А.М.

Рассматривается плоская задача теории упругости кругового сектора с единичным радиусом и углом раствора α $\left(0<\alpha<2\pi\right)$, когда на границе $r=1$ заданы внешние нагрузки, а на радиальных сторонах $\varphi=0$ и $\varphi=\alpha$ осуществляются условия гладкого контакта (условия соприкасания с жестким штампом без трения).

Решение задачи строится с помощью метода разделения переменных. Исследуется поведение напряжений и коэффициентов при особенностях в окрестности вершины сектора в зависимости от угла α и направления подхода к вершине.

Пусть упругий сектор $\{0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le\alpha,\ 0<\alpha<2\pi\}$ отнесен к полярной системе координат, начало которой помещено в угловой точке сектора (фиг.1) .



фиг.1

Решение плоской задачи теории упругости кругового сектора приводится к интегрированию бигармонического уравнения для функции напряжений Эри

$$\Delta\,\Delta\,\Phi(r,\varphi)=0 \tag{1}$$

со следующими граничными условиями:

$$u_\varphi\left(r,0\right)=\tau_{r\varphi}\left(r,0\right)=0,\qquad u_\varphi\left(r,\alpha\right)=\tau_{r\varphi}\left(r,\alpha\right)=0 \tag{2}$$

$$\sigma_r\left(1,\varphi\right)=f_1\left(\varphi\right),\qquad \tau_{r\varphi}\left(1,\varphi\right)=f_2\left(\varphi\right)\qquad 0\le\varphi\le\alpha \tag{3}$$

где $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ –заданные функции, удовлетворяющие условиям Дирихле. Выражения компонентов напряжений σ_r , σ_φ и $\tau_{r\varphi}$ через функцию Эри имеют вид

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2},\ \ \sigma_\varphi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2},\ \ \tau_{r\varphi}=-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \tag{4}$$

Методом разделения переменных решение бигармонического уравнения (1) представляется в виде

$$\Phi\left(r,\varphi\right)=r^{\lambda+1}\left[AS^{+}+BC^{+}+CS^{-}+DC^{-}\right] \tag{5}$$

где A,B,C,D –постоянные интегрирования, λ –произвольный параметр,

$$S^{\pm}=\sin\left(\lambda\pm1\right)\varphi,\ \ C^{\pm}=\cos\left(\lambda\pm1\right)\varphi$$

Используя уравнения состояний, уравнения Коши, а также (4) и удовлетворяя граничным условиям (2), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирований A, B, C, D

$$\lambda^+ A + \lambda^- C = 0, \quad \lambda^+ \nu^+ A + \left(\lambda^- \nu^+ + 4\right) C = 0 \tag{6}$$

$$\lambda^+ C^+ A - \lambda^+ S^+ B + \lambda^- C^- C - \lambda^- S^- D = 0$$

$$\lambda^+ \nu^+ C^+ A - \lambda^+ \nu^+ S^+ B - \left(\lambda^- \nu^+ + 4\right) C^- C - \left(\lambda^- \nu^+ + 4\right) S^- D = 0$$

где $\lambda^{\pm} = \lambda \pm 1,\ \nu^{\pm} = \nu \pm 1,\ \lambda$ –коэффициент Пуассона.

Из первых двух уравнений следует

$$A = C = 0 \tag{7}$$

а из двух последних

$$\sin\left(\lambda + 1\right)\alpha \cdot \sin\left(\lambda - 1\right)\alpha = 0$$

Отметим, что уравнение (8) можно получить разными методами [1,2,3,4].Здесь был использован подход работ [5,6].Корни уравнения (8)

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{\alpha} + 1, \quad \tilde{\lambda}_n = \frac{\pi n}{\alpha} - 1 \qquad \left(k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right) \tag{9}$$

действительные и простые.

Требования конечности энергии упругой деформации в малой окрестности угловой точки сектора при конечной внешней нагрузке накладывает условие на корни уравнения (8):

$$\lambda_k > 0, \quad \tilde{\lambda}_n > 0 \tag{10}$$

Условие (10), в зависимости от величины угла раствора сектора α, ограничивает пределы изменения k и n, а именно:

I. для $0 < \alpha < 2\pi,\ (k = 0,1,2,\ldots),\ (n = 2,3,4,\ldots)$

II. для $0 < \alpha < \pi,\ \ (k = 0,1,2,\ldots),\ (n = 1,2,3,\ldots)$

III. для $\pi < \alpha < 2\pi,\ (k = -1,0,1,\ldots),\ (n = 2,3,4,\ldots)$

В данной работе рассматривается случай I.

Итак , рассмотрим функции вида [6]

$$\Phi_{kn}(r, \varphi) = D_k r^{\lambda_k + 1} \cos(\lambda_k - 1)\,\varphi + B_k r^{\tilde{\lambda}_n + 1} \cos(\tilde{\lambda}_n + 1)\,\varphi,$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots), \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

которые, естественно, удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям (2). Поэтому решение рассматриваемой задачи ищется в виде ряда

$$\Phi(r, \varphi) = 2D_0 + D_1 r^{\lambda_1 + 1} \cos(\lambda_1 - 1)\varphi + \sum_{k=2}^{\infty} \left[D_k r^{\lambda_k + 1} + B_k r^{\tilde{\lambda}_k + 1}\right] \cos\alpha_0 k\varphi \tag{11}$$

где $\alpha_0 = \pi / \alpha$.

Тогда из (4) следует

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \tau_{r\varphi} \\ \sigma_\varphi \end{Bmatrix} = D_0 \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} + D_1 \begin{Bmatrix} (1+\alpha_0)(2-\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi \\ (1+\alpha_0)\,\alpha_0 \sin\alpha_0\varphi \\ (1+\alpha_0)(2+\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi \end{Bmatrix} r^{\alpha_0} + \tag{12}$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \left[D_k \lambda_k \begin{Bmatrix} (3-\lambda_k) \\ (\lambda_k - 1) \\ (\lambda_k + 1) \end{Bmatrix} r^{\lambda_k - 1} + B_k \tilde{\lambda}_k (\tilde{\lambda}_k + 1) \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} r^{\tilde{\lambda}_k - 1} \right] \begin{Bmatrix} \cos\alpha_0 k\varphi \\ \sin\alpha_0 k\varphi \\ \cos\alpha_0 k\varphi \end{Bmatrix}$$

Удовлетворяя граничным условиям (3), получим

$$
\begin{aligned}
&2D_0 + D_1(1+\alpha_0)(2-\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi c +\\
&+\sum_{k=r}^{\infty}\left[D_k\lambda_k(3-\lambda_k) - B_k\tilde{\lambda}_k(\tilde{\lambda}_k+1)\right]\cos\alpha_0 k\varphi = f_1(\varphi)\\
&D_1(1+\alpha_0)\,\alpha_0\sin\alpha_0\varphi +\\
&+\sum_{k=r}^{\infty}\left[D_k\lambda_k(\lambda_k-1) + B_k\tilde{\lambda}_k(\tilde{\lambda}_k+1)\right]\sin\alpha_0 k\varphi = f_2(\varphi)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Умножая первое уравнение (13) на $\cos\alpha_0 m\varphi$ $(m = 0,1,2,...)$, а второе уравнение – на $\sin\alpha_0 m\varphi$ $(m = 1,2,3,...)$ и интегрируя по φ в интервале $(0,\alpha)$, находим

$$
2D_0 = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} f_1(\varphi)\,d\varphi, \tag{14}
$$

$$
D_1(1+\alpha_0)(2-\alpha_0) = \frac{2}{\alpha}\tilde{f}_{11},\ D_1(1+\alpha_0)\alpha_0 = \frac{2}{\alpha}\tilde{f}_{21}
$$

$$
D_m\lambda_m = \frac{1}{\alpha}\left(\tilde{f}_{1m} + \tilde{f}_{2m}\right),\ B_m\tilde{\lambda}_m(\tilde{\lambda}_m+1) = \left(\tilde{f}_{1m} + \tilde{f}_{2m}\right)(3-\lambda_m) - 2\tilde{f}_{1m} \tag{15}
$$

$$
\tilde{f}_{1m} = \int_0^{\alpha} f_1(\varphi)\cos\alpha_0 m\varphi d\varphi,\quad \tilde{f}_{2m} = \int_0^{\alpha} f_2(\varphi)\sin\alpha_0 m\varphi d\varphi \tag{16}
$$

При этом имеет место соотношение

$$
\alpha_0\tilde{f}_{11} = (2-\alpha_0)\tilde{f}_{21} \tag{17}
$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи (1)–(3) при внешних нагрузках, удовлетворяющих условию (17), представлено в виде сходящихся рядов (12), коэффициенты которых определяются в замкнутой форме (14), (15).

Когда $\alpha_0 = 2$ $(\alpha = \pi/2)$ из (14) и (17) следует, что $\tilde{f}_{11} = 0$. Последнее имеет место, когда: а) $f_1(\varphi) = 0$, б) $f_1(\varphi)$ является четной функцией относительно биссектрисы сектора. Тогда D_1 определяется из последнего уравнения (14).

Случай $\alpha_0 = 1$ $(\alpha = \pi)$ соответствует задаче об упругом полукруге, прижатом по диаметру к гладкой жесткой опоре.

При произвольном значении α случаи а$'$) и б$'$) имеют место также при $\tilde{f}_{21} = 0$, т.е., если: а) $f_2(\varphi) = 0$, б) $f_2(\varphi)$–нечетная функция относительно линии $\varphi = \alpha/2$.

В условиях общего нагружения границы $r = 1$, когда по крайней мере $\tilde{f}_{2j} \neq 0$ или $\tilde{f}_{3j} \neq 0$ $(j = 1,2)$, особенности напряжений в окрестности вершины сектора возникают при $\alpha > \pi$. Причем, в зависимости от величины угла α, порядок особенности $\tilde{\lambda}_k - 1 = \alpha_0 k - 2$ изменяется в пределах

1) $-1 < 2\alpha_0 - 2 < 0$, когда $\pi < \alpha < 2\pi,\quad k = 2$ (18)

2) $-0{,}5 < 3\alpha_0 - 2 < 0$, когда $3\pi/2 < \alpha < 2\pi,\quad k = 3$

Важно отметить, что при подходе к вершине сектора по направлениям $\varphi = \alpha/4$ и $\varphi = 3\alpha/4$, только коэффиценты при особенности первого типа становятся равными нулю (для напряжений σ_r и σ_φ), а при подходе по направлениям $\varphi = \alpha/6,\ \varphi = 3\alpha/6,\ \varphi = 5\alpha/6$ – коэффициенты при особенности второго типа. Так что, при приближении к точке $r = 0$ (в частности к вершине трещины, когда $\alpha \to 2\pi$) по любому направлению, напряжения всегда имеют особенность первого или второго типа .

Силы P_α и P_0, действующие на штампы со стороны сектора, определяются интегрированием σ_φ в интервале $(0,\alpha)$ при $\varphi=\alpha$ $\varphi=0$

$$\begin{aligned} P_\alpha &= \frac{1}{\sin\alpha}\left[\int_0^\alpha f_1(\varphi)\cos\varphi d\varphi - \int_0^\alpha f_2(\varphi)\sin\varphi d\varphi\right] \\ P_0 &= \frac{1}{\sin\alpha}\left[\int_0^\alpha f_1(\varphi)\cos(\alpha-\varphi)\,d\varphi - \int_0^\alpha f_2(\varphi)\sin(\alpha-\varphi)\,d\varphi\right] \end{aligned} \tag{19}$$

Из условий статического равновесия штампов следует, что внешние силы, действующие на штампы, равны по величине и противоположны по направлению силам P_α и P_0.Три уравнения равновесия статики для сектора (без штампов) удовлетворяются тождественно.

Рассмотрим частный пример нагружения сектора , когда на дуге $r=1$ заданы нормальные нагрузки в виде двух сосредоточенных сил и касательные напряжения

$$\begin{aligned} f_1(\varphi) &= P_1\left[\delta\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}-\varphi_1\right)+\delta\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}+\varphi_2\right)\right] \\ f_2(\varphi) &= \frac{2\alpha_0 P_1}{\alpha(2-\alpha_0)}\left[-\sin\frac{\pi}{\alpha}\varphi_1+\sin\frac{\pi}{\alpha}\varphi_2\right]\sin\frac{\pi}{\alpha}\varphi \end{aligned} \tag{20}$$

Тогда из (17) следует

$$\tilde{f}_{1m} = P_1\left[\cos\pi k\left(\frac{1}{2}+\frac{\varphi_1}{\alpha}\right)+\cos\pi k\left(\frac{1}{2}-\frac{\varphi_2}{\alpha}\right)\right], \quad (m=1,2,...)$$

$$\tilde{f}_{21} = \frac{2\alpha_0 P_1}{2-\alpha_0}\left[-\sin\frac{\pi}{\alpha}\varphi_1+\sin\frac{\pi}{\alpha}\varphi_2\right], \ \tilde{f}_{2m}=0, \quad (m=2,3,...)$$

при этом выполняется соотношение (17).

Формулы (12) для напряжений примут вид

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \tau_{r\varphi}\\ \sigma_\varphi\end{Bmatrix} &= D_0\begin{Bmatrix}2\\0\\2\end{Bmatrix}+\frac{2\tilde{f}_{21}}{\alpha}\begin{Bmatrix}\alpha_0^{-1}(2-\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi\\ \sin\alpha_0\varphi\\ \alpha_0^{-1}(2-\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi\end{Bmatrix} r^{\alpha_0} + \\ &+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=2}^{\infty}\tilde{f}_{1k}\left[\begin{Bmatrix}(2-\alpha_0 k)\\ \alpha_0 k\\ (2+\alpha_0 k)\end{Bmatrix} r^{\alpha_0 k} - \alpha_0 k\begin{Bmatrix}-1\\1\\1\end{Bmatrix} r^{\alpha_0 k-2}\right]\begin{Bmatrix}\cos\alpha_0 k\varphi\\ \sin\alpha_0 k\varphi\\ \cos\alpha_0 k\varphi\end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{21}$$

Как следует из (21), при подходе к вершине сектора $(r\to 0)$, напряжения имеют особенности как первого, так и второго типов, причем коэффициенты при этих особенностях отличны от нуля.

Если в граничных условиях (20) $\varphi_1=\varphi_2$, то $f_2(\varphi)=0$ и приходим к задаче, рассмотренной в работе [7] совершенно иным путем.Из (16) следует $\tilde{f}_{11}=\tilde{f}_{21}=0$ и в формулах (21) исчезают только члены с коэффициентами $\tilde{f}_{21}$. И здесь, когда $\alpha\to 2\pi$, первый тип особенности напряжений стремится к –1, коэффициент которой при всем желании не равняется нулю.В этом частном случае из (19) имеем

$$P_\alpha = P_0 = P_1\,\frac{\cos\varphi_1}{\sin\alpha/2} \tag{22}$$

Формулы (22) легко получаются также из условий равновесия внешних сил, действующих на систему сектор+штампы.

Поставленная задача (в общем случае нагружения) не корректна при $\alpha = 2\pi$. Об этом подробно говорится в работе [8].

Легко показать, что при нагружении сектора внешними силами

$$f_1(\varphi) = P_1 \frac{2-\alpha_0}{\alpha_0} \cos\alpha_0\varphi, \quad f_2(\varphi) = P_1 \sin\alpha_0\varphi,$$

окрестность вершины сектора будет находиться в малонапряженном состоянии [9], независимо от угла раствора сектора, в частности, при $\alpha = 2\pi$.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \tau_{r\varphi} \\ \sigma_\varphi \end{Bmatrix} = \frac{P_1}{\alpha_0} \begin{Bmatrix} (2-\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi \\ \alpha_0 \sin\alpha_0\varphi \\ (2+\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi \end{Bmatrix} r^{\alpha_0}$$

В заключение отметим, что полученные в данной работе результаты вносят определенную поправку и уточнение результатов и выводов работы [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Williams M.L.Stress Singularities Resulting from various boundary conditions in angular corners of plats in extention.//Journal of applied mechanics. 1952. Vol 19.N4. P. 526–528.
2. Каландия А. И. Замечания об особенности упругих решений вблизи углов. //ПММ. 1969. Т. 33. N1. С. 132–135.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М. : Изд-во АН СССР. 1963. 567 с.
4. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической физики. М.: Наука. 1981. 688 с.
5. Чобанян К. С. О функции напряжений для плоской задачи теории упругости.// ДАН АрмССР. 1961. Т 32. N2. С. 69–77.
6. Аветисян А. Г. Особенности напряжений в составном теле при контурных условиях гладкого контакта. Исследование по теории пластин и оболочек. Изд-во Казанского ун-та. 1976. Вып. 12. С. 85—94.
7. Макарян В. С., Саркисян В. Г. Об одной граничной задаче для упругого кругового сектора. // Изв. АН АрмССР. Механика. 1999. N2. С. 3–11.
8. Саргсян А. М. Об особенности напряжений в одной задаче теории упругости для клина. // Изв. НАН Армении. 2007. N . С. .(в печати)
9. Чобанян К. С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР. 1987. 338 с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Саргсян Азат Мкртычевич
Кандидат физ.-мат.наук, ведущий научный сотрудник
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна $24^б$
Тел: (+37410) 52-48-90

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Саркисян В.Г.

Рассматривается плоская задача теории упругости для прямоугольной и кольцевой областей, когда на одном крае области граничные условия недоопределены, а на других краях области эти условия переопределены.

В случае прямоугольной области представлением общего решения бигармонического уравнения в виде рядов Фурье с неизвестными коэффициентами задача приведена к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Исследована регулярность системы, которая оказывается сопоставимой с случаем соответствующей задачи с классическими граничными условиями. Решение иллюстрируется примером, представленным конечной суммой полиномов. Для кольцевой области при осесимметричной нагрузке построено решение соответствующей термоупругой задачи.

1. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для прямоугольной области $0 \le x \le l,\ \ 0 \le y \le h$. Когда на крае области $y = h$ граничные условия не определены, а на краях $x = 0$ и $x = l$ области переопределены. Подобная задача для полосы решена в [1], где показано, что полученное решение совпадает с регуляризованными решениями [3,4] этой некорректной задачи. Здесь аналогичная задача решается для прямоугольной области.

Пусть заданы следующие граничные условия.

На грани $x = 0,\ \ 0 \le y \le h$

$$\tau_{xy}(0, y) = 0, \qquad \sigma_x(0, y) = g_0(y), \qquad u(0, y) = u_0(y) \tag{1.1}$$

На грани $x = l,\ \ 0 \le y \le h$

$$\tau_{xy}(l, y) = 0, \qquad \sigma_x(l, y) = g_1(y), \qquad u(l, y) = u_1(y) \tag{1.2}$$

На грани $0 \le x \le l,\ \ y = 0$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \qquad \sigma_y(x, 0) = f(x) \tag{1.3}$$

как видно, хотя общее количество необходимых граничных условий сохранено, однако на грани $y = h$ никакие граничные условия не заданы.

Представим напряжения и перемещения через бигармоническую функцию напряжений Эри $\Phi(x, y)$ [2]

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) = {} & \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k \operatorname{ch}\alpha_k y + B_k \operatorname{sh}\alpha_k y + \alpha_k y\left(C_k \operatorname{ch}\alpha_k y + D_k \operatorname{sh}\alpha_k y\right)\right]\cos\alpha_k y + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty}\left[E_k \operatorname{ch}\beta_k x + F_k \operatorname{sh}\beta_k x + \beta_k x\left(G_k \operatorname{ch}\beta_k x + H_k \operatorname{sh}\beta_k x\right)\right]\cos\beta_k y + t_1 x^2 + t_2 y^2\end{aligned} \tag{1.4}$$

где

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{l}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{h}$$

l – длина прямоугольника, h – высота, ν, E – коэффициент Пуассона и модуль упругости.

Удовлетворяя граничным условиям (1.1)-(1.3), получим

$$\begin{gathered} B_k + C_k = 0 \\ G_k = -F_k = \frac{1}{E}\frac{1}{\beta_k h}\int_0^h u_0(y)\cos\beta_k y\,dy \\ H_k \operatorname{sh}\beta_k l + G_k \operatorname{ch}\beta_k l = \frac{1}{E}\frac{2}{\beta_k h}\int_0^h u_1(y)\cos\beta_k y\,dy \\ \left(E_k + H_k\right)\operatorname{sh}\beta_k l + \beta_k l\left(G_k \operatorname{sh}\beta_k l + H_k \operatorname{ch}\beta_k l\right) = 0 \end{gathered} \tag{1.5}$$

$$A_k=\frac{4}{\pi^2 E}\frac{h}{l}\sum_{p=1}^{\infty} b_{pk}\left(2(-1)^k\int_0^h u_1(y)\cos\beta_p y dy-\int_0^h u_0(y)\cos\beta_p y dy-\right)-$$
$$-\frac{2l}{\pi^2 k^2}\int_0^l f(x)\cos\alpha_p x dx,$$
$$t_2-\nu t_1=\frac{1}{2lh}\int_0^h u_1(y)dy;\qquad t_2=\frac{1}{h}\int_0^h g_1(y)dy$$

и совокупность следующих бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$(-1)^p\sum_{k=1}^{\infty}a_{pk}x_k^{(1)}-\sum_{k=1}^{\infty}a_{pk}x_k^{(2)}=\frac{\pi}{2\gamma_p^2}\int_0^h g_0(y)\cos\beta_p y dy+$$
$$+M_p\frac{\pi^2}{2El\gamma_p}\int_0^h u_0(y)\cos\beta_p y dy-N_p\frac{\pi}{2El\gamma_p}\int_0^h u_1(y)\cos\beta_p y dy \tag{1.6}$$
$$(-1)^p\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_{pk}x_k^{(1)}-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_{pk}x_k^{(2)}=\frac{\pi}{2\gamma_p^2}\int_0^h g_1(y)\cos\beta_p y dy+$$
$$+N_p\frac{\pi^2}{2El\gamma_p}\int_0^h u_0(y)\cos\beta_p y dy-M_p\frac{\pi}{2El\gamma_p}\int_0^h u_1(y)\cos\beta_p y dy$$

где

$$b_{pk}=\frac{p^2}{\left(p^2+\eta_k^2\right)},\quad a_{pk}=\frac{k}{\left(k^2+\gamma_p^2\right)^2},\quad \eta_k=\frac{h}{l}k,\quad \gamma_p=\frac{l}{h}p,$$
$$M_p=\operatorname{cth}\gamma_p\pi+\frac{\gamma_p\pi}{\operatorname{sh}^2\gamma_p\pi},\quad N_p=\frac{1+\gamma_p\operatorname{cth}\gamma_p\pi}{\operatorname{sh}\gamma_p\pi},$$
$$\alpha_k^2\left(C_k\operatorname{ch}\alpha_k h+D_k\operatorname{sh}\alpha_k h\right)=X_k^{(1)},\quad \alpha_k^2 C_k=X_k^{(2)}$$

Квазивполне регулярность бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (1.6) очевидна.

Отметим, что первая основная задача теории упругости для прямоугольника решена в [2], где доказана квазивполне регулярность соответствующей системы уравнений.

Напряжения и премещения через решения бесконечных систем (1.6) во всей области, в том числе на грани $y=h$, могут быть определены формулами (1.4).

Для иллюстраций приведем пример решения рассмотренной задачи в полиномах.

Представим функцию напряжений в виде

$$\varphi(x,y)=a_1x^3+a_2xy^2+a_3x^2y+a_4y^3+a_5x^2+a_6y^2+a_7xy \tag{1.7}$$

Пусть заданы значения граничных функций

$$g_0(y)=b_1y+b_2,\quad g_1(y)=b_3y+b_4$$
$$u_0(y)=b_5y+b_6,\quad u_1(y)=b_7y+b_8,\quad f(x)=b_9x+b_{10} \tag{1.8}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.1)-(1.3) получим, что решение в виде (1.7) существует, когда

$$a_2=a_3=a_7=0,\quad a_4=\frac{b_1}{6}=\frac{b_3}{6}=\frac{b_7}{6l},\quad a_6=\frac{b_2}{2} \tag{1.9}$$
$$a_1=\frac{b_9}{6},\quad a_5=\frac{b_{10}}{2},\quad b_8=\left(b_2-\frac{b_7}{2}\nu l-b_{10}\nu\right)l$$

Функция напряжений получает вид

$$\varphi = \frac{b_9}{6}x^3 + \frac{b_1}{6}y^3 + \frac{b_{10}}{2}x^2 + \frac{b_2}{2}y^2 \tag{1.10}$$

На грани $y = h$ для нормальных напряжений получаем

$$\sigma_y = b_9 x + b_{10} \tag{1.11}$$

2. Рассмотрим задачу определения термоупругих напряжений в длинном цилиндре радиуса b с концентрическим круглым отверстием радиуса a. Пусть цилиндр находится в состоянии плоской деформации в осесимметричном стационарном тепловом поле.

Считаем, что известны следующие термомеханические граничные условия:

$$T(r) = T_2 \qquad r = b, \qquad\qquad \frac{dT(r)}{dr} = \bar{T} \qquad r = b \tag{2.1}$$

$$\sigma_r(r) = 0 \qquad r = b, \qquad u_r(r) = u_0 \qquad r = b, \quad \tau(r) = 0 \tag{2.2}$$

где $T(r)$ – температура, $\bar{T}$ – поток тепла через внешнего границу цилиндра, $\sigma_r(r)$ – нормальные радиальные напряжения, τ – касательные напряжения, $u(r)$ – радиальные перемещения точек цилиндра.

Как видно, и термические, и механические граничные условия на внешней границе цилиндра переопределены, а на внутренней границе они недоопределены.

Такая задача возникает при определении температуры и давления в длинных трубопроводах, сосудах, когда измерения возможно провести только с внешней стороны [5].

Определим распределения температуры при граничных условиях (2.1). Решением уравнения теплопроводности

$$\nabla T(r) = \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0 \tag{2.3}$$

является функция

$$T = T_2 + \bar{T}b\ln\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{b}} \tag{2.4}$$

Определим термоупругие напряжения в условиях (2.2) и (2.4). Уравнение равновесия в рассматриваемом случае будет:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \tag{2.5}$$

где σ_θ – окружное напряжение

Используя соотношения между напряжениями и деформациями

$$\begin{gathered}
\varepsilon_r = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_r - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_\theta\right) + (1+\nu)\alpha T \\
\varepsilon_\theta = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_\theta - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_r\right) + (1+\nu)\alpha T \\
\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}
\end{gathered} \tag{2.6}$$

где α – коэффициент линейного теплового расширения. Для перемещений получим уравнение

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(ru)}{dr}\right) = \alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{dT}{dr} \tag{2.7}$$

интегралом которого является выражение

$$u = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\frac{1}{r}\int_a^r Trdr + \frac{2\nu\alpha r}{(1-\nu)(b^2-a^2)}\int_a^b Tdr + C_3\frac{2(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{C_4}{r} \tag{2.8}$$

Определяя C_3 и C_4 из граничных условии (2.2), для σ_r получим следующие выражения:

$$\sigma_r = \frac{E\alpha}{1-\nu}\left[T_2\frac{1+\nu}{2}\left(\frac{b^2}{r^2}-1\right)-\frac{b\overline{T}}{4}\left(\ln\frac{r}{b}+\frac{\frac{b^2}{r^2}-1}{\frac{b^2}{a^2}-1}\nu\ln\frac{a}{b}-\left(\frac{b^2}{r^2}-1\right)(1+\nu)\right)\right]- \tag{2.9}$$

$$-\frac{E}{2}\left(\frac{b^2}{r^2}-1\right)\frac{u_0}{b}$$

Рассмотрим численный пример.

При

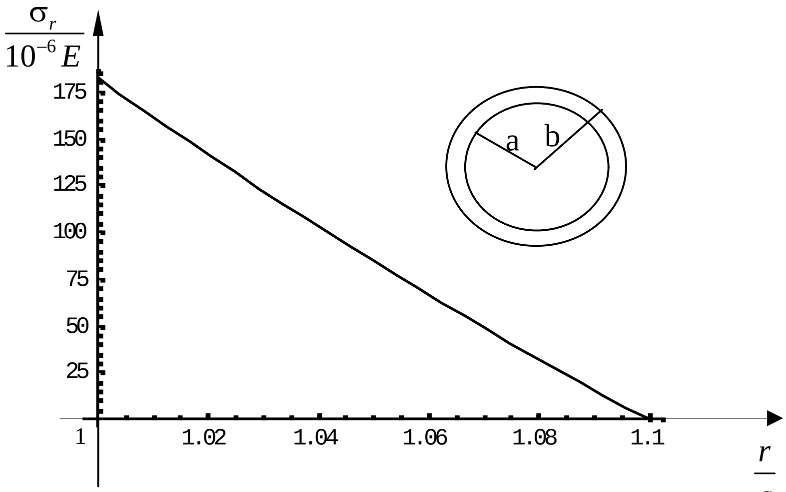
$$a=1м,\ \ b=1.1a,\ \ \alpha=12\cdot10^{-6},\ \ \frac{u_0}{b}=\frac{1}{2200},\quad \nu=0.25,\ \ T_2=100^0C,\ \ \overline{T}b=13.101$$

получим для температуры и давления по формулам (2.4) и (2.9) на внутренней стороне

$$T_1=98.7,\ \ \sigma_r(a)=182.27\cdot10^{-6}E$$

Изменение σ_r по толщине стенок цилиндра иллюстрировано на фиг. 1.

Рассмотренное выше показывает, что построено решение задач теории упругости и термоупругости и для прямоугольной, и для кольцевой областей с неклассическими граничными условиями, возможно, разработанными для классических задач математическим аппаратом. Очевидно, что полученные решения точны и единственны, хотя остаются некорректными в смысле отсутствия непрерывной зависимости решения от начальных данных.



Фиг. 1

ЛИТЕРАТУРА

1. Хачикян А.С. О гармонических и бигармонических задачах для уравнений с неклассическими граничными уравнениям. //Изв. НАН РА. Механика. Т.53. №4. 2006. С.24-31.
2. Абрамян Б.Л. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника: //ПММ. Т.XXI. Вып.1. 1957. С.89-100.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285с.
4. Латтес Р., Лионс Ж.Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970. 336с.
5. Иванов В.К. Задача Коши для уравнений Лапласа в бесконечной полосе. //Дифференциальные уравнения. 1965. Т.1. №1. С.131-136.

<u>Сведения об авторе</u>

Саргсян Вардан Гарегинович

Кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт механики НАН РА

Адрес: Ереван 375064, ул. А. Бабаджаняна 67, кв. 36; Тел: (+37410)74-02-89

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Саркисян В.С., Безоян Э.К.

Строительные и композиционные материалы, как правило, обладают свойствами вязкоупругости, которые в поперечном направлении обладают существенно более слабыми прочностными свойствами, чем в продольном. Прочность конструкций из таких материалов в значительной степени определяется деформациями поперечного сдвига.

В последние годы значительное внимание уделяется деформационным расчетам, основанным на линейной теории вязкоупругости. Вместе с тем образовался разрыв между разработанностью проблемы в этих рамках и почти отсутствием обоснованного расчетного аппарата, учитывающего нелинейную вязкоупругость, базирующегося на достаточном числе экспериментальных данных. В настоящей работе построен расчетный аппарат для определения напряженно-деформированного состояния нелинейно-вязкоупругих оболочек и пластин с учетом поперечного сдвига.

Рассматривается тонкая пологая оболочка, прямоугольная в плане $(a \times b)$, с постоянной толщиной h, загруженная равномерно-распределенной нагрузкой q, нормальной к ее срединной поверхности из материала, подчиняющегося закономерностям нелинейной вязкоупругости по теории Н.Х.Арутюняна [1].

Выпишем соотношения нелинейной теории вязкоупругости для момента времени $t > t_0$ с учетом старения, для случая пространственного напряженного состояния, полагая, что коэффициент Пуассона для упругомгновенной деформации $\upsilon_1(\tau)$ и деформации ползучести $\upsilon_2(t,\tau)$ постоянен,т.е.

$$\upsilon_1(\tau) = \upsilon_2(t,\tau) = \upsilon = \text{const}$$

$$e_{ij} = (2-\delta_{ij})\left\{\frac{(1+\upsilon)\sigma_{ij}(t) - \upsilon\delta_{ij}S(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^{t}\left[(1+\upsilon)\sigma_{ij}(\tau) - \upsilon\delta_{ij}S(\tau)\right]\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right]d\tau - \right.$$

$$\left. -\int_{t_0}^{t}\left[(1+\upsilon)\sigma_{ij}(\tau) - \upsilon\delta_{ij}S(\tau)\right]F\left[\sigma_0(\tau)\right]\frac{\partial}{\partial\tau}C(t,\tau)d\tau\right\}, \quad \text{(i,j=x,y,z)} \qquad (1.1)$$

Здесь все обозначения общепринятые.

Решая задачу для определения напряженно-деформированного состояния оболочек и пластин, применим следующие предположения [2]:

а) нормальное к срединной поверхности перемещение u_z не зависит от координаты z, т.е.

$$e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad u_z = W(x,y,t) \; \sigma_{zz} = \upsilon(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \qquad (1.2)$$

б) деформации сдвига e_{xz} и e_{yz} по толщине оболочки меняются по заданному закону

$$e_{xz} = \zeta_1(z)\varphi(x,y,t); \quad e_{yz} = \zeta_2(z)\psi(x,y,t) \qquad (1.3)$$

где $\varphi(x,y,t)$ и $\psi(x,y,t)$ – искомые функции деформации сдвига, $\zeta_1(z)$ и $\zeta_2(z)$ – функции, характеризующие закон изменения деформации сдвига по толщине оболочки, причем $\zeta_i(\pm h/2)$ =0;

в) предполагаем также, что интенсивность напряжения $\sigma_0(\tau)$ равна соответствующим срединным величинам по толщине оболочки интенсивности напряжений, найденным по теории линейной вязкоупругой оболочки

$$\sigma_0(\tau) = \overline{\sigma_0}(\tau) = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{0.\wedge} dz \qquad (1.4)$$

Для тонких гибких оболочек справедливо принять, что перемещения в плоскости U и V малы по сравнению с ее толщиной h, а перемещение по нормали к проекции оболочки не малы по сравнению с h. Следовательно, в каждом соотношении деформации перемещения нужно учитывать первый нелинейный член, содержащий перемещению $W(x,y,t)$ [3], при этом, имея в виду (1.5), получим формулы для определения полных деформаций в произвольной точке оболочки с учетом больших перемещений $W((x,y,t)$;

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - K_1 W + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + J_{01}(z)\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$e_{yy} = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} - K_2 W + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 - z\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + J_{02}(z)\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y} - 2z\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + J_{01}(z)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + J_{02}(z)\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (1.5)$$

где принято

$$J_{01}(z) = \int_0^z \zeta_1(z)\,dz; \quad J_{02}(z) = \int_0^z \zeta_2(z)\,dz \qquad (1.6)$$

Из уравнения (1.1), с учетом предположений а), б), в), соотношения (1.5), а также уравнения равновесия элемента оболочки [3], получим полную систему интегро-дифференциальных уравнений для определения внутренних усилий и перемещений оболочки с учетом поперечного сдвига и нелинейной вязкоупругости материала.

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + \nabla_k^2 \Phi + L(W,\Phi) + q = 0$$

$$(I-K)\nabla^4\Phi + \frac{E(t)h}{1-\upsilon^2}\left[\nabla_k^2 W + 0.5L(W,W)\right] = \beta_0 \frac{1}{1-\upsilon} K_1\left(L_1(\mathrm{g};\Phi)\right)$$

$$(I-K)M_{xx} + D\left[(1-\upsilon)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \upsilon\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right] + L_2(\varphi,\psi) = \beta_0 K_1(\mathrm{g}M_{xx})$$

$$(I-K)M_{yy} + D\left[(1-\upsilon)\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \upsilon\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right] + L_3(\varphi,\psi) = \beta_0 K_1(\mathrm{g}M_{yy}) \qquad (1.7)$$

$$(I-K)\left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right) - \frac{E(t)}{2(1+\upsilon)} J_{01}(h)\varphi = \beta_0 K_1\left[\mathrm{g}\left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)\right]$$

$$(I-K)\left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y}\right) - \frac{E(t)}{2(1+\upsilon)} J_{02}(h)\psi = \beta_0 K_1\left[\mathrm{g}\left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y}\right)\right]$$

где принято следующее операторное обозначение:

$$L_1(\mathrm{g};\Phi) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\mathrm{g}\left((1-\upsilon)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \upsilon\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\mathrm{g}\left((1-\upsilon)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \upsilon\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)\right] + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\mathrm{g}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y \partial y}\right)$$

$$L_2(\varphi,\psi) = \frac{E(t)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left[(1-\upsilon)\bar{J}_{01}(h)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \upsilon\bar{J}_{02}(h)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]$$

$$L_3(\varphi,\psi) = \frac{E(t)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left[\upsilon\bar{J}_{01}(h)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (1-\upsilon)\bar{J}_{02}(h)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right] \qquad (1.8)$$

$$L_4(\varphi,\psi)=\frac{E(t)}{2(1+\upsilon)}\left[\overline{J}_{01}(h)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\overline{J}_{02}(h)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]$$

$$\overline{J}_{01}(h)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}J_{01}(z)zdz\ ;\qquad \overline{J}_{02}(h)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}J_{02}(z)zdz$$

$$J_{01}(h)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\zeta_1(z)dz;\qquad J_{02}(h)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\zeta_2(z)dz \tag{1.9}$$

$I(f)=f$ – единичный оператор

$$K(f)=\int_{t_0}^{t}f(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{E(t)}{E(\tau)}+\alpha E(t)C(t,\tau)\right]d\tau;$$

$$K_1(\mathrm{g}\ f)=\int_{t_0}^{t}f(\tau)\mathrm{g}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\big(E(t)C(t,\tau)\big)d\tau \tag{1.10}$$

$\left[\dfrac{\overline{\sigma_0(\tau)}}{R_0(\tau)}\right]^{m-1}=\mathrm{g}(x,y,\tau)$ – безразмерная величина

остальные обозначения общепринятые.

Система уравнений (1.7) представляет собой полную систему разрешающих интегро-дифференциальных уравнений тонких пологих нелинейно-вязкоупругих оболочек и пластин для определения перемещений и усилий, с учетом поперечного сдвига.

Для решения уравнений (1.7) принимаем, что материал оболочки обладает слабой нелинейностью, причем $\left|\beta_0\overline{\sigma_0}\right|<1.$

Неизвестные функции $(W,\Phi,M_{ij},\varphi,\psi)$ представляем в виде ряда по степеням малого параметра $\ _0$, т.е.

$$\left(W,\Phi,M_{ij},\ddot{\ },\cdot\ \right)=\sum_{n=0}^{\infty}{}_0^n\left(W_n,\Phi_n,M_{ij(n)},\ddot{\ }_n,\cdot_n\right) \tag{1.11}$$

Подставляя (1.11) в (1.7), и после некоторых несложных преобразований получим следующие рекуррентные системы разрешающих интегро-дифференциальных уравнений:

$$\overline{D}(1-\upsilon)\nabla^4W_n-\nabla_k^2W_n-L(W_n;\Phi_n)+(I+R)\Psi_1(\varphi_n;\psi_n)=$$
$$=q_n+(I+R)K_1\left[\Psi_2\left(\mathrm{g};M_{ij(n-1)}\right)\right]$$
$$\nabla^4\Phi_n+\overline{B}\left[\nabla_k^2w_n+0.5L(w_n;w_n)\right]=\frac{1}{1-\upsilon}(I+R)K_1\left[L_1(\mathrm{g};\Phi_{n-1})\right] \tag{1.12}$$
$$D(1-\upsilon)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2w_n+\Psi_3(\varphi_n;\psi_n)=K_1\left[\Psi_4\left(\mathrm{g};M_{xx(n-1)};M_{xy(n-1)}\right)\right]$$
$$D(1-\upsilon)\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2w_n+\Psi_5(\varphi_n;\psi_n)=K_1\left[\Psi_6\left(\mathrm{g};M_{xy(n-1)};M_{yy(n-1)}\right)\right]$$

а также $q_n=\begin{vmatrix}q & \quad n=0\\ 0 & \quad n=1,2,\ldots\end{vmatrix}\quad W_{-1}=\Phi_{-1}=M_{ij(-1)}$

где приняты следующие операторные обозначения:

$$\Psi_1(\varphi_n;\psi_n)=\frac{\partial^2 L_2(\varphi_n;\psi_n)}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 L_4(\varphi_n;\psi_n)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 L_3(\varphi_n;\psi_n)}{\partial y^2}$$

$$\Psi_2\left(g;M_{ij(n-1)}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(g\,M_{xx(n-1)}\right)+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(g\,M_{xy(n-1)}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(g\,M_{yy(n-1)}\right)$$

$$L_1(g;\Phi_{n-1})=\frac{\partial}{\partial y^2}\left[g\left((1-\upsilon)\frac{\partial^2\Phi_{n-1}}{\partial y^2}-\upsilon\frac{\partial^2\Phi_{n-1}}{\partial x^2}\right)\right]+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[g\frac{\partial^2\Phi_{n-1}}{\partial x\partial y}\right]+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g\left((1-\upsilon)\frac{\partial^2\Phi_{n-1}}{\partial x^2}-\upsilon\frac{\partial^2\Phi_{n-1}}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$\Psi_3(\varphi_n;\psi_n)=\frac{\partial}{\partial x}\left(L_2(\varphi_n;\psi_n)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(L_4(\varphi_n;\psi_n)\right)+\frac{E(t)}{2(1+\upsilon)}J_{01}(h)\varphi_n$$

$$\Psi_4\left(g;M_{xx(n-1)};M_{xy(n-1)}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(g\,M_{xx(n-1)}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(g\,M_{xy(n-1)}\right)-$$

$$-g\left(\frac{\partial}{\partial x}M_{xx(n-1)}+\frac{\partial}{\partial y}M_{xy(n-1)}\right)$$

$$\Psi_5(\varphi_n;\psi_n)=\frac{\partial}{\partial x}L_4(\varphi_n;\psi_n)+\frac{\partial}{\partial y}L_3(\varphi_n;\psi_n)+\frac{E(t)}{2(1+\upsilon)}J_{02}(h)\varphi_n \tag{1.13}$$

$$\Psi_6\left(g;M_{xy(n-1)};M_{yy(n-1)}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(g\,M_{xy(n-1)}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(g\,M_{yy(n-1)}\right)-$$

$$-g\left(\frac{\partial}{\partial x}M_{xy(n-1)}+\frac{\partial}{\partial y}M_{yy(n-1)}\right)$$

$$\nabla^4 W_n=\frac{\partial^4 W_n}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W_n}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 W_n}{\partial y^4};\quad \nabla_k^2 W_n=K_1\frac{\partial^2 W_n}{\partial y^2}+K_2\frac{\partial^2 W_n}{\partial x^2}$$

$$L(W_n;\Phi_n)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial x\partial y}\right) \tag{1.14}$$

$$L(W_n;W_n)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 W_j}{\partial x\partial y}\right)$$

здесь сумма распространена по всем целым неотрицательным решениям уравнений $i+j=k$.

Введена также $\overline{D}=D(I+R)$, $\mathrm{D}=\frac{E(t)h^3}{12(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}$, где $R(f)=\int_{t_0}^{t}f(\tau)R(t,\tau)d\tau$

$R(t,²)$ – резольвента ядра линейной ползучести по теории Н.Х.Арутюняна [1].

Система уравнений (1.12), с учетом начальных и граничных условий, является основной разрешающей системой уравнений пологих тонких нелинейно-вязкоупругих оболочек и пластин с учетом поперечного сдвига и нормального напряжения $\pm_z$.

Численный пример. Рассмотрена пологая гибкая оболочка, квадратная в плане ($a=b$), нагруженная равномерно-распределенной нагрузкой интенсивностью q, кривизна срединной поверхности оболочки принята $K = 2K_x a^2/h$; при неизменном значении a/h $q_0 = qa^4 / E(t) h^4$. Мера ползучести принята по [1]

$$C(t,\tau) = \varphi(\tau) f(t-\tau); \quad \varphi(\tau) = C + Ae^{-\mu\tau}; \quad f(t-\tau) = 1 - e^{-f(t-\tau)}$$

постоянные параметры приняты:

$$E(t) = E = 2{\bullet}10^4; \quad a/h = 5; \quad \gamma = 0.026{\bullet}30 = 0.78; \quad C_0 E = 18$$

$$A{\bullet}E = 9.84; \quad \upsilon = 0.25; \quad \beta_0 = 0.005; \quad \mu = 0.0065{\bullet}30 = 0.195$$

Задача решена в первом приближении по Бубнову–Галеркину. Решение системы уравнений (1.12) принято до третьего приближения. В результате вычислений получены значения перемещения W ((t) при длительном действии нагрузки в течение трех лет (t=36месяц).

Анализ результатов показывает, что влияние нелинейной вязкоупругости на приращение перемещений составляет 15-25 %, сравнимо с линейной вязкоупругостью. В случае же поперечного сдвига при прочих неизменных параметрах влияние нелинейной вязкоупругости на приращения составит 30-40 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х. Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448 с.
3. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1956.

Сведения об авторах

Саркисян Владимир Саркисович
Академик НАН РА, декан факультета механики ЕГУ
Адрес: ул.А.Манукяна 1, ЕГУ
Тел.: (+37410) 55-52-71

Безоян Эдуард Коломбосович
Кандидат техн. наук, директор государственного учреждения по реализации программы “Дорожное строительство”
Адрес: 0002, г. Ереван, ул. Сарьяна 22, 10 эт.
Тел.: (37410) 53-84-94, факс: (37410) 53-78-86
E-mail: lfroad@rambler.ru

ТЕОРИЯ УПРУГИХ МИКРОПОЛЯРНЫХ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН

Саркисян С.О., Фарманян А.Ж.

Введение. В данной работе на основе асимптотического метода [1] из общей трехмерной граничной задачи несимметричной теории упругости со свободным вращением для многослойных сред строятся континуальные модели микрополярных слоистых пластин. В зависимости от значений безразмерных физических констант материалов слоистой среды(в которых входит также масштабный фактор) построены три различные континуальные теории слоистых пластин: теория со свободным вращением; теория со стесненным вращением; теория «с малой сдвиговой жесткостью».

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим пластинку, состоящую из некоторого числа слоев постоянной толщины. Выберем плоскость отчета таким образом, чтобы над этой плоскостью располагалось n слоев, а под ней m слоев. Общую толщину слоистой пластинки обозначим через $2h$. Будем использовать декартову систему координат $x, y, z,$ располагая оси x, y в плоскости отсчета. Принимаем, что слои описываются уравнениями несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений.

Напряженное состояние каждого отдельно взятого слоя строим при помощи асимптотического метода интегрирования уравнений [1]

$$\frac{\partial\sigma_{1k}^i}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{2k}^i}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{3k}^i}{\partial z}=0\quad\left(\mathrm{k}=1;2;3;\ \mathrm{x}\to\mathrm{y}\to\mathrm{z}\right);\ \frac{\partial\mu_{11}^i}{\partial x}+\frac{\partial\mu_{21}^i}{\partial y}+\frac{\partial\mu_{31}^i}{\partial z}+\sigma_{23}^i-\sigma_{32}^i=0$$

$$\frac{\partial\mu_{12}^i}{\partial x}+\frac{\partial\mu_{22}^i}{\partial y}+\frac{\partial\mu_{32}^i}{\partial z}+\sigma_{31}^i-\sigma_{13}^i=0;\quad \frac{\partial\mu_{13}^i}{\partial x}+\frac{\partial\mu_{23}^i}{\partial y}+\frac{\partial\mu_{33}^i}{\partial z}+\sigma_{12}^i-\sigma_{21}^i=0$$

$$\frac{\partial u_1^i}{\partial x}=2\mu_i'\sigma_{11}^i+\lambda_i'\left(\sigma_{11}^i+\sigma_{22}^i+\sigma_{33}^i\right)\quad\left(1\to2\to3;\ \mathrm{x}\to\mathrm{y}\to\mathrm{z}\right)\tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u_2^i}{\partial x}-\omega_3^i=\left(\mu_i'+\alpha_i'\right)\sigma_{12}^i+\left(\mu_i'-\alpha_i'\right)\sigma_{21}^i;\qquad \frac{\partial u_1^i}{\partial y}+\omega_3^i=\left(\mu_i'+\alpha_i'\right)\sigma_{21}^i+\left(\mu_i'-\alpha_i'\right)\sigma_{12}^i$$

$$\frac{\partial u_3^i}{\partial x}+\omega_2^i=\left(\mu_i'+\alpha_i'\right)\sigma_{13}^i+\left(\mu_i'-\alpha_i'\right)\sigma_{31}^i;\qquad \frac{\partial u_1^i}{\partial z}-\omega_2^i=\left(\mu_i'+\alpha_i'\right)\sigma_{31}^i+\left(\mu_i'-\alpha_i'\right)\sigma_{13}^i$$

$$\frac{\partial u_3^i}{\partial y}-\omega_1^i=\left(\mu_i'+\alpha_i'\right)\sigma_{23}^i+\left(\mu_i'-\alpha_i'\right)\sigma_{32}^i;\qquad \frac{\partial u_1^i}{\partial z}+\omega_1^i=\left(\mu_i'+\alpha_i'\right)\sigma_{32}^i+\left(\mu_i'-\alpha_i'\right)\sigma_{23}^i$$

$$\frac{\partial\omega_1^i}{\partial x}=2\gamma_i'\mu_{11}^i+\beta_i'\left(\mu_{11}^i+\mu_{22}^i+\mu_{33}^i\right)\quad\left(1\to2\to3;\ \mathrm{x}\to\mathrm{y}\to\mathrm{z}\right)$$

$$\frac{\partial\omega_2^i}{\partial x}=\left(\gamma_i'+\varepsilon_i'\right)\mu_{12}^i+\left(\gamma_i'-\varepsilon_i'\right)\mu_{21}^i\quad\left(1\leftrightarrow2;\ \mathrm{x}\leftrightarrow\mathrm{y}\right)$$

$$\frac{\partial\omega_3^i}{\partial x}=\left(\gamma_i'+\varepsilon_i'\right)\mu_{13}^i+\left(\gamma_i'-\varepsilon_i'\right)\mu_{31}^i\quad\left(1\leftrightarrow3;\ \mathrm{x}\leftrightarrow\mathrm{z}\right)$$

$$\frac{\partial\omega_2^i}{\partial z}=\left(\gamma_i'+\varepsilon_i'\right)\mu_{32}^i+\left(\gamma_i'-\varepsilon_i'\right)\mu_{23}^i\quad\left(2\leftrightarrow3;\ y\leftrightarrow z\right)$$

Здесь σ_{mn}^i, $\mu_{\mathrm{nn}}^{\mathrm{i}}$ – силовые и моментные напряжения; u_i – перемещения; ω_i – независимые повороты; $\lambda_i;\mu_i;\alpha_i;\beta_i;\gamma_i;\varepsilon_i$ – упругие константы микрополярного материала i -ого слоя.

Считая, что верхняя и нижняя плоскости слоистой пластинки загружены произвольной силовой и моментной нагрузкой, запишем граничные условия в виде

$$\begin{array}{lll}\sigma_{31}^n=p_1; & \sigma_{32}^n=p_2; & \sigma_{33}^n=p_3,\\ \mu_{31}^n=m_1; & \mu_{32}^n=m_2; & \mu_{31}^n=m_3,\end{array}\qquad \text{где}\quad z=z_n\tag{1.2}$$

$$\sigma_{31}^{-m} = p_1; \quad \sigma_{32}^{-m} = p_2; \quad \sigma_{33}^{-m} = -p_3, \qquad \text{где} \quad z = z_{-m}$$
$$\mu_{31}^{-m} = -m_1; \quad \mu_{32}^{-m} = -m_2; \quad \mu_{31}^{-m} = m_3,$$

На боковой поверхности слоистой пластинки считаются заданными, в общем случае, смешанный вариант граничных условий несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений.

Будем строить напряженные состояния, названные в [1] внутренними (основными), на основе которого построим континуальные модели микрополярных слоистых пластин. Для этого в (1.1) выполним замену переменных [1]. Вводим следующие безразмерные физические параметры слоев $\frac{a^2\mu_1}{\gamma_i}; \frac{a^2\mu_1}{\beta_i}; \frac{a^2\mu_1}{\varepsilon_i}; \frac{\mu_1}{\mu_i}; \frac{\alpha_i}{\mu_i}$. Здесь a – характерный размер в плане пластинки.

Обозначим через Q^i любое силовое или моментное напряжение, смещение или независимый поворот, положим $Q^i = \delta^{-q} \sum_{s=0}^{S} \delta^s \bar{Q}^{i(s)}$.

Здесь индекс (s) указывает номер приближения, а через q обозначим некоторые целые числа, различные для различных смещений, поворотов, силовых и моментных напряжений; $\delta = \frac{h}{a}, \quad h << a.$

2. Континуальная теория многослойных микрополярных пластин с независимыми полями перемещений и вращений. Предположим, что безразмерные физические параметры имеют значения

$$\frac{a^2\mu_1}{\gamma_i} \sim 1; \quad \frac{a^2\mu_1}{\beta_i} \sim 1; \quad \frac{a^2\mu_1}{\varepsilon_i} \sim 1; \quad \frac{\mu_1}{\mu_i} \sim 1; \quad \frac{\alpha_i}{\mu_i} \sim 1 \tag{2.1}$$

В этом случае для краевой задачи (1.1), (1.2) в выражении (1.4) для величин q получим (в случае задачи изгиба):

$$\begin{gathered} q = 1 \text{ для } \quad \bar{\sigma}_{\text{i3}}; \quad \bar{\sigma}_{\text{3i}}\,(i = 1; 2); \; \bar{\mu}_{\text{mn}}\,(\;\text{mn:}11;22;33;12;21); \quad \bar{\omega}_i \quad (i = 1; 2); \quad \bar{u}_3 \\ q = 0 \text{ для } \quad \bar{\sigma}_{\text{mn}}\,(mn:\;\; 11;22;12;21;33); \quad \bar{\mu}_{\text{i3}}; \quad \bar{\mu}_{\text{3i}}; \quad \bar{u}_i \quad (i = 1; 2); \; \omega_3 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь, как главный результат, приведем определяющую систему для общей континуальной (двумерной) теории изгиба микрополярных многослойных пластин с независимыми полями перемещений и вращений:

Уравнения равновесия

$$\begin{gathered} \frac{\partial L_{11}}{\partial x} + \frac{\partial L_{21}}{\partial y} + N_{23} - N_{32} = -2m_1; \quad \frac{\partial L_{12}}{\partial x} + \frac{\partial L_{22}}{\partial y} + N_{31} - N_{13} = -2m_2 \\ \frac{\partial N_{13}}{\partial x} + \frac{\partial N_{23}}{\partial y} = -2p_3 \end{gathered} \tag{2.3}$$

Соотношения упругости

$$N_{13} = \sum_{i=-m}^{n} \frac{\mu_i - \alpha_i}{\mu_i + \alpha_i} N_{31} + \sum_{i=-m}^{n} \frac{4\mu_i\alpha_i}{\mu_i + \alpha_i} 2h\Gamma_{13}; \qquad N_{31} = 2hp_1$$

$$N_{23} = \sum_{i=-m}^{n} \frac{\mu_i - \alpha_i}{\mu_i + \alpha_i} N_{32} + \sum_{i=-m}^{n} \frac{4\mu_i\alpha_i}{\mu_i + \alpha_i} 2h\Gamma_{23}; \qquad \mathrm{N}_{32} = 2hp_2$$

$$L_{11} = \sum_{i=-m}^{n} 2h\left[\frac{4\gamma_i(\gamma_i + \beta_i)}{2\gamma_i + \beta_i} k_{11} + \frac{2\beta_i\gamma_i}{2\gamma_i + \beta_i} k_{22}\right] + \sum_{i=-m}^{n} \frac{\beta_i}{\beta_i + 2\gamma_i} L_{33}; \qquad \mathrm{L}_{33} = 2hm_3 \tag{2.4}$$

$$L_{22}=\sum_{i=-m}^{n}2h\left[\frac{4\gamma_i\left(\gamma_i+\beta_i\right)}{2\gamma_i+\beta_i}k_{22}+\frac{2\beta_i\gamma_i}{2\gamma_i+\beta_i}k_{11}\right]+\sum_{i=-m}^{n}\frac{\beta_i}{\beta_i+2\gamma_i}L_{33}$$

$$L_{12}=\sum_{i=-m}^{n}2h\left[\left(\gamma_i+\varepsilon_i\right)k_{12}+\left(\gamma_i-\varepsilon_i\right)k_{21}\right];\quad L_{21}=\sum_{i=-m}^{n}2h\left[\left(\gamma_i+\varepsilon_i\right)k_{21}+\left(\gamma_i-\varepsilon_i\right)k_{12}\right]$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{13}=\frac{\partial w}{\partial x}+\Omega_2;\quad \Gamma_{23}=\frac{\partial w}{\partial y}-\Omega_1;\quad \mathrm{k}_{11}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial x};\quad \mathrm{k}_{22}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial y};\quad \mathrm{k}_{12}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial x};\quad \mathrm{k}_{21}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial y}\quad (2.5)$$

Здесь $N_{i3};L_{ii};L_{ij};\Gamma_{i3};k_{ii};k_{ij}-$ усредненные усилия, моменты, деформации, изгибание и кручение; $w-$ прогиб, Ω_i – повороты точек базовой плоскости пластинки.

3.Континуальная теория многослойных микрополярных пластин со стесненным вращением. Теперь положим, что безразмерные физические параметры представимы в виде:

$$\frac{a^2\mu_1}{\gamma_i}\sim\delta^{-2}\gamma_*;\quad \frac{a^2\mu_1}{\beta_i}\sim\delta^{-2}\beta_*;\quad \frac{a^2\mu_1}{\varepsilon_i}=\delta^{-2}\varepsilon_*;\quad \frac{\mu_1}{\mu_i}\sim 1;\quad \frac{\alpha_i}{\mu_i}\sim 1\qquad (3.1)$$

где $\gamma_*;\beta_*;\varepsilon_*$ – величины порядка единицы.

В этом случае для краевой задачи (1.1), (1.2) имеет место отличное от (2.2) асимптотика. В выражении (1.4) для q, на этот раз, будем иметь (для задачи изгиба)

$$\begin{aligned}
&q=0 \quad \text{для} \quad \bar\sigma_{33};\bar\mu_{3i};\bar\mu_{i3}\quad (\mathrm{i}=1;2)\\
&\mathrm{q}=1 \quad \text{для} \quad \bar\sigma_{\mathrm{i}3};\bar\sigma_{3\mathrm{i}}\quad (\mathrm{i}=1;2);\quad \bar\mu_{\mathrm{mn}}\left(mn:11;22;33;12;21\right)\\
&q=2 \quad \text{для} \quad \bar\sigma_{\mathrm{mn}}\left(mn:11;22;12;21\right);\quad \bar{\mathrm{u}}_{\mathrm{i}}\left(i=1;2\right);\quad \bar\omega_3\\
&q=3 \quad \text{для} \quad \bar{\mathrm{u}}_3;\quad \bar\omega_{\mathrm{i}}\quad (\mathrm{i}=1;2)
\end{aligned}\qquad (3.2)$$

В этой задаче в исходном асимптотическом приближении повороты точек слоев пластинки выражаются через перемещения.

Здесь, как главный результат, приведем определяющую систему континуальной двумерной теории изгиба многослойных микрополярных пластин со стесненным вращением:

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\left(L_{11}-M_{12}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(L_{21}-M_{22}\right)}{\partial y}+aN_{23}=2ap_2-\frac{m_1}{\mu_1}\\
&\frac{\partial\left(L_{12}+M_{11}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(L_{22}+M_{21}\right)}{\partial y}-aN_{13}=-2ap_1-\frac{m_2}{\mu_1}\\
&\frac{\partial N_{13}}{\partial x}+\frac{\partial N_{23}}{\partial y}=-2ap_3
\end{aligned}\qquad (3.3)$$

Физические соотношения

$$M_{11}=\sum_{i=-m}^{n}\frac{2E_ih_i^3}{3(1-\upsilon_i^2)}\left[\frac{\partial\beta_1}{\partial x}+\upsilon_i\frac{\partial\beta_2}{\partial y}\right]\ \left(1\rightleftarrows 2\right),\quad M_{12}=\sum_{i=-m}^{n}\frac{E_ih_i^3}{3(1+\upsilon_i)}\left(\frac{\partial\beta_2}{\partial x}+\upsilon_i\frac{\partial\beta_1}{\partial y}\right)\text{-}hm_3+\frac{1}{2}L_{33}$$

$$M_{21}=\sum_{i=-m}^{n}\frac{E_ih_i^3}{3(1+\upsilon_i)}\left(\frac{\partial\beta_2}{\partial x}+\upsilon_i\frac{\partial\beta_1}{\partial y}\right)+hm_3-\frac{1}{2}L_{33},\quad L_{11}=\sum_{i=-m}^{n}4h_i\gamma_i\frac{\partial\Omega_1}{\partial x}+\sum_{i=-m}^{n}\frac{\beta_i}{2\gamma_i+\beta_i}L_{33}\quad\left(1\rightleftarrows 2\right)$$

$$L_{12}=\sum_{i=-m}^{n}2h_i\left(\gamma_i+\varepsilon_i\right)\frac{\partial\Omega_2}{\partial x}+\sum_{i=-m}^{n}2h_i\left(\gamma_i-\varepsilon_i\right)\frac{\partial\Omega_1}{\partial y}\quad\left(1\rightleftarrows 2\right)\qquad (3.4)$$

Геометрические соотношения

$$\Omega_1 = -\beta_2 = \frac{\partial w}{\partial y} \quad , \quad \Omega_2 = \beta_1 = -\frac{\partial w}{\partial x} \tag{3.5}$$

4. Континуальная теория многослойных микрополярных пластин «с малой сдвиговой жесткостью». Предположим, что физические безразмерные параметры материала теперь представимы в виде

$$\frac{a^2\mu_1}{\gamma_i} \sim 1; \quad \frac{a^2\mu_1}{\beta_i} \sim 1; \quad \frac{a^2\mu_1}{\varepsilon_i} = 1; \quad \frac{\mu_1}{\mu_i} \sim 1; \quad \frac{\alpha_i}{\mu_i} \sim \delta^2\alpha_* \tag{4.1}$$

В выражении (1.4) для величин q имеем

$$\begin{aligned}
&q = 0 \quad \text{для} \quad \bar{\sigma}^i_{33} \\
&q = 1 \quad \text{для} \quad \bar{\sigma}^i_{31}, \ \bar{\sigma}^i_{32}, \ \bar{\sigma}^i_{13}, \ \bar{\sigma}^i_{23}, \ \bar{\mu}^i_{33} \\
&q = 2 \quad \text{для} \quad \bar{\sigma}^i_{11}, \ \bar{\sigma}^i_{22}, \ \bar{\sigma}^i_{12}, \ \bar{\sigma}^i_{21}, \ \bar{u}^i_1, \ \bar{u}^i_2, \ \bar{\mu}^i_{31}, \ \bar{\mu}^i_{32}, \ \bar{\mu}^i_{13}, \ \bar{\mu}^i_{23}, \ \omega^i_3 \\
&q = 3 \quad \text{для} \quad \bar{u}^i_3, \ \omega^i_1, \ \omega^i_2, \ \bar{\mu}^i_{11}, \ \bar{\mu}^i_{22}, \ \bar{\mu}^i_{12}, \ \bar{\mu}^i_{21}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Отметим, что при асимптотике (4.1), (4.2) в полученных двумерных уравнениях величины «чисто моментного» происхождения отделяются и образуют отдельную систему уравнений. Для «силовой» части задачи получим своеобразную сдвиговую теорию многослойных микрополярных пластин.

Сформулируем эти отдельные группы уравнений.

Уравнения «чисто моментной» части задачи многослойных микрополярных пластин:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial L_{11}}{\partial x} + \frac{\partial L_{21}}{\partial y} = -2m_1; \qquad \frac{\partial L_{12}}{\partial x} + \frac{\partial L_{22}}{\partial y} = -2m_2 \tag{4.3}$$

Соотношения упругости

$$\begin{aligned}
L_{11} &= \sum_{i=-m}^{n} h_i \left[\frac{4\gamma_i(\gamma_i + \beta_i)}{2\gamma_i + \beta_i} k_{11} + \frac{2\beta_i\gamma_i}{2\gamma_i + \beta_i} k_{22} \right] \\
L_{22} &= \sum_{i=-m}^{n} h_i \left[\frac{4\gamma_i(\gamma_i + \beta_i)}{2\gamma_i + \beta_i} k_{22} + \frac{2\beta_i\gamma_i}{2\gamma_i + \beta_i} k_{11} \right] \\
L_{12} &= \sum_{i=-m}^{n} h_i \left[(\gamma_i + \varepsilon_i) k_{12} + (\gamma_i - \varepsilon_i) k_{21} \right] \\
L_{21} &= \sum_{i=-m}^{n} 2h \left[(\gamma_i + \varepsilon_i) k_{21} + (\gamma_i - \varepsilon_i) k_{12} \right]
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Геометрические соотношения

$$\mathrm{k}_{11} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x}; \quad \mathrm{k}_{22} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial y}; \quad \mathrm{k}_{12} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x}; \quad \mathrm{k}_{21} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} \tag{4.5}$$

Уравнения «чисто силовой» части задачи многослойных микрополярных пластин:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x} + \frac{\partial N_{23}}{\partial y} = -p_3, \quad N_{31} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y} = hp_1, \quad N_{32} - \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial M_{22}}{\partial y} = hp_2 \tag{4.6}$$

Соотношения упругости

$$N_{13} = \sum_{i=-m}^{n} 8h_i\alpha_i\Gamma_{13} - N_{31}\,, \quad N_{23} = \sum_{i--m}^{n} 8h_i\alpha_i\Gamma_{23} - N_{32}$$

$$M_{11} = -\sum_{i=-m}^{n} \frac{2E_i h_i^3}{3\left(1-\upsilon_i^2\right)}\left(K_{11} + \upsilon_i K_{22}\right)\left(1 \rightleftarrows 2\right), M_{12} = M_{21} = H = \sum_{i=-m}^{n} \frac{4\mu_i h_i^3}{3} K_{12} \tag{4.7}$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x} + \Omega_2,\ \Gamma_{23} = \frac{\partial w}{\partial y} - \Omega_1,\ \ K_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ K_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ \ K_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{4.8}$$

Заключение. Представлен асимптотический подход построения математических моделей тонких микрополярных многослойных пластин. Существенным здесь является тот факт, что конкретная континуальная модель многослойных микрополярных пластин зависит от значений физических безразмерных параметров слоев пластинки, в которые входит также масштабный фактор.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sargsyan S.H. On some Interior and Boundary Effects in Thin Plates Based on the Asymmetric Theory of Elasticity // Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Vol. 16./Theories of Plates and Shells. Critical Review and New Applications. Springer. 2004. P. 201-210.

Сведения об авторах

Саркисян Самвел Оганесович
Член-корр. НАН Армении, доктор физ-мат. наук, профессор,
зав. кафедрой мат. анализа и дифф. уравнений,
Гюмрийский государственный педогогический институт
Адрес: г. Гюмри, 377501, ул. Саят-Новы, дом 2, кв. 11.
Тел.: (312) 3-26-29; E-mail: afarmanyan@yahoo.com

Фарманян Анаит Жораевна
Кандидат физ-мат.наук, доцент кафедры мат. анализа и дифф. уравнений, Гюмрийский государственный педогогический институт

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАТИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВЫХ СИСТЕМ ПРИ ПОМОЩИ ВИБРАЦИИ

Сейранян А.А., Сейранян А.П.

Рассматривается задача о стабилизации верхнего вертикального (перевернутого) положения маятника с помощью вибрации точки подвеса. Периодическая функция, описывающая колебания точки подвеса, считается произвольной и учитывается малое вязкое трение. Получена формула для области устойчивости решений уравнения Хилла с демпфированием в окрестности нулевой собственной частоты. Для нескольких примеров проведено сравнение аналитических и численных результатов, свидетельствующее об их хорошем согласии. Выведена асимптотическая формула для области стабилизации верхнего вертикального положения маятника. Показано, что влияние вязкого трения на критическую частоту стабилизации имеет третий порядок малости, и во всех рассмотренных примерах его учет приводит к возрастанию критической частоты.

В 1956 году В.Н.Челомей [1] указал на возможность повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций. В частности, он пришел к выводу, что упругий стержень, сжатый продольной силой, превышающей критическое (эйлерово) значение, может быть стабилизирован высокочастотной продольной вибрацией, приложенной к концу стержня. В настоящей работе получены и проанализированы формулы для верхней и нижней критических частот стабилизации стержня. Показано, что в отличие от высокочастотной стабилизации перевернутого маятника с вибрирующей точкой подвеса стержень стабилизируется частотами возбуждения порядка основной частоты поперечных колебаний, лежащими в некотором интервале.

1. **Стабилизация перевернутого маятника.** Колебания и устойчивость маятника с колеблющейся точкой подвеса изучались многими авторами, среди которых отметим статьи А.Стефенсона (1908), Н.Н.Боголюбова (1950) и П.Л. Капицы (1951) о стабилизации верхнего вертикального положения маятника высокочастотным возбуждением колебаний точки подвеса, [2]. Существенным отличием настоящей работы от предшествующих является учет вязкого трения, произвольный характер периодической функции возбуждения и метод исследования устойчивости.

Плоские колебания физического маятника относительно верхнего вертикального (неустойчивого) положения равновесия с колеблющейся точкой подвеса описываются уравнением

$$I\theta_{tt} + c\theta_t - mr(g + z_{tt})\sin\theta = 0 \qquad (1.1)$$

Здесь I и m – момент инерции и масса маятника, θ – угол отклонения маятника от верхнего вертикального положения, c – коэффициент вязкого трения, r – расстояние от точки подвеса до центра масс, g – ускорение свободного падения, z – вертикальное перемещение точки подвеса, которое следует закону $z = a\phi(\Omega t)$, где Ω - частота возбуждения, а $\phi(\tau)$ – произвольная 2π -периодическая функция. Амплитуда a и коэффициент трения c предполагаются малыми. Для удобства введем обозначение $\varphi = -\phi_{tt}$ и предположим, что среднее значение периодической функции $\varphi(\tau)$ равно нулю.

Введем безразмерные время и параметры

$$\tau = \Omega t\,,\ \beta = \frac{c}{I\Omega}\,,\ \varepsilon = \frac{a\Omega_0^2}{g}\,,\ \mu = \frac{\Omega_0}{\Omega}\,;\ \Omega_0 = \sqrt{\frac{mrg}{I}} \qquad (1.2)$$

где Ω_0 - собственная частота свободных колебаний маятника с неподвижной точкой подвеса относительно нижнего вертикального положения равновесия.

В этих обозначениях линеаризованное уравнение (1.1) принимает вид уравнения Хилла с демпфированием

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + [\mu + \varepsilon\varphi(\tau)]\,\theta = 0\,;\ \mu = -\omega^2 \qquad (1.3)$$

где точкой обозначено дифференцирование по τ. Коэффициенты этого уравнения явно зависят от 2π- периодической функции $\varphi(\tau)$ и трех безразмерных параметров $\varepsilon, \beta, \omega$, причем ε и β малы по сравнению с единицей.

При $\varepsilon = 0$, $\beta = 0$ верхнее вертикальное положение равновесия маятника $\theta = 0$ неустойчиво. Исследуем возможность стабилизации маятника с помощью высокочастотных колебаний точки подвеса. Это соответствует близости параметров задачи к точке $\varepsilon = 0$, $\beta = 0$, $\mu = 0$. Для нахождения области устойчивости в окрестности этой точки использовался метод, основанный на вычислении производных матрицы монодромии и анализе поведения мультипликаторов [2]. Показано, что область устойчивости для произвольной периодической функции $\varphi(\tau)$ в окрестности точки $\mathbf{p}_0 = (0,0,0)$ в первом приближении определяется неравенством

$$\mu > F\varepsilon^2, \quad F = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\varphi(t)dt\right)^2 - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\int_0^t \tau\varphi(\tau)\,d\tau dt \qquad (1.4)$$

Можно показать, что для периодических функций, части которых можно симметрично отразить относительно временной оси и совместить, константа $F < 0$. В формуле для границы области устойчивости коэффициенты членов более высокого порядка малости представляются в виде довольно громоздких кратных интегралов. Из этих соотношений выводятся формулы для частоты стабилизации маятника.

Вводя коэффициент демпфирования в виде $\beta_0 = c/(I\,\Omega_0)$, для функции $\varphi(\tau) = \cos\tau$ получим формулу для частоты стабилизации в виде

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} > \sqrt{2}\left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{7\varepsilon}{32} + \frac{\varepsilon\beta_0^2}{4} - \frac{2389\,\varepsilon^3}{18432}\right] \qquad (1.5)$$

Таким образом, при достаточно высокой частоте вибрации точки подвеса верхнее вертикальное положение маятника становится устойчивым, и малое демпфирование повышает критическую частоту стабилизации.

Для периодической функции $\varphi(\tau) = 2(\tau/2\pi)^3 - 1/2$, $0 \le \tau \le 2\pi$, не обладающей симметрией, условие стабилизации получается в виде

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} > \frac{2.19}{\varepsilon} - 0.202 + 0.162\varepsilon + 0.045\varepsilon^2 + 0.214\varepsilon\beta_0^2 - 0.028\varepsilon^3 \qquad (1.6)$$

Отметим наличие членов нулевой и второй степени по ε . Как и выше, учет демпфирования приводит к возрастанию критической частоты стабилизации. Формулы (1.5), (1.6) хорошо согласуются с численными результатами вплоть до значений $\varepsilon \approx 0.8, \beta_0 \approx 0.3$.

2. **Задача В.Н.Челомея.** Рассмотрим прямой упругий стержень постоянного поперечного сечения, к концу которого приложена периодическая по времени продольная сила $P(t) = P_0 + P_t\phi(\omega t)$. Уравнение поперечных колебаний стержня имеет вид

$$EJ\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + P(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\gamma m\frac{\partial u}{\partial t} + m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (2.1)$$

где x - координата вдоль оси стержня, t – время, $u(x,t)$ – прогиб стержня, m – погонная масса, EJ – изгибная жесткость, γ – коэффициент демпфирования, P_t , ω – амплитуда и частота возбуждения продольной вибрации. Рассматривается случай, когда оба конца стержня шарнирно оперты. Решение уравнения (2.1) ищется в виде ряда по собственным функциям $u(x,t) = \sum_j \varphi_j(t)\sin(j\pi x/l)$. Подставим этот ряд в уравнение (2.1), умножим на $\sin(k\pi x/l)$

и затем проинтегрируем на интервале [0,l]. В результате получим уравнения относительно функций $\varphi_k(t)$

$$\frac{d^2\varphi_k}{dt^2}+2\gamma\frac{d\varphi_k}{dt}+\Omega_k^2\left\{1-\frac{P_0}{P_k}-\frac{P_t\phi(\omega t)}{P_k}\right\}\varphi_k=0\,,\ k=1,2,\ldots, \tag{2.2}$$

где $\Omega_k=\pi^2k^2\sqrt{EJ/m}\,/\,l^2$, $P_k=\pi^2k^2EJ/l^2$ — k -ая собственная частота поперечных колебаний стержня и k -ая критическая (эйлерова) сила. Введем обозначение $\beta_k=\gamma/\Omega_k$ и новую переменную $\tau=\omega\,t.$ Тогда уравнение (2.2) примет вид:

$$\frac{d^2\varphi_k}{d\tau^2}+2\beta_k\left(\frac{\Omega_k}{\omega}\right)\frac{d\varphi_k}{d\tau}+\left(\frac{\Omega_k}{\omega}\right)^2\left\{1-\frac{P_0}{P_k}-\frac{P_t\phi(\tau)}{P_k}\right\}\varphi_k=0\,,\ k=1,2,\ldots \tag{2.3}$$

Тривиальное положение равновесия стержня $u(x,t)=0$ асимптотически устойчиво, если функции $\varphi_k(t)\to 0$ при $t\to\infty$, $k=1,2,\ldots$., и неустойчиво, если хотя бы одна из функций $\varphi_k(t)$ становится неограниченной при $t\to\infty$.

В работе [1] В.Н.Челомей поставил вопрос о стабилизации прямолинейной формы упругого стержня при величине силы, превышающей критическое (эйлерово) значение $P_0>P_1$ (т.е. статически неустойчивого стержня), с помощью продольной вибрации. Считая частоту возбуждения большой по сравнению с основной частотой поперечных колебаний несжатого стержня $(\omega>>\Omega_1)$ и применяя метод возмущений и метод усреднения к уравнению (2.3) $(k=1)$, В.Н.Челомей [1] получил неравенство, описывающее область стабилизации стержня. В случае $\phi(\tau)=\cos\tau$ это неравенство приводится к виду

$$\left(\frac{\omega}{\Omega_1}\right)^2<\frac{\varepsilon^2}{2\alpha}-4\beta_1^2 \tag{2.4}$$

где использованы обозначения $\varepsilon=P_t/P_1$,$\sim\, =P_0/P_1-1$,$\beta_1=\gamma/\Omega_1$. Налицо противоречие: при выводе этого соотношения считалось $\omega/\Omega_1>>1,$ а критическая частота стабилизации получается порядка основной частоты. Действительно, положив, например, $\varepsilon=0.1$,$\sim\,=0.05$, $_1=0$ из (2.4) получим $\omega/\Omega_1<1/\sqrt{10}=0.316.$ Учет демпфирования, как это следует из (2.4), лишь понижает верхнюю границу частоты стабилизации. Кроме того, в [1] отсутствует неравенство снизу на частоту стабилизации. Без этого неравенства следует парадоксальный вывод: стержень можно стабилизировать сколь угодно медленной продольной вибрацией!

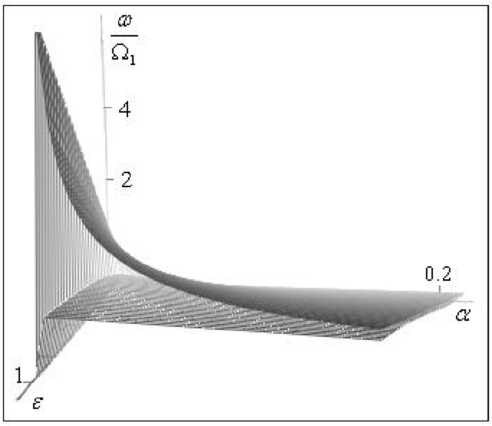


Рис. 1. Область стабилизации

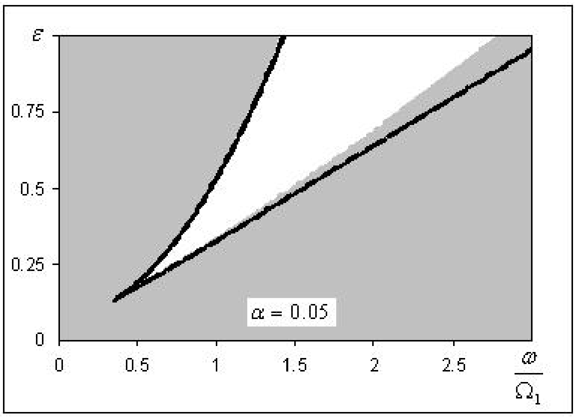


Рис. 2. Проекция области стабилизации

Для анализа области стабилизации стержня воспользуемся результатами исследования областей устойчивости для уравнения Хилла с демпфированием. Применяя эти результаты к уравнению (2.3) при $k=1$ для случая, когда постоянная составляющая продольной силы ненамного превосходит критическое эйлерово значение $0<\alpha=P_0/P_1-1<<1$, при малой амплитуде возбуждения $\varepsilon=P_t/P_1<<1$ и $\phi(\tau)=\cos\tau$ получим область стабилизации стержня в виде двустороннего неравенства на частоту возбуждения

$$\varepsilon-2\alpha+\sqrt{(\varepsilon-2\alpha)^2+\frac{\varepsilon^2}{2}+\Delta}<\left(\frac{\omega}{\Omega_1}\right)^2<\frac{\varepsilon^2}{2\alpha}-\frac{7\alpha}{8}-4\beta_1^2 \tag{2.5}$$

Таким образом, границы области стабилизации зависят от трех малых параметров: ε, ~ и $_1$. Из неравенства (2.5) следует, что учет демпфирования понижает как верхнюю, так и нижнюю границу частоты стабилизации.

Зависимость нижней и верхней границ частоты стабилизации от параметров £ и ~ при значении коэффициента демпфирования $_1 = 0.05$ по формуле (2.5) показана на рис. 1. Область стабилизации находится между двумя поверхностями. Двумерные области устойчивости тривиального положения равновесия стержня при наличии вибрации, найденные при коэффициенте демпфирования $_1 = 0.05$ и значениях $\alpha = 0.05$, приведены на рис. 2. Области неустойчивости (затененные) получены численно с помощью определения матрицы монодромии с последующим вычислением мультипликаторов системы и оценки их модулей (метод Флоке). Жирные линии представляют аналитические зависимости частоты от амплитуды возбуждения согласно (2.5). Из рис. 2 следует хорошее согласие между аналитическими и численными результатами. Важно отметить, что области неустойчивости для уравнений (2.3) при $k=2,3,\ldots$ (при наличии демпфирования) не влияют на область стабилизации (2.5). Это показано как аналитически, так и численно.

Аналогия задачи В.Н.Челомея с задачей о стабилизации перевернутого маятника с вибрирующей точкой подвеса представляется вполне естественной. Действительно, в обеих задачах статически неустойчивые системы стабилизируются с помощью вибрации. Обе задачи сводятся к анализу области устойчивости для уравнения Матье-Хилла при отрицательных частотах, близких к нулю. Отличие состоит в том, что при малых амплитудах возбуждения маятник в верхнем вертикальном положении стабилизируется высокой, по сравнению с собственной, частотой вибрации точки подвеса, превышающей критическое значение, а упругий стержень стабилизируется средними частотами вибрации порядка основной частоты поперечных колебаний, лежащими в некотором интервале.

ЛИТЕРАТУРА

1. Челомей В.Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибрации. //ДАН СССР. 1956. Т. 110. № 3. С. 345-347.
2. Сейранян А.А., Сейранян А.П. Об устойчивости перевернутого маятника с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. 2006. Т. 70. № 5. С. 835-843.

Сведения об авторах

Сейранян Андрей Александрович
Аспирант
Адрес: МГТУ имени Н.Э.Баумана
Тел: 557-65-51; E-mail: aseiran@hotbox.ru

Сейранян Александр Паруйрович
Доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, МГУ им. М.В.Ломоносова
Тел: 939-20-39; E-mail: seyran@imec.msu.ru

ОБ ОБОСНОВАНИИ ОДНОГО РЕШЕНИЯ НАВЬЕ

Сейранян С.П.

С применением подхода автора [1-2] исследуется [1] решение Навье $w(x,y)$ для прогиба в задаче об изгибе прямоугольной шарнирно опертой по краям пластины равномерным внешним давлением, приложенным по прямоугольнику той же ориентации, что и план пластины [3]. Доказано: *a*) $w(x,y) \subset C^3$ в замкнутом прямоугольнике *G* пластины; *b*) производные $\partial^4 w(x,y)/\partial x^k \partial y^{4-k}$, где k=0,2,4, в совокупности непрерывны на множестве *E*, построенном вычитанием из множества *G* прямых, лежащих на сторонах прямоугольника приложения нагрузки; с) частные производные до третьего порядка от $w(x,y)$ на *G* и названные частные производные четвертого порядка на *E* вычисляются почленным дифференцированием под обоими символами суммирования повторного ряда решения Навье. Полученные результаты приводят к обоснованию решения Навье.

Введение. Исследуемое в настоящей работе решение получено Навье представлением искомого прогиба и нагрузки повторными синусными тригонометрическими рядами (триг. рядами) и подстановкой таковых в уравнение равновесия Софи Жермен – Лагранжа. Путем формального повторного почленного дифференцирования под обоими символами суммирования триг. ряда прогиба при вычислении трех частных производных четвертого порядка в уравнении равновесия, Навье приходит к уравнению, содержащему четыре повторных триг. ряда. Затем Навье преобразует сумму повторных триг. рядов к единому повторному триг. ряду с членом в виде алгебраической суммы членов предыдущих рядов и, приравниванием коэффициентов полученного ряда к нулю, в дальнейшем конечным числом корректных алгебраических действий определяет коэффициенты триг. ряда прогиба.

Тем не менее, записанное решение требует строгого математического обоснования всех формально проведенных при его получении математических операций. Так операция почленного дифференцирования требует доказательства. Далее преобразование четырех повторных триг. рядов в единый допустимо, если каждый триг. ряд, содержащий коэффициенты триг. ряда прогиба, сходится. Отмеченные действия Навье и его последователи оставили необоснованными [1].

1. Приводится исследование решения Навье для прогиба

$$w(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}\sin\lambda_m x\,\sin\mu_n y,\ \text{где}\ \ w_{mn}=B_0\sin\lambda_m\xi\,\sin\mu_n\eta\,\sin\lambda_m\,\Delta\xi/2\,\sin\mu_n\times$$
$$\times\,\Delta\eta/2\Big/\left(\lambda_m\mu_n\,(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2\right),\ B_0=16P\Big/\left(D\,a\,b\,\Delta\xi\,\Delta\eta\right),\ \lambda_m=m\pi/a\,,\ \mu_n=n\pi/b \tag{1.1}$$

на частную непрерывную и почленную дифференцируемость в *G* до трех раз.

С использованием неравенства (1.3) в [2] имеем

$$\left|w_{mn}\,\partial^s\sin\lambda_m x\big/\partial x^s\,\partial^j\sin\mu_n y\big/\partial y^j\right|\le B_0\lambda_m^{s-1}\mu_n^{j-1}\Big/(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2\le B_1\Big/(\lambda_m^{2\gamma+1-s}\times$$
$$\times\mu_n^{5-2\gamma-j})=B_1\Big/(\lambda_m^r\mu_n^{6-s-j-r}),\ 0\le\gamma\le 2,\ r=2\gamma+1-s,\ -2\le r\le 5,\ 0\le s+j\le 3 \tag{1.2}$$

Полагая в (1.2) $r=1.5$, получаем

$$\left|w_{mn}\,\partial^s\sin\lambda_m x\big/\partial x^s\,\partial^j\sin\mu_n y\big/\partial y^j\right|\le B_1\Big/(\lambda_m^{1.5}\mu_n^{4.5-s-j}),\ \ 0\le s+j\le 3 \tag{1.3}$$

Откуда следует, что

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}\partial^s\sin\lambda_m x\big/\partial x^s\,\partial^j\sin\mu_n y\big/\partial y^j\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|w_{mn}\partial^s\sin\lambda_m x\big/\partial x^s\ \partial^j\sin\mu_n y\big/\partial y^j\right|\le$$
$$\le B_1\big/\lambda_m^{1.5}\sum_{n=1}^{\infty}1\big/\mu_n^{4.5-s-j}<\infty,\ \sum_{m=1}^{\infty}1\big/\lambda_m^{1.5}\sum_{n=1}^{\infty}1\big/\mu_n^{4.5-s-j}<\infty\,,\ 0\le s+j\le 3 \tag{1.4}$$

Оценки (1.3), (1.4) позволяют прийти к утверждениям [4]

---

[1] Средствами из классической теории функций.

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}\,\partial^s \sin\lambda_m x/\partial x^s\ \sin\mu_n y=\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}\,\partial^s \sin\lambda_m x/\partial x^s\,\partial^j \sin\mu_n y/\partial y^j\subset C[G] \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial^{s+j} w(x,y)}{\partial x^s\partial y^j}=\frac{\partial^{s+j}}{\partial x^s\partial y^j}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}\sin\lambda_m x\,\sin\mu_n y=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}\,\partial^s\sin\lambda_m x/\partial x^s\,\partial^j \sin\mu_n y/\partial y^j\subset$$
$$\subset C[G],\ 0\le s+j\le 3 \quad (1.6)$$

2.Приводится анализ решения Навье на частную непрерывную и почленную четырехкратную дифференцируемость на множестве *E*.

Введем величину w_{mn} из (1.1) в (1.6) и примем обозначения

$$w_{mn}^{(1)}=1/(\lambda_m\mu_n\,(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2),\ \ \chi_n(y)=\sin\mu_n y\,\sin\mu_n\eta\,\sin\mu_n\,\Delta\eta/2 \quad (2.1)$$

$$\psi_s(l,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)}\lambda_m^s\mu_n^{3-s}\chi_n(y)\cos\lambda_m l,\ \ l=\lambda_1(x\pm\xi\pm\Delta\xi/2),\ s=1,3 \quad (2.2)$$

Тогда (1.6) с использованием сходимости в *G* ординарных рядов в (2.2), которая доказывается так же, как и в повторном ряде (1.6), при *s*+*j*=3 преобразуется к виду

$$\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x^s\partial y^{3-s}}=\ 0.25\sum_{i,j=0}^{1}(-1)^{i+j}\psi_s(\lambda_1(x+(-1)^i\xi+(-1)^j\,\Delta\xi/2),y)\,,\ s=1,3 \quad (2.3)$$

Исследуем затем ряды (2.2) на почленную частную непрерывную дифференцируемость. Из геометрических условий данной задачи имеем

$$0\le x\le a\,,\ 0\le\xi\pm\Delta\xi/2\le a\ ,\ \Delta\xi>0 \quad (2.4)$$

Введем на множестве изменения переменной *x* дополнительные ограничения

$$x\ne\xi\pm\Delta\xi/2 \quad (2.5)$$

Тогда с использованием (2.4), (2.5) получаем

$$\lambda_{0.5}(x+\xi\pm\Delta\xi/2)\in(0,\pi),\ \ \lambda_{0.5}(x-\xi\pm\Delta\xi/2)\in[-\pi/2,0)\cup(0,\ \pi/2] \quad (2.6)$$

Определим далее зависимостями (2.2) множества $L_{(\pm)}^{(\pm)}$ определения переменной *l*, полагая, что множество определения переменной *x* определено неравенствами (2.4), (2.5). Здесь нижние знаки те же, что и перед ξ , а верхние – перед $\Delta\xi$. Тогда с учетом (2.6) устанавливаем, что $L_{(\pm)}^{(\pm)}$ состоят из одного или двух промежутков, которые не содержат точек $\pm 2k\pi,\ k=0,1,...$ Если же исключить ограничения (2.6), то множествами изменения l становятся замыкания $\overline{L}_{(\pm)}^{(\pm)}$ множеств $L_{(\pm)}^{(\pm)}$.

Докажем теперь утверждение

$$\frac{\partial}{\partial l}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)}\lambda_m^s\mu_n^{3-s}\chi_n(y)\cos\,ml=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)}\lambda_m^s\mu_n^{3-s}\chi_n(y)\partial\,\cos\,ml/\partial l\subset C\left[L_{(\pm)}^{(\pm)}\times[0,b]\right],\ s=1,3 \quad (2.7)$$

Прежде на каждом произвольном отрезке $\Delta_{(\pm)}^{(\pm)}\subset L_{(\pm)}^{(\pm)}$ докажем, что

$$\frac{\partial}{\partial l}\sum_{m=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)}\lambda_m^s\cos ml=\sum_{m=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)}\lambda_m^s\,\partial\,\cos\,ml/\partial l\subset C\left[\Delta_{(\pm)}^{(\pm)}\right]\ ,\ \ s=1,3 \quad (2.8)$$

Заметим, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)}\lambda_m^s\,\partial\,\cos\,ml/\partial l=-\frac{a}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)}\lambda_m^{s+1}\sin\,ml\,,\ l\in\Delta_{(\pm)}^{(\pm)} \quad (2.9)$$

$$w_{mn}^{(1)}\lambda_m^{s+1}>0\,,\ w_{mn}^{(1)}\lambda_m^{s+1}=O\left(1/m^{4-s}\right),\lim_{m\to\infty} w_{mn}^{(1)}\lambda_m^{s+1}=0\,,\ s=1,3 \quad (2.10)$$

Покажем, что существует такое число M, что при $m>M$ выполняется неравенство

$$w^{(1)}_{m+1n}\lambda^{s+1}_{m+1}>w^{(1)}_{mn}\lambda^{s+1}_{m} \qquad (2.11)$$

Рассмотрим функцию

$$f(t)=t^s\big/(t^2+d)^2\ ,\ d>0,\ s=1,3 \qquad (2.12)$$

которая, как легко проверить, при $t>B=\sqrt{s\,d\big/(4\text{-}s)}$, $s=1,3$, монотонно убывает. Полагая в (2.12), $t=\lambda_m,\ d=\mu_n^2$, при $m>M=a/b\sqrt{s\big/(4\text{-}s)}$ приходим к (2.11). Значит триг. ряд (2.8) справа сходится равномерно на $\Delta^{(\pm)}_{(\pm)}\subset L^{(\pm)}_{(\pm)}$ (см. конец п.430 в [4]). Но ряд под знаком производной в (2.8), как отмечено выше, сходится на $\overline{L}^{(\pm)}_{(\pm)}$, а значит и на $\Delta^{(\pm)}_{(\pm)}\subset L^{(\pm)}_{(\pm)}\subset\overline{L}^{(\pm)}_{(\pm)}$. Отсюда, утверждение (2.8) доказано [4].

Далее из (2.10) имеем, что коэффициенты триг. ряда (2.9) при $m\to\infty$ стремятся к нулю. Поэтому на $\Delta^{(\pm)}_{(\pm)}$ к ряду (2.9) применимо преобразование Абеля для триг. рядов [4]. Применяя данное преобразование, с учетом (2.8) получаем

$$\frac{\partial}{\partial l}\sum_{m=1}^{\infty}w^{(1)}_{mn}\lambda^{s}_{m}\mu^{3-s}_{n}\cos ml=-\frac{a}{2\pi\sin l/2}\left[w^{(1)}_{1n}\lambda^{s+1}_{1}\mu^{3-s}_{n}\cos l/2+\sum_{m=2}^{\infty}B^{(s+1)}_{mn}\cos\left(m-1/2\right)l\right]$$

где

$$B^{(s+1)}_{mn}=(\lambda^{s+1}_{m}w^{(1)}_{mn}-\lambda^{s+1}_{m-1}w^{(1)}_{m-1,n})\ \mu^{3-s}_{n},\ s=1,3,\ l\in\Delta^{(\pm)}_{(\pm)} \qquad (2.13)$$

Введем также величину $B^{(1)}_{mn}$ формулой (2.13) при $s=0$. Тогда с учетом (2.1) имеем

$$B^{(1)}_{mn}=\lambda_1\left(\lambda_1-2\lambda_m\right)\mu^2_n\ [2(\lambda^2_m+\mu^2_n)+\lambda_1(\lambda_1-2\lambda_m)]\big/[(\lambda^2_{m-1}+\mu^2_n)(\lambda^2_m+\mu^2_n)]^2 \qquad (2.14)$$

$$B^{(s+1)}_{mn}=\left(\lambda_m/\mu_n\right)^s B^{(1)}_{mn}-\lambda_{m-1}\sum_{i=1}^{s}\left(-1\right)^i C^i_s\,\lambda^s_1\,\lambda^{s-i}_m\ w^{(1)}_{m-1n}\mu^{3-s}_n,\ s=1,3 \qquad (2.15)$$

Оценим с учетом (1.2), (2.1) и неравенства (1.3) в [2] величины (2.14),(2.15)

$$\left|B^{(1)}_{mn}\right|=O\left(\lambda_m\mu^2_n\big/\left(\lambda^2_m+\mu^2_n\right)^3\right)\le B_2\,\lambda_m\mu^2_n\big/\left(\lambda^2_m+\mu^2_n\right)^3\le B_3\big/\ \left(\lambda^{3\gamma-1}_m\mu^{4-3\gamma}_n\right),\ 0\le\gamma\le 2 \qquad (2.16)$$

$$\left|B^{(s+1)}_{mn}\right|\le\left|\left(\lambda_m/\mu_n\right)^s B^{(1)}_{mn}\right|+\left|\sum_{i=1}^{s}\left(-1\right)^i C^i_s\,\lambda^s_1\,\lambda^{s-i}_m\big/\lambda^{s-1}_m\right|\left|\lambda^s_{m-1}w^{(1)}_{m-1n}\mu^{3-s}_n\right|,\ s=1,3$$

$$\left|\left(\lambda_m/\mu_n\right)^s B^{(1)}_{mn}\right|=\left(\lambda_m/\mu_n\right)^s\left|B^{(1)}_{mn}\right|\le B_3\big/\left(\lambda^{3\gamma-s-1}_m\mu^{4-3\gamma+s}_n\right)\Big|_{3\gamma-s=2.5}=B_3\big/\left(\lambda^{1.5}_m\mu^{1.5}_n\right)$$

$$\left|\sum_{i=1}^{s}(-1)^i C^i_s\,\lambda^s_1\,\lambda^{s-i}_m\big/\lambda^{s-1}_m\right|=O(1)\le B_4,\left|\lambda^s_{m-1}w^{(1)}_{m-1n}\mu^{3-s}_n\right|\le B_1\big/\ (\lambda^{2\gamma-s+2}_{m-1}\mu^{2-2\gamma+s}_n)\Big|_{\gamma=0.25+s/2}=$$
$$=B_1\big/\ (\lambda^{1.5}_{m-1}\mu^{1.5}_n),\ s=1,3 \qquad (2.17)$$

$$\left|B^{(s+1)}_{mn}\right.=(B_3+B_1B_4)\big/\ (\lambda^{1.5}_{m-1}\mu^{1.5}_n)=B_5\big/\ (\lambda^{1.5}_{m-1}\mu^{1.5}_n),\ s=1,3 \qquad (2.18)$$

Здесь B_3 , $B_4>0$ – некоторые константы, $B_5=B_3+B_1B_4$.

Заметим теперь, что $\left|\sin l/2\right|$ как непрерывная функция на отрезке $\Delta^{(\pm)}_{(\pm)}\subset L^{(\pm)}_{(\pm)}$ достигает на $\Delta^{(\pm)}_{(\pm)}$ своего минимального значения. Пусть B_6 и есть данное минимальное значение. Очевидно, $B_6>0$. В противном случае, $\Delta^{(\pm)}_{(\pm)}$, а значит и $L^{(\pm)}_{(\pm)}$ содержат, по крайней мере, одну из точек множества $\{\pm 2k\pi,\ k=0,1,..\}$, что противоречит (2.6). Отсюда, с учетом также (2.1), (2.18), приходим к оценке величины (2.13)

$$\left| \frac{\partial}{\partial l} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \cos ml \right| \le \frac{a}{2\pi B_6} \left[\frac{\lambda_1^s}{\mu_n^{s+2}} + \frac{B_5}{\mu_n^{1\bullet 5}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{m-1}^{1\bullet 5}} \right], \ s = 1,3 \qquad (2.19)$$

$$(l, y) \in \Delta_{(\pm)}^{(\pm)} \times [0, b]$$

Из (2.19) с учетом (2.8) имеем, что ординарный ряд в (2.7) справа, образованный суммированием по n, составлен из непрерывных как произведений непрерывных функций общих членов и на $\Delta_{(\pm)}^{(\pm)} \times [0, b]$ мажорируется числовым сходящимся рядом, что приводит к его равномерной сходимости и утверждениям (2.7) на $\Delta_{(\pm)}^{(\pm)} \times [0, b]$ [4]. Докажем теперь, что (2.7) верно и на $L_{(\pm)}^{(\pm)} \times [0, b]$. Действительно, $L_{(\pm)}^{(\pm)}$ состоят из одного или двух промежутков и, значит, произвольная точка $l_{(\pm)}^{*(\pm)} \in L_{(\pm)}^{(\pm)}$ может быть покрыта отрезком $\Delta_{(\pm)}^{*(\pm)} \subset L_{(\pm)}^{(\pm)}$. Здесь уже на $\Delta_{(\pm)}^{*(\pm)} \times [0, b]$ (2.7), по доказанному, верно, а значит и в точке $(l_{(\pm)}^{*(\pm)}, y)$. Но $(l_{(\pm)}^{*(\pm)}, y)$ – произвольная пара, принадлежащая $L_{(\pm)}^{(\pm)} \times [0, b]$. Следовательно, утверждение (2.7) верно и на $L_{(\pm)}^{(\pm)} \times [0, b]$.

Покажем теперь, что в рядах как справа, так и слева, в равенстве (2.7) допустима перестановка порядка суммирования. Действительно, замена общих членов ряда слева их абсолютными величинами приводит к сходящемуся ряду, что устанавливается так же, как и для ряда (1.6). Поэтому, переставляя в данном ряде в (2.7) порядок суммирования [4] и подставляя выражения (2.2), (2.13), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_s(l,y)}{\partial l} = -\frac{a}{2\pi \sin l/2} \Bigg[& \sum_{n=1}^{\infty} w_{1n}^{(1)} \lambda_1^{s+1} \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \cos l/2 + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} B_{mn}^{(s+1)} \chi_n(y) \cos(m - 1/2) l \Bigg], s = 1,3 \end{aligned} \qquad (2.20)$$

Здесь мы использовали сходимость обоих рядов, к которой приходим посредством оценок (2.17), (2.18). Но (2.18) приводят также и к перестановке в повторном ряде в (2.20) порядка суммирования, а (2.17) – к утверждениям

$$\lambda_m^{s+1} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \mu_n^{3-s} \chi_n(y) < \infty, \quad \lim_{m\to\infty} \lambda_m^{s+1} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \mu_n^{3-s} \chi_n(y) = 0, \ s = 1,3 \qquad (2.21)$$

что позволяет применить преобразование Абеля для триг. рядов [4]. В итоге имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_s(l,y)}{\partial l} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \frac{\partial \cos ml}{\partial l} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{(1)} \lambda_m^s \mu_n^{3-s} \chi_n(y) \frac{\partial \cos ml}{\partial l} \subset C[L_{(\pm)}^{(\pm)} \times [0, b]], \ s = 1,3 \end{aligned} \qquad (2.22)$$

Далее дифференцируя (2.3) по *x*, причем правую часть как сложную функцию переменной *l*(*x*), с учетом (2.22) (вместе со сходимостью рядов) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^{s+1} \partial y^{3-s}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} \, \partial^{s+1} \sin \lambda_m x / \partial x^{s+1} \times \\ & \times \partial^{3-s} \sin \mu_n y / \partial y^{3-s} \subset C\left[G \setminus \{x = \xi \pm \Delta\xi/2\}\right], \ s = 1,3 \end{aligned} \qquad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^{s+1} \partial y^{3-s}} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \, \partial^{s+1} \sin \lambda_m x / \partial x^{s+1} \times \\ & \times \partial^{3-s} \sin \mu_n y / \partial y^{3-s} \subset C\left[G \setminus \{x = \xi \pm \Delta\xi/2\}\right], \ s = 1,3 \end{aligned} \qquad (2.24)$$

Аналогично с использованием (1.2) при $i = j = 0$ приходим к перестановке порядка суммирования и в исходном ряде (1.1). Выполняя данную перестановку и повторяя рассуждения с точностью до обозначений, вместо (2.23) получаем

$$\frac{\partial^4 w\,(x,y)}{\partial\, x^{3-s}\partial\, y^{s+1}} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}\,\partial^{3-s}\sin\lambda_m x\big/\partial\, x^{3-s}\times$$
$$\times\partial^{s+1}\sin\mu_n y\big/\partial\, y^{s+1}\subset C\left[G\setminus\left\{y=\eta\pm\Delta\eta/2\right\}\right],\ s=1,3 \tag{2.25}$$

Здесь мы также переставили порядок дифференцирования с учетом непрерывности частных производных.

Подставляя выражения (2.24), (2.25) в уравнение Софи Жермен – Лагранжа и пользуясь сходимостью рядов, приходим на множестве E к единому повторному триг. ряду с нулевыми коэффициентами, что обращает уравнение в тождество.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сейранян С.П. К задаче об изгибе прямоугольной пластины поперечной си-лой // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред, V Международная конференция, г.Горис, 1 – 5 октября.– Ереван: Гитутюн, 2005, с. 314 – 318.
2. Сейранян С.П. Об ускорении сходимости в задаче об изгибе прямоугольной пластины поперечной силой // Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести. Сб. статей, посвященный 77-летию акад. НАН РА М.А. Задояна.– Ереван: Гитутюн, 2006, с. 266 – 273.
3. Тимошенко С.П., Войновский – Кригер С. Пластинки и оболочки.– Пер. с англ. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М.: Физматгиз, 1959. 807 с.

Сведения об авторе

Сейранян С.П.
К.ф.м.н., н. с., Институт механики НАН РА
Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24[б]
E-mail: seysuren@yahoo.com

О ВОЗМОЖНОСТЯХ МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИНАМИКИ ВОЛОКОН

Симонов И.В.

Метод ЭМИ (электромагнитного излучения), ранее разработанный во многих работах для регистрации быстрых динамических процессов в макро образцах и элементах конструкций, распространен на микро волокна. Предлагается обзор экспериментальных *исследований колебаний, волн и разрушения волокон разной геометрии и свойств*: упруго-хрупких стеклянных и упруговязких полиэтиленовых волокон. Классифицированы амплитудно-частотные характеристики излучаемого сигнала и соответствующие им, разделенные масштабом времени волновые процессы, сопровождающие разрыв волокна. *Впервые зарегистрирован электрический сигнал от разрыва волокна на порядок тоньше человеческого волоса.* Изучение формы, частоты и затухания колебаний тонких волокон дает информацию о реологических параметрах микрообъектов. Предложен способ определения нелинейной диаграммы $\sigma - \varepsilon$ путем измерения частоты поперечных колебаний волокна как струны при заданной деформации. Обнаружен *эффект резкого замедления рассасывания нанесенного заряда с поверхности волокна при ее повреждении микро-нанотрещинами*, на основе которого может быть развит новый метод неразрушающего контроля. Разработана также методика определения скоростей волн большой амплитуды в волокне.

Разрушение волокон. Создано несколько типов экспериментальной установки с целью регистрации ЭМИ от динамических процессов в волокне. Основная установка состоит из датчиков электрического поля (антенны разных типов), экрана – латунной рамки размерами 162x89x32 мм с захватами внутри или металлической рамы с захватами для испытаний образцов длиной l до 80 см и двухлучевого осциллографа LeCroy WaveSurfer 422 с полосой частот 200 МГц. Она обладает высокой чувствительностью к “зарядовым” явлениям и слабо чувствительна к внешним механическим воздействиям. Объектом исследований являются образцы стеклянных волокон диаметром $d = 6.5$-150 мкм и волокон из сополимера ***(Japan fishing line, Nikko Vexter)*** $d = 60$-140 мкм.

Как известно, прочность тонких тел имеет статистическую природу. Для хрупких волокон решающую роль играет поверхность и расположенные на ней дефекты. Но, независимо от материала волокна, его разрыв сопровождается одними и теми же процессами, вызванными накоплением упругой энергии при растяжении [1]. А именно:

- поперечный разрыв волокна с образованием новых поверхностей с характерным временем $\Delta t_f \sim 10^{-7} - 10^{-8} c$;
- распространение продольной упругой волны разгрузки по волокну и её многократного отражения, $\Delta t_l \sim 10^{-4} - 10^{-5} c$ (для $l \sim 1\,см$).
- распространение нелинейной поперечной волны, $\Delta t_{nt} \sim 10^{-4} c$.
- упругие поперечные колебания остатка волокна в захвате как консольной балки, $\Delta t_{et} \sim 10^{-3} c$, рис. 1 (для этого необходимо, чтобы $l/d < 100$).
- рассасывание зарядов с поверхности волокна, если оно предварительно было заряжено, $\Delta t_d \sim 10^{-1} - 10\, c$ (сухой воздух).

Видно, что различные процессы разделены порядками величины характерных времен. Это позволяет избирательно изучать эти процессы.

Колебания. Опыты с возбуждением поперечных колебаний натянутых между зажимами сополимерных волокон как струн показали, что колебания регистрируются только при предварительном нанесении заряда на их поверхность. Из осциллограмм определяется период колебания по первой форме T_1, а при несимметричном возбуждении наблюдается наложение колебаний по следующим формам. Влияния величины и знака заряда на значение T_1 не обнаружено. По теории упругих колебаний струны по четырем известным величинам: частота, плотность, длина и диаметр волокна можно определить напряжение в волокне σ, а, зная удлинение, – величину деформации $e,\%$. Таким способом были построены нелинейные диаграммы $\sigma - e$. Ее прямое определение требует измерения малых сил с хорошей точностью, что затруднительно, поэтому метод частот, будучи резонансным и точным, может явиться перспективным методом определения реологических характеристик волокон.

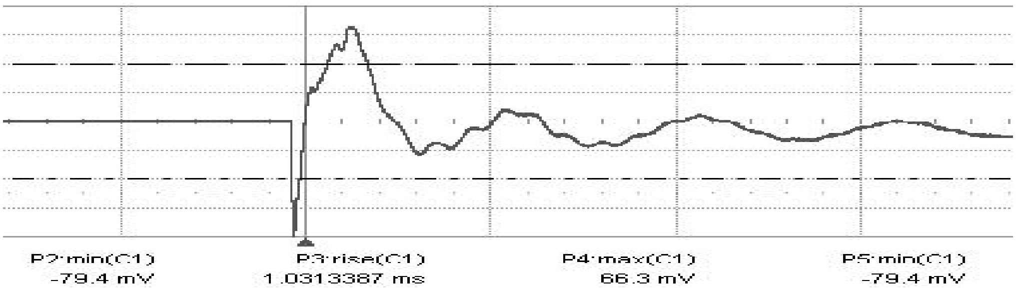


***Рис. 1. Сигнал при разрыве волокна** $d = 18$ **мкм. На фоне колебания по 1-ой форме видны колебания высокой частоты. Отношения частот** ≈ 0.18 **близко к расчету отношения первых двух собственных частот колебаний остатка волокна** $f_1 / f_2 \approx 0.16$.*

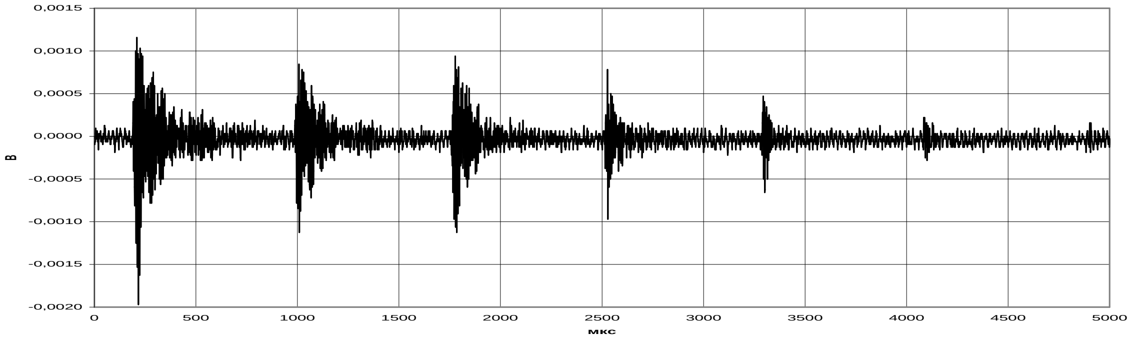


Рис. 2. Быстрое стекание заряда с неповрежденного стеклянного волокна

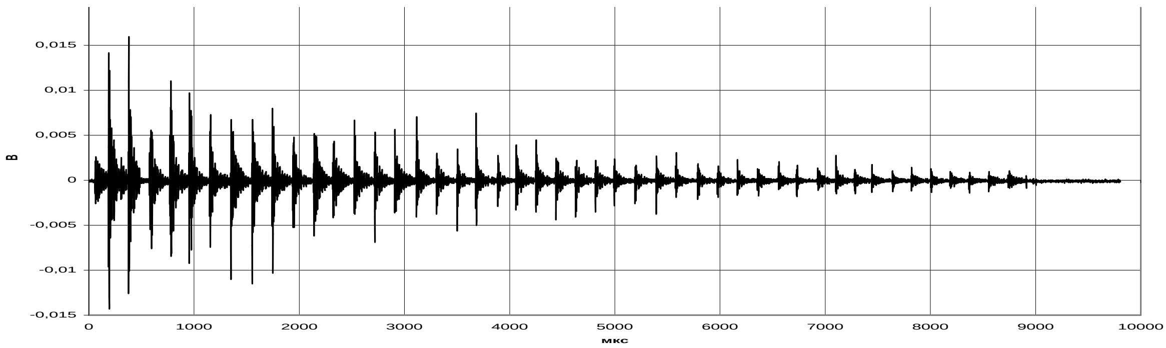


Рис. 3. Относительно медленное стекание заряда с поврежденного волокна

Рис. 4. Наличие и отсутствие микроповреждений на поверхности волокна

Проведены опыты по поперечным колебаниям волокна из силикатного стекла марки ВМП как упругой консольной балки (один конец закреплен, другой – свободен, длина $l \approx 18$, 30 мм). Опыты показали, что период колебаний T_1 в пределах точности измерений (два знака) не зависит от величины и знака заряда и от приобретенной при колебаниях поврежденности. Это позволяет определять эффективный модуль Юнга при изгибе по теории колебаний упругой консоли. *Неожиданный эффект* обнаружен в опытах по многократному возбуждению колебаний [2]. Колебания возбуждаются с частотой ≈ 1 раз/с, время полного затухания одного цикла ~ 250 мкс при числе колебаний в цикле ~ 50. При этом наблюдается эволюция стекания электронов практически до нуля, рис. 2. Величина заряда пропорциональна амплитуде сигнала, поэтому уменьшение заряда в десять раз происходит за время $\approx$ 4 с., а число актов возбуждения равно шести. После нескольких таких опытов испытуемое волокно приобретает поврежденность и начинает дольше удерживать отрицательный заряд. Из осциллограммы на рис. 3 следует, что время затухания $\approx 40\,s$ и число актов ≈ 50 изменились на порядок величины. Объяснение: поверхность с микротрещинами гораздо лучше удерживает электроны, чем гладкая. На рис. 4 приведены фото стекловолокон без дефектов (два образца справа) и с дефектами (три образца слева). Смачивание «электронной жидкостью» поверхности твердого тела подобно явлению смачивания жидкостью такой поверхности, которое используется в методе капиллярной дефектоскопии, и может быть положено в основу разработки нового метода неразрушающего контроля тел микро-нано размеров.

Измерение волновых скоростей производилось, в основном, с помощью двух датчиков – спиралей из трёх витков медной проволоки, внутренний диаметр витка < 1 мм [3]. Волокно, продетое в датчики, расположенные на расстоянии l (база) друг от друга, закреплялось в захватах после растяжения волокна на заданную длину ΔL, обеспечивая заданную деформацию. Разрез осуществлялся на расстоянии l_0 от одного из датчиков. Датчики соединены с двумя каналами осциллографа, на экране четко определялась разница во времени вступления сигналов Δt, рис 5. Тогда, ассоциируя начало сигнала с временем прихода фронта продольной волны разгрузки, $c_l = l / \Delta t = \sqrt{E / \rho}$, где E – мгновенный упругий модуль Юнга, ρ – плотность. Статистическая обработка результатов измерений дает линейные зависимости $c_l(e)$, разные для разных диаметров волокон $d =$ 60, 100,140 мкм, рис. 6, и, соответственно, после пересчета - квадратичные зависимости $E(e)$. Результаты сопоставлены со значениями длительных модулей Юнга, которые оказались на 2-3 порядка меньше. Это свидетельствует о сильном влиянии вязкости. Изменение $c_l(e)$ на интервале $e = 2 - 10{,}16\%$, соответствующее изменению жесткости волокна, существенно: от 2-3 до 5-6 км/с. Масштабный эффект заключается в зависимости как скорости, так и модулей Юнга (при фиксированной деформации) от диаметра волокна: кривые $E(e)$ идут тем выше, чем меньше диаметр волокна, хотя с точки зрения «макроскопической» механики сплошных сред они должны совпадать. От квадрата диаметра (то есть от площади поперечного сечения) зависимости $E = E(d^2)$ при фиксированной деформации близки к линейным.

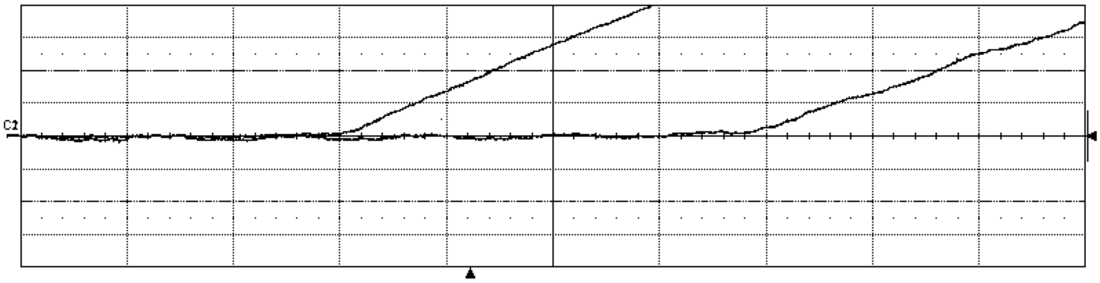


Рис. 5. Сигналы от датчиков с чёткими положительными фазами вступлений
d =100 мкм, e =2%, l =100 мм, 10 мкс/дел $\times$10 мВ/дел

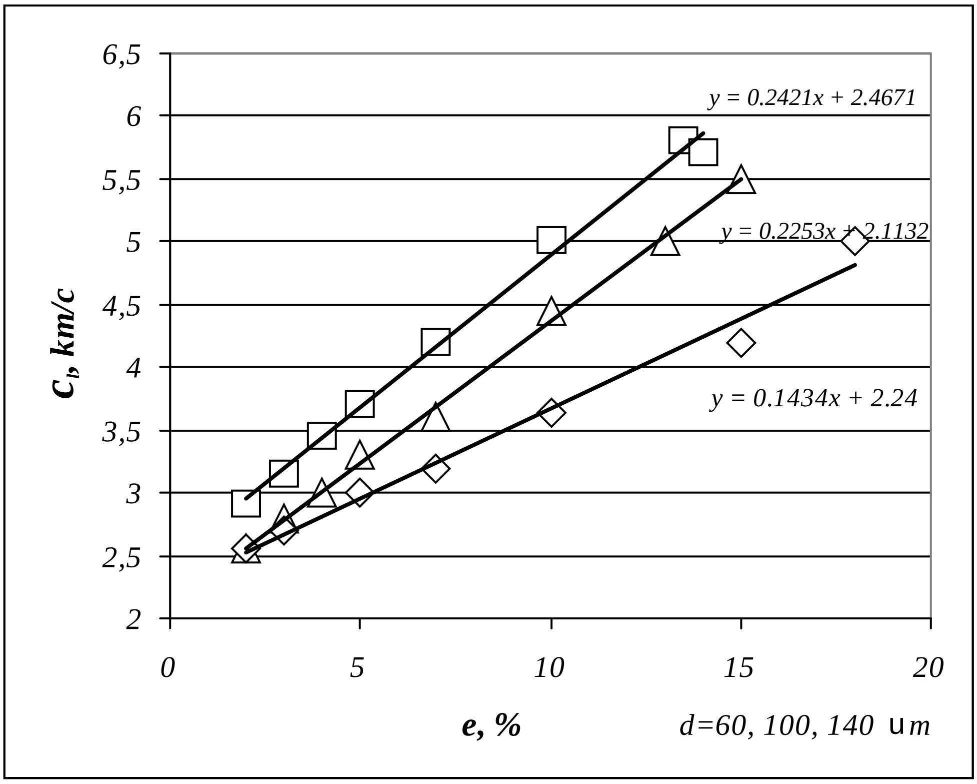


Рис. 6. Зависимость скорости продольной волны в волокне от деформации.

□ – d=60 мкм, Δ – d=100 мкм, ◇ – d=140 мкм.

Предлагаемый метод измерения динамических параметров микрообъектов, основанный на регистрации индукционной составляющей электрического поля (как в случае колебаний) или ЭМИ, имеет преимущества: является бесконтактным, позволяет работать в сложных условиях (агрессивные среды, разные диапазоны температур), не требует сложного оборудования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы ОЭММПУ № 12 и грантов РФФИ № 05-01-08092, 07-01-12031.

ЛИТЕРАТУРА

1. Симонов И. В., Сиротин А. А. Изучение колебаний и разрушения тонких волокон методом измерения электрического поля. /Препринт № 818, ИПМех РАН, 2006. 30 с.
2. Симонов И.В., Сиротин А.А. , Смирнов И.М., Тянин А.В. Регистрация колебаний волокон методом измерения электрического поля. //П ЖТФ. 2007. Вып. 33. С. 19-24.
3. Симонов И.В., Смирнов И.М. Определение скоростей волн и мгновенных модулей Юнга в полимерных волокнах при использовании эффекта электромагнитного излучения. / Препринт № 832, ИПМех РАН. 2007. 32 с.

Сведения об авторе

Симонов Игорь Валентинович
Доктор физ.-мат. наук, заведующий лабораторией
Адрес: 119526 Москва, Россия , п-т Вернадского 101-1 Институт проблем механики РАН
Тел.: (+7-812) 434-3592 (с) , 433-4525 (д); E-mail: simonov@ipmnet.ru

РАСЧЕТ ОСТАТОЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ И ПОЛЯРИЗАЦИИ В НЕОБРАТИМЫХ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ПРОЦЕССАХ

Скалиух А.С.

Основной целью настоящей работы является моделирование определяющих соотношений в необратимом процессе поляризации сегнетоэлектрических керамик, в которых наравне с большими электрическими полями имеются связанные механические напряжения, влияющие на процесс поляризации. При моделировании необратимых процессов вводят дополнительные параметры, описывающие ту или иную необратимость, например, тензор пластических деформаций в пластических средах, вектор остаточной поляризации в сегнетоэлектриках и т.д. Однако для замыкания задачи необходимо введение дополнительных определяющих соотношений. Как правило, такие соотношения строятся для одномерных задач с привлечением каких-либо реологических моделей, а затем переносятся на трехмерный случай. Например, в теории пластичности реологическими элементами являются упругий элемент Гука (пружина) и пластический элемент Сен-Венана (элемент сухого трения). Детальный механизм пластичности конкретного материала на микроскопическом уровне не рассматривается, но для выявления специфики протекающего процесса в том или ином теле создают различные комбинации последовательного и параллельного соединения этих элементов, получая соответствующие модели, наиболее общими из которых являются модели Прандтля-Ишлинского и Прагера. Переход от одномерного к трехмерному случаю можно осуществить с помощью элементов выпуклого анализа и получить ассоциированный закон течения, который и выступает в качестве искомых определяющих соотношений [1]-[2]. В теории пластичности такой подход является приемлемым и во многих случаях дает хорошее согласие с экспериментом. Однако в тории поляризации ситуация резко меняется, для получения согласованных с экспериментом законов необходимо проводить более тонкий учет перестройки внутренней структуры материала, особенно в поликристаллических сегнетоэлектриках.

В настоящей работе представлена модель поляризации сегнетоэлектрического поликристаллического диэлектрика, позволяющая находить приращение остаточного вектора поляризации и тензора деформации в зависимости от приращения электрического поля. Модель строится с помощью элементов двухуровневой сплошной среды: вначале с помощью электрического поля Вейсса и статистики Больцмана получена предельная зависимость поляризации от электрического поля; затем с учетом кинематических соотношений и балансного энергетического соотношения получено обыкновенное дифференциальное уравнение, из которого выводятся искомые зависимости. В одномерном случае предложенная модель совпадает с моделью Джила-Атертона [3]. В случае малых полей механических напряжений получены зависимости приращения тензора остаточных деформаций от приращения электрического поля.

Предельная зависимость. Строение керамики, например титаната бария, можно видеть на рис. 1.

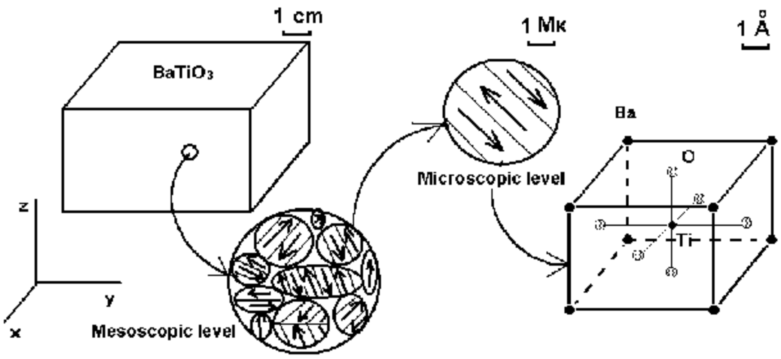


Рис. 1.

Введем на макроскопическом уровне декартову систему $Oxyz$, в которой положение каждой частицы определяется радиус-вектором $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Положение каждого домена в частице определяется его направлением. Если ввести локальную сферическую систему координат ρ, φ, ψ, то достаточно рассмотреть единичную сферу ($\rho = 1$) и определить вектор спонтанной поляризации следующим выражением:

$$\mathbf{p}_s = p_s(\mathbf{i}\sin\psi\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\psi\sin\varphi + \mathbf{k}\cos\psi)$$

Количество доменов выходящих своими концами на элемент сферы, $dN = c dS$.

По теории Вейсса на процесс переключения доменов в частице оказывает влияние не истинное электрическое поле $\mathbf{E}$, а "эффективное" поле $\mathbf{E}^{ef} = \mathbf{E} + \alpha\mathbf{P}_0$. По теореме Больцмана в консервативном поле $\mathbf{E}^{ef}$ распределение осей доменов в частице отличается от их распределения в отсутствии этого поля на величину $e^{-\frac{U}{kT}}$, где $U = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{p}_s$ – потенциальная энергия домена в эффективном поле, k – постоянная Больцмана, T – температура.

Тогда в текущем состоянии количество доменов dN, выходящих своими осями на элемент сферы dS, будет равно $dN = ce^{-\frac{U}{kT}}dS$ и для подсчета всех переключившихся доменов в частице достаточно провести интегрирование по сфере

$$N = c\int e^{-\frac{\mathbf{E}^{ef} \cdot \mathbf{p}_s}{kT}} dS$$

Поляризация частицы определяется как среднее значение спонтанных поляризаций всех доменов

$$\mathbf{P}_0^* = \frac{c}{N}\int e^{-\frac{\mathbf{E}^{ef} \cdot \mathbf{p}_s}{kT}} \mathbf{p}_s dS$$

Определяя из этих соотношений неизвестную константу c, получаем

$$\mathbf{P}_\infty = \frac{\int e^{-\frac{\mathbf{E}^{ef} \cdot \mathbf{p}_s}{kT}} \mathbf{p}_s dS}{\int e^{-\frac{\mathbf{E}^{ef} \cdot \mathbf{p}_s}{kT}} dS}$$

Полученное значение поляризации не учитывает никаких электрических и механических взаимодействий и влияния любых других механизмов, препятствующих переключению. Поэтому полученное выражение определяет наиболее выгодный случай переключения доменов в поле $\mathbf{E}^{ef}$ и носит название "предельного", или "ангистерезисного", а для обозначения применяется символ $\mathbf{P}_\infty$.

Энергетические потери. Рассмотрим потери работы электрического поля в поляризационном процессе. Легко показать, что они определяются выражением

$$\Delta A = -\int_\Omega \mathbf{P}_0 \cdot d\mathbf{E}^{ef} \, d\Omega$$

Если бы не приходилось затрачивать энергию для преодоления механизмов запирания доменов, то потери в системе определялись бы выражением ΔA_∞, где вместо остаточной поляризации надо поставить $\mathbf{P}_\infty$, а вместо вектора электрического поля – эффективное поле напряжений, т.е.

$$\Delta A_\infty = -\int_\Omega \mathbf{P}_\infty \cdot d\mathbf{E}^{ef} \, d\Omega$$

Кроме того, в [3] получено выражение для энергетического барьера, который необходимо преодолеть, чтобы преодолеть механизмы запирания доменных стенок

$$\Delta U = \int_\Omega n \frac{< U_\pi >}{2 p_s} \frac{\mathbf{E}^{ef}}{E^{ef}} \cdot d\mathbf{P}_0 \, d\Omega$$

В результате можно выписать баланс потерь: реальные потери складываются из потерь в идеальном (предельном) случае плюс энергия, необходимая для слома механизмов запирания, т.е.

$$\Delta A = \Delta A_\infty + \Delta U$$

Дифференциальное уравнение и кинематические соотношения. После подстановки соответствующих выражений и учета, что Ω – произвольный объем, получаем

$$(\mathbf{P}_\infty - \mathbf{P}_0) \cdot d\mathbf{E}^{ef} \Delta U = k \frac{\mathbf{E}^{ef}}{E^{ef}} \cdot d\mathbf{P}_0, \quad k = n\frac{< U_\pi >}{2 p_s}$$

Учитывая выражение для эффективного поля и произвольность приращения электрического поля $d\mathbf{E}$, преобразуем это уравнение к виду:

$$(\mathbf{P}_\infty - \mathbf{P}_0)\cdot(\mathbf{I} + \alpha \frac{d\mathbf{P}_0}{d\mathbf{E}}) = k\,\frac{\mathbf{E}^{ef}}{E^{ef}}\cdot\frac{d\mathbf{P}_0}{d\mathbf{E}}$$

Разложим приращение поляризации на приращение по полю $dP_0^{\parallel}$ и перпендикулярно к полю $dP_0^{\perp}$, и примем, что каждая из составляющих аддитивно зависит от приращений поля в этих направлениях

$$dP_0^{\parallel}(dE^{\parallel}, dE^{\perp}) = dP_0^{\parallel}(dE^{\parallel}) + dP_0^{\parallel}(dE^{\perp})$$

$$dP_0^{\perp}(dE^{\parallel}, dE^{\perp}) = dP_0^{\perp}(dE^{\parallel}) + dP_0^{\perp}(dE^{\perp})$$

К полученным дифференциальным уравнениям добавим кинематические соотношения, выражающие собой тот факт, что скорости прироста компонент вектора поляризации согласованы со скоростями роста электрического поля.

$$\frac{dP_0^{\parallel}(dE^{\parallel})}{dE^{\parallel}} = \gamma\frac{dP_0^{\perp}(dE^{\perp})}{dE^{\perp}}, \quad \frac{dP_0^{\parallel}(dE^{\perp})}{dE^{\perp}} = \frac{dP_0^{\perp}(dE^{\parallel})}{dE^{\parallel}}$$

После некоторых преобразований получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения $dP_0^{\parallel}/dE^{\parallel}$

$$\frac{dP_0^{\parallel}}{dE^{\parallel}} = F(P_0^{\parallel}, P_\infty^{\parallel}, P_0^{\perp}, P_\infty^{\perp}, E^{\parallel}).$$

Зная приращение $d\mathbf{E}$, можно определить $dE^{\parallel}, dE^{\perp}$, а из дифференциальных уравнений определяем $dP_0^{\parallel}(dE^{\parallel}), dP_0^{\perp}(dE^{\parallel})$. Используя кинематические соотношения, находим $dP_0^{\perp}(dE^{\perp}), dP_0^{\perp}(dE^{\perp})$, после чего находится полное приращение вектора поляризации $d\mathbf{P}_0$ и новое значение вектора остаточной поляризации $\mathbf{P}_{0new} = \mathbf{P}_{0old} + d\mathbf{P}_0$.

Используя условие несжимаемости остаточных деформаций и учитывая, что элемент деформируется вдоль направления вектора остаточной поляризации, можно определить предыдущее и текущее значения остаточной деформации в локальных осях, связанных с вектором остаточной поляризации

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{0old} = \frac{\varepsilon_S\,|\,\mathbf{P}_{0old}\,|}{2p_s}(-\mathbf{e}_{1old}\mathbf{e}_{1old} - \mathbf{e}_{2old}\mathbf{e}_{2old} + 2\mathbf{e}_{3old}\mathbf{e}_{3old})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{0new} = \frac{\varepsilon_S\,|\,\mathbf{P}_{0new}\,|}{2p_s}(-\mathbf{e}_{1new}\mathbf{e}_{1new} - \mathbf{e}_{2new}\mathbf{e}_{2new} + 2\mathbf{e}_{3new}\mathbf{e}_{3new})$$

после чего определяется приращение тензора остаточной деформации

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{0new} - \boldsymbol{\varepsilon}_{0old}$$

Задача по определению приращений остаточной поляризации и остаточной деформации полностью решена.

Пример. В качестве примера на рис. 2 приведены графики приращения остаточной поляризации для положительного и отрицательного приращения электрического поля, когда оно, изменяясь по модулю, сохраняет свое направление. Слева указаны начальные значения точек, от которых отсчитывалось приращение продольной составляющей поля.

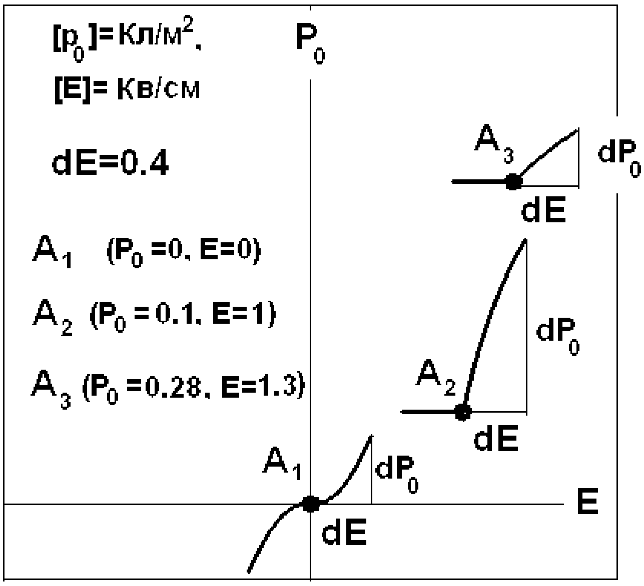


Рис. 2.

Результаты работы используются в моделях для расчета полей остаточной поляризации и остаточной деформации в сильных электрических полях. По этим полям определяются упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические модули неоднородно поляризованной керамики, являющейся локально трансверсально-изотропным телом.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-01-00752-а.)

ЛИТЕРАТУРА

1. Visintin A. On hysteresis in elasto-plasticity and in ferromagnetism. // Int. Journal of Non-Linear Mechanics, N 37, 2002, pp.1283-1298.
2. Ишлинский А.Ю., Ивлев В.В. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001, 2003. 704 с.
3. Smith R.C., Hom C.L. A domain wall model for ferroelectric hysteresis, enter for Research in Scientific Computation (CRSC) technical report CRSC-TR99-01, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 1999.

<u>Сведения об авторе:</u>

Скалиух Александр Сергеевич
Кандидат физ.-мат.наук, доцент, Южный Федеральный университет
Адрес: Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8А.
Тел.:+7-(863)-297-52-82; E-mail: skaliukh@math.rsu.ru

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ РЕЛАКСАЦИОННЫХ И ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Сметанников О.Ю., Куликова Т.Г.

Многие полимерные материалы, находясь в расплавленном виде, в аморфном состоянии, при охлаждении образовывают растущие кристаллические структуры. При этом процесс роста кристаллической фазы протекает, чаще всего, без выраженного фронта кристаллизации и сопровождается значительной температурной и деформационной неоднородностью, в результате чего в полимере формируются технологические и остаточные напряжения Закристаллизованный полимер может проявлять достаточно ярко выраженные релаксационные свойства. Для прогнозирования механического поведения кристаллизующегося полимера используются полученные авторами определяющие соотношения, учитывающие вязкоупругие свойства материала, единым образом описывающие связь тензоров напряжений и деформаций в широком интервале температур, включающем диапазон фазовых превращений [1]. При выводе уравнений используются следующие гипотезы: кристаллизующаяся полимерная система в каждый момент времени в каждой точке системы рассматривается как смесь расплава полимера и полностью закристаллизовавшегося продукта, относительная доля которых в общем объеме характеризуется величиной степени кристаллизации $\alpha(t)$; материал в процессе превращения остается макроизотропным; для описания поведения расплава полимера принимается линейно вязкоупругий закон поведения; для аморфной фазы функция релаксации является постоянной величиной, равной значению длительного модуля аморфной фазы; элементарная частица зарождающейся кристаллической фазы уже имеет некоторое начальное напряжение, равное по величине напряжению в расплаве полимера на момент кристаллизации; напряжения в кристаллизующемся полимере определяются, согласно принципа суперпозиции напряжений теории линейной вязкоупругости; деформации кристаллической фазы и расплава считаются одинаковыми. Пусть в момент времени t_1 закристаллизовалась доля полимера, характеризуемая приращением степени кристаллизации $\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha(t_1)$, и произошло приращение деформации $\Delta\varepsilon(t_1)$. Пусть в последующие моменты времени произошли приращения деформаций $\Delta\varepsilon(t_2),\ \Delta\varepsilon(t_3),\ldots,\ \Delta\varepsilon(t_k)$. В соответствии с принципом суперпозиции Больцмана, напряжения, возникающие в рассматриваемой части вязкоупругого полимера в момент времени $t_k > t_1$, будут иметь вид

$$\sigma_1(t_k) = \Delta\alpha_1\Big[R(t_k - t_1, t_1 - t_1)\Delta\varepsilon(t_1) + R(t_k - t_1, t_2 - t_1)\Delta\varepsilon(t_2) + \ldots + \\ + R(t_k - t_1, t_k - t_1)\Delta\varepsilon(t_k)\Big] + \sigma_{01} \qquad (1)$$

где $\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha(t_1)$ - приращение степени кристаллизации в момент времени t_1;

$\sigma_{01} = \Delta\alpha_1 E_{\text{а}}^{\infty}\varepsilon(t_0)$ -начальное напряжение для кристаллической фазы полимера, закристаллизовавшегося в момент времени t_1; $\sigma_1(t_k)$ - напряжения в рассматриваемой части полимера в момент времени $t_k > t_1$; $R(t,\tau)$ - функция релаксации кристаллической фазы; $E_{\text{а}}^{\infty}$ - длительный модуль полимера в аморфном состоянии. Суммируя напряжения по времени, после осуществления предельного перехода с учетом структурной усадки и температурной деформации, получим одноосные вязкоупругие определяющие соотношения

$$\sigma(t) = E_{\text{а}}^{\infty}\left[\varepsilon(t) - \varepsilon_T^{\text{а}}(t)\right]\left(1 - \alpha(t)\right) + \\ + \int_0^{\alpha(t)}\left[\int_{\omega}^{t} R(t-\omega, \tau-\omega)\, d\left(\varepsilon(\tau) - \varepsilon_T^{\text{кр}}(\tau) + kh(\tau-\omega)\right)\right] d\alpha(\omega) + E_{\text{а}}^{\infty}\int_0^{\alpha(t)}\left(\varepsilon(\tau) - \varepsilon_T^{\text{а}}(\tau)\right) d\alpha(\tau), \qquad (2)$$

где $\varepsilon_T^{\text{а}}$, $\varepsilon_T^{\text{кр}}$-температурные деформации для аморфной и кристаллической фазы; k - коэффициент структурной усадки; h - функция Хевисайда. Если предположить отсутствие релаксации и начальных напряжений в кристаллической фазе, то из (2), как частный случай, следует определяющее соотношение вида:

$$\sigma(t) = E_{\text{а}}^{\infty}\left(1-\alpha(t)\right)\bar{\varepsilon}_{\text{а}}(t) + E_{\text{кр}}\int\limits_0^{\alpha(t)}\left[\left(\bar{\varepsilon}_{\text{кр}}(t)-\bar{\varepsilon}_{\text{кр}}(\omega)\right)+k\right]d\alpha(\omega), \qquad (3)$$

где $\bar{\varepsilon}_{\text{а}}(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon_T^{\text{а}}(t)$; $\bar{\varepsilon}_{\text{кр}}(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon_T^{\text{кр}}(t)$, которое условно названо моделью кристаллизующейся среды в «упругом приближении». Здесь $E_{\text{кр}}$-модуль упругости кристаллической фазы. Путем аналогичных рассуждений получены физические уравнения для объемного НДС [1], которые в данной работе не приводятся из-за громоздкости.

Для проверки достоверности полученных физических соотношений было проведено сопоставление результатов численного решения и экспериментальных данных по определению полей перемещений круглой пластины 6 мм и диаметром 90мм из полиэтилена низкого давления (ПЭНД) на момент завершения процесса кристаллизации. В ходе эксперимента пластина помещалась в установку (рис. 1), которая затем прогревалась до температуры порядка 170-180^{0}С. После извлечения установки из печи, осуществлялось охлаждение пластины, сопровождающееся кристаллизацией полиэтилена. При этом были реализованы два режима охлаждения: 1) Начальная температура T_0 =170^{0}С. Пластина вместе с крышкой 5 секунд охлаждается под водой при температуре 16^{0}С и 5 секунд - на воздухе; далее – охлаждение без крышки под струей воды с температурой 16^{0}С. 2) Начальная температура T_0 =180^{0}С. Начальный этап охлаждения – 10 секунд с крышкой под водой, температура 20^{0}С; 5 секунд распылением, температура 20^{0}С. Далее – охлаждение без крышки водяным душем, температура 16^{0}С.

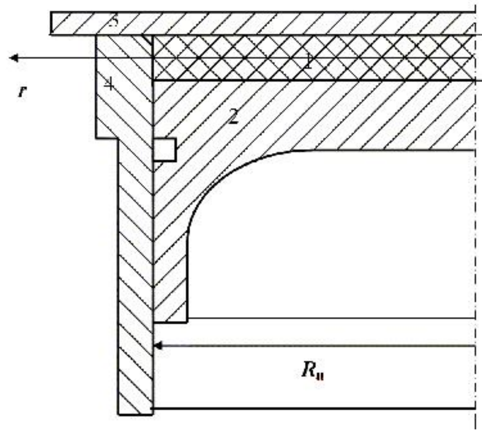


Рис. 1. Схема экспериментальной установки. 1 – пластина из ПЭНД, 2 – днище, 3 – крышка, 4 – стакан из стали.

Общая система уравнений при численном анализе, помимо уравнений равновесия и теплопроводности, начальных и граничных условий и определяющих соотношений вида (2) и (3), включает также уравнение кинетики неизотермической кристаллизации

$$d\alpha/dt = K_1 \exp\left(-U_1/(RT) - \psi/(T_p - T)\right)(1 + A_0\alpha)\left(\alpha_p(T) - \alpha\right), \qquad (4)$$

где $\dot{Q} = Q_k\dot{\alpha}$-скорость выделения тепла в ходе протекания реакции кристаллизации, Q_k-тепловой эффект реакции кристаллизации, ρ-плотность материала, $c-$ удельная теплоемкость, $\lambda-$коэффициент теплопроводности, $\alpha-$степень кристаллизации материала, R-универсальная газовая постоянная, T_p-температура плавления, K_1, U_1, ψ, A_0-макрокинетические константы, определяемые экспериментально.

На рис.3 представлены зависимости осевых перемещений точек пластины, лежащих на поверхности охлаждения, от радиуса для двух режимов охлаждения. Как видно из рисунка, наблюдается удовлетворительное соответствие экспериментальных данных и численных результатов, полученных с использованием физических соотношений, учитывающих вязкоупругие свойства кристаллической фазы полимера: для точек вблизи оси симметрии расхождение результатов составляет порядка 20%. Неучет релаксационных свойств приводит (кривые 2) к значительным расхождениям с экспериментом.

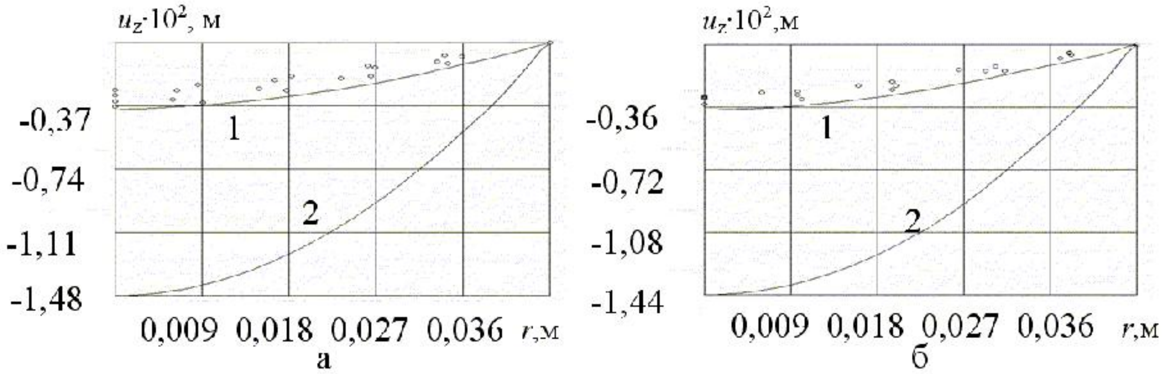


Рис.2. Зависимость осевых перемещений точек пластины, лежащих на поверхности охлаждения, от радиуса на момент завершения процесса кристаллизации:
1 – Модель (2), 2 – модель (3); о - значения, замеренные в эксперименте

Представлены также феноменологические определяющие соотношения для стеклующихся полимеров и композитов на их основе. Построение модели, как и в случае кристаллизующихся полимеров, производится в предположении, что изотропный однородный полимер в высокоэластическом состоянии имеет характерные времена релаксации намного меньше характерных времен внешних воздействий, сопровождающих процесс охлаждения, что позволяет использовать для описания упругую модель. В полностью застеклованном состоянии поведение полимера описывается в рамках линейной вязкоупругости. Относительное увеличение жесткости полимера в процессе стеклования характеризуется параметром $0 \le N \le 1$, - степенью стеклования. В качестве модели симметричной зависимости степени стеклования от температуры можно использовать, например, двухпараметрическое распределение Лапласа

$$N_L(T,\dot{T}) = \begin{cases} 1-0,5e^{\frac{(T-T_g(\dot{T}))}{\gamma_L}}, & T < T_g; \\ 0,5e^{\frac{(T-T_g(\dot{T}))}{\gamma_L}}, & T \ge T_g, \end{cases} \tag{5}$$

где γ_L -параметр, определяющий ширину интервала стеклования.

Поведение полимера в процессе стеклования, происходящего в интервале температур $T_{g2} \le T \le T_{g1}$, где T_{g1}-температура начала стеклования, T_{g2} - температура конца стеклования, описывается соотношениями, аналогичными моделям (2), (3).

$$\sigma(t) = B_1\left[\theta(t) - 3\varepsilon_T(t)\right] + \int_0^{N(t)}\left[\int_\omega^t R^B(t-\omega,\tau-\omega)\,d\left(\theta(\tau)-3\varepsilon_T(\tau)\right)\right]dN(\omega) +$$
$$+\int_0^{N(t)}\left[\int_\omega^t R^B(t-\omega,\tau-\omega)\,d\left(\theta(\tau)-3\varepsilon_T(\tau)\right)\right]dN(\omega), \tag{6}$$
$$s_{ij}(t) = 2G_1 e_{ij}(t) + \int_0^{N(t)}\left[\int_\omega^t R^G(t-\omega,\tau-\omega)\,de_{ij}(\tau)\right]dN(\omega),$$

где $e_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3}\theta(t)\delta_{ij}$; $s_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) - \sigma(t)\delta_{ij}$; $\sigma(t) = \frac{1}{3}\sigma_{kk}(t)$; $R^G(t,\tau) = R_{12}(t,\tau) - 2G_1$, G_1-модуль сдвига полимера в высокоэластическом состоянии,

$R_{12}(t,\tau)$-функция сдвиговой релаксации полностью застеклованного материала; $R^B(t,\tau)=R_{11}(t,\tau)-B_1$, B_1-объемный модуль полимера в высокоэластическом состоянии, $R_{11}(t,\tau)$-функция объемной релаксации материала в стеклообразном состоянии; $\hat{\varepsilon}_T(t)=\int\limits_{T_H}^{T(t)}\hat{\alpha}(T)\,dT(\tau)$; $\hat{\alpha}$ -коэффициент линейного температурного расширения.

Если пренебречь релаксационными эффектами в стеклообразном состоянии, то из (6) следуют физические соотношения для стеклующегося полимера в упругом приближении.

$$s_{ij}(t)=2G_1(T(t))e_{ij}(t)+2G_2(T(t))\int\limits_{T_H}^{T(t)}\left[e_{ij}(t)-e_{ij}(\tau)\right]dN(T(t)); \quad (7)$$

$$\sigma(t)=B_1(T(t))\left[\theta(t)-3\varepsilon_T(t)\right]+B_2(T(t))\int\limits_{T_H}^{T(t)}\left\{\left[\theta(t)-3\varepsilon_T(t)\right]-\left[\theta(\tau)-3\varepsilon_T(\tau)\right]\right\}dN(T(\tau))$$

Частичная идентификация модели производится на базе термомеханических одноосных испытаний, включающих следующие этапы (рис. 3): 1) охлаждение образца без нагрузки до комнатной температуры (кривая 1-2) с постоянной скоростью; 2) нагружение при комнатной температуре (участок 2-3); 3) нагрев под постояноой нагрузкой до температуры выше интервала стеклования с различными скоростями (кривая 3-4). При переходе к описанию объемного НДС в отсутствие дополнительных экспериментов на сдвиг вводится гипотеза о постоянстве объемного модуля.

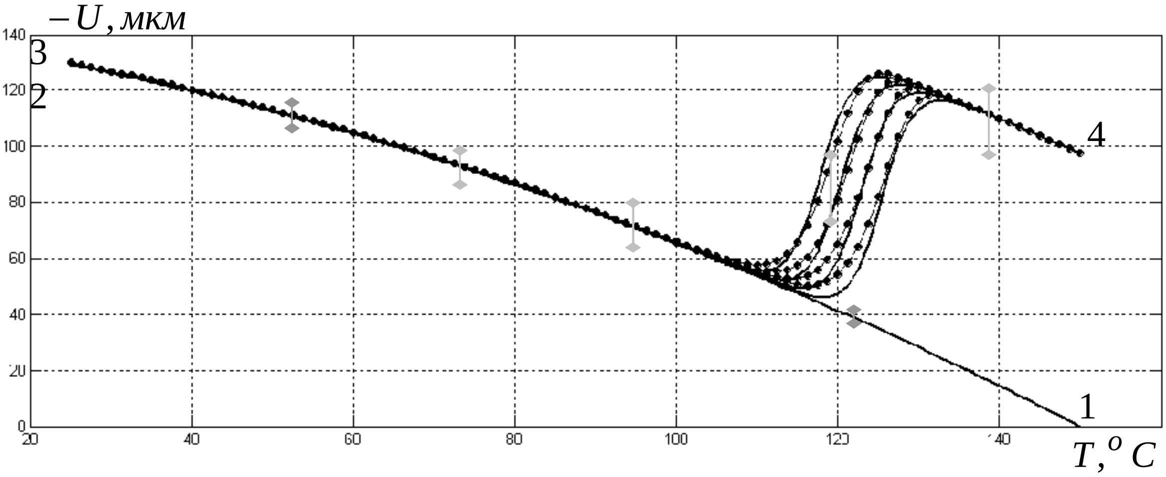


Рис. 3. Термомеханическая кривая ЭДТ – 10, нагрузка 300 г.
— - расчет по (1), (3); точки - эксперимент

Для иллюстрации закономерностей формирования полей технологических и остаточных напряжений в конструкциях из полимеров, подчиняющихся модели (7), получено аналитическое решение модельной задачи о пакете бесконечного числа неравномерно охлаждаемых, совместно деформирующихся стержней. На базе предложенной модели (6), (7) также численно исследовано напряженно-деформированное состояние короткого цилиндра из эпоксидной смолы. Показано хорошее совпадение результатов расчета с экспериментальными данными, полученными методом разрезки колец и поляризационно-оптическим методом.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦНТП, государственный контракт № 02.513.11.3011, шифр лота 2007-3-1.3-26-01-192; грант РФФИ № 07-01-96009-р_урал_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялова Т.Г. (Куликова Т.Г.), Труфанов Н.А. Определяющие соотношения для вязкоупругого тела в условиях кристаллизации // ПМТФ. – 2005, Т.46, №4. – С.78-87.
2. Матвеенко В.П., Сметанников О.Ю., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Термомеханика полимерных материалов в условиях релаксационного перехода // Физическая мезомеханика, Т.2, №4, 1999. – С.23-29.

Сведения об авторах

Сметанников Олег Юрьевич
К. ф.-м. н., доцент кафедры Вычислительной математики и механики, ПермГТУ
Адрес:Пермский государственный технический университет 614000, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, Кафедра вычислительной математики и механики
Тел:(342) 237-80-09; **E-mail:** sou@cpl.pstu.ac.ru

Куликова Татьяна Георгиевна
К. ф.-м. н., доцент кафедры Вычислительной математики и механики, ПермГТУ
Адрес:Пермский государственный технический университет 614000, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, Кафедра вычислительной математики и механики
Тел: (342) 239-15-64; **E-mail:** ztg@cpl.pstu.ac.ru

МЕТОДЫ УЛЬТРАЗВУКОВОГО НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ ПРИ ОБНАРУЖЕНИИ СИСТЕМ ДЕФЕКТОВ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Сумбатян М.А., Боев Н.В.

При обнаружении дефектов и систем дефектов сложной формы в металлических и композитных материалах возникает проблема точного расчета многократного переотражения ультразвуковых волн на искривленных границах. Часто используются формулы, аналогичные задаче переотражения на плоских границах. Такой подход приводит к серьезным погрешностям при расчете амплитуды ультразвуковой волны. В [1] на основе физической теории Кирхгофа в рамках геометрической теории дифракции выписан главный член асимптотики давления в многократно переотраженной акустической волне. В данной работе получен главный член асимптотики перемещений в случае многократных переотражений и трансформаций упругих волн на скоплении полостей, находящихся в бесконечной изотропной упругой среде.

Пусть из точки x_0 бесконечной упругой среды на граничную поверхность полости или скопления полостей, находящихся в ней, падает сферическая монохроматическая волна. Волна порождается сосредоточенной в точке x_0 силой $\mathbf{Q}e^{-i\omega t}$, где ω – частота колебаний. Матрица Купрадзе [2] определяет в точке y упругой среды в радиальном направлении $\mathbf{q} = \mathbf{x}_0\,\mathbf{y} / |\mathbf{x}_0\,\mathbf{y}|$ ненулевые перемещения в падающих продольной (p – волне) и поперечной (s – волне) волнах. В высокочастотном режиме колебаний при $k_p R_0 \to \infty$ и $k_s R_0 \to \infty$, $R_0 = | x_0 - y |$ после отделения временного множителя асимптотическое представление, например, для перемещений в p – волне $\mathbf{u}_{\mathbf{q}}^{(p)}(y)$ с точностью до некоторого постоянного множителя имеет вид:

$$\mathbf{u}_{\mathbf{q}}^{(p)}(y) = Q_{\mathbf{q}}\mathbf{q}\,\frac{e^{ik_pR_0}}{R_0}\left[\,1 + O\left(\frac{1}{k_p R_0}\right)\right], \quad Q_{\mathbf{q}} = (\mathrm{Q},\, \mathrm{q}) \tag{1}$$

где $k_p = \omega / c_p$, $k_s = \omega / c_s$, c_p, c_s – волновые числа и скорости продольной (p) и поперечной (s) волн. $Q_{\mathbf{q}}$ – проекция силы $\mathbf{Q}$ на направление $\mathbf{q}$. Цель исследования – построение асимптотического решения, которое имеет локальный характер и дает главный асимптотический член амплитуды дифрагированного поля в малой окрестности любого луча, вышедшего из точки x_0 (источника), отразившегося от поверхности препятствий $S_1, S_2, \ldots, S_N$ в точках зеркального отражения $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_N^*$ и пришедшего в точку x_{N+1}. Очевидно, что такие лучи могут существовать в том случае, если все точки отражения, а также точка приема x_{N+1} находятся в области «света». Компоненты вектора перемещений в отраженной от свободной граничной поверхности волне в точке x упругого пространства определяются следующим интегралом Сомильяны [3]:

$$u_k(x) = \int_s \mathbf{T}_y\,[\,\mathbf{U}^{(k)}\,(y,\,x)]\;\cdot \mathbf{u}(y)\;ds\,,\quad k = 1,\,2,\,3$$

$$\mathbf{T}_y\left[\,\mathbf{U}^{(k)}\,(y,\,x)\,\right] = 2\mu\,\frac{\partial\,\mathbf{U}^{(k)}}{\partial n} + \lambda\,\mathbf{n}\;\operatorname{div}\left(\mathbf{U}^{(k)}\right) + \mu\,\left(\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\left(\mathbf{U}^{(k)}\right)\right) \tag{2}$$

где матрица Купрадзе $U_j^{(k)}(y,\,x)$, $k,\ j = 1,\,2,\,3$, а $\mathbf{T}_y$ – вектор силы в точке y, $\mathbf{u}(y)$ – вектор полного поля перемещений на граничной поверхности, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к поверхности S , направленная в сторону упругой среды. Выделим в векторе полного перемещения $\mathbf{u}(y)$ на граничной поверхности и в векторах $\mathbf{U}^{(k)}$ и $\mathbf{T}_y$ в точке y слагаемые, определяемые продольной (p – волной) и поперечной (S – волной) волнами.

$$\mathbf{u}(y) = \mathbf{u}\ (y;\ p) + \mathbf{u}(y;\ s)\,, \quad \mathbf{U}^{(k)}(y, x) = \mathbf{U}_p^{(k)}(y, x) + \mathbf{U}_s^{(k)}(y, x)$$

$$\mathbf{T}_y\,[\mathbf{U}^{(k)}\,(y,\ x)] = \mathbf{T}_y\ [\mathbf{U}_p^{(k)}\,(y,\ x)] + \mathbf{T}_y\,[\mathbf{U}_s^{(k)}(y,\ x)]$$

Многократные переотражения с трансформациями упругих волн изучаются на основе модификации физической теории дифракции Кирхгофа [4] и интегрального представления Сомильяны [3].

Модификацию физической теории дифракции Кирхгофа изложим на примере повторного отражения луча $x_0 - y_1^* - y_2^* - x_3$, излучающегося из точки x_0 ($p-$волна (1)) и принимающегося в точке x_3 с возможной трансформацией $p - s - p$. Компоненты вектора перемещений $p-$волны в точке x_3 даются следующей формулой:

$$u_k^{(p)}(x_3) = \iint\limits_{S_2^*} \mathbf{T}_{y_2}\left[\ \mathbf{U}_p^{(k)}\left(\ y_2,\ x_3\ \right)\right] \cdot \mathbf{u}\left(y_2;\ s\right)\,dS_2\,,\ k = 1,\ 2,\ 3 \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{u}(y_2;\ s)$ – вектор полного перемещения в точке $y_2 \in S_2^*$ окрестности точки зеркального отражения y_2^*, который определяется после первой $p-s$ трансформации на окрестности S_1^* точки зеркального отражения y_1^*.

При асимптотической оценке интеграла Сомильяны в формуле (3) компоненты вектора полного поля перемещений $u_k(y_2; s)$, $k = 1, 2, 3$ под знаком интеграла следует выбрать как решение локальной задачи дифракции об отражении плоской падающей s-волны [5], сформированной при $p-s$ трансформации на окрестности S_1^*.

$$u_m(y_2;\,s) = \left(V_{ss}(y_2) - 1 - \text{tg}\ \text{¥}_1\ V_{sp}(y_2)\right) u_m^{(s)}(y_2), \quad m = 1,\ 2$$

$$u_3(y_2;\,s) = \left(V_{ss}(y_2) + 1 + \frac{k_p}{k_s\ \sin\ \text{¥}_1}\ \sqrt{1 - \frac{k_s^2}{k_p^2}\ \sin^2 \text{¥}_1}\ V_{sp}(y_2)\right) u_3^{(s)}(y_2)$$

где $V_{ss}(y_2)$ и $V_{sp}(y_2)$ – коэффициенты $s-s$ отражения и $s-p$ трансформации [5]. В то же время компоненты вектора перемещений $u_k^{(s)}(y_2)$, $k = 1, 2, 3$ сами выражаются подобной формулой

$$u_k^{(s)}(y_2) = \iint\limits_{S_1^*} \mathbf{T}_{y_1}\left[\ \mathbf{U}_s^{(k)}\left(\ y_1,\ y_2\ \right)\right]\ \cdot\ \mathbf{u}\left(y_1;\ p\right)\,dS_1$$

где вектор полного поля перемещений $\mathbf{u}(y_1;\ p)$ в точках $y_1 \in S_1^*$ окрестности y_1^* определяется как решение локальной задачи об отражении плоской падающей p - волны от окрестности S_1^*.

Такой же подход применен и при многократном переотражении. Это означает, что при нахождении главного члена асимптотики кратного дифракционного интеграла мы будем находиться в рамках расчета амплитуды перемещений в многократно отраженной волне по геометрической теории дифракции. Если, например, расположение и форма поверхностей таковы, что траектория луча $x_0 - y_1^* - y_2^* - \ldots - y_{2N-1}^* - y_{2N}^* - x_{2N+1}$, представляющего собой пространственную ломаную линию, приводит к $p - s - p - s - \ldots - p - s - p$ отражению (оно реализуется только при четном числе точек зеркального отражения), то амплитуда радиального перемещения 2N раз отраженного луча в точке приема x_{2N+1} относительно локальной сферической системы координат $r,\ \theta,\ \psi$ в последней точке зеркального отражения y_{2N}^* представляется интегралом

$$u_r^{(p)}\left(x_{2N+1}\right) = \frac{Q_{\mathbf{q}}}{4\pi\mu}\left(\frac{k_p}{k_s}\right)^2\left(\frac{k_p\,k_s}{4\pi^2}\right)^N L_0^{-1}\prod_{n=1}^{N} L_{2n-1}^{-1}\,L_{2n}^{-1}\ \times$$

$$\times\ \cos\ \text{¥}_{2n-1}^{(s)}\ \cos\ \text{¥}_{2n}^{(p)}\ V_{ps}\left(y_{2n-1}^*\right) V_{sp}\left(y_{2n}^*\right)\times$$

$$\times \iint\limits_{S_{2N}^*} \iint\limits_{S_{2N-1}^*} \dots \iint\limits_{S_2^*} \iint\limits_{S_1^*} e^{ik_p \varphi} \; dS_1\, dS_2 \dots dS_{2N-1}\, dS_{2N}\,, \quad u^{(p)}\left(x_{2N+1}\right)=0,\; u^{(p)}\left(x_{2N+1}\right)=0$$

$$\varphi = \left| \; x_0 - y_1 \; \right| + k_s\, k_p^{-1} \sum_{n=1}^{N} \left| \; y_{2n-1} - y_{2n} \; \right| + \sum_{n=1}^{N-1} \left| \; y_{2n} - y_{2n+1} \; \right| + \left| \; y_{2N} - x_{2N+1} \; \right|$$

$$L_0 = \left| \; x_0 - y_1^* \; \right|, \quad L_n = \left| \; y_n^* - y_{n+1}^* \; \right|, \quad n = 1,\, 2,\, \dots,\, 2N-1; \quad L_{2N} = \left| \; y_{2N}^* - x_{2N+1} \; \right| \qquad (4)$$

в котором $S_1^*,\, S_2^*, \dots,\, S_{2N-1}^*,\, S_{2N}^*$ – окрестности точек зеркального отражения. V_{ps} и V_{sp} – коэффициенты трансформации волн.

Применяя для асимптотической оценки при $k_p \to \infty$ 4N кратного интеграла (4) метод многомерной стационарной фазы [6], получаем амплитуду радиального перемещения в 2N раз переотраженной p – волне.

$$u_r^{(p)}\left(x_{2N+1} \right) = B_1 \times \frac{\exp\left\{ i \left[\; k_p\, L_0 + \sum\limits_{n=1}^{N} \left(k_s\, L_{2n-1} + k_p\, L_{2n} \right) + \frac{\pi}{4} \left(\delta_{4N} + 4N \right) \right] \right\}}{\prod\limits_{n=0}^{2N} L_n \quad \sqrt{\left| \det\left(D_{4N} \right) \right|}}$$

$$B_1 = \frac{Q_{\mathbf{q}}}{4\pi\mu} \left(\frac{k_s}{k_p} \right)^{N-2} \prod_{n=1}^{N} \cos\, \gamma_{2n-1}^{(s)} \, \cos\, \gamma_{2n}^{(p)}\, V_{ps}\left(y_{2n-1}^* \right) V_{sp}\left(y_{2n}^* \right) \qquad (5)$$

где $\delta_{4N} = \operatorname{sign} D_{4N}$ – матрица Гессе $D_{4N} = (d_{mk}),\; m,\, k = 1,\, 2,\, 3,\, \dots, 4N$, которая является ленточной (с шириной ленты равной семи) и симметричной $d_{mk} = d_{mk}$ со следующими ненулевыми элементами $d_{mk},\; m \le k, \quad m,\; k \le 4N$:

$$\left\{ \begin{matrix} d_{4n-3,\,4n-3} \\ d_{4n-2,\,4n-2} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{L_{2n-2}} \left\{ \begin{matrix} \sin^2 \alpha_{2n-1}^{(p)} \\ \sin^2 \beta_{2n-1}^{(p)} \end{matrix} \right\} + \frac{k_s}{k_p\, L_{2n-1}} \left\{ \begin{matrix} \sin^2 \alpha_{2n-1}^{(s)} \\ \sin^2 \beta_{2n-1}^{(s)} \end{matrix} \right\} +$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} k_1^{(2n-1)} \\ k_2^{(2n-1)} \end{matrix} \right\} \left(\cos\, ¥_{2n-1}^{(p)} + \frac{k_s}{k_p} \cos\, ¥_{2n-1}^{(s)} \right)$$

$$\left\{ \begin{matrix} d_{4n-1,\,4n-1} \\ d_{4n,\,4n} \end{matrix} \right\} = \frac{k_s}{k_p\, L_{2n-1}} \left\{ \begin{matrix} \sin^2 \alpha_{2n}^{(s)} \\ \sin^2 \beta_{2n}^{(s)} \end{matrix} \right\} + \frac{1}{L_{2n}} \left\{ \begin{matrix} \sin^2 \alpha_{2n}^{(p)} \\ \sin^2 \beta_{2n}^{(p)} \end{matrix} \right\} +$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} k_1^{(2n)} \\ k_2^{(2n)} \end{matrix} \right\} \left(\frac{k_s}{k_p} \cos\, \gamma_{2n}^{(s)} + \cos\, \gamma_{2n}^{(p)} \right)$$

$$d_{4n-3,\; 4n-2} = -\frac{1}{L_{2n-2}} \cos\, \alpha_{2n-1}^{(p)}\, \cos\, \beta_{2n-1}^{(p)} - \frac{k_s}{k_p\, L_{2n-1}} \cos\, \alpha_{2n-1}^{(s)}\, \cos\, \beta_{2n-1}^{(s)}$$

$$d_{4n-1,\; 4n} = -\frac{k_s}{k_p\, L_{2n-1}} \cos\, \alpha_{2n}^{(s)}\, \cos\, \beta_{2n}^{(s)} - \frac{1}{L_{2n}} \cos\, \alpha_{2n}^{(p)}\, \cos\, \beta_{2n}^{(p)}$$

$$d_{4n-3,\, 4n-1} = \frac{k_s}{k_p\, L_{2n-1}} \left(\cos\, \alpha_{2n-1}^{(s)}\, \cos\, \alpha_{2n}^{(s)} - \left(c_{11} \right)_{2n}^{2n-1} \right)$$

$$d_{4n-3,\,4n}=\frac{k_s}{k_p\,L_{2n-1}}\left(\cos\alpha^{(s)}_{2n-1}\,\cos\beta^{(s)}_{2n}-\left(c_{21}\right)^{2n-1}_{2n}\right)$$

$$d_{4n-2,\,4n-1}=\frac{k_s}{k_p\,L_{2n-1}}\left(\cos\beta^{(s)}_{2n-1}\,\cos\alpha^{(s)}_{2n}-\left(c_{12}\right)^{2n-1}_{2n}\right)$$

$$d_{4n-2,\,4n}=\frac{k_s}{k_p\,L_{2n-1}}\left(\cos\beta^{(s)}_{2n-1}\,\cos\beta^{(s)}_{2n}-\left(c_{22}\right)^{2n-1}_{2n}\right)$$

$$d_{4n-1,\,4n+1}=\frac{1}{L_{2n}}\left(\cos\alpha^{(p)}_{2n}\,\cos\alpha^{(p)}_{2n+1}-\left(c_{11}\right)^{2n}_{2n+1}\right)$$

$$d_{4n-1,\,4n+2}=\frac{1}{L_{2n}}\left(\cos\alpha^{(p)}_{2n}\,\cos\beta^{(p)}_{2n+1}-\left(c_{21}\right)^{2n}_{2n+1}\right)$$

$$d_{4n,\,4n+1}=\frac{1}{L_{2n}}\left(\cos\beta^{(p)}_{2n}\,\cos\alpha^{(p)}_{2n+1}-\left(c_{12}\right)^{2n}_{2n+1}\right)$$

$$d_{4n,\,4n+2}=\frac{1}{L_{2n}}\left(\cos\beta^{(p)}_{2n}\,\cos\beta^{(p)}_{2n+1}-\left(c_{22}\right)^{2n}_{2n+1}\right)$$

Здесь $\left\{-\cos\alpha^{(p)}_{2n},\ -\cos\beta^{(p)}_{2n},\ -\cos\gamma^{(p)}_{2n}\right\}$ – направление падения $p-$волны, а $\left\{-\cos\alpha^{(s)}_{2n-1},\ -\cos\beta^{(s)}_{2n-1},\ \cos\gamma^{(s)}_{2n-1}\right\}$ – направление отражения $s-$волны, относительно системы координат в точке y^*_{2n-1}; $\left\{-\cos\alpha^{(s)}_{2n},\ -\cos\beta^{(s)}_{2n},\ -\cos\gamma^{(s)}_{2n}\right\}$ – направление падения $s-$ волны, а $\left\{-\cos\alpha^{(p)}_{2n},\ -\cos\beta^{(p)}_{2n},\ \cos\gamma^{(p)}_{2n}\right\}$ – направление отражения $p-$волны относительно системы координат в точке y^*_{2n}.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-01-00155а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Боев Н. В., Сумбатян М. А. Коротковолновая дифракция на телах, ограниченных произвольной гладкой поверхностью. // Доклады РАН. 2003. 392. № 5. С.614– 617.
2. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: – 1963. – 472 с.
3. Новацкий В. Теория упругости. – М., – 1975. – 872 с.
4. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теории дифракции. М.: – 1978. – 248 с.
5. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: – 1981. – 284 с.
6. Федорюк М. В. Метод перевала. –М.: – 1977. – 368 с.

<u>Сведения об авторах</u>

Боев Николай Васильевич.
Доктор физ.-мат. наук, профессор мех-мата ЮФУ
Адрес: мех-мат ЮФУ, ул. Мильчакова 8а, 344090, г. Ростов-на-Дону, Россия
Тел.: 007-863-2975225; E-mail: boyev@math.rsu.ru

Сумбатян Межлум Альбертович
Доктор физ.-мат. наук, профессор мех-мата ЮФУ
Адрес: мех-мат ЮФУ, ул. Мильчакова 8а, 344090, г. Ростов-на-Дону, Россия
Тел.: 007-863-2975225; E-mail: sumbat@math.rsu.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНТАКТНЫХ И ВНУТРЕННИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ДВУХСЛОЙНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ В УСЛОВИЯХ ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ

Торская Е.В.

Одним из способов увеличения долговечности деталей, работающих в условиях контактного взаимодействия, сопряженного с качением, является нанесение на рабочую поверхность покрытий, позволяющих минимизировать сопротивление качению.

Условия контакта с качением (например, в подшипниках качения) обычно предполагают циклический характер нагружения. В этом случае распределение внутренних напряжений и прочностные свойства материала определяют долговечность сопряжения. В случае, когда на одно из взаимодействующих тел нанесено тонкое покрытие, граница раздела покрытия и подложки является зоной, в которой напряжения могут достигать максимальных значений [1, 2].

Целью данной работы является определение условий контактного взаимодействия шарика и тела с покрытием (размеров области контакта, распределения нормальных и касательных напряжений) и расчет внутренних напряжений.

1. Определение контактного давления. Контактные давления определяются в предположении, что касательные силы не влияют на нормальные напряжения, форму и размер области контакта. Рассматривается упругий слой толщины *h*, скрепленный с бесконечным упругим основанием, в который нагрузкой *P* вдавливается упругий шарик радиуса *R* (рис.1).

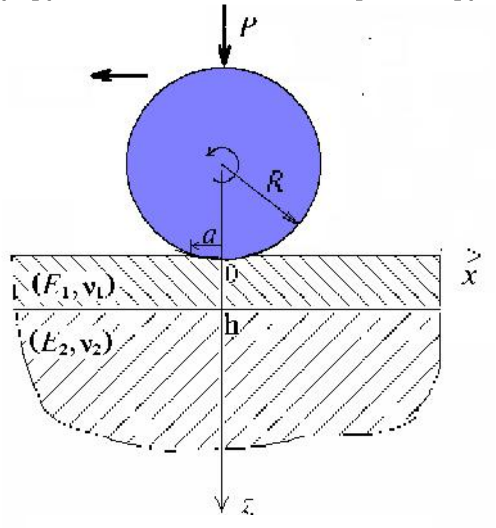


Рис.1 Постановка задачи

На границе раздела слоя и основания выполняются следующие условия:

$$w^{(1)} = w^{(2)}; \quad u^{(1)} = u^{(2)}$$
$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}; \quad \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)} \qquad (1)$$

здесь *w* и *u* – вертикальные и радиальные перемещения, *i* – индекс слоя (1) или основания (2).

Условия на верхней границе слоя:

$$w^{(1)}(r) + w^{(3)}(r) = f(r) + D, \quad 0 < r < a$$
$$\sigma_z^{(1)} = 0, \qquad a < r < +\infty \qquad (2)$$
$$\tau_{rz}^{(1)} = 0, \quad \tau_{\theta z}^{(1)} = 0, \qquad 0 \le r < +\infty$$

где *f(r)* – форма индентора, *D* – его вертикальное смещение, $w^{(3)}(r)$ – упругие перемещения поверхности индентора, *a* – неизвестный радиус области контакта.

Замыкает систему (1)-(2) уравнение равновесия:

$$P = \int_0^a \int_0^{2\pi} p(r) r \, dr d\varphi \qquad (3)$$

где *p(r)* – неизвестное распределение давления. Решение основано на методе, включающем интегральные преобразования Ханкеля и подробно изложенном в [3]. С помощью этого метода можно определить напряжения и перемещения в покрытии и основании для некоторого известного осесимметричного распределения давления на поверхности. Предполагая, что давление можно представить в виде кусочно-постоянной функции, с помощью итерационной процедуры можно определить радиус области контакта и распределение контактного давления. Подробно метод расчета контактного давления для осесимметричного упругого индентора произвольной формы изложен в [1].

2. Определение касательных напряжений. При расчете касательных напряжений предполагалось, что в области контакта в условиях трения качения возникают две подобласти:

- подобласть сцепления $\Omega_{сц}$, в которой скорость относительного проскальзывания точек контактирующих поверхностей равна нулю, а величина касательных напряжений не превосходит предельной силы – силы трения, т.е.

$$\left|\vec{s}(x,y)\right| = 0, \left|\vec{\tau}(x,y)\right| \le \mu p(x,y), (x,y) \in \Omega_{сц} \tag{4}$$

- подобласть проскальзывания $\Omega_{ск}$, в которой выполняется закон трения Кулона-Амонтона и касательные напряжения направлены противоположно скорости относительного проскальзывания, т.е.

$$\begin{aligned} &\left|\vec{s}(x,y)\right| > 0, \vec{\tau}(x,y) = \mu p(x,y)\vec{s} / \left|\vec{s}\right| \\ &(x,y) \in \Omega_{ск} \end{aligned} \tag{5}$$

Для определения распределения касательных напряжений $\vec{\tau}(x,y)$ и скоростей относительного проскальзывания $\vec{s}(\vec{\tau})$ использовался вариационный метод решения исходной системы уравнений с граничными условиями (4) и (5) [4].

Решалась задача о минимизации функционала вида

$$\begin{aligned} &\min_{|\vec{\tau}| \le \mu p}\{F[\vec{\tau}, \vec{s}(\vec{\tau})] = \int_{\Omega} [\mu p \left|\vec{s}(\vec{\tau})\right| - \vec{\tau} \cdot \vec{s}(\vec{\tau})] dxdy\} \\ &\vec{s} = \vec{s}[\vec{\tau}] = -V\vec{B}(\vec{\tau}) + \delta\vec{V} \\ &\vec{B}(\vec{\tau}) = -V\int_{\Omega} B(x-x', y-y')\vec{\tau}(x', y')dx'dy' \end{aligned} \tag{6}$$

где $\delta\vec{V}$ – относительная скорость точек контактирующих тел как жёстких целых, а элементы матрицы $B(x,y)$ – известные функции, зависящие от упругих постоянных материала. При этом в качестве модуля упругости использовался интегральный модуль, полученный из соотношения давлений и вертикальных перемещений поверхности слоя, полученных при решении контактной задачи.

Описанный вариационный принцип выражает условие минимума мощности, рассеиваемой на скоростях проскальзывания $\vec{s}$ дополнительными напряжениями, которые следует приложить к варьируемому полю касательных напряжений в соответствии с граничными условиями. Очевидно, что для точного решения функционал должен быть равен нулю (достаточно рассмотреть отдельно подынтегральные выражения для зон сцепления и проскальзывания). Для остальных значений варьируемого поля касательных напряжений он положителен.

Для решения задачи использовался итерационный процесс. Для проведения расчетов была использована программа, написанная на языке С.

3. Определение внутренних напряжений. Определение внутренних напряжений, возникающих в упругом слое и в упругом основании, является пространственной задачей, которая решалась с помощью метода граничных элементов. Напряжения, возникающие в результате действия на единичный квадратный элемент поверхности постоянных нормальных и касательных напряжений, определялись с помощью метода, основанного на двойных интегральных преобразованиях Фурье. Основы этого метода изложены в [3], развитие этого метода применительно к задачам с трением предложено в [5].

4. Примеры расчета.

В качестве примера здесь представлены результаты определения контактных и внутренних напряжений для относительно твердого покрытия. Введем следующие безразмерные параметры: $\chi=E_1/E_2$, где E_1 и E_2 – модули упругости упругого слоя и упругого основания соответственно, $\chi'=E_1/E_3$ (E_3 – модуль упругости индентора), относительная толщина слоя $H=h/R$, безразмерная нагрузка $P'=P/(R^2E_1)$, а также коэффициенты Пуассона материалов слоя, основания и индентора (ν_1, ν_2, ν_3 соответственно).

Пример расчета был проведен для следующих значений параметров: $\chi=2$, $\chi'=1$, $H=0.16$, $P'=8\times10^{-4}$, $\nu_1=\nu_2=\nu_3=0.25$, относительная скорость проскальзывания полагалась равной 0.003, коэффициент трения $\mu=0.4$. На рис.2 представлено распределение контактного давления. В данном случае распределение близко к герцевскому (сферическому) распределению, характерной особенностью, свойственной случаю относительно твердых покрытий в контакте со сферическим индентором, является наличие зоны постоянного давления вблизи центра области контакта. В данном случае это область $0<r/R<0.013$. Полученное контактное давление было использовано для расчета касательных напряжений в области контакта. Результаты расчета касательных напряжений представлены на рис.3. Предполагалось, что направление качения шарика противоположно направлению оси *0x*.

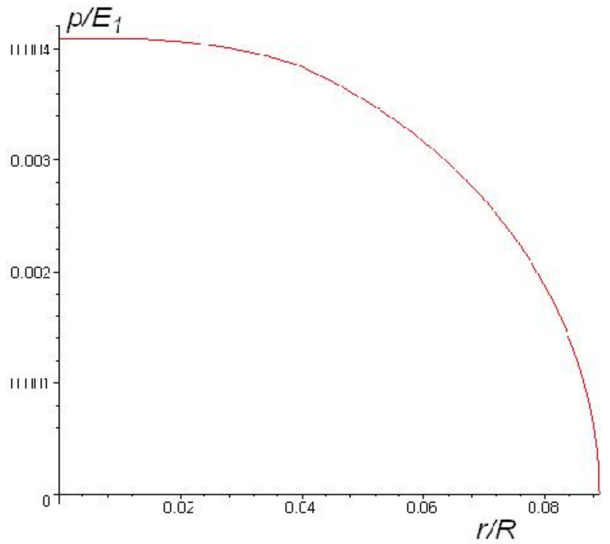
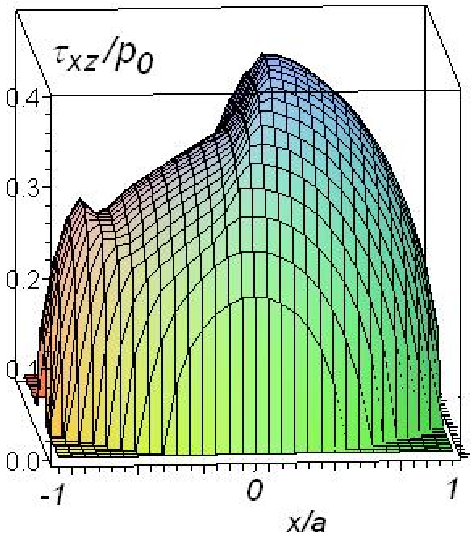


Рис.2 Осесимметричное распределение контактного давления



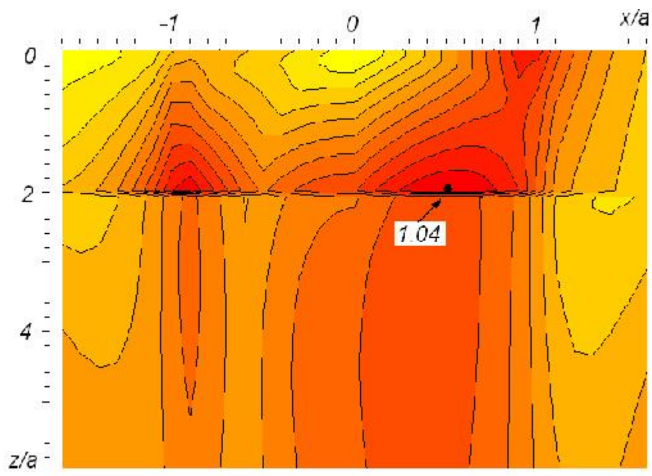


Рис.3 Распределение касательных напряжений в области контакта

Рис.4 Распределение максимальных касательных напряжений в слое и основании при y=0

Со стороны набегания цилиндра (в данном случае в области отрицательных значений *x*) находится эллиптическая зона сцепления, которая характеризуется существенно меньшими значениями касательных напряжений, чем в симметричных (по координате *x*) точках зоны проскальзывания.

Полученные нормальные и касательные напряжения в области контакта были использованы для расчета напряжений в упругом слое и упругом основании. Данная задача является трехмерной. На рис.4 представлено распределение максимальных касательных напряжений τ_1 в плоскости $y=0$. Следует отметить, что напряжения меняются скачкообразно на границе раздела слоя и основания (в данном случае при z/a=2). Максимальные значения напряжений имеют место на границе раздела слоя и основания, в отмеченной на рисунке точке они составляют 1,04p_0. Также локальный максимум имеет место на поверхности вблизи границы области контакта (*x*=0.96) и обусловлен, по-видимому, большим значениям растягивающих напряжений, возникающих на границе области скольжения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-08-18204-а)

ЛИТЕРАТУРА

1. Torskaya E. V., Goryacheva I. G. The effect of interface imperfection and external loading on the axisymmetric contact with a coated solid // Wear. 2003. Vol. 254. Pp. 538–545.
2. K.L. Dahm, E.V Torskaya, I.G. Goryacheva & P.A. Dearnley. Tribological effects on subsurface interfaces // Proceedings of the I MECH E Part J Journal of Engineering Tribology, Vol. 221, No. 3. (2007), pp. 345-353
3. Никишин В.С., Шапиро Г.С. Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред. М.: ВЦ АН СССР. 1970.
4. Гольдштейн Р.В., Зазовский А.Ф., Спектор А.А., Федоренко Р.П. Решение вариационными методами пространственных контактных задач качения с проскальзыванием и сцеплением. // Успехи механики. 1982. Т. 5. № 3-4. С. 62-102.
5. Торская Е.В. Исследование влияния трения на напряженное состояние тел с покрытиями. // Трение и износ. 2002. 23. №2. С. 130-138.

Сведения об авторе

Торская Елена Владимировна

Кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
Институт проблем механики Российской академии наук, Москва
Адрес: Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, к.1
Тел.:+7 495 4343692
Факс: +7 495 4341587; E-mail: torskaya@mail.ru

МНОГООПЕРАТОРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ: МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ В МЕХАНИКЕ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

Труфанов Н.А., Горохов А.Ю., Куликов Р.Г., Куимова Е.В.

Рассматриваются постановки квазистатических краевых задач линейной вязкоупругости анизотропных и кусочно-однородных материалов. Без упрощающих гипотез о характере связи между вязкоупругими характеристиками материала в постановке задачи, в общем случае, содержится несколько независимых вязкоупругих операторов (многооператорная задача). Такая ситуация является характерной при рассмотрении задач деформирования композиционных материалов и конструкций из них, содержащих как различные по свойствам компоненты (волокна, связующие), так и возможно различные по свойствам материалы в составе одной конструкции (органо-, стеклопластики, эластомеры, полиэтилен и т.д.). В данной работе обсуждаются подходы и даны результаты решения многооператорных задач, иллюстрирующих закономерности эволюции напряженного состояния в вязкоупругих композиционных конструкциях.

Общая постановка краевой квазистатической задачи линейной вязкоупругости включает в себя уравнения равновесия, геометрические соотношения теории малых деформаций, статические и кинематические граничные условия и физические соотношения вида:

$$\hat{\sigma}(\mathbf{x},t) = {}^4\hat{\mathrm{R}}^* \cdot\cdot\, \hat{\varepsilon}(\mathbf{x},t) \equiv \int_0^t {}^4\hat{R}(\tau) \cdot\cdot \frac{\partial}{\partial t}\hat{\varepsilon}(\mathbf{x},t-\tau)\,d\tau \tag{1}$$

где $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций; ${}^4\hat{R}(\tau)$ – тензор четвертого ранга ядер релаксации материала. Известно, что в общем случае анизотропии имеется 21 независимый вязкоупругий оператор. Однако, на практике чаще всего приходится иметь дело с частными типами анизотропии: трансверсально-изотропным телом (пять независимых операторов) и ортотропным телом (девять независимых операторов). Их число сокращается при рассмотрении двумерных и одномерных задач, а также в тех случаях, когда удается описать две или несколько функций релаксации на базе одной функции времени. В дальнейшем рассматриваются краевые задачи для анизотропных материалов, вязкоупругие свойства которых можно описать несколькими операторами вида (1).

Возможно также рассмотрение кусочно-однородной среды, занимающей в пространстве область V, причем $V = \bigcup_{n=1}^{N} V_n$, где V_n – область, занимаемая однородным элементом структуры; N – число таких элементов. V_n может также представлять собой объединение несвязанных подобластей, в которых расположен один и тот же материал или разные материалы, вязкоупругие свойства которых оказалось возможным описать одинаковым набором интегральных операторов. Каждый элемент структуры предполагается изотропным вязкоупругим материалом, свойства которого характеризуются операторным модулем упругости E_n^* и операторным коэффициентом Пуассона ν_n^*

$$\mathrm{E}_n^*\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} E_n(\tau)\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t-\tau)\,d\tau, \qquad \nu_n^*\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} \nu_n(\tau)\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t-\tau)\,d\tau \tag{2}$$

ядра которых $E_n(t)$ и $\nu_n(t)$ совпадают с кривыми релаксации напряжений и поперечной деформацией в экспериментах на релаксацию при $\varepsilon_{11}(t) = h(t)$. Физические соотношения в этом случае принимают вид

$$\hat{\sigma}(\mathbf{x},t) = \frac{\nu^*\mathrm{E}^*\theta(\mathbf{x},t)\hat{I}}{(1+\nu^*)(1-2\nu^*)} + \frac{\mathrm{E}^*}{1+\nu^*}\hat{\varepsilon}(\mathbf{x},t), \qquad \mathbf{x}\in V \tag{3}$$

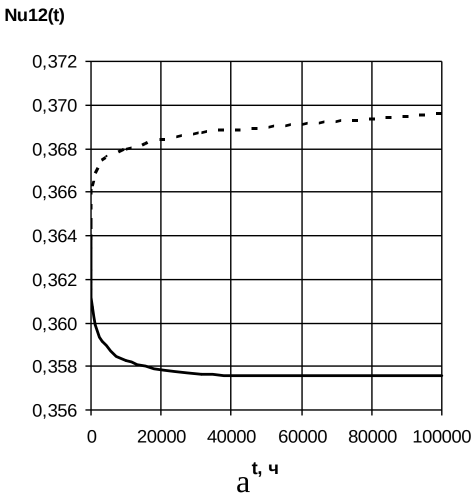
$$E^* = \sum_{n=1}^{N} H_n(\mathbf{x}) E_n^*, \qquad \nu^* = \sum_{n=1}^{N} H_n(\mathbf{x}) \nu_n^*$$

где $H_n(\mathbf{x})$ - обобщенная функция типа функции Хевисайда:

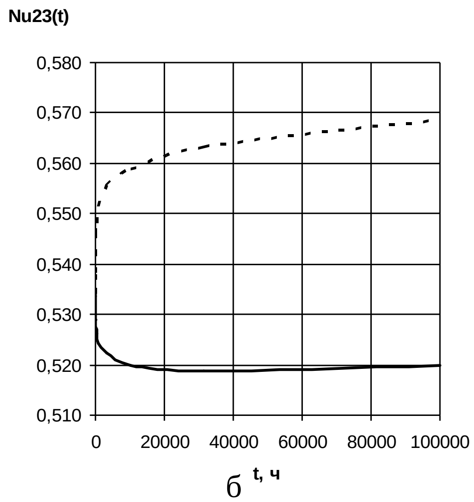
$$H_n(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in V_n \\ 0, & \mathbf{x} \notin V_n \end{cases}$$

Для решения линейных многооператорных задач предложены приближенный метод квазиконстантных операторов [1], его модификация – метод частичных аппроксимаций [2], а также вариант итерационного метода, использующий процедуру физического погружения [3]. Получены оценки погрешностей методов, условия сходимости итерационных процессов, методики построения конечномерных аналогов по методу конечных элементов [3].

В качестве приложений решен ряд задач механики вязкоупругих композиционных материалов. Решена задача о прогнозировании в широком температурном диапазоне (20-110^{o}C) эффективных термовязкоупругих характеристик (ядер эффективных операторных модулей, коэффициентов Пуассона, функций температурно-временного сдвига) однонаправленных полимерных композиционных материалов [4]. Исследовано влияние учета объемной релаксации и нелинейности вязкоупругих свойств связующего на эффективные характеристики композита . По проведенным расчетам сделаны следующие выводы: расчет функций продольной, поперечной и сдвиговой релаксации простых композитов с использованием гипотезы об отсутствии объемной релаксации связующего приводит к незначительной погрешности, которая не превышает 5%; при определении ядер операторного коэффициента Пуассона следует учитывать, что введение данной гипотезы качественно меняет картину данных характеристик (рис.1), что, однако, не сильно влияет на их численные значения, и максимальная погрешность составляет порядка 10%.



а



б

Рис. 1. Вязкоупругие характеристики однонаправлено-армированного углепластика при температуре $T = 303K$.
а – ядро операторного коэффициента Пуассона $\nu_{12}(t)$, б – ядро операторного коэффициента Пуассона $\nu_{23}(t)$ (волокна уложены вдоль направления x_1).
—— – с учетом объемной релаксации; - - - - – без учета объемной релаксации.

Показано наличие термореологически простого поведения однонаправленного органопластика при термореологически простом поведении волокон и связующего [5].

Выполнен численный анализ эволюции напряженного состояния и исследована концентрация напряжений в композиционных конструкциях в двух- и трехмерных постановках.

Исследовано напряженно-деформированное состояние узла фланцевого соединения стеклопластиковых труб под действием внутреннего давления и усилия затяжки болтов соединения. Для элементов рассматриваемой конструкции характерны различные схемы армирования и различные коэффициенты объемного содержания армирующего компонента в составе композита.

Вследствие осесимметричности геометрии конструкции и свойств материалов задача рассматривалась в цилиндрических координатах. Решение задачи вязкоупругости получено итерационным методом [3] с использованием метода конечных элементов. Выбранный метод позволил свести решение рассматриваемой вязкоупругой анизотропной задачи к решению последовательности задач в рамках теории упругости изотропных тел. Использовалась пошаговая во времени процедура решения с аппроксимацией узловых неизвестных кусочно-непрерывными линейными функциями времени.

Исследовано изменение со временем усилия затяжки фланцевого соединения трубопровода вследствие развития в конструкции процессов ползучести и релаксации (рис.2).

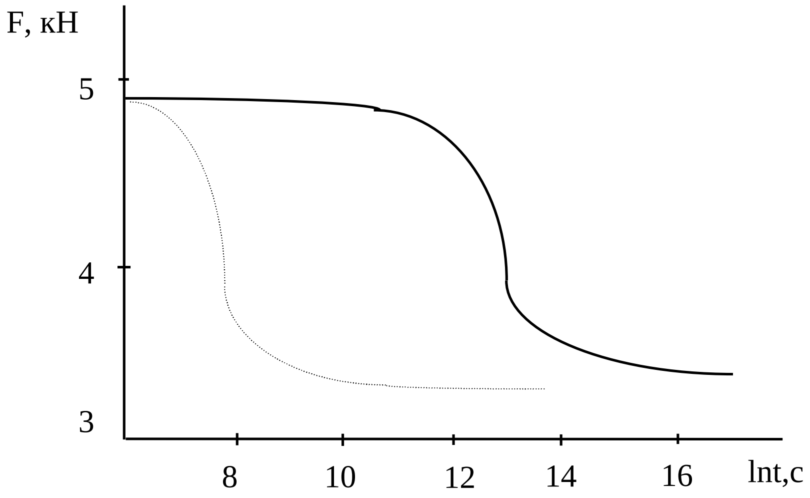


Рис. 2. Изменение во времени усилия затяжки фланцевого соединения. Сплошная линия соответствует температуре 293*K*, пунктирная – 323*K*

Установлено, что основное изменение величины усилия затяжки происходит на начальном этапе. Так при температуре 20^{o}C падение величины усилия затяжки на 25% происходит в течение первых 45 дней. В дальнейшем скорость развития релаксационных процессов во фланце значительно снижается. Предельное значение величины усилия затяжки было определено, исходя из величины длительных модулей для материалов фланца, и составило 51% от первоначальной величины. При увеличении температуры скорость развития релаксационных процессов значительно возрастает.

Показано, что вследствие развития в конструкции релаксационных процессов наблюдается значительное снижение усилия затяжки фланцевого соединения до величин, не обеспечивающих герметичности стыка, причем основное изменение происходит на начальном этапе.

Для ортотропной вязкоупругой пластины с различными круговыми включениями изучены эволюция места и величины концентрации напряжений в опасных с точки зрения прочности зонах. Решена трехмерная задача о соединении вязкоупругих ортотропных композиционных пластинок болтом, поставленным с зазором, под действием равномерной растягивающей пластины нагрузки. Установлен и численно исследован эффект перераспределения напряженного состояния при постоянном внешнем воздействии; показана возможность потери работоспособности соединения вследствие релаксации усилия затяжки болта.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦНТП, государственный контракт № 02.513.11.3011, шифр лота 2007-3-1.3-26-01-192 и финансовой поддержке РФФИ, грант № 07-01-96009-р_урал_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малый В.И., Труфанов Н.А. Метод квазиконстантных операторов в теории вязкоупругости анизотропных нестареющих материалов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. №6. С.148-154.
2. Труфанов Н.А. Применение частичных аппроксимаций в методе квазиконстантных операторов // Вестник ПГТУ. Полимерные материалы. 1997. №3. С.86-89.
3. Адамов А.А., Матвеенко В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.
4. Куимова Е.В., Труфанов Н.А. Численное прогнозирование и аппроксимация вязкоупругих характеристик простых однонаправленных композитов // Вестник ПГТУ. Вычислительная механика. 2006. №4. С.62-74.
5. Труфанов Н.А., Голотина Л.А., Куимова Е.В., Куликова Т.Г., Куликов Р.Г., Сметанников О.Ю., Шардаков И.Н. Термомеханика вязкоупругих материалов в условиях релаксационных и фазовых переходов // Региональный конкурс РФФИ-Урал. Результаты научных исследований, полученные за 2005 г. Аннотационные отчеты. ПНЦ УрО РАН. – 2006. – С. 93–97.

Сведения об авторах

Труфанов Николай Александрович
Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Вычислительной математики и механики Пермского государственного технического университета.
Адрес: 614000, г.Пермь, Комсомольский пр., 29, ПГТУ.
E-mail: vmm@cpl.pstu.ac.ru

Горохов Александр Юрьевич
преподаватель кафедры Вычислительной математики и механики Пермского государственного технического университета.

Куликов Роман Георгиевич
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Вычислительной математики и механики Пермского государственного технического университета.

Куимова Елена Владимировна
преподаватель кафедры Вычислительной математики и механики Пермского государственного технического университета.

АНАЛИЗ ВОЛНОВЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ УПРУГОЙ СРЕДЫ КОССЕРА

Улитин М.В., Кулеш М.А., Шардаков И.Н.

В 2009 году будет столетний юбилей со дня опубликования братьями Коссера работы [1], в которой они определили основные теоретические положения несимметричной (моментной) теории упругости для изотропного твердого тела. Однако до сих пор нет четкого понимания значимости и места данной теории в механике деформируемого твердого тела. Внести ясность в вопрос о значимости и месте моментной теории может корректно поставленный эксперимент с использованием современных экспериментальных средств.

Примерами подобных устройств являются механические [2] или лазерные [3] сенсоры, позволяющие непосредственно измерять скорости поворотов в трех перпендикулярных направлениях. Сегодня эти устройства применяются (хотя и не очень широко) в сейсмических и геофизических исследованиях. В современной сейсмологии, начиная с работы Аки и Ричардса [4], аксиоматически предполагается, что компоненты поворотов связаны с перемещениями соотношением $\vec{\omega} = {}^1\!/_2 \operatorname{rot} \vec{u}$. С точки зрения механики твердого тела данное соотношение соответствует либо классической теории упругости, либо несимметричной теории со стесненным вращением, например, псевдосреда Коссера [5]. Аналогичная связь, но с другим коэффициентом, получается также в некоторых динамических задачах редуцированной среды Коссера [6]. В полной линейной теории среды Коссера [7] векторы поворота и перемещения являются кинематически независимым. С одной стороны, это приводит к увеличению количества необходимых материальных параметров. С другой стороны, полная теория является физически более правдоподобной, чем, например, псевдосреда Коссера. Однако до сих пор отсутствуют экспериментальные исследования, показывающие характер связи векторов перемещения и поворота.

Таким образом, волновые эксперименты, особенно в геологических средах, могут являться очень информативными с точки зрения идентификации моделей несимметричных сред. И подобные эксперименты проводились, в частности, ультразвуковые исследования однородных сред использовались в [8] для идентификации моделей Леру и псевдосреды Коссера и в [9] для идентификации линейной среды Коссера. Геологические же среды являются более сложным объектом для изучения, так как в них одновременно возбуждаются и регистрируются, как правило, несколько типов волн: прямые и отраженные объемные волны, волны Рэлея, а также волны Лява, Лэмба и Стоунли.

Исходя из вышесказанного, задача получения и анализа различных волновых решений для различных микроструктурных моделей не теряет своей актуальности. В настоящей работе продолжено изучение полной модели среды Коссера [7]. Для этой модели уже обнаружен ряд новых интересных закономерностей. Во-первых, показан факт дисперсии упругих поверхностных волн Рэлея [10], в то время как в классической теории упругости волны Рэлея бездисперсны. Во-вторых, выполнен подробный анализ компонент перемещений и поворотов рэлеевских волн [11]. В-третьих, для модели среды Коссера наблюдается еще один эффект, связанный с распространением поверхностной поперечной волны с горизонтальной поляризацией. Геометрически такая волна сравнима с волной Лява, однако в классической теории упругости само существование волны Лява как поверхностной волны связано с наличием слоя на полупространстве и при стремлении толщины слоя к нулю волна Лява переходит в объемную. В [12] показано, что для среды Коссера поперечная горизонтально-поляризованная затухающая с глубиной волна существует и без плоского слоя. Наконец, в [13] получено еще одно решение, не имеющее аналогов в классической теории упругости. Это решение описывает распространяющуюся в пластине волну с одной поперечной компонентой вектора перемещения и двумя компонентами вектора поворота. Данная волна имеет еще большее количество мод, чем волна Лэмба в пластине, все моды обладают дисперсией, перемещения во всех модах зависят от глубины.

В настоящей работе вновь рассматривается общее уравнение движения для среды Коссера:

$$
\begin{aligned}
&(2\mu+\lambda)\text{grad div }\vec{u}-(\mu+\alpha)\text{rot rot }\vec{u}+2\alpha\ \text{rot }\vec{\omega}=\rho\ddot{\vec{u}}\\
&(2\gamma+\beta)\text{grad div }\vec{\omega}-(\gamma+\varepsilon)\text{rot rot }\vec{\omega}+2\alpha\ \text{rot }\vec{u}-4\alpha\vec{\omega}=j\ddot{\vec{\omega}}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Из него получено еще одно частное решение, которое описывает распространение объемных продольных и поперечных волн перемещения и поворота. Решения уравнений движения ищутся для случая немонохроматической волны и описывают распространение волновых пакетов, задаваемых спектром Фурье произвольной формы. Немонохроматическое представление выбрано потому, что оно является наиболее подходящим для сравнения с экспериментальными данными, полученными в результате сейсмических измерений. В рамках этого подхода общее решение системы (1) представимо в виде Фурье-интегралов относительно всех компонент вектора перемещения u_n и вектора поворота ω_n.

В итоге получены две независимые системы линейных дифференциальных уравнений, описывающих в декартовой системе координат распространение плоской продольной волны с компонентами u_x, u_z, ω_y, и плоской поперечной волны относительно u_y, ω_x, ω_z.

Эти системы допускают три сорта решений: затухающие с глубиной [11-12], незатухающие с глубиной [13] и постоянные по глубине. В данной работе изучается третий тип решений, чтобы лучше понять величины, входящие в первые два.

Решения для объемных продольных волн ищутся из условий $u_x(z)=u_x$, $u_y=0$, $u_z=0$, $\omega_x(z)=\omega_x$, $\omega_y=0$, $\omega_z=0$ и в итоге получаются два независимых дисперсионных соотношения для продольных волн перемещения и поворота:

$$
k_u(f)=\frac{f}{C_1},\quad k_\omega(f)=\sqrt{\frac{f^2}{C_5^2}-k_0^2}
\tag{2}
$$

Решения для объемных поперечных волн получаются из условий $u_x=0$, $u_y(z)=u_y$, $u_z(z)=u_z$, $\omega_x=0$, $\omega_y(z)=\omega_y$, $\omega_z(z)=\omega_z$ что дает нам одно дисперсионное уравнение, которое имеет два корня:

$$
k_1(f)=\sqrt{A_m(f)},\quad k_2(f)=\sqrt{A_p(f)}
\tag{3}
$$

Отсюда делается вывод о том, что объемная поперечная волна в среде Коссера имеет две волновых моды, чего нет в поперечной волне в рамках классической теории упругости. Из решений дисперсионного уравнения также делается вывод о том, что компоненты перемещений и поворотов поперечной волны связаны между собой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 07-01-96029-р_урал_а и 07-01-97613-р_офи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables, Hermann, Paris, 1909.
2. Nigbor R.L. Six-degree-of-freedom ground-motion measurement // Bulletin of the Seismological Society of America. 1994. V. 84. № 5. P. 1665-1669.
3. Igel H., Schreiber U., Flaws A., Schuberth B., Velikoseltsev A., Cochard A.Rotational motions induced by the M8.1 Tokachi-oki earthquake, September 25, 2003. // Geophysical research letters. 2005. V. 32, P. L08309.
4. Aki K., Richards P.G. Quantitative Seismology, 1st ed., W. H. Freeman, San Francisco, California. 1980.
5. Савин Г.Н., Лукашов А.А., Лыско Е.М., Времеенко С.В., Агасьев Г.Г. Распространение упругих волн в континууме Коссера со стесненным вращением. // Прикл. механика. 1970. Т. 6. № 6. С. 37-41.

6. Kulesh M.A., Grekova E.F. Rayleigh-type waves for the isotropic elastic reduced Cosserat half-space. Application in rocks and soils // Proceedings of the EAGE International Conference & Exhibition (Russia , Saint Petersburg, 16-19 October, 2006)
7. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
8. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
9. Lakes R.S. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized continua // Continuum models for materials with micro-structure, ed. H. Muhlhaus, J. Wiley, N. Y. Ch. 1. 1995. P. 1-22.
10. Лялин А.Е., Пирожков В.А., Степанов Р.Д. О распространении поверхностных волн в среде Коссера // Акустический журнал. 1982. Т. 28. № 6. С. 838-840.
11. Кулеш М.А., Матвеенко В.П., Шардаков И.Н. Построение и анализ аналитического решения для поверхностной волны Рэлея в рамках континуума Коссера // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46. № 4. С. 116-124.
12. Кулеш М.А., Матвеенко В.П., Шардаков И.Н. О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера // Акустический журнал. 2006. Т. 52. № 2. С.227-235.
13. Кулеш М.А., Матвеенко В.П., Шардаков И.Н. Построение аналитического решения волны Лэмба в рамках континуума Коссера // Прикладная механика и техническая физика. 2007. Т. 48. № 1.

Сведения об авторе

Шардаков Игорь Николаевич
Доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук
Адрес: 614013 Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1 ИМСС УрО РАН
Тел.: (342) 2378 318
E-mail: shardakov@icmm.ru

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Хачатрян В.М.

Рассматривается возможность управления процессом распространения электроупругих сдвиговых волн в пьезоэлектрическом слое с одной закрепленной поверхностью при разных пьезоэлектрических кристаллах класса 6mm, в случае которой возможна локализация волновой энергии при свободной границе полупространства.

Рассматривается влияние как закрепленной поверхности на существование электроупругой волны и на распределение электроупругой волновой энергии по толщине слоя, так и влияние временной электроупругой нагрузки на поведение распространяющейся волны.

1. Рассматривается режим распространения электроупругих волн в слое, который в прямоугольной системе координат (x, y, z) занимает область $-\infty < x < \infty$; $0 \le y \le h$; $-\infty < z < \infty$. Предполагается, что слой пьезоактивен и материал слоя является пьезоэлектриком класса 6mm гексагональной симметрии. В настоящей работе рассматривается случай, когда на поверхности $y = 0$ слой закреплен, а потенциал электрического поля задается функцией, зависящей от x и от времени t. Также предполагается, что другая поверхность свободна от напряжений и электрически закрыта.

Уравнения чисто сдвиговых волн (антиплоская электроупругая задача) для слоя имеют вид [1,2]:

$$a^2 \Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad \Delta W = \frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}} \Delta\varphi \qquad (1.1)$$

В уравнениях (1.1) $a^2 = \dfrac{c_{44}(1+\chi)}{\rho}$ – квадрат скорости объемной сдвиговой волны, W – упругое перемещение, φ – электрический потенциал в слое, c_{44} – модуль сдвига материала слоя, $\chi = \dfrac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11} c_{44}}$ – коэффициент электромеханической связи материала слоя, e_{15} – пьезоэлектрический модуль материала слоя.

На закрепленной поверхности слоя $y = 0$ имеют место условия

$$W = 0, \quad \varphi = \varphi_0(x, t) \qquad (1.2)$$

На свободной поверхности слоя $y = h$ имеют место условия

$$\sigma_{23} = 0, \ \varphi = 0 \qquad (1.3)$$

где σ_{23} – касательное напряжение.

Условие электрически закрытой границы $\varphi = 0$ изолирует слоистую сплошную среду от вакуума.

Начальные условия задаются таким образом:

$$W\big|_{t=0} = W_1(x, y), \quad \left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_{t=0} = W_2(x, y) \qquad (1.4)$$

Требуется найти решения уравнений (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2) и (1.3) и начальным условиям (1.4).

Используя преобразование Фурье, из первого уравнения (1.1) будем иметь [3]:

$$\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial y^2} - k^2 \tilde{W} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial t^2} \qquad (1.5)$$

где $\tilde{W} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} W(x, y, t) e^{ikx} dx$

Используя преобразование Лапласа, из уравнения (1.5) получим:

$$\frac{d^2W_L}{dy^2}-(k^2+\frac{s^2}{a^2})W_L=-\frac{1}{a^2}(\tilde{W}_2+s\tilde{W}_1) \tag{1.6}$$

где $W_L=\int\limits_0^{+\infty}\tilde{W}e^{-st}dt$, $\tilde{W}_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}W_1(x,y)e^{ikx}dx$, $\tilde{W}_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}W_2(x,y)e^{ikx}dx$ (1.7)

Аналогичным образом из второго уравнения (1.1) будем иметь:

$$\frac{d^2\varphi_L}{dy^2}-k^2\varphi_L=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}(\frac{d^2W_L}{dy^2}-k^2W_L) \tag{1.8}$$

где $\varphi_L=\int\limits_0^{+\infty}\tilde{\varphi}e^{-st}dt$ а $\tilde{\varphi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y,t)e^{ikx}dx$ (1.9)

Методом вариации постоянных общее решение уравнения (1.6) получается в виде:

$$W_L=-\frac{1}{k\lambda}\int\limits_0^y f(k,\gamma,s)\,\mathrm{sh}[k\lambda(\gamma-y)]d\gamma+C_1e^{k\lambda y}+C_2e^{-k\lambda y} \tag{1.10}$$

где $f(k,y,s)=-\frac{1}{a^2}(\tilde{W}_2(k,y)+s\tilde{W}_1(k,y))$, $\lambda=\sqrt{1+\eta}$ а $\eta=\frac{s^2}{k^2a^2}$ (1.11)

Тем же методом общее решение уравнения (1.8) получается в виде

$$\varphi_L=-\frac{1}{k}\int\limits_0^y\psi(k,\delta,s)\,\mathrm{sh}[k(\delta-y)]d\delta+C_3e^{ky}+C_4e^{-ky} \tag{1.12}$$

где $\psi(k,y,s)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}(f(k,y,s)+\frac{s^2}{a^2}W_L(k,y,s))$ (1.13)

2. Краевые условия (1.2) и (1.3) примут вид :

$$W_L=0\,,\varphi_L=\varphi_{0L}(k,s)\quad \text{при}\ y=0 \tag{2.1}$$

$$c_{44}\frac{\partial W_L}{\partial y}+e_{15}\frac{\partial\varphi_L}{\partial y}=0\,,\quad \varphi_L=0\quad \text{при}\ y=h \tag{2.2}$$

В условиях (2.1)

$$\varphi_{0L}(k,s)=\int\limits_0^{+\infty}\tilde{\varphi}_0(k,t)e^{-st}dt\ ,\ \text{а}\ \tilde{\varphi}_0(k,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_0(x,t)e^{ikx}dx \tag{2.3}$$

После подстановки (1.10) и (1.12) в граничные условия (2.1) будем иметь:

$$C_2=-C_1,\quad C_4=\varphi_{0L}-C_3 \tag{2.4}$$

После подстановки (2.4) в (1.10) и (1.12) получим:

$$W_L=-\frac{1}{k\lambda}\int\limits_0^y f(k,\gamma,s)\,\mathrm{sh}[k\lambda(\gamma-y)]d\gamma+2C_1\,\mathrm{sh}[k\lambda y] \tag{2.5}$$

$$\varphi_L=-\frac{1}{k}\int\limits_0^y\psi(k,\delta,s)\,\mathrm{sh}[k(\delta-y)]d\delta+2C_3\,\mathrm{sh}[ky]+\varphi_{0L}e^{-ky} \tag{2.6}$$

Подстановка (2.5) и (2.6) в граничные условия (2.2) приводит к системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_1 и C_3, откуда получим:

$$C_1=\frac{\operatorname{sh}[kh]\int_0^h f(k,\gamma,s)\operatorname{ch}[k\lambda(\gamma-h)]d\gamma+\chi k\int_0^h I(k,\delta,s)\operatorname{sh}[k\delta]d\delta-\dfrac{e_{15}}{c_{44}}k\varphi_{0L}}{2k(\chi\operatorname{sh}[k\lambda h]\operatorname{ch}[kh]-\lambda(1+\chi)\operatorname{sh}[kh]\operatorname{ch}[k\lambda h])} \qquad (2.7)$$

$$C_3=\frac{\dfrac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\left[\int_0^h I(k,\delta,s)\operatorname{sh}[k(\delta-h)]d\delta+2C_1(\lambda\operatorname{sh}[kh]-\operatorname{sh}[k\lambda h])\right]-\varphi_{0L}e^{-kh}}{2\operatorname{sh}[kh]} \qquad (2.8)$$

где
$$I(k,\delta,s)=\frac{f(k,\delta,s)}{k}-\frac{\eta}{\lambda}\int_0^\delta f(k,\gamma,s)\operatorname{sh}[k\lambda(\gamma-\delta)]d\gamma$$

После подстановки (2.7) и (2.8) в (2.5) и (2.6) получим аналитические описания для преобразованных функций W_L и φ_L.

Для конкретной электрической нагрузки $\varphi\big|_{y=0}=\varphi_0(x,t)$ можем решить задачу и получить распределение электроупругой сдвиговой волны через обратные преобразования Лапласа и Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 239с.
2. Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сеник Н.А. Распространение волн в электроупругих средах. М.: Едиториел УРСС, 2003. 336с.
3. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: Изд. И.Л., 1955. 667с.

Сведения об авторе:

Хачатрян Вазген Мехакович
Аспирант, Институт механики НАН РА
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24[б],
Тел: (+37410) 52-48-90

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УДАРА

Хачикян А.С.

Рассматривается обратная задача теории удара в рамках механики твердого тела. Предполагается, что параметры (масса, скорость до и после удара) одного из соударяющихся тел, обладающего сравнительно малой массой, не доступны для наблюдения или измерения. Такая постановка задачи моделирует случаи ударов малых неизвестных тел по спутникам или другим летательным аппаратам, ударов отколовшихся от оборудования неизвестных малых осколков в закрытых объемах парогенераторов, мощных насосов, атомных реакторов или магистральных трубопроводов.

Использованием предложения Ньютона о постоянстве отношения относительных скоростей тел до и после удара и введением нового коэффициента, характеризующего распределение между двумя соударяющимися телами восстанавливаемой потенциальной энергии, строится замкнутая система уравнений для решения обратной задачи. Решение системы иллюстрируется примерами.

1. Точные решения задач теории удара возможны только с привлечением методов механики сплошных сред с учетом пластических деформаций, волновых явлений, реологии материалов. Однако эти решения [1-4] не универсальны, очень сложны, специфичны к условиям удара и реологии материалов и, поэтому, неудобны для практического применения инженерами с целью быстрой приближенной оценки ситуации. Вследствие этого до сих пор продолжается применение предложенного Ньютоном коэффициента восстановления, несмотря на его необоснованность и приближенность [5].

Поэтому в случае обратной задачи теории удара также желательно иметь решение в рамках законов общей механики с целью быстрой приближенной оценки ситуации инженерами, прибегая к более точным и сложным решениям по законам механики сплошной среды в необходимых случаях и для построения решений отдельных модельных задач.

Из общих теорем механики для центрального удара двух твердых тел имеем единственное уравнение:

$$m\mathrm{v}_- + MV_- = m\mathrm{v}_+ + MV_+ \tag{1}$$

здесь m, M – массы тел, $\mathrm{v}_-, \mathrm{v}_+, V_-, V_+$ – скорости до и после удара соответственно первого и второго тел в неподвижной системе кооординат.

Напишем предложение Ньютона в виде

$$\mathrm{v}_+ - V_+ = -R\left(\mathrm{v}_- - V_-\right) \tag{2}$$

$0 < R < 1$– коэффициент восстановления, определяемый опытным путем для конкретных условий удара или точным решением отдельных задач. Некоторые экспериментальные значения R приведены в [1].

Уравнения (1), (2) составляют замкнутую систему для решения прямой задачи теории удара – определения скоростей двух тел после удара v_+, V_+, когда остальные величины в уравнениях (1), (2) считаются известными.

Составим систему уравнений для решения обратной задачи теории удара в случае центрального удара двух тел, когда не имеют места проникание или пробивание и одно из тел обладает относительно малой массой

$$m << M \tag{3}$$

В этой задаче имеем три неизвестных - m, v_-, v_+, и вместе с (1) и (2) необходимо еще одно уравнение для замыкания системы уравнений.

В роли необходимого третьего уравнения здесь предлагается следующее соотношение:

$$m\mathrm{v}_+^2 = \frac{2k}{1-k}\cdot T \tag{4}$$

где T – есть энергия волнового движения, инициируемая ударом в массивном теле, $0 < k < 1$– предлагаемый здесь новый коэффициент. В основу этого соотношения поставлено энергетическое соображение. Предполагается, что восстановливаемая часть потенциальной энергии, накопленная в обоих телах в момент их наибольшего сближения, при завершении удара превращается в сумму кинетических энергий обоих тел и энергий волнового движения в обоих телах. При этом энергию волнового движения в первом теле, в силу его малости по размерам и жесткости, согласно результатам Релея [6] можно не учитывать. Можно не учитывать также кинетическую энергию, передаваемую второму телу (как твердому телу), в силу его относительно большой массы. Коэффициент “k” есть отношение кинетической энергии, передаваемой первому телу ко всей накопленной во время удара потенциальной энергии и зависит от условий удара, физико – механических свойств материалов и может быть оценен приближенно – экспериментально для определенных условий удара или точным решением отдельных модельных задач.

Отметим, что соотношение (4) здесь представлено в наиболее упрощенном виде, когда $k >> 0$. Если последнее условие не имеет места, то должно рассматриваться более сложное соотношение

$$m\left(\mathrm{v}_+ - \mathrm{v}_0\right)^2 = \frac{2k}{1-k}\cdot T \tag{5}$$

где $\mathrm{v}_0 = \dfrac{m\mathrm{v}_- + MV_-}{m+M}$ – скорость центра масс двух тел.

В дальнейшем мы рассмотрим только упрощенное соотношение (4).

Таким образом, для решения поставленной обратной задачи теории удара, в координатах, связанных с массивным телом до удара, имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} m\mathrm{v}_- - m\mathrm{v}_+ = MV_+ \\ \mathrm{v}_+ + R\mathrm{v}_- = V_+ \\ m\mathrm{v}_+^2 = \dfrac{2k}{1-k}\cdot T \end{cases} \tag{6}$$

Решение этой системы относительно v_-, v_+, m имеет вид

$$\mathrm{v}_+ = \frac{-D\left(1+R\right)-G}{RC}, \quad \mathrm{v}_- = \frac{D\left(1+R\right)+G}{R^2C} + \frac{Q}{R}$$
$$m = \frac{R^2C^2}{QRC + \left(1+R\right)\left[D\left(1+R\right)+G\right]} \tag{7}$$

где

$$G = \sqrt{D^2\left(1+R\right)^2 + 2DQRC}$$
$$D = \frac{kT}{1-k}, \quad C = MV_+, \quad Q = V_+$$

Второе решение системы мы не рассматриваем, так как оно не удовлетворяет принятому условию (3).

Рассмотрим несколько численных примеров.

Удар по свободно летящему телу

Пусть измерениями и из условий удара имеем

а) $M = 2\cdot 10^4$кг, $V_+ = 0.1$м/с, $R = 0.5$ $k = 0.2$, $T = 2\cdot 10^4$кг$\cdot$м$^2\cdot$с$^{-2}$.

Из (7) получим:

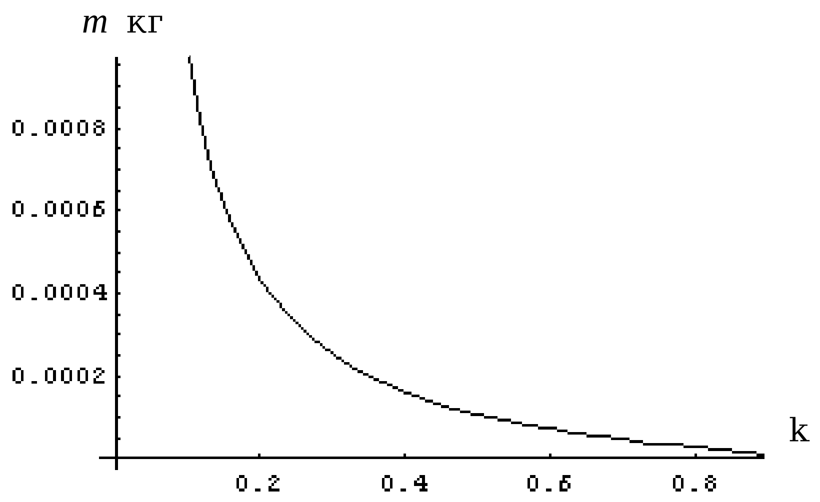
$$\mathrm{v}_+ = -14.9\,\text{м/с}, \; \mathrm{v}_- = 30.07\,\text{м/с}, \; m = 44.4\text{кг}.$$

b) $M = 2\cdot 10^4$кг, $V_+ = 10^{-2}$ м/с, $R = 0.5$ $k = 0.2$, $T = 2\cdot 10^4$кг$\cdot$м$^2\cdot$с$^{-2}$.

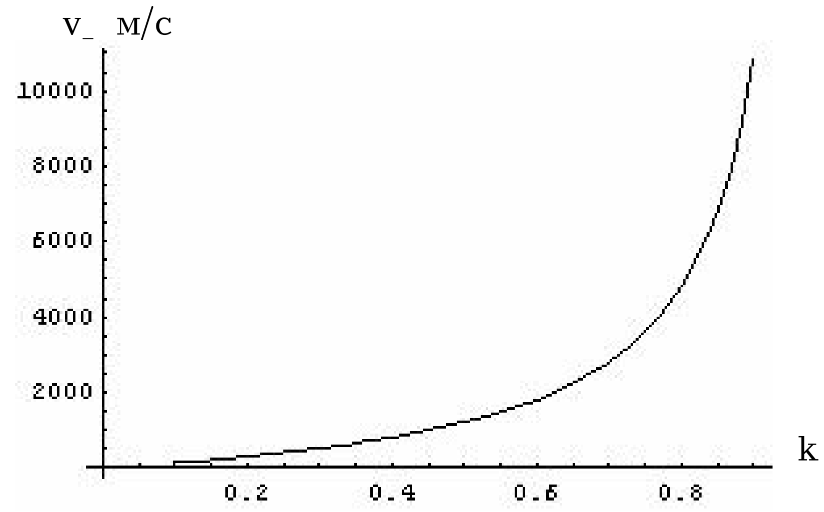
Из (7) получим:

$$\mathrm{v}_+ = -149.99\,\text{м/с}, \; \mathrm{v}_- = 300\,\text{м/с}, \; m = 0.444\text{кг}.$$

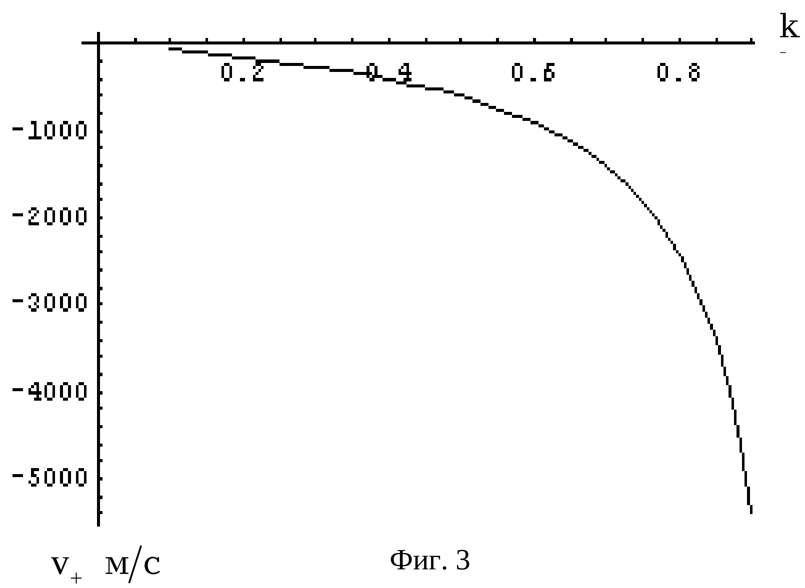
В этом примере для иллюстрации приведены также графики зависимости величин m, v_-, v_+ (фиг. 1÷3, соответственно) от коэффициента распределения потенциальной энергии k.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Удар по покоящемуся на фундаменте крупному оборудованию.

Пусть имеем: $R = 0.5 \quad k = 0.2, \quad T = 5 \cdot 10^3 \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$.

$M = 4 \cdot 10^4 \text{кг}$ – масса надопорной части оборудования.

$S = 2 \cdot 10^2 \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$ – импульс, переданный основанию оборудования.

Определим $V_+ = \frac{S}{M} = 0.5 \cdot 10^{-2}\ \text{м/с}$.

Из (7) получим:

$$\text{v}_+ = -37.49\,\text{м/с}, \quad \text{v}_- = 75.0\,\text{м/с}, \quad m = 1.777\,\text{кг}.$$

2. Численные эксперименты показывают, что система (6) удовлетворительно описывает модельные ситуации. Однако, ввиду недостаточной обоснованности соотношения (4), предлагаемое решение должно пройти более широкую проверку практикой.

Определение энергии волнового движения, инициируемая ударом в массивном теле, может быть осуществлено измерением колебаний датчиками ускорений. Если, например, датчиками зарегистрированы колебания $x = A\cos\frac{2\pi}{T}t$, x – перемещения, T – период, A – амплитуда колебаний, T_0 – плотность проходящей кинетической энергии на единицу объема будет

$$E = \frac{\rho}{2T}\int_0^T \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 dt = \left(\rho/4\right)\cdot\left(2\pi A/T\right)^2$$

ρ –плотность среды прохождения волн.

Интегрированием плотности кинетической энергии по всему объему оборудования может быть определена энергия колебаний, переданной ею в течение удара.

В пользу предлагаемого решения говорят его определенная универсальность, достаточно ясные границы применимости, возможность измерения современными средствами необходимые для решения задачи величин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдсмит В. Удар. М.: 1965. 448 с.
2. Александров Е.В. и др. Прикладная теория и расчеты ударных систем. М.: Наука, 1969. 200с.
3. Алимов О.Д и др. Удар, распространение волн деформации в ударных системах. М.: Наука, 1985. 358с.
4. Динамика удара (перевод с англ. под ред. С.С. Григоряна), М.: Мир, 1985. 296стр.
5. Панково Я.Г., Введение в теорию механического удара. М.: Наука, 1977. 224с.
6. Релей Дж. Теория звука. Т. 1-2. М.: Физматгиз, 1955.

Сведения об авторе

Хачикян Альберт Серобович
Кандидат техн. наук, ведущий научный сотрудник, Институт механики НАН РА
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24[б]
E-mail: albert_khachikyan@yahoo.com

ГРАНИЧНО-КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ О ТЕРМОУПРУГОМ РАВНОВЕСИИ СЛАБО ТРАНСТРОПНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ

Хомасуридзе Н.Г.

Трехмерным граничным задачам об упругом равновесии однородных и изотропных цилиндрических тел посвящено достаточно много работ. В монографии [1], которая посвящена равновесию цилиндрических тел, приводится обзор соответствующих исследований.

В рассматриваемой работе, с использованием метода разделения переменных и двойных тригонометрических рядов, строятся решения статических граничных и гранично-контактных задач термоупругости для криволинейного координатного параллелепипеда $\Omega=\{r_0<r<r_1,\ 0<\alpha<\alpha_1,\ 0<z<z_1\}$ (r,α,z – круговая цилиндрическая система координат). При $r=r_0$ и $r=r_1$ вместе с температурным возмущением задаются произвольные граничные условия, а на боковых поверхностях ($\alpha=0, \alpha=\alpha_1, z=0, z=z_1$) – условия симметрии или антисимметрии. Если рассматривается многослойное тело, то его слои контактируют по поверхностям $r=const$. Упругое тело или слои многослойного тела состоят из слабо транстропного материала с плоскостью изотропии $z=const$.

1. Уравнения равновесия, уравнения состояния, граничные условия. Если температурное поле не зависит от времени, а массовые силы отсутствуют, то упругое равновесие однородного транстропного тела в цилиндрических координатах описывается нижеследующими уравнениями [1]. В частности, уравнения равновесия имеют вид

$$r\frac{\partial R_r}{\partial r}+\frac{\partial R_\alpha}{\partial\alpha}+r\frac{\partial R_z}{\partial z}+R_r-A_\alpha=0$$
$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha}+r\frac{\partial A_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right)=0 \qquad (1.1)$$
$$r\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial r}\left(rZ_r\right)+\frac{\partial Z_\alpha}{\partial\alpha}=0$$

R_r, A_α, Z_z – нормальные напряжения, а $A_r=R_\alpha, Z_r=R_z, A_z=Z_\alpha$ – касательные напряжения. Напряжения выражаются через смещения следующим образом:

$$R_r=\frac{c_1}{r}\left[\frac{\partial(ru)}{\partial r}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\alpha}\right]-2c_5\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\alpha}+u\right)+c_3\frac{\partial w}{\partial z}-k_{10}T$$
$$A_\alpha=\frac{c_1}{r}\left[\frac{\partial(ru)}{\partial r}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\alpha}\right]-2c_5\frac{\partial u}{\partial r}+c_3\frac{\partial w}{\partial z}-k_{10}T,\quad Z_z=\frac{c_3}{r}\left[\frac{\partial(ru)}{\partial r}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\alpha}\right]+c_2\frac{\partial w}{\partial z}-k_{20}T \qquad (1.2)$$
$$R_z=c_4\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right),\quad Z_\alpha=c_4\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\right),\quad R_\alpha=c_5\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathrm{v}}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right]$$

где u,v,w – компоненты вектора смещения $\vec{U}$ вдоль r, вдоль касательных к координатной линии α и вдоль $z; c_j\ (j=1,2,...5)$ – упругие характеристики; $k_{10}=[2(c_1-c_5)k_1+c_3k_2]$, $k_{20}=(2c_3k_1+c_2k_2)$, причем k_1 и k_2 – коэффициенты линейного теплового расширения в плоскости изотропии и вдоль z; T – изменение температуры в упругом теле, подчиняющееся уравнению

$$\Delta_\lambda T=\Delta_2T+\lambda\frac{\partial^2T}{\partial z^2}=0 \qquad (1.3)$$

и соответствующим граничным условиям, а $\lambda=\lambda_2/\lambda_1$, где λ_1 и λ_2 – коэффициенты теплопроводности в плоскости изотропии и вдоль z [1];

$$\Delta_2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}$$

В дальнейшем будут рассматриваться слабо транстропные тела, когда

$$c_1c_2-\left(c_3+2c_4\right)^2=0,\quad \left(c_3+2c_4\right)k_{10}-c_1k_{20}=0 \tag{1.4}$$

Введем обозначения $\sqrt{\dfrac{c_2}{c_1}}=a,\quad \dfrac{c_4}{c_5}=b,$ тогда формулы (1.4) примут вид

$$c_3+2c_4=ac_1,\qquad k_{20}=ak_{10}$$

Используя условия (1.4), уравнения (1.1) и закон Гука (1.2), можно получить следующую систему:

$$\begin{aligned}
&a)\ r\frac{\partial D}{\partial r}-\frac{\partial K_z}{\partial\alpha}+r\frac{\partial K_\alpha}{\partial z}=0, &&b)\ \frac{\partial D}{\partial\alpha}-r\frac{\partial K_r}{\partial z}+r\frac{\partial K_z}{\partial r}=0\\
&c)\ ar\frac{\partial D}{\partial z}-\frac{\partial\left(rK_\alpha\right)}{\partial r}+\frac{\partial K_r}{\partial\alpha}=0, &&d)\ \frac{\partial\left(rK_r\right)}{\partial r}+\frac{\partial K_\alpha}{\partial\alpha}+br\frac{\partial K_z}{\partial z}=0
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}
&a)\ \frac{1}{r}\frac{\partial\left(ru\right)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\alpha}+a\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{k_{10}}{c_1}T=\frac{D}{c_1}, &&b)\ \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\alpha}-\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}=\frac{K_r}{c_4}\\
&c)\ \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{K_\alpha}{c_4}, &&d)\ \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\mathrm{v}\right)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\alpha}=\frac{K_z}{c_5}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Равенство (1.5d) является тождеством, в чем легко убедиться, принимая во внимание равенства (1.6).

Далее будет рассмотрено термоупругое равновесие криволинейного координатного параллелепипеда (ККП), занимающего область $\Omega=\{\mathrm{r}_0<\mathrm{r}<\mathrm{r}_1,\ 0<\alpha<\alpha_1,\ 0<\mathrm{z}<\mathrm{z}_1\}$. Граничные условия, которые при этом будут фигурировать, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\text{при } \alpha=\alpha_j: \quad a)\ \frac{\partial T}{\partial\alpha}=0,\quad \mathrm{v}=0,\quad R_\alpha=0,\quad Z_\alpha=0 \quad \text{или}\\
&\qquad\qquad\qquad b)\ T=0,\quad A_\alpha=0,\quad u=0,\quad w=0
\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}
&\text{при } z=z_j: \quad a)\ \frac{\partial T}{\partial z}=0,\quad w=0,\quad R_z=0,\quad \mathrm{A}_z=0 \quad \text{или}\\
&\qquad\qquad\qquad b)\ T=0,\quad \mathrm{Z}_z=0,\quad u=0,\quad \mathrm{v}=0
\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\text{при } r=r_j: \quad \theta_{j1}\frac{\partial T}{\partial r}+\theta_{j2}T=\tau_j\left(\alpha,z\right) \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}
&\text{при } r=r_j: \quad g_{j1}R_r+g_{j2}u=f_{j1}\left(\alpha,z\right),\qquad g_{j3}A_r+g_{j4}\mathrm{v}=f_{j2}\left(\alpha,z\right)\\
&\qquad\qquad\quad g_{j5}Z_r+g_{j6}w=f_{j3}\left(\alpha,z\right)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Здесь $j=0,1$, причем $\alpha_0=0, z_0=0; \theta_{j1},\theta_{j2},g_{j1},...,g_{j6}$ – заданные постоянные, подчиненные условиям: $\theta_{ji}\theta_{j2}\geq 0, g_{j1}g_{j2}\geq 0, g_{j3}g_{j4}\geq 0, g_{j5}g_{j6}\geq 0$. Полагаем, что заданные функции $\tau_j(\alpha,z)$, и $f_{jl}(\alpha,z)\ (1,2,3)$ могут быть представлены равномерно сходящимися двойными тригонометрическими рядами Фурье. Кроме этого, функции эти таковы, что на ребрах ККП выполняются условия согласования. При $g_{j2}=g_{j4}=g_{j6}=0$ будем иметь граничные условия первой задачи термоупругости, при $g_{j1}=g_{j3}=g_{j5}=0$ – второй задачи термоупругости и т.д. (1.7*a*) и (1.8*a*) – условия симметрии, а (1.7*b*) и (1.8*b*) – условия антисимметрии.

2. Общее решение. Можно показать, что общее решение для рассматриваемого класса задач термоупругости можно представить в виде

$$u=\frac{\partial}{\partial r}\left(\varphi_2+\Phi_3+\frac{ac_1-c_4}{2ac_1c_4}r\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)+\frac{c_1-c_5}{2c_1}r^3\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2}+\frac{c_1-3c_5}{2c_1}r^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}+$$

$$+\frac{1}{c_4r}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha}+\frac{k_{10}}{2\left(c_1-c_5\right)}r^2\frac{\partial t}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}L\left(\tilde{T}\right)$$

$$\mathrm{v}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\varphi_2+\Phi_3}{r}+\frac{ac_1-c_4}{2ac_1c_4}\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)+\frac{c_1-c_5}{2c_1}r^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r\partial\alpha}+r\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}- \tag{2.1}$$

$$-\frac{1}{c_4}\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}-\frac{k_{10}}{2\left(c_1-c_5\right)}r\frac{\partial t}{\partial\alpha}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}L\left(\tilde{T}\right)$$

$$w=\varphi_3+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_3+\frac{ac_1-c_4}{2ac_1c_4}r\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)+\frac{1}{c_4}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}L\left(\tilde{T}\right)$$

Здесь $\Delta_a\Phi_1=0,\ \Delta_a\Phi_3=0,\ \Delta_b\Phi_2=0,\ \ \Delta_2\varphi_j=0\ \ (j=1,2,3)$; $T=\dfrac{\partial^2\tilde{T}}{\partial z^2}$, $\Delta_\lambda\tilde{T}=0$,

$L\left(\tilde{T}\right)=\dfrac{k_{10}}{c_1\left(a-\lambda\right)}\tilde{T}$ при $a\neq\lambda$ и $L\left(\tilde{T}\right)=-\dfrac{k_{10}}{2ac_1}r\dfrac{\partial\tilde{T}}{\partial r}$ при $a=\lambda$.

Если в (2.1) принять $t=t_0$, $\tilde{T}=\tilde{T}\left(r,z\right)$, $\varphi_1=\varphi_{10}-b_{01}\alpha,\ \varphi_2=\varphi_{20}-b_{02}\alpha,\ \varphi_3=\varphi_{30}$, $\Phi_1=\Phi_1(r,z),\Phi_2=0,\Phi_3=\Phi_3(r,z)$, то получим решение для осесимметричной задачи.

Если в (2.1) оставить только лишь функции t,φ_1 и φ_2, то получим решение для плоского деформированного состояния.

Если в (2.1) оставить только лишь функции $\varphi_1=b_{01}\alpha,\varphi_2=b_{02}\alpha,\Phi_2=\Phi_2(r,z)$, то получим решение для чистого кручения.

Если в (2.1) оставить только лишь функцию φ_3, то получим решение для чистого сдвига.

Таким образом, формулами (2.1) дается полное общее решение рассматриваемого класса граничных задач термоупругости.

3. Аналитическое решение задач. Представление решения задач термоупругости с помощью функций $t,\varphi_1,...,\Phi_3$ позволяет аналитически выписать решения для целого ряда задач термоупругости. Только лишь для простоты остановимся на изотропном теле (предполагается и термическая изотропность). В этом случае $\lambda_1=\lambda_2=\lambda,k_1=k_2=k_0,k_{10}=k_{20}=2\mu(1+\nu)(1-2\nu)^{-1}k_0$, $a=b=1,\ c_4=c_5=\mu=E/(2(1+\nu)),c_1=c_2 2\mu(1+\nu)(1-2\nu)^{-1},\ c_3=2\mu\nu/(1-2\nu);E$ – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона. Кроме этого, функции $\tilde{T},\Phi_j$, которые нам понадобятся ниже, удовлетворяют уравнениям

$$a)\ \Delta\tilde{T}=0,\quad b)\ \Delta\Phi_j=0 \tag{3.1}$$

где $\Delta=\Delta_a$ Δ=Δ_a при $a=1;\ j=1,2,3$ (в рассматриваемой ниже задаче $t=0$).

Перейдем теперь к построению в области $\Omega=\{r_0<r<r_1,\ 0<\alpha<\alpha_1,\ 0<z<z_1\}$ решения граничной задачи (3.1*a*), (1.5), (1.6), (1.9), (1.7*b*)$_0$, (1.7*a*)$_1$, (1.8*b*)$_0$, (1.8*a*)$_1$, которую будем называть задачей R; при этом $g_{j2}=g_{j4}=g_{j6}=0,\ g_{j1}=g_{j3}=g_{j5}=1,\ \alpha_1<2\pi$.

О записи и индексации номеров формул граничных условий можно сказать то же, что сказано об этом в работе [2]. Например, запись (1.7*b*)$_0$ означает, что при $r=r_0$ выполняются условия (1.7*b*), запись (1.7*a*)$_1$ – что при $r=r_1$ выполняются условия (1.7*a*) и т. д.

Для решения задачи R полагаем $t=0,\varphi_1=0,\varphi_2=0,\varphi_3=0$,

$$a)\Psi=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}R_{jmn}\left(r\right)\sin\left(p\alpha\right)\sin\left(kz\right).\quad b)\Phi=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}R_{2mn}\left(r\right)\cos\left(p\alpha\right)\sin\left(kz\right)\qquad(3.2)$$

Здесь под Ψ подразумевается $\tilde{T}$ при $j=T,\Phi_1$ при $j=T,\Phi_3$ при $j=3$

$$R_{jmn}\left(r\right)=A_{jmn}\frac{I_p\left(kr\right)}{I_p\left(kr_1\right)}+B_{jmn}\frac{K_p\left(kr\right)}{K_p\left(kr_0\right)}$$

где $I_p(kr),\ K_p(kr)$ - модифицированные функции Бесселя первого и второго рода [3], $A_{jmn},\ B_{jmn}$ – постоянные, $j=T,1,2,3;\ p=\pi(2m-1)/(2\alpha_1), k=\pi(2n-1)/(2z_1)$. Напряжения R_r, R_α и R_z через функции $\tilde{T},\Phi_1,\Phi_2$ и Φ_3 выразятся следующим образом:

$$\begin{gathered}R_r=\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(2\mu\Phi_3+\frac{r}{2\left(1-v\right)}\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)+\frac{v}{1-v}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial r}\left(\frac{\Phi_2}{r}\right)-\\-\frac{\mu\left(1+v\right)k_0}{1-v}\left[2\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\frac{\partial\tilde{T}}{\partial r}\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}H_{1mn}\left(r\right)\sin\left(p\alpha\right)\sin\left(kz\right)\\R_\alpha=\frac{\partial^2}{\partial r\partial\alpha}\left(\frac{2\mu}{r}\Phi_3+\frac{1}{2\left(1-v\right)}\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)-\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2}-2\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial r^2}-\frac{\mu\left(1+v\right)k_0}{1-v}\frac{\partial^3\tilde{T}}{\partial r^2\partial\alpha}=\\=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}H_{2mn}\left(r\right)\cos\left(p\alpha\right)\sin\left(kz\right)\end{gathered}\qquad(3.3)$$

$$\begin{gathered}R_z=\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\left(2\mu\Phi_3+\frac{r}{2\left(1-v\right)}\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)-\frac{\mu\left(1+v\right)k_0}{1-v}\frac{\partial^2}{\partial z\partial r}\left(r\frac{\partial\tilde{T}}{\partial r}\right)=\\=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}H_{3mn}\left(r\right)\sin\left(p\alpha\right)\cos\left(kz\right)\end{gathered}$$

где $H_{jmn}(r)$, при $j=1,2,3$ – известные выражения, содержащие в себе функции $R_{jmn}(r)$ и их производные по r.

Постоянные A_{jmn} и B_{jmn}, с учетом (3.2*a*) (при $j=T$) и (3.3), определяются из следующих систем линейных агебраических уравнений:

$$a)\ R_{\text{тmn}}\left(r_0\right)=\tau_{0mn},\ R_{\text{тmn}}\left(r_1\right)=\tau_{1mn},\ \text{b)}\ H_{\text{jmn}}\left(r_0\right)=f_{0\,jmn},\ H_{\text{jmn}}\left(r_1\right)=f_{1\,jmn}\qquad(3.4)$$

Здесь $j=1,2,3$, а $\tau_{0mn},\tau_{1mn},f_{0\,jmn}$ и $f_{1\,jmn}$ – коэффициенты Фурье функций $\tau_0(\alpha,z)$, $\tau_1(\alpha,z),\ f_{0\,j}(\alpha,z)$ и $f_{1\,j}(\alpha,z)$, разложенных в соответствующие тригонометрические ряды.

Как видно, (3.4*a*) – система с матрицей второго порядка, а (3.4b) – с матрицей шестого порядка. Точнее, системы уравнений (3.4*a*) и (3.4b) являются бесконечными системами с бесконечными блочно-диагональными матрицами; блок-матрицы этих систем второго и шестого порядка соответственно.

Таким образом, получено эффективное (точное) решение задачи *R*.

Совершенно аналогично решается для изотропного ККП любая из граничных задач (1.3), (1.5), (1.6), (1.7), (1.8), (1.9), (1.10).

Что касается многослойного ККП, то соответствующая гранично-контактная задача решается совершенно аналогично. Разница будет состоять лишь в том, что в бесконечных системах с блочно-диагонадьными матрицами блок-матрицы окажутся не 2-го и 6-го порядков, а $2s$-го и $6s$-го порядков, где s – количество слоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А. Упругость и прочность цилиндрических тел. М.: Изд-во "Высшая школа", 1975.
2. Khomasuridze N., Khomasuridze I. Two-dimensional problems of thermoelasticity in cylindrical and rectangular coordinates. Proccedings of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, v.48, Tbilisi, 1998.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Изд-во Наука, 1966.

Information about author

Khomasuridze Nuri
Doctor of Sci in .Phys.&Math., Researcher
Address: I.Vekua Institute of Applied Mathematics of Iv.Javakhishvili Tbilisi State University. 2, University St., 0143 Tbilisi, Georgia
Phone: 61-21-70; E-mail: nurikhomasuridze@yahoo.com

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ БЫСТРОХОДНОГО РОТОРА НА КОМБИНИРОВАННЫХ ОПОРАХ[*]

Чахалян А.С.

Исследования проводились для роторного узла новой конструкции [1]. В работе ротор моделирован, как жесткий вал с диском, имеющим массу m, с осевой и экваториальной моментами инерции J_c и A_c, соответственно. Ротор одним концом установлен в шарнирную опору, имеющую поворотную жесткость c_φ и коэффициент затухания ξ_φ, а в промежуточной части установлен в опоре с линейной характеристикой, жесткостью c_1, коэффициентом затухания ξ_1. Эта опора, в свою очередь, установлена в упругой подвеске с массой m_3, жесткостью c_2, коэффициентом затухания ξ_2 (рис.1).

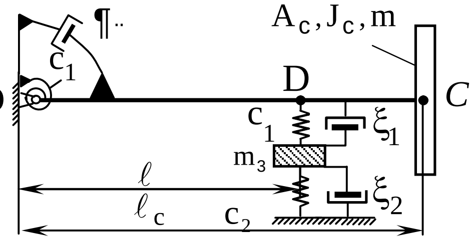


Рис.1. Расчетная схема ротора.

Система дифференциальных уравнений движения роторной системы получена с помощью уравнений Лагранжа второго рода и имеет вид:

$$\begin{cases} \left(m\ell_c^2 + A_c\right)\ddot{x} + \left(\xi_1\ell^2 + \xi_\varphi\right)\dot{x} - \xi_1\ell^2\dot{x}_1 + J_c\omega\dot{z} + c_1\ell^2\left(x - x_1\right) + c_\varphi x = \\ \quad = m\ell_c\ell e\omega^2\cos\left(\omega t\right) + \left(A_c - J_c\right)\ell\omega^2\delta\cos\left(\omega t - \varepsilon\right) \\ \left(m\ell_c^2 + A_c\right)\ddot{z} + \left(\xi_1\ell^2 + \xi_\varphi\right)\dot{z} - \xi_1\ell^2\dot{z}_1 - J_c\omega\dot{x} + c_1\ell^2\left(z - z_1\right) + c_\varphi z = \\ \quad = m\ell_c\ell e\omega^2\sin\left(\omega t\right) + \left(A_c - J_c\right)\ell\omega^2\delta\sin\left(\omega t - \varepsilon\right) \\ m_3\ddot{x}_1 + \left(\xi_1 + \xi_2\right)\dot{x}_1 - \xi_1\dot{x}_1 + \left(c_1 + c_2\right)x_1 - c_1 x = 0 \\ m_3\ddot{z}_1 + \left(\xi_1 + \xi_2\right)\dot{z}_1 - \xi_1\dot{z}_1 + \left(c_1 + c_2\right)z_1 - c_1 z = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Система уравнений решена в среде программного пакета MathCAD с помощью численного метода Рунге-Кутта с фиксированным шагом с использованием подпрограммы **Rkfixed** (y_0, t_0, t_1, M, D), которая предназначена для решения системы уравнений только первого порядка [2]. Произведено снижение порядка уравнений с помощью нижеприведенных назначений.

$$y_0 \equiv x,\; y_1 \equiv \dot{x},\; y_2 \equiv z,\; y_3 \equiv \dot{z},\; y_4 \equiv x_1,\;\; y_5 \equiv \dot{x}_1,\;\; y_6 \equiv z_1,\; y_7 \equiv \dot{z}_1$$

В результате получена новая система восьми дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = y_1, \\ \dot{y}_1 = d - hy_1 + gy_2 - ay_3 - b\left(y_0 - y_4\right) - cy_0, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = k - hy_3 + gy_7 + ay_1 - b\left(y_2 - y_6\right) - cy_2, \\ \dot{y}_4 = y_5, \\ \dot{y}_5 = qy_0 - py_5 + \mathrm{v}y_1 - ny_4, \\ \dot{y}_6 = y_7, \\ \dot{y}_7 = qy_2 - py_7 + \mathrm{v}y_3 - ny_6, \end{cases} \qquad (2)$$

---

[*] - Работа выполнена под научным руководством д.т.н. А.Р. Папояна

где приняты следующие обозначения:

$$a = J_c\omega \Big/ \left(ml_c^2 + A_c\right),\ b = c_1 l^2 \Big/ \left(ml_c^2 + A_c\right),\ c = c_\varphi \Big/ \left(ml_c^2 + A_c\right)$$

$$q = c_1 \big/ m_3,\ \ v = \xi_1 / m_3,\ n = \left(c_1 + c_2\right) \big/ m_3,\ p = \left(\xi_1 + \xi_2\right) / m_3$$

$$h = \left(\xi_1 \ell^2 + \xi_\varphi\right) / \left(ml_c^2 + A_c\right),\ \ g = \xi_1 l^2 / \left(ml_c^2 + A_c\right)$$

$$d = (ml_c le\omega^2 \cos(\omega t) + (A_c - J_c) l\delta\omega^2 \cos(\omega t - \varepsilon)) \Big/ \left(ml_c^2 + A_c\right)$$

$$k = (ml_c le\omega^2 \sin(\omega t) + (A_c - J_c) l\delta\omega^2 \sin(\omega t - \varepsilon)) \Big/ \left(ml_c^2 + A_c\right)$$

Выбор времени интегрирования рассчитан из условия наблюдения колебаний ротора примерно в течение 20-и оборотов. При частоте вращения ротора 5000 с$^{-1}$, период вращения ротора составляет около 0,001с. Следовательно, время интегрирования желательно брать 0,02 с.

Расчеты произведены для ротора со следующими физико-геометрическими параметрами, которые определены для реального экспериментального образца нового роторного узла: $m = 0{,}15$ кг, $m_3 = 0{,}2$ кг, $J_c = 2{,}54 \cdot 10^{-4}$ кгм^2, $\ell = 0{,}03$ м, $A_c = 2{,}02 \cdot 10^{-4}$ кгм^2, $\ell_c = 0{,}07$ м, $c_\varphi = 2000$ Нм/рад.

Полученный алгоритм и программа расчета позволяют оперативно оценивать изменения критической скорости и амплитуд колебания в зависимости от основных параметров системы.

На рис.2 приведены графики изменения абсолютной величины амплитуды колебаний ротора (x) и упруго-подвешенной подвески (x_1), а также изменение относительного перемещения ротора и подвески (f).

Разница (f) – характерный показатель для оценки величины динамического составляющего нагрузки в дисковой опоре.

Результаты получены при следующих исходных значениях параметров системы: жесткость дисковой опоры и подвески $c_1 = 10^6$ Н/м и $c_2 = 10^4$ Н/м соответственно, поворотная жесткость шарнира $c_\varphi = 2 \cdot 10^3$ Нм/рад, коэффициенты затухания упругих элементов опор $\xi_1 = \xi_2 = 10$ Нс/м и шарнирной опоры $\xi_\varphi = 10$ Нм/с$^{-1}$. Частота вращения ротора $\omega = 5000$ с$^{-1}$.

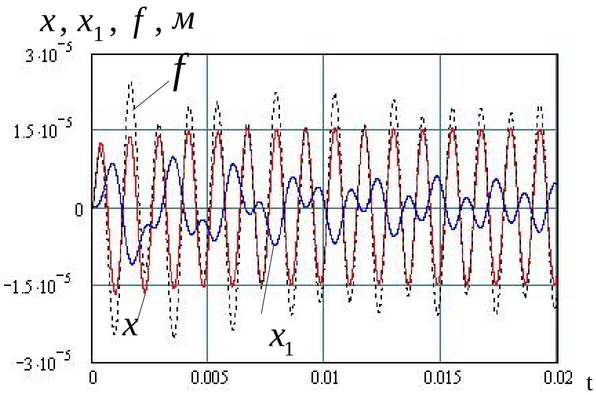


Рис. 2. Амплитуда колебаний ротора и подвески.

Варьирование значениями коэффициентов затухания показывает, что изменение ξ_1 и ξ_2 незначительно влияет на поведение системы. В то же время выбор значения коэффициента ξ_φ очень существенен. При увеличении ξ_φ от 10 Нм/с$^{-1}$ до 20 Нм/с$^{-1}$ максимальные значения параметров x, x_1 и f снижаются почти в два раза (табл. 1).

Далее нами рассмотрено поведение системы при разных частотах вращения. На рис.3 приведены графики колебаний ротора и подвески при исходных значениях коэффициентов жесткости и затухания опор ($c_2 = 10^4$ Н/м, $c_\varphi = 2 \cdot 10^3$ Нм/рад, $\xi_1 = \xi_2 = 10$ Нс/м, $\xi_\varphi = 10$ Нм/с$^{-1}$), когда частота вращения ротора $\omega = 1000$ с$^{-1}$, $\omega = 2000$ с$^{-1}$ и $\omega = 3000$ с$^{-1}$.

Анализ этих результатов показывает, что при низких частотах вращения ротора доминантными являются колебания подвески. При увеличении частоты вращения ротора наблюдается относительное уменьшение амплитуд колебаний подвески, но при этом доминантным становятся колебания ротора. Этот эффект позволяет предположить, что можно подобрать такие параметры системы, при которых амплитуды колебания этих двух элементов были бы равны и находились в одной фазе. Тогда упругая подвеска дисковой опоры будет работать в режиме динамического разгружателя. Однако отметим, что динамическое разгружение опоры произойдет только на определенной частоте вращения ротора. Изучение системы показало, что реально и эффективно этот процесс можно управлять с помощью жесткости дисковой опоры c_1.

Таблица 1

	¶.. , *Нм/с*$^{-1}$	Максимальное значение амплитуды колебаний, м		
		x	x_1	f
1	10	$1,5\cdot10^{-5}$	$9,7\cdot10^{-6}$	$2,2\cdot10^{-5}$
2	20	$7,2\cdot10^{-6}$	$4,7\cdot10^{-6}$	$1,2\cdot10^{-5}$

Из графиков видно, что при вращении ротора с частотой $\omega = 1000$ с$^{-1}$, когда жесткость $c_1 = 5\cdot10^6$ Н/м, дисковая опора практически полностью разгружена (рис. 3а).

При увеличении частоты вращения до $\mu = 2000$ с$^{-1}$ отношение $f / x = 0.2$ (опора разгружается на 80%-ов (рис. 3.б)) при частоте вращения $\mu = 3000$ с$^{-1}$ отношение $f / x = 0.5$ эффективность разгружения снижается. Но достаточно увеличить жесткость опоры до $c_1 = 1\cdot10^7$ Н/м и f / x снижается до уровня 0,2 (рис. 3.в).

Установлено, что координата расположения упругой опоры существенно может повлиять на динамические характеристики ротора.

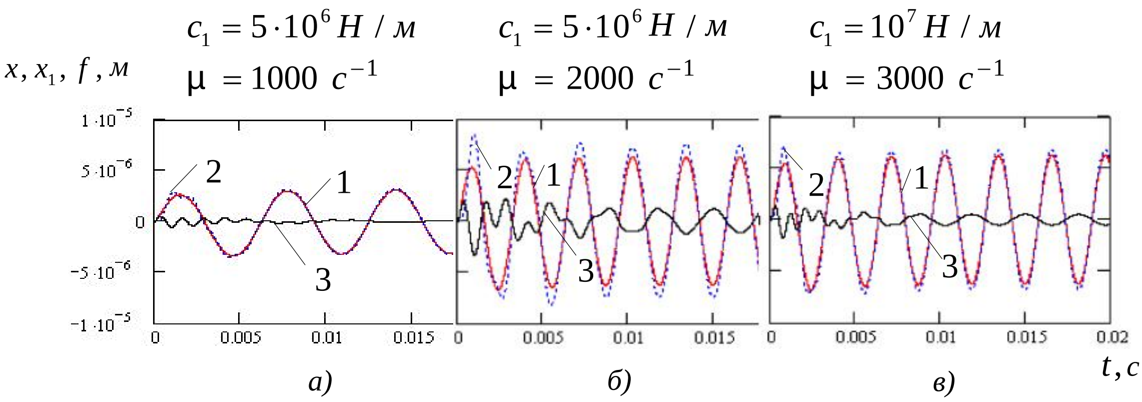
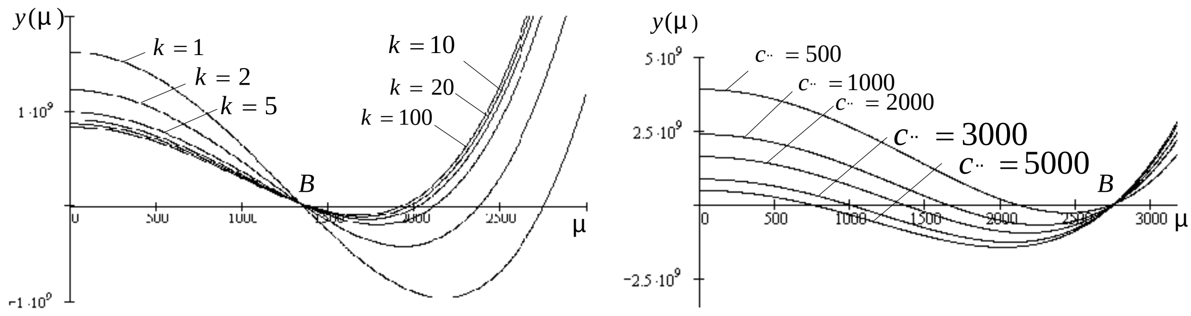


Рис. 3. Графики абсолютных амплитуд колебаний ротора.
x (кривая -1), подвески x_1 (кривая -2) и относительной амплитуды колебаний опорных дисков f (кривая -3).

На рис.4 приведены зависимости критических частот вращения ротора от соотношения жесткостей дисковой опоры и подвески (рис. 4.а) и зависимость критических частот вращения ротора от поворотной жесткости c_φ(рис. 4.б) при следующих значениях: $m = 0,25$кг, $m_3 = 0,1$– кг жесткость дисковой опоры и подвески $c_1 = 3,8\cdot10^5$ Н/м и $c_2 = 3,8\cdot10^6$ Н/м соответственно, поворотная жесткость шарнира $c_\varphi = 2\cdot10^3$ Нм/рад. Отметим, что семейство кривых практически пересекается в одном узле (точка В). При изменении соотношения ℓ_c/ℓ_l изменяются и координаты узла В.

В частности, когда $\ell_c/\ell = 5$, узел В располагается на оси абсцисс. Это означает, что изменение коэффициента k (k-соотношение жесткостей дисковой опоры и упругой подвески) влияет только на значение второй критической скорости (рис. 4.а), а изменение поворотной жесткости c_φ влияет только на значение первой критической скорости (рис. 4.б).

Таким образом, параметры c_φ и k можно использовать для урегулирования значений первой и второй критических скоростей.



а) б)

Рис.4. а) Зависимость критических частот вращения ротора от соотношения $k\ (k = c_1/c_{23})$, *когда* $l_c/l = 5$; *б) Зависимость критических частот вращения ротора от поворотной жесткости* c_φ.

Вывод.

Разработанная математическая модель позволяет эффективно анализировать динамические параметры ротора в стадии проектирования, а с помощью оптимального подбора упруго-жесткостных характеристик опор и конструктивных размеров обеспечить улучшение динамических характеристик системы при её эксплуатации. Для решения оптимизационных задач минимизации динамических нагрузок в опорах и амплитуды колебаний ротора самыми эффективными параметрами являются: жесткости дисковой и шарнирной опор и диссипативный элемент в шарнирной опоре ротора.

Изучение влияния физических параметров конструктивных элементов роторного узла на значения критических частот вращения показало, что при определенных условиях можно отфильтровать влияние отдельных параметров на значение определенной частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Папоян А.Р., Чахалян А.С. Опорный узел ротора / Патент № 1840, А2. Республика Армения. Заявл. 14.11.2005. Опубл. 15.09.2006. стр.15-16.
2. Кирянов Д.В. Самоучитель Mathcad 11. СПб.: БХВ – Петербург, 2004. 560 с.

<u>Сведения об авторе</u>

Чахалян Айастан Сейрановна
Соискатель, Гюмрийский филиал Государственного инженерного университета Армении
Адрес: 3103, Гюмри, ул. М.Мкртчяна 2
тел: 093-320631 (моб.) E-mail: chaxalyan84@list.ru

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНКИ СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ

Чил-Акопян Э. О.

Многие задачи, с которыми сталкиваются исследователи и инженеры, не поддаются аналитическому решению, либо требуют огромных затрат на экспериментальную реализацию. Зачастую единственной возможностью экспрессного анализа является компьютерное математическое моделирование. Наиболее распространенным и универсальным методом анализа конструкций является метод конечных элементов – (МКЭ) [1, 2].

В работе рассматривается конечно-элементный, компьютерный анализ задач локализованной неустойчивости пластинки со свободным краем [3, 4].

Проведен сравнительный анализ значений критической нагрузки полученных аналитически и полученных компьютерным конечно-элементным анализом, при которых имеет место локализованная неустойчивость.

Роль расчетов на устойчивость в общем цикле прочностных расчетов очень существенна, ибо разрушение тонкостенной конструкции чаще всего связано с потерей ее общей устойчивости или устойчивости отдельных ее элементов, а также с явлением возникновения локализованной неустойчивости возле свободного края пластины или края, имеющего определенные жесткостные характеристики. Исходя из вышесказанного, повышение требований к надежности и точности расчета сооружений и конструкций ведет за собой совершенствование существующих методов расчета для моделей, приближенных к реальным условиям.

В [5,6] дана постановка задач локализованной неустойчивости прямоугольной пластинки-полосы. Эта задача является аналогией задачи распространения локализованной у свободного края изгибной волны, впервые решенной Коненковым Ю.К. [7].

Проведем компьютерный конечно-элементный анализ двух задач локализованной неустойчивости пластинки со свободным краем, рассмотренных в работах [3, 4, 8].

1. Рассмотрим задачу неустойчивости пластинки, локализованной в окрестности свободной кромки, в том случае, когда противоположный ненагруженный край закреплен шарнирно. Нагруженные кромки при $y = 0, b$ также закреплены шарнирно.

Пусть прямоугольная пластинка [$0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ -h \le z \le h$] равномерно сжата по направлению $0y$ нагрузкой интенсивностью P_0.

По теории тонких пластин Кирхгофа уравнение задачи устойчивости имеет вид:

$$D\text{a}^2 w + P_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\neg^2)} \tag{1.1}$$

где D – жесткость пластины на изгиб, w – прогиб пластины, E – модуль Юнга, $\neg$ – коэффициент Пуассона, a – двухмерный оператор Лапласа.

Граничные условия при $x = 0$:

$$W_n^{II} - \neg\,\text{ª}_n^2 W_n = 0, \quad W_n^{III} - \left(2-\neg\right)\text{ª}_n^2 W_n^{I} = 0, \quad \text{где } \text{ª}_n = n®/b \tag{1.2}$$

Граничные условия при $x = a$:

$$W_n = 0, \quad W_n^{II} = 0 \tag{1.3}$$

Дисперсионное уравнение имеет вид:

$$L_1(\sim_n) \equiv \frac{\text{th}(P_2 \frac{n® a}{b})}{\text{th}(P_1 \frac{n® a}{b})} = \frac{P_2(P_2^2 - 2 + \neg)\cdot(P_1^2 - \neg)}{P_1(P_1^2 - 2 + \neg)\cdot(P_2^2 - \neg)} \tag{1.4}$$

где приняты следующие обозначения:

$$P_1 = \sqrt{(1+\sim_n)},\ P_2 = \sqrt{(1-\sim_n)}, \quad \sim_n^2 = P_{кр}/D\cdot\text{ª}_n \tag{1.5}$$

В частности, когда $a/b \to \infty$, уравнение (1.4) полностью совпадает с характеристическим уравнением задачи локализованной неустойчивости полубесконечной пластинки-полосы со свободным краем.

Исходя из монотонности функции (1.4), для существования локализованной неустойчивости необходимо, чтобы было выполнено неравенство:

$$F(a/b, \neg) \equiv \frac{\neg^2}{(2-\neg)^2} \cdot ® \sqrt{2} \cdot \frac{a}{b} - \mathrm{th}(® \sqrt{2} \cdot \frac{a}{b}) > 0 \qquad (1.6)$$

Значения соотношения сторон пластинки a/b, а также минимальные значения параметра критической нагрузки $\sim_{кр\min}$ были рассчитаны численно [3,4,7] с помощью программы MathCAD. Результаты вычислений показывают, что, например, для стали ($\neg = 0.3,\ E = 210GPa$) локализованная неустойчивость существует, начиная со значения соотношения сторон пластинки $\left(a/b\right)^* = 9,2$ и условием существования локализованной неустойчивости является неравенство:

$$a/b \ge \left(a/b\right)^* \qquad (1.7)$$

где $\left(a/b\right)^*$ – расчетные значения соотношения сторон, начиная с которых имеет место локализованная неустойчивость.

Для численного расчета значения минимальной критической нагрузки $P_{кр\min}$ $(n=1)$ стальной сжатой упругой пластинки, при которой пластинка теряет устойчивость у свободного края, имеем:

$$P_{кр\min} = \sim^2_{кр} \frac{®^2 D}{b^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\neg^2)} \qquad (1.8)$$

Здесь параметр жесткости пластины D имеет такой вид для совпадения размерностей аналитического и компьютерного приближенного решений.

Возьмем пластинку со следующими параметрами:

$a = 0,92\ м$, $b = 0,1\ м$, $h = 0,001 м$, $\neg = 0.3$, $E = 210 \cdot e^9 Pa$, $\sim_{кр} = 0,999$

В данном случае из (1.8) получаем:

$$P_{кр\min}(Аналит) = 18,923 кН/м\ . \qquad (1.9)$$

Проведя аналогичный расчет анализа на устойчивость в программном комплексе ANSYS [ ], имеем следующие результаты.

При $a = 0,92\ м$, $b = 0,1\ м$, $h = 0,001 м$, $\neg = 0.3$, $E = 210 \cdot e^9 Pa$:

$$P_{кр\min}(\mathbf{ANSYS}) = 18,905 кН/м \qquad (1.10)$$

ANSYS дает критическую нагрузку $18\,905 Н/м$, при которой пластинка теряет устойчивость возле свободного края, что близко к ожидаемому значению $18\,923\ к/м$.

Визуально пластинка прогибается во втором моде (нас интересует только первый мод, в котором пластинка прогибается, но отсутствие каких-либо ограничений на вращение вокруг оси Z вводит дополнительный мод вращения при нагрузке, приблизительно равной 0), как показано на рис.1.1 и 1.2.

2. Теперь проведем анализ локализованной неустойчивости пластинки со свободной кромкой, в том случае, когда противоположный ненагруженный край жестко закреплен. Нагруженные кромки при $y = 0, b$ также закреплены шарнирно.

Пусть прямоугольная пластинка [*0 ≤ x ≤ a, 0 ≤ y ≤ b, -h ≤ z ≤ h*] равномерно сжата по направлению $0y$ нагрузкой интенсивностью P_0.

Уравнение задачи устойчивости имеет тот же вид:

где D – жесткость пластины на изгиб, w – прогиб пластины, E – модуль Юнга, ¬ – коэффициент Пуассона, а – двухмерный оператор Лапласа.

Граничные условия при $x = 0$:

$$W_n^{II} - \neg ª_n^2 W_n = 0,\quad W_n^{III} - \left(2 - \neg\right) ª_n^2 W_n^{I} = 0,\quad \text{где } ª_n = n®/b \tag{2.2}$$

$$Dª^2 w + P_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,\quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\neg^2)} \tag{2.1}$$

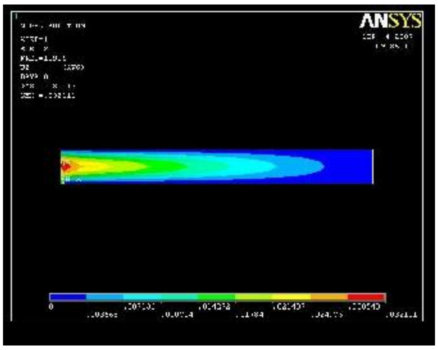


Рис.1.1. Визуализация локализованной неустойчивости, вид спереди

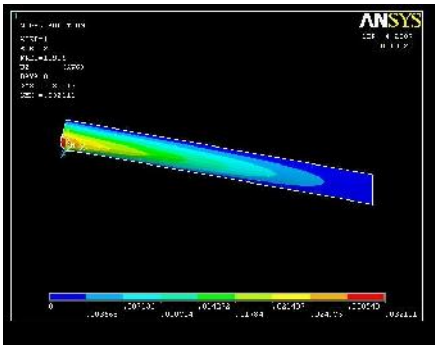


Рис.1.2. Визуализация локализованной неустойчивости, изометрия

Граничные условия при $x = a$:

$$W_n = 0,\quad W_n^{I} = 0 \tag{2.3}$$

Дисперсионное уравнение после ряда преобразований имеет вид:

$$L_2(\sim_n) \equiv P_1(P_1^2 - \neg)\cdot(P_2^2 - \neg) ª_n^2 a^2 - (P_1 P_2 + \neg)^2 \operatorname{sh}(ª_n P_1 a)\frac{\operatorname{sh}(ª_n P_2 a)}{P_2} + \\ + P_1(P_1 + P_2)^2 \operatorname{ch}(ª_n P_1 a)\cdot \operatorname{ch}(ª_n P_2 a) = 0 \tag{2.4}$$

Условием существования локализованной неустойчивости будет неравенство:

$$S(a/b,\neg) = -\neg\sqrt{2}(2-\neg)\frac{®^2 a^2}{b^2} - \neg^2\frac{®a}{b}\operatorname{sh}(\sqrt{2}®\cdot\frac{a}{b}) + 2\sqrt{2}\operatorname{ch}(\sqrt{2}®\cdot\frac{a}{b}) < 0 \tag{2.5}$$

Исследование функции (2.5) было проведено на ПК в среде MathCAD и показало, что она имеет отрицательные значения в зависимости от $\neg$ и a/b, так, например, для стали ($\neg = 0.3$, $E = 210\ GPa$) локализованная неустойчивость возникает, начиная со значения соотношения сторон пластинки $(a/b)_1^* = 10{,}1$.

Расчет анализа на устойчивость в программном комплексе ANSYS дает следующие результаты. При $a = 1{,}01\ м$, $b = 0{,}1\ м$, $h = 0{,}001 м$, $\neg = 0.3$, $E = 210\cdot e^9 Pa$:

$$P_{кр\min}(\text{ANSYS}) = 18{,}896 кН\ /м \tag{2.6}$$

а при $a = 0{,}92\ м$, $b = 0{,}1\ м$, $h = 0{,}001 м$, $\neg = 0.3$, $E = 210\cdot e^9 Pa$:

$$P_{кр\min}(\text{ANSYS}) = 18{,}908 кН\ /м \tag{2.7}$$

В данном случае, для жестко закрепленного правого края пластинки при соотношении сторон $a = 0{,}92\ м$, ANSYS дает несколько большую критическую нагрузку $18\,908 Н/м$, нежели в случае шарнирно закрепленного правого края пластинки $18\,905 Н/м$, так как действительно пластинка стала жестче.

Визуально пластинка прогибается в первом моде, как показано на рис.2.1 и 2.2.

Выводы

1. На основании аналитических, точных решений задач локализованной неустойчивости пластин со свободным краем получены численные значения минимальной критической

нагрузки для стальной пластинки, при которых происходит потеря устойчивости у свободного края.

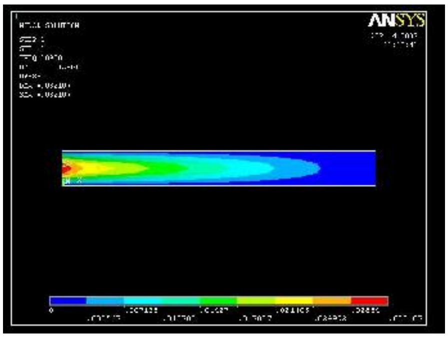


Рис.2.1. Визуализация локализованной неустойчивости, вид спереди

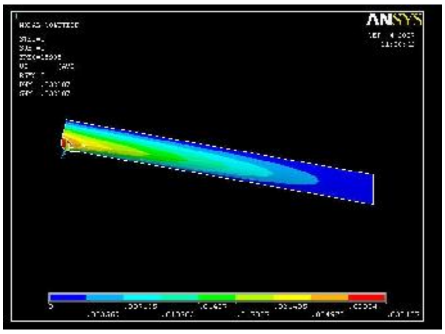


Рис.2.2. Визуализация локализованной неустойчивости, изометрия

2. Для случаев, когда край пластинки, противоположный свободному, жестко закреплен и закреплен шарнирно, проведен компьютерный анализ в среде ANSYS. Проведен сравнительный анализ значений параметра критической нагрузки, полученных аналитически и полученных компьютерным конечно-элементным анализом, при которых имеет место локализованная неустойчивость.
3. Установлено, что значения минимальной критической нагрузки, полученные компьютерным анализом на устойчивость, достаточно близки к аналитическим, погрешность решений при компьютерном анализе составляет около 0,001 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L. The Finite Element Method, 5-th ed. Butterworth-Heinemann Engineering, 2000, Vol.1 - The Basis, Vol. 2- Solid Mechanics.
2. Каплун А.В. ANSYS в руках инженера. Практическое руководство. М.: 2003. 269 с.
3. Chil-Akopyan E.O., Belubekyan M.V. The investigation of the asymptotics for the problem of the located instability of plate with free edge. The abstract on the XXXIII Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics”, June, 2005, St. Petersburg, Russia. P.33-34.
4. Белубекян М. В., Чил-Акопян Э.О. Задачи локализованной неустойчивости пластинки со свободным краем. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №2. С. 34-39.
5. Белубекян М. В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки. // В сб.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ереван: Изд. Ереванского Госунта.1997. С. 95 – 99.
6. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки. //Прикладная Механика. 1994. Т.30. №2. С.61 – 68.
7. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «рэлеевского» типа. // Акуст. журн. 1960. Т 6. №1. С. 124–126.
8. Чил-Акопян Э.О. Локализованная неустойчивость сжатых прямоугольных пластин. Диссертационная работа на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности: “Механика деформируемого твердого тела”. Ереван: 2006.106 с.

Сведения об авторе

Чил–Акопян Эдуард Олегович
Кандидат физ.-мат. наук
Институт механики НАН Армении,
Адрес: пр. Маршала Баграмяна 24б, Ереван, Армения, 375019.
Тел: (374-10) 524802; E-mail: echilakopyan@yahoo.com / echil@list.ru

БЫСТРО ИЗМЕНЯЮЩИЕСЯ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ВЯЗКОЙ ДИСПЕРСНОЙ СРЕДЕ

Шекоян А.В.

Для исследования ряда задач сейсмологии, приборостроения необходимо изучить особенности распространения и отражения от свободной границы нелинейных волновых пучков, а также рассмотреть слой среды, когда на одном торце задается возмущение, о другой свободен от напряжений. Представляет интерес рассмотрение таких математических моделей среды, которые по возможности лучше отражают реальные свойства материалов, грунтов.

1. Постановка задачи. Пусть имеется изотропный слой среды. Уравнение движения среды и связи между тензорами напряжений, деформации и компонентами вектора смещения имеют вид [1,2,3]

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_{ik} + a_1\delta_{ik}\dot{\sigma}_{ll} + a_2\dot{\sigma}_{ki} + a_2\dot{\sigma}_{ik} = \lambda\delta_{ik}\varepsilon_{ll} + 2\mu\varepsilon_{ik} + \frac{1}{4}A\left[\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right) + \right.\\ &\left. + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\right)\right] + \frac{B}{2}\left[\frac{\partial u_l}{\partial x_m}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\delta_{ik} + 2\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\right] + \\ &+ C\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^2\delta_{ik} + b_1\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_l \partial t}\delta_{ik} + 2b_2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial t} + d_1\delta_{ik}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_l \partial t^2} + 2d_2\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k \partial t^2} + \\ &+ n_1\delta_{ik}\frac{\partial^4 u_l}{\partial x_l \partial t^3} + 2n_2\frac{\partial^4 u_i}{\partial x_k \partial t^3} \end{aligned} \tag{2}$$

где x_k – лагражевы координаты, u_i – компоненты вектора перемещений, ε_{ik} – тензор деформации, σ_{ik} – лагражевый тензор напряжений. a_1 и a_2 – времена релаксации, b_1, b_2, d_1, d_2, n_1 и n_2 – параметры внутренних осциляторов, λ и μ – коэффициенты Ламе, A, B и C – нелинейные модули третьего порядка, ρ_0 – начальная плотность среды.

Из уравнений (2) следует, что среда вязкоупругая нелинейная (геометрическая и физическая), имеются осцилирующие массы, что придает среде дисперсионные свойства. Физически линейная модель для грунтов предложена в статье [4].

Координатные оси x_1 и x_2 находятся в граничной плоскости слоя $x_3 = 0$, где напряжения нули, а в $x_3 = l$ (l– толщина слоя) заданы $u_3 \neq 0$ и $u_1 = u_2 = 0$, т.е. в слое образовывается квазипродольное возмущение, которое распространяется до плоскости $x_3 = 0$ и отражается. Таким образом, в среде есть два поля возмущения-падающее и отраженное. В среде, где имеет место (2), возможны два типа волн: равновесные и быстро изменяющиеся. В последнем случае в качестве основных членов берут $\dot{\sigma}_{ik}$ и $\dot{\varepsilon}_{ik}$ и принимаются порядки $u_3 \sim \delta^2$, $\frac{\partial}{\partial x_{1,2}} \sim \delta^{-1/2}$, $\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial t} \sim \delta^{-1}$, d_1, $d_2 \sim \delta_1^2$, $n_1, n_2 \sim \delta^3$, где – δ некоторый малый параметр. Из выбранных порядков следует, что вязкость, дисперсия и диссипация малы.

Из уравнений (1) и (2), учитывая вышеуказанные порядки и образование в среде квазипродольных возмущений, получим следующую систему уравнений:

$$G\frac{\partial u_3}{\partial x_i \partial x_3}+T\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2}+a_2\rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=0 \qquad (i=1,2) \tag{3}$$

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}+F\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3^2\partial t}+N\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+P\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta_\perp u_3\right)+$$
$$+a_2\rho_0\frac{\partial^3 u_3}{\partial t^3}-\left(\lambda+2\mu\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}-\left(d_1+d_2\right)\frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^2\partial t^2}-\left(n_1+n_2\right)\frac{\partial^5 u_3}{\partial x_3^2\partial t^3}+ \tag{4}$$
$$+M_2\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3\partial t}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3^2\partial t}\right)=0$$

где

$$G=a_1\left(2\mu+3\lambda\right)+a_2\left(\lambda+\mu\right)-b_1-b_2,\quad T=2a_2\mu-b_2$$
$$F=a_2\left(\lambda+2\mu\right)+a_1\left(2\mu+3\lambda\right)-b_1-2b_2,\quad N=a_2\left(\lambda+\mu\right)+$$
$$+a_1\left(2\mu+3\lambda\right)+2a_1\left(2B+3C\right)-b_1-b_2,\quad P=a_2\mu-b_2$$
$$M_2=2a_1\left(A+5B+3C\right)+2a_2\left(A+C+2B\right)-b_1-2b_2$$

Из (3) и (4) следует, что в линейном, одномерном случае в среде распространяется продольная волна со скоростью

$$\mathrm{v}_0=\frac{F}{a_2\rho_0}$$

Так как в слое образовываются два волновых поля – падающее и отраженное, то в системе уравнений (3), (4) все функции представляются в виде сумм двух величин для падающих и отраженных волн. Линейные уравнения будут расщеплены на два независимых уравнения. Согласно [1-3,5] нелинейные уравнения в первом приближении также расщепляются. Таким образом, получаем две новые системы уравнений типа (3), (4) для падающих и отраженных волн. Это означает, что в слое образовываются два независимых нелинейных пучка, распространяющиеся друг другу навстречу, которые связаны через граничные условия.

Введем для падающей волны новую переменную $\tau_1=\tau_1'-t-\dfrac{l}{\mathrm{v}_0}$, $\tau_1'=-\dfrac{x_3}{\mathrm{v}_0}$, а для отраженной $\tau_2=\tau_2'-t-\dfrac{l}{\mathrm{v}_0}$, $\tau_2'=-\tau_1'$. Выполняя аналогичные вычисления, как в статьях [1-3], для функций $\psi_1=\dfrac{\partial u_3}{\partial\tau_1}$ и $\psi_2=-\dfrac{\partial u_3}{\partial\tau_2}$ можно получить следующие эволюционные уравнения:

$$\frac{\partial^2\psi_{1,2}}{\partial t\partial\tau_{1,2}}-\frac{1}{2}\Delta_\perp\psi_{1,2}=-\mathrm{v}_0^{-1}\frac{\partial}{\partial\tau_{1.2}}\left[H\psi_{1,2}+d\frac{\partial^2\psi_{1,2}}{\partial\tau_{1,2}^2}+n\frac{\partial^3\psi_{1,2}}{\partial\tau_{1,2}^3}+\Gamma_2\psi_{1,2}\frac{\partial\psi_{1,2}}{\partial\tau_{1,2}}\right] \tag{5}$$

где

$$L=\mathrm{v}_0^2Q_pF^{-1},\quad H=-\frac{1}{2}\mathrm{N}_2\mathrm{v}_0^2F^{-1},\quad d=\frac{1}{2}\left(d_1+d_2\right)\mathrm{v}_0F^{-1}$$
$$n=-\frac{1}{2}\left(n_1+n_2\right)\mathrm{v}_0F^{-1},\quad Q_p=-P+\frac{Na}{\mathrm{v}_0^2\left(a_1\rho_0+T\mathrm{v}_0^{-2}\right)},\quad \Delta_\perp\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Решение уравнений (5) ищется в виде

$$\psi_{1,2}=\frac{1}{2}\left[A_{1,2}\left(\tau_{1,2},t\right)e^{\varphi}+B_{1,2}\left(\tau_{1,2},t\right)e^{2\varphi}\right]$$

где $\varphi=\left(-\nu+i\alpha\right)\tau_{1,2}-\left(\nu+i\omega\right)t$, $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$–комплексные медленно меняющиеся амплитуды первой и второй гармоник для падающей и отраженной волн.

Выполняя аналогичные вычисления, как в [1-3], получим дисперсионное соотношение, коэффициент затухания и уравнения для амплитуд первой гармоники:

$$\omega=-\frac{n}{v_0}\alpha^3,\quad \nu=Hv_0^{-1}-dv_0^{-1}\alpha^2$$

$$\left(i\alpha-\nu-3i\omega-\frac{2d\alpha^2}{v_0}\right)\frac{\partial A_{1,2}}{\partial\tau'_{1,2}}-\frac{1}{2}L\Delta_\perp A_{1,2}=\frac{\Gamma_2\alpha^3\exp\left(\tau'_{1,2}+lv_0^{-1}\right)}{4v_0^2\left(i\nu+6\omega+\frac{3id\alpha^2}{v_0}\right)} \tag{6}$$

где α – основная, а ω – возмущенная частота, ν – коэффициент поглощения.

Как и в работах [1-3], вводя действительные амплитуды и эйконал, получим уравнения для них, потом для узких пучков получаются уравнения для безразмерной ширины пучка $f_{1,2}$, набега фазы $\sigma_{1,2}$ и радиуса кривизны фронта волны $R_{1,2}$. Уравнение для безразмерной ширины пучка имеет вид

$$\frac{d^2 f_{1,2}}{d\tau'^2_{1,2}}=Mf_{1,2}^{-3}+\frac{2\nu b_{1,2}\chi_2}{f_{1,2}} \tag{7}$$

где

$$M=\alpha^2\left(1-3\xi\right)^{-2}\left(Lr_{1,2}^4+4\chi_1 b_{1,2}^2 L_1 r^{-2}-\chi_2 b_{1,2}^4\right),\quad \xi=-\frac{\omega}{\alpha}$$

$$\chi_1=\zeta\left(3\alpha\xi+8\alpha^2\nu^2+48n\alpha^5 v_0^{-1}\right),\qquad \chi_2=-\zeta\left(\alpha\nu+6n\alpha^5 v_0^{-1}+24\alpha^3 v_0\xi\right)$$

$$\zeta=\Gamma_2^2\left(8v_0^2\right)^{-1}\left[9\xi^2+\left(\nu\alpha^{-1}+6n\alpha^2 v_0^{-1}\right)^2\right]^{-1}\exp\left[-2\nu\left(\frac{l}{v_0}-\tau'_{1,2}\right)\right]$$

$b_{1,2}$ – исходные амплитуды, $r_{1,2}$ – исходные радиусы пучков.

Предполагается, что в плоскости $x_3=l$ задаваемый гауссовский пучок, то есть

$$f_1\left(l\right)=1\ \ \frac{df_1}{d\tau'_1}=F,\quad \sigma_1\left(l\right)=0,\ \ F=\frac{2L}{\alpha\left(1-3\xi\right)}\left[\frac{\chi_2 b_1^2}{2}-\frac{1}{R_1\left(l\right)}\right]. \tag{8}$$

Граница $x_3=0$ свободна от напряжений $\sigma_{3i}=0$. Пользуясь методом возмущения граничного условия и беря, как первое приближение, наивысший порядок, получим

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0 \tag{9}$$

при этом в выбранных порядках условия $\sigma_{31}=\sigma_{32}=0$ выполняются. Для пучков условие (9) дает

$$b_1=-b_2,\quad f_1\left(lv_0^{-1}\right)=f_2\left(lv_0^{-1}\right),\ \ R_1\left(lv_0^{-1}\right)=R_2\left(lv_0^{-1}\right)$$

$$\sigma_1\left(v_0^{-1}l\right)=\sigma_2\left(lv_0^{-1}\right),\qquad \frac{df_1\left(lv_0^{-1}\right)}{d\tau'_1}=\frac{df_2\left(lv_0^{-1}\right)}{d\tau'_2} \tag{10}$$

При условии $\nu lv_0^{-1}<<1$, что обычно выполняется, экспоненту в (7) можно заменить на единицу и отбросить второе слагаемое в правой части (7). Тогда решение (7) с граничными условиями (8) и (10) примут вид:

$$f_1^2=\left[\tau'_1+lv_0^{-1}+F\left(F^2+M\right)^{-1}\right]^2\left(F^2+M\right)+M\left(F^2+M\right)^{-1}$$

$$f_2^2 = \left[F_1^2 + \frac{M}{f_1^2(0)} \right] \left[\tau_1'' + F_1 f_1(0) \right]^2 + M \left[F_1^2 + M f_1^{-2}(0) \right]^{-1}$$

$$F_1 = \frac{df_1(0)}{d\tau'}, \quad \tau_1' = -x_3 \mathrm{v}_0^{-1}, \; \tau_2'' = x_3 \mathrm{v}_0^{-1}$$

Если $F_1 = 0$, что ограничивает l, а именно $l = F\left(F^2 + M\right)^{-1} \mathrm{v}_0$, то $f_1(\tau_1') = f_2(\tau_2')$, т.е. есть симметрия для отраженных и падающих волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шекоян А.В. Отражение гауссовского пучка от свободной поверхности в нелинейной вязкоупругой среде с внутренними осцилляциями. //В сб.: «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». III. Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1990.
2. Багдоев А.Г., Шекоян А.В. Отражение квазимонохроматической нелинейной волны от свободной поверхности среды. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1991. Т.44. №1. С.28-36.
3. Bagdoev A.G., Shekoyan A.V. Wave beams in viscoelastic dispersive non-linear initially deformed medium with free surface. Int. J. Non-linear Mechanics. 1997. V.32, N2, p. 385-392.
4. Николаевский В.Н. К изучению волн в сейсмоактивных средах. //В сб.: Проблемы нелинейность сейсмики. М.: Наука, 1987. С. 107-202.
5. Hunter J.K., Keller J.B. Weakly nonlinear high frequency 1997 Waves. //Commun and Pure Appl. Math. V.36. P.547, 1983.

Сведения об авторе

Шекоян Ашот Вазгенович
Кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, Институт механики НАН РА
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б
Тел: (+37410) 56-81-92, E-mail: ashotshek@mechins.sci.am

УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ РОТОРА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Шекян Г.Г., Захарянц В.В., Хачатрян М.Н.

Рассмотрены колебания вращающегося ротора электрической машины в магнитном поле с учетом неравномерности воздушного зазора между ротором и статором, пульсаций поля и высших зубцовых гормоник.

Исследование систем полученных нелинейных уравнений типа Матье–Хилла позволило заметить зоны неограниченно-возрастающих решений на плоскости параметров и получить условия для определения границ области динамической неустойчивости.

Пусть гибкий, уравновешенный ротор шарнирно опертый на двух опорах, вращается в магнитном поле. Если в уравнении изгиба балки добавить силы инерции и силы одностороннего магнитного притяжения, то будем иметь уравнение движения вращающегося ротора в магнитном поле статора [1,2]:

$$EI\frac{\partial^4 \mathrm{V}(x,t)}{\partial t^4} - K_1 \mathrm{V}(x,t)\phi(t) + m\frac{\partial^2 \mathrm{V}(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

где EI – изгибная жесткость ротора, $\mathrm{V}(x,t)$–динамический прогиб ротора в любой момент времени t, K_1– постоянная магнитного поля или, так называемая “условная отрицательная жесткость” магнитного поля [2], $\phi(t)$–периодическая функция времени, зависящая от частоты пульсации и зубцовой гармоники магнитного поля [3]:

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t\right) \qquad (2)$$

a_k и b_k–амплитуды составляющих гармоник, k–номер гармоники, ω_k–частота k-ой гармоники.

Решения уравнения (1) будем искать в виде [1]

$$\mathrm{V}(x,t) = f_k^{(t)} \sin \pi kx / l \qquad (3)$$

Здесь “k”– номер формы собственных колебаний $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, l–длина пролета ротора, $f_k(t)$–неизвестные пока функции времени. “Фундаментальные функции” $\varphi_k \sin \pi kx / l = 0$ являются формами собственных колебаний. Легко видеть, что выражение (3) удовлетворяет граничным условиям, требующим, чтобы прогиб ротора вместе со второй производной на опорах обращался в нуль.

Подставляя (3) в (1), получим

$$\left[m\frac{d^2 f_k}{dt^2} + EI\frac{k^4\pi^4}{l^4}\, f_k - K_1 f_k^{(t)}\phi(t)\right]\sin\frac{\pi kx}{l} = 0 \qquad (4)$$

Чтобы выражение (3) действительно удовлетворяло уравнению (1), необходимо, чтобы для любого времени t квадратная скобка в (4) обращалась в нуль. Тогда будем иметь

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} + \left(\Omega_k^2 - K_1\frac{\phi(t)}{m}\right) f_k = 0 \qquad (5)$$

где $\Omega_k^2 = EI\dfrac{\pi^4 k^4}{l^4 m}$, Ω_k – собственная k-ая частота незагруженного ротора.

Уравнение (5) удобнее представить в виде

$$f_k'' + \Omega_k^2\left(1 - 2\mu\phi(t)\right) f_k = 0 \qquad (6)$$

где $\mu = K_1 \big/ 2\Omega_k^2 m$.

Поскольку уравнение (6) идентично для всех видов и форм колебаний, то в дальнейшем опустим индексы “k”. Уравнение (6) называется уравнением Хилла. Если в частном случае $\phi(t) = \cos\omega t$, то (6) превратится в известное уравнение Матье. В общем случае уравнение (6), обычно, называется уравнением Матье–Хилла.

Если $f_1(t)$ и $f_2(t)$– линейно-независимые решения уравнения (6), то $f_1(t+T)$ и $T_2(t+T)$ также являются его решениями и могут быть представлены в виде линейной комбинации первоначальных функций [6]

$$f_1(t+T)=a_{11}f_1(t)+a_{12}f_2(t),\quad f_2(t+T)=a_{21}f_1(t)+a_{22}f_2(t) \tag{7}$$

Здесь a_{jk} – некоторые постоянные.

Согласно [6] можно выбрать такие решения $f_{1,2}(t)$, чтобы в преобразованиях (7) побочные коэффициенты обращались в нуль

$$a_{12}=a_{21}=0$$

Преобразования в этом случае примут простейший вид:

$$\left.\begin{aligned} f_1(t+T)=a_{11}f_1(t)=\rho_1 f_1(t)\\ f_2(t+T)=a_{22}f_2(t)=\rho_2 f_2(t)\end{aligned}\right\},\ \text{где}\ \rho_1=a_{11},\ \rho_2=a_{22} \tag{8}$$

Из теории линейных преобразований [7] известно, что любое преобразование типа (7) может быть приведено к простейшему диагональному виду, причем ρ_1 и ρ_2 определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\rho\end{vmatrix}=0 \tag{9}$$

Дифференцируя выражение (7) почленно и снова полагая $t=0$, найдем

$$a_{12}=f_1'(T),\quad a_{22}=f_2'(T) \tag{10}$$

тогда характеристическое уравнение (7) примет вид:

$$\begin{vmatrix} f_1(T)-\rho & f_1'(T)\\ f_2(T) & f_2(T)-\rho\end{vmatrix}=0$$

или, если развернуть, будем иметь

$$\rho^2-2A\rho+B=0 \tag{11}$$

где $A=\dfrac{1}{2}\left[f_1(T)+f_2'(T)\right],\quad B=f_1(T)\cdot f_2'({}_1T)-f_2(T)\cdot f'(T)$

Поскольку функции $f_{1,2}(t)$ являются решениями уравнения (6), то

$$f_1''+\Omega^2\left[1-2\mu\phi(t)\right]f_1=0\ \text{и}\ f_2''+\Omega^2\left[1-2\mu\phi(t)\right]f_2=0$$

Умножая первое из уравнений на $f_2(t)$, а второе на $f_1(t)$ и вычитая одни из другого, получим $f_1(t)\,f_2''(t)-f_2(t)\cdot f_1''(t)=0$, откуда после интегрирования будем иметь

$$f_1(t)\cdot f_2''(t)-f_2(t)\cdot f_1'(t)=\text{const} \tag{12}$$

Величина, стоящая в левой части уравнения (12), при $t=T$ совпадает со свободным членом уравнения (11).

Для определения постоянной, стоящей в правой части уравнения (12), положим $t=0$. Тогда используя начальные условия, найдем

$$f_1(T)\cdot f_2'(T)-f_2(T)\cdot f_1(T)=1,\ \text{т.е.}\ B=1$$

и характерическое уравнение примет вид

$$\rho^2-2A\rho+1=0,\ \text{очевидно, что}\ \rho_1\cdot\rho_2=1 \tag{13}$$

Среди частных решений уравнения (6) имеются два линейно-независимых решения $f_{1,2}(t)$, удовлетворящие условию (8)

$$f_k(t+T)=\rho_k f_k(t), \qquad (k=1,2)$$

Эти решения могут быть представлены в виде [8]

$$f_k(t)=\chi_k(t)e^{\frac{t}{T}\ln\rho_k}, \qquad (k=1,2) \tag{14}$$

где $\chi_{1,2}(t)$ – некоторые периодические функции периода *T*. Действительно,

$$f_k(t+T)=\chi_k(t)e^{\left(\frac{t}{T}+1\right)\ln\rho_k}=\rho_k f_k(t) \tag{15}$$

Если $|A|=\frac{1}{2}\left[f_1(T)+f_2'(t)\right]>1$, то характеристические корни будут вещественными, причем, одна из них по модулю будет больше единицы. В этом случае общий интеграл уравнения (6) будет неограниченно возрастать со временем.

Если же $\frac{1}{2}A\left[f_1(T)+f_2'(T)\right]<1$, то характеристическое уравнение имеет комплексные корни, и поскольку их произведение равно (1-e), то по модулю они также равны 1.

В случае комплексных корней оно соответствует области ограниченных решений. На границах, отделяющих области ограниченных решений от области неограниченных, должно выполняться условие [8,9]

$$\left|f_1(T)+f_2'(T)\right|=2 \tag{16}$$

Полученным условием можно воспользоваться для определения границ областей динамической неустойчивости. Однако для его составления нужно знать частные решения задачи, по крайней мере, на протяжении первого периода колебаний, что связано с серьезными вычислительными трудностями. Лишь в некоторых частных случаях дифференциальное уравнение типа (6) может быть проинтегрировано в элементарных функциях [9]. Итак, границам, разделяющим области вещественных и комплексных корней, соответствуют кратные корни, причем, как это следует из (13), такими корнями могут быть или $\rho_1=\rho_2=1$, или $\rho_1=\rho_2=-1$.

В первом случае, как видно из (8), решение дифференциального уравнения будет периодическим с периодом T, во втором случае – с периодом $2T$.

Для отыскания условий существования периодических решений можно воспользоваться методом “малого параметра” [8], заимствованного из нелинейной механики, приняв за малый параметр коэффициент $\mu=\frac{k_1}{2\Omega^2\cdot m}$, где k_1 – условная жесткость магнитного поля, которая намного меньше $2m\Omega_k^2$, т.е. $k_1<<2m\Omega^2$.

Тогда решение уравнения $f''+\Omega^2\left[1-2\mu\phi(t)\right]f=0$ можем искать в виде ряда по степеням малого параметра μ:

$$f=f_0+\mu f_1+\mu^2 f_2+\ldots$$

Условие существования периодических решений могут быть получены и без применения метода “малого параметра”.

Факт существования периодических решений и возможность их разложения в ряд Фурье являются заранее известными. Это позволяет искать периодические решения уравнения (6) непосредственно в виде тригонометрических рядов [9].

Периодическое решение с периодом $2T$ ищем в виде:

$$f(t)=\sum_{k=1.35}^{\infty}\left(a_k\sin\frac{k\omega t}{2}+b_k\cos\frac{k\omega}{2}\right) \tag{17}$$

Подставляя (18) в (6), после приравнивания коэффициентов при одинаковых $\sin\frac{k\omega t}{2}$ и $\cos\frac{k\omega t}{2}$ придем к следующей системе линейных однородных алгебраических уравнений относительно a_k и b_k:

$$\left(1+\mu-\frac{\omega^2}{4\Omega^2}\right)a_1-\mu a_3=0,\ \left(1-\frac{k^2\omega^2}{4\Omega^2}\right)a_k-\mu\left(a_{k-2}+a_{k+2}\right)=0,\quad k=3,5,7....$$

$$\left(1-\mu-\frac{\omega^2}{4\Omega^2}\right)b_1-\mu b_3=0,\quad \left(1-\frac{k^2\omega^2}{4\Omega^2}\right)b_k-\mu\left(b_{k-2}+b_{k+2}\right)=0,\qquad k=3,5,7....$$

Известно, что система линейных однородных уравнений имеет отличные от нуля решения только в том случае, если равен нулю определитель, составленный из коэффициентов этой системы.

Т.е. условием существования периодических решений уравнения (6) является равенство нулю определителей полученных систем:

$$\begin{vmatrix} 1-\mu-\frac{\omega^2}{4\Omega^2} & -\mu & 0 & ... \\ -\mu & 1-\frac{9\omega^2}{4\Omega^2} & -\mu & ... \\ 0 & -\mu & 1-\frac{25\omega^2}{4\Omega^2} & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{vmatrix}=0 \tag{18}$$

Это уравнение называется уравнением критических частот. Области неустойчивости, ограниченные периодическими решениями с периодом T, можно получить аналогичным образом [8,9].

Для определения границ главной области неустойчивости следует рассмотреть уравнение (18). Удерживая в нем верхний диагональный элемент – “определитель первого порядка” и приравнивая его к нулю, получим следующую приближенную формулу для границ главной области неустойчивости:

$$\omega^2=4\Omega^2\left(1\pm\mu\right) \tag{19}$$

Подставляя значения Ω и μ, получим

$$\omega^2=\frac{4EI\pi^4k^4\pm 2k_1l^4\left(Ln^4\pi^4-k_1l^4\right)}{ml^4},\quad \left(k=1,2,3,4,...\right) \tag{20}$$

Формула (20) дает те соотношения между частотой возмущения и частотой собственных колебаний ротора в магнитном поле, вблизи которых возможно возникновение неограниченно возрастающих колебаний. Именно около этих соотношений располагаются области динамической неустойчивости ротора.

В соответствии с числом “k”, входящим в формулу (20), различают первую, вторую, третью и т.д. области динамической неустойчивости. Область неустойчивости, лежащая вблизи

$\omega = 2\Omega$, является наиболее опасной и имеет наиболее практическое значение и называется главной областью динамической неустойчивости [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1949. 772с.
2. Фрейзи У. Одностороннее магнитное притяжение в машинах трехфазного тока. //ETZ-A 83. 1962. С.239-303.
3. Тимофеев Ю.К. Расчет высших гармоник на стороне переменного тока в системах ГЭУ двойного рода тока. //Тр. ЦНИИ МФ. 1967. Вып. 76. С.19-26.
4. Джанелидзе Г.Ю. и Радциг М.А. Устойчивость упругих систем. //Прикладная математика и механика. 1940. Т.4. Вып.5-6. 504с.
5. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М.: Гостехиздат, 1948. 305с.
6. Малкин И.Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1949. 287с.
7. Меркин Д.Р. Введение в теории устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304с.
8. Шекян Г.Г. Динамика роторных машин. Ереван: Изд.“Гитутюн”НАН РА, 2004. 33с.
9. Челомей В.Н., Динамическая устойчивость элементов авиационных конструкций. М.: Изд. Аэрофлот, 1939. 458с.

<u>Сведения об авторах</u>

Шекян Гамлет Гургенович
Доктор техн. наук, ведущий науч. сотрудник, профессор,
Институт механики НАН РА
Адрес: 375019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}
Тел.: (+37410) 42-65-08

SURFACE MAGNETOEIASTIC LOVE WAVES IN A LAYERED STRUCTUREWITH AN IZOTROPIC DIELECTRIC SUBSTRATE AND AN IZOTROPIC MAGNETOSTRICTIVE LAYER

Bagdasaryan G.Y., Danoyan Z.N., Atoyan L.H., Garakov V.G.

In this article the existence and the propagation behavior of magneto-elastic Love waves in a layered structure consisting of an isotropic dielectric substrate, an isotropic magnetostrictive layer and a dielectric medium is considered. The mathematical model of the problem is formulated. The dispersion equation for the existence of Love surface waves is obtained with respect to phase velocity. Numerical investigation of the solutions of the dispersion equation is carried out.

1. Introduction

As well known [1-8], surface acoustic wave devices have been widely used in signal transmission, signal processing and information storage applications. The high performance of the devices is related to the magneto-mechanical coupling coefficient, the efficiency of the energy transducer and their working reliability and stability. Transmitting and receiving devices are mainly made from piezoelectric or magnetostrictive materials due to the ease of manufacturing and utilization easiness and their sensitivity. To achieve high performance many such devices adopt layered piezoelectric or magnetostrictive structures consisting of a piezoelectric or magnetosrictive layer and an elastic substrate or an elastic layer and a piezoelectric or magnetosrictive substrate [9-14].

2. The statement of the problem

We consider an isotropic magnetostrictive layer of finite thickness h rigidly linked to the isotropic dielectric half-space substrate. The coordinate system $Ox_1x_2x_3$ is chosen in such way that the Ox_3 axis is directed along the vector intensity of external steady magnetic field $\vec{H}_0$ and the plane $x_2 = 0$ occupies the boundary between the layer and the substrate, and the Ox_2 axis points down into the substrate.

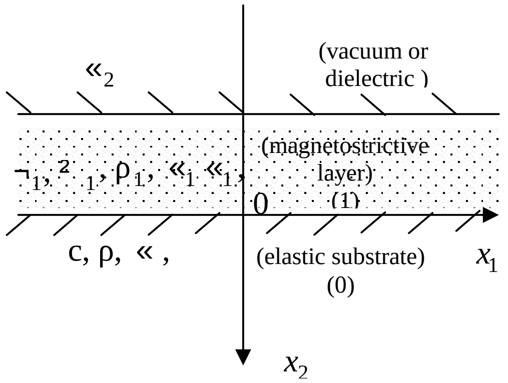


Fig.1

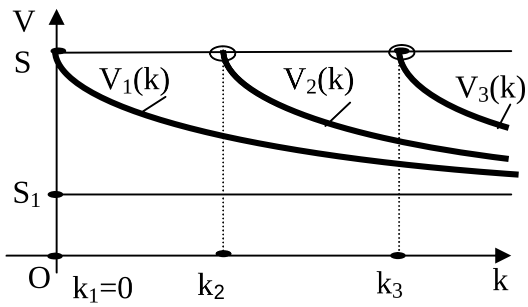


Fig. 2.

The domain $x_2 < -h$ is assumed to be either a vacuum or it is occupied by a dielectric medium without an acoustic contact with the layer. The layer surfaces $x_2 = 0$ and $x_2 = -h$ is magnetically open and the surface $x_2 = -h$ is free of external forces (mechanically free).

We consider an anti-plane problem and assume that shear waves propagate along the positive direction of the Ox_1 axis, and $\vec{H}_0 = \vec{H}_0(0, 0, H_0)$. Then the displacement components $u_i\ (i = 1, 2, 3)$ and magnetic disturbing potential φ representing the motion can be written the following form:

$$u_1 \equiv 0,\ u_2 \equiv 0,\ u_3 = u(x_1, x_2, t),\ -h < x_2 < +\infty,$$
$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, t),\ -\infty < x_2 < +\infty. \tag{2.1}$$

In the case (1.1), according to [8, 14], we get the coupled magnetomechanical field equations for the substrate, layer, and dielectric medium, respectively:

$$\nabla^2 u - S^{-2}\,\partial^2 u/\partial t^2 = 0, \quad \nabla^2 \varphi = 0; \tag{2.2}$$

$$\nabla^2 u_1 - S_1^{-2}\,\partial^2 u_1/\partial t^2 = 0, \quad \nabla^2 \varphi_1' = 0; \tag{2.3}$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0. \tag{2.4}$$

Here the following notations are used:

$$\begin{gathered} S = \sqrt{c/\rho},\ S_1 = \sqrt{\overline{\nu}_1/\rho_1},\ \tau_1 = -\mu_0\chi_1 H_0\left[1 + 0,5\chi_1\left(e_1 - d_1\right)\right], \\ \nu_1 = c_1 + \mu_0\chi_1 H_0^2\left[1 + 1,25\chi_1\left(e_1 - d_1\right) + \left(1 + 0,5\chi_1\left(e_1 - d_1\right)\right)^2\right], \\ \overline{\tau}_1 = \tau_1/\mu_1,\ \mu_1 = \mu_0\mu_{r1},\ \overline{\nu}_1 = \nu_1 + \tau_1\overline{\tau}_1,\ \varphi_1' = \varphi_1 - \overline{\tau}_1 u_1, \end{gathered} \tag{2.5}$$

where $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\,h/m$ is the magnetic constant, u_1, φ_1, $c_1 = c_{44}^{(1)}$, ρ_1, χ_1, μ_1, μ_{r1}, $e_1 = e_{15}^{(1)}$, $d_1 = d_{14}^{(1)}$ are the elastic displacement, the magnetic potential, the shear module, the mass density, the magnetic susceptibility, the magnetic permeability, the magnetic relative permeability and the magnetosrictive constants of the layer, S_1 is the phase velocity of shear bulk waves in the layer, u, φ, $c = c_{44}$, ρ, χ, μ, μ_r, S are the corresponding quantities for the substrate, φ_2, χ_2, μ_2, μ_{r2} are the corresponding quantities for the dielectric medium, ν_1, $\tau_1, \overline{\tau}_1, \varphi_1'$ are supplementary quantities describing by (1.5).

According to the above-mentioned assumptions we shall have the following continuous conditions, boundary conditions and attenuation conditions:

The continuous conditions ($x_2 = 0$):

$$\begin{gathered} u = u_1,\ c\frac{\partial u}{\partial x_2} = \overline{\nu}_1\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \tau_1\frac{\partial \varphi_1'}{\partial x_2}, \\ \varphi = \overline{\tau}_1 u_1 + \varphi_1', \quad \mu\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \mu_1\frac{\partial \varphi_1'}{\partial x_2}. \end{gathered} \tag{2.6}$$

The boundary conditions ($x_2 = -h$):

$$\begin{gathered} \overline{\nu}_1\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \tau_1\frac{\partial \varphi_1'}{\partial x_2} = 0, \\ \overline{\tau}_1 u_1 + \varphi_1' = \varphi_2,\ \mu_1\frac{\partial \varphi_1'}{\partial x_2} = \mu_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}. \end{gathered} \tag{2.7}$$

The attenuation conditions ($x_2 \to \pm\infty$):

$$\begin{gathered} u \to 0,\ \varphi \to 0 \text{ at } x_2 \to +\infty, \\ \varphi_2 \to 0 \text{ at } x_2 \to -\infty \end{gathered} \tag{2.8}$$

3. Solution of the problem: The dispersion equation of the surface Love waves.

Solutions of the boundary problem (2.2)-(2.4), (2.6)-(2.8) are assumed as plane harmonic waves propagating in Ox_1 direction:

$$\begin{gathered} u = U\left(x_2\right)\exp i\left(px_1 - \omega t\right),\ -h < x_2 < +\infty, \\ \varphi = \Phi\left(x_2\right)\exp i\left(px_1 - \omega t\right),\ -\infty < x_2 < +\infty, \end{gathered} \tag{3.1}$$

Where ω is the frequency, p is the wave number, $U(x_2)$, $\Phi(x_2)$ are unknown functions (amplitudes) of the displacement and the magnetic potential satisfying the attenuation conditions:

$$U(x_2) \to 0, \text{ at } x_2 \to +\infty; \ \Phi(x_2) \to 0, \text{ at } x_2 \to \pm\infty \tag{3.2}$$

We assume that $\omega > 0,\ p > 0$. Then the phase velocity of surface waves will be:

$$V = \omega/p. \tag{3.3}$$

Substituting the functions (3.1) into the equations (2.2)-(2.4) and satisfying the attenuation conditions (3.2) we obtain the following solutions:

At $x_2 > 0$:

$$\begin{aligned} u &= U_0 \exp\left[-p\beta(V)x_2\right]\exp i(px_1 - \omega t), \\ \varphi &= \Phi_0 \exp(-px_2)\exp i(px_1 - \omega t); \end{aligned} \tag{3.4}$$

At $-h < x_2 < 0$:

$$\begin{aligned} u_1 &= \left\{U_{10}^{+} \exp\left[ip\beta_1(V)x_2\right] + U_{10}^{-}\exp\left[-ip\beta_1(V)x_2\right]\right\}\exp i(px_1 - \omega t), \\ \varphi_1 &= \bar{\tau}_1 u_1 + \varphi_1',\ \varphi_1' = \left[\Phi_{10}^{+}\exp(px_2) + \Phi_{10}^{-}\exp(-px_2)\right]\exp i(px_1 - \omega t); \end{aligned} \tag{3.5}$$

At $-\infty < x_2 < -h$:

$$\varphi_2 = \Phi_{20}\exp(px_2)\exp i(px_1 - \omega t) \tag{3.6}$$

Here $U_0, \Phi_0, U_{10}^{+}, U_{10}^{-}, \Phi_{10}^{+}, \Phi_{10}^{-}, \Phi_{20}$ are arbitrary constants (also called amplitudes), $\beta(V),\ \beta_1(V)$ are attenuation coefficients determining by equations:

$$\beta(V) = \sqrt{1 - (V/S)^2},\ \beta_1(V) = \sqrt{(V/S_1)^2 - 1}. \tag{3.7}$$

From the attenuation condition (3.2) for $x_2 \to +\infty$, it follows that $\beta(V)$ is positive and therefore the necessary condition fore a surface wave to exist is

$$0 < V < S. \tag{3.8}$$

The quantity $\beta_1(V)$ can be both real and imaginary. If it is real it should be positive, which gives $V > S_1$. In this case partial homogeneous elastic waves propagate through the layer creating Love waves of classical Love type. If $\beta_1(V)$ is imaginary, then $V < S_1$. In this case partial inhomogeneous magneto-elastic waves propagate through the layer creating Love waves of so-called gap type.

Substituting expressions (3.4)-(3.6) into boundary conditions (2.6), (2.7) we get a homogeneous system of algebraic equations for the unknown $U_0, \Phi_0, U_{10}^{+}, U_{10}^{-}, \Phi_{10}^{+}, \Phi_{10}^{-}, \Phi_{20}$ amplitudes.

To obtain the nontrivial solutions for $U_0, \Phi_0, U_{10}^{+}, U_{10}^{-}, \Phi_{10}^{+}, \Phi_{10}^{-}, \Phi_{20}$, the determinant of the coefficient matrix of equations (2.6), (2.7) have to equal zero, i.e.:

$$A(k,V)\sin k\beta_1(V) + B(k,V)\cos k\beta_1(V) = C(k,V), \tag{3.9}$$

Where

$$\begin{aligned} A(k,V) &= \left[\mu\mu_2\tau_1\bar{\tau}_1 c\beta(V) + \mu_1(\mu_1 + \mu_2)\bar{\nu}_1^2\beta_1^2(V)\right]\mathrm{ch}k + \\ &+ \left[\bar{\nu}_1^2\beta_1^2(V)\left(\mu\mu_2 + \mu_1^2\right) - \tau_1\bar{\tau}_1\mu_2\left(\tau_1\bar{\tau}_1\mu - \mu_1 c\beta(V)\right)\right]\mathrm{sh}k, \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$B(k,V)=\bar{\nu}_1\beta_1(V)\left[2\mu\mu_2\tau_1\bar{\tau}_1-\mu_1(\mu+\mu_2)c\beta(V)\right]\mathrm{ch}k+$$
$$+\bar{\nu}_1\beta_1(V)\left[\tau_1\bar{\tau}_1\mu_1(\mu_2+\mu)-(\mu_2\mu+\mu_1^2)c\beta(V)\right]\mathrm{sh}k,$$
$$C(k,V)=2\mu\mu_2\tau_1\bar{\tau}_1\bar{\nu}_1\beta_1(V).$$

Consider a particular case of the problem, when the inducting magnetic field do not penetrates from the layer to both the substrate and the dielectric medium. In this case, we can obtain the following dispersive equation from (3.9)-(3.10) accepting there $\mu_2=\mu=1,\ \mu_1=0$:

$$\begin{aligned}&A(k,V)\sin k\beta_1(V)+B(k,V)\cos k\beta_1(V)=C(k,V),\\&A(k,V)=\mu\mu_2\tau_1\bar{\tau}_1c\beta(V)\mathrm{ch}k+\left[\bar{\nu}_1^2\beta_1^2(V)-\tau_1^2\bar{\tau}_1^2\right]\mathrm{sh}k,\\&B(k,V)=2\tau_1\bar{\tau}_1\bar{\nu}_1\beta_1(V)\mathrm{ch}k-\bar{\nu}_1c\beta_1(V)\beta(V)\mathrm{sh}k,\\&C(k,V)=2\tau_1\bar{\tau}_1\bar{\nu}_1\beta_1(V).\end{aligned}\tag{3.11}$$

Let's underline, that the equations (3.11) are compared with the equations (5.7.25)-(5.7.26) in the book [8], if we put in (3.11) the following notations: $\tau_1=e_1,\mu_1=\varepsilon_1,\bar{\tau}_1=\bar{e}_1,\nu_1=c_1,\bar{\nu}_1=\bar{c}_1$.

It follows, in this particular case we can say that the propagation behaviors magnetoelastic and electroelastic Love's waves are identical and compared with the behavior of the classical elastic Love's waves, when $S_1<S$. Thus, in this case the dispersion curves are shown in Fig. 2.

The investigation of the general case of this problem and the similarly case the piezoelectric wave problem will be treated separately.

References

1. Dieulesaint E., Royer D. Elastic waves in solids. Applications to signal processing. John wiley & sons, Paris, 1980.
2. Maugin G.A. Continuum mechanics of electromagnetic solids. North-Holland, Amsterdam, 1988.
3. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. Electromagnetoelasticity of piezoelectrics and electrically conductive solids. Gordon & Breach, New York, 1988.
4. Viktorov I.A. Surface waves in solids. Moscow, Nauka, 1981 (in Russian).
5. Balakirev M.K., Gilinskii I.A. Waves in piezocriystals. Novosibirsk, Nauka, 1982 (in Russian).
6. Miklowitz J. Elastic waves and waveguides. North-Holland, Amsterdam, 1984.
7. Morgan D.P. History of SAW devices. In: 1998 IEEE, international frequency control symposium proceedings, pp. 439-460.
8. Bagdasaryan G.Y., Danoyan Z.N. Electromagnetoelastic waves. Yerevan, 2006 (in Russian).
9. Curtis R.G., Redwood M. Transverse surface waves on a piezoelectric material carrying a metal layer of finite thickness. J. Appl. Phys. 44 (5), 2002-2007.
10. Z.N. Danoyan, N.Z. Danoyan, G.A. Manukyan. The surface electroelastic Love's waves in a layered system with a piezoelectric substrate and soft dielectric isotropic layer. Izv. NASA, Mechanics, vol.59, №2, 2006, pp.43-56(in Russian).
11. Danoyan Z.N., Piliposyan G.T.. Surface electro-elastic Love waves in a layered structure with a piezoelectric substrate and a dielectric layer. Inter. Journal of solids and structures. 2007 (in print).
12. Avetisyan A S. Surface shear waves in a piezoelectric half-space with a dielectric layer. Third International symposium: "Theoretical problems of magnetoelastisity". Yerevan, 1984, pp. 7-10 (in Russian).
13. Bagdasaryan G. Y., Danoyan Z. N., Garakov V. G. Propagation of shear magnetoelastic waves in a piezomagnetic anisotropic half-space. Third International symposium: "Theoretical problems of magnetoelastisity". Yerevan, 1984, pp. 92-96 (in Russian).
14. Bagdasaryan G. Y., Danoyan Z. N., Sanoyan L. A. Love's waves in magnetostrictive mediums. Izv. NASA, Mechanics, vol.42, №5, 1989, pp.3-9 (in Russian).

Information about authors

Gevorg Ye. Bagdasaryan_
Academician of NAS RA
Address: Armenia,Yerevan, Marshal Baghramyan 24b
Phone: (+37410) 56-21-43; E-mail: mechins@sci.am

Zaven N. Danoyan
Doctor of Sciences, Head of the Section of Dynamics of Deformable Systems and Connected Fields
Address: Armenia,Yerevan, Marshal Baghramyan 24b
Phone: (+37410) 56-21-43; E-mail: mechins@sci.am

Levon H. Atoyan
Candidate of science, Scientific worker
Address: Armenia,Yerevan, Marshal Baghramyan 24b
Phone: (+37410) 56-21-43; E-mail: mechins@sci.am

Vladimir G. Garakov
Scientific worker
Address: Armenia,Yerevan, Marshal Baghramyan 24b
Phone: (+37410) 56-21-43; E-mail: mechins@sci.am

THE ANALYTIC AND NUMERICAL SOLUTION OF SECOND, THIRTH, FOURTH AND SIXTH ORDER WIENNER-HOPF SYSTEM FOR MIXED BOUNDARY ELASTICITY DYNAMIC PROBLEMS

Bagdoev A.G., Martirosyan A.N., Dinunts A.S., Kostandyan K.S.

The solution of unsteady problem of horizontal displacements given on boundary of half space along the half plane, when on remainder of boundary plane stresses are equal to zero, and along of whole boundary normal stresses are zero, by method of integral transformations and Hilbert problem solution is obtained analytically and numerically in [1].

The plane problem of smooth punch is solved in [2]. In paper [1] is used method of reducing of homogeneous Hilbert problem or, which is the same, problem of matrix factorization, to system of two integral Fredholm equations [3], and in [1] factorized matrix is continuous along whole real axis, which brings to known singularity of solution [2] near edge $x=0$. The periodic in time mixed problem of finite crack bounded by elastic halfplanes on upper bank of which are equal to zero stresses and on lower one are given displacements by method of solving of system of singular integral equations for originals is investigated analytically in [6].

In present paper the unsteady space and plane problems of punches, applied correspondingly along boundary of halfspace namely halfplane $z=0,(x,y),\ x>0$ and along halfdirect $x>0$, when on remainder part of surfaces of halfspace or halfplane correspondingly stresses are equal to zero, as well as unsteady space, plane and antiplane mixed boundary problems of semiinfinite crack in form of halfplane $z=0,\ (x,y),\ x>0$ or halfdirect $y=0,\ x>0$ respectively, bounded by elastic halfspaces, when upper banks of cracks are free from stresses, and on lower banks are given vertical displacements, by using of method [1] are considered.

In contrast to [1] the matrices of Wienner-Hopf equations of mentioned problems of sixth, fourth, thirth and second orders respectively, obtained by method of Laplace and Fourier transforms from boundary conditions are discontinuous at infinity and is carried out improvement of it by the methods similar to [2,3]. Then the solutions for all real axis α is brought to Wienner-Hopf system with continuous matrix which solution is lead to solution of sixth, fourth, thirth and second order Fredholm integral equations. They are solved numerically for all mentioned cases.

The inverse integral transformations bring solution for stresses under punches and on lower bank of cracks to Smirnov-Sobolev form. The stress intensity coefficients integrals are calculated.

Since all mentioned problems are solved by the same methods let us bounded by unsteady space problem of punch.

The problem of motion of isotrop elastic halfspace $z\geq 0$, when on boundary $z=0$ along halfplane $x>0$ are given displacements $u_{1,2,3},\ x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z,$, and out of it boundary is free from stresses is solved.

The elasticity equations of Lame yield

$$\left(a^2-b^2\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+b^2\Delta u_j=\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \tag{1}$$

where on repeated indexes is summation from 1 to 3, Δ is Laplace operator, a and b longitudinal and transverse elastic speeds.

Boundary conditions have form $\left(z=0,\ |y|<a\right)$,

$$\sigma_{zz}=0,\ \sigma_{xz}=0,\ \sigma_{yz}=0,\quad -\infty<x<0, \tag{2}$$

$$u_{1,2,3}=-\left(P,Q,R\right)\delta\left(x-\xi'\right)\delta\left(y-\eta'\right)H\left(t\right),\quad 0<x<\infty \tag{3}$$

where $\delta\left(x\right)$ is delta-function of Dirac, $H\left(t\right)$ –unit function of Heaviside, P,Q,R,ξ',η' are constants.

Posed problem is the problem of determination of Green function, from solution of which one can obtain solution for arbitrary boundary conditions $u_{1,2,3}$ in (3) by convolution (1).

Besides are solved the boundary problems for punches, when instead of (3) are given constants displacements along semistrip [6] or rectangle. The factorization of matrices on all solution procedure for mentioned conditions (3) are identical.

For Laplace transform $\bar{U}_j$ on t from U_j, one can look for solution of (1) in form

$$\bar{U}_j = \sum_1^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\bar{U}}_j^{(n)}(\alpha,\beta)\exp\left(\alpha ix + \beta iy + \bar{\gamma}_n iz\right)d\alpha d\beta,$$
$$\bar{\gamma}_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_n^2} - \alpha^2 - \beta^2},\ c_1 = a,\ c_2 = b,\ s = -u\omega, \tag{4}$$

where s is parameter of Laplace transformation.

Placing (4) in (2), (3), and inverting Fourier transformations one can obtain for functions

$$U_{1,2,3}^{+} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{0} dx \int_0^{\infty} e^{st - i\alpha x - i\beta y} U_{1,2,3}(t,x,y,0)\,dt,$$
$$\sigma_{xz,yz,zz}^{-} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{0} dx \int_0^{\infty} e^{st - i\alpha x - i\beta y} \sigma_{xz,yz,zz}(t,x,y,0)\,dt \tag{5}$$

which are analytic in upper and lower halfplanes α, thirth order Wienner-Hopf system, which in dimensionless variables

$$\alpha = \frac{\omega}{a}\eta,\ \beta = \frac{\omega}{a}\lambda,\ \bar{\gamma}_{1,2} = \frac{\omega}{a}\gamma_{1,2},$$

in the matrix form is

$$A\Phi^{+} + B\Phi^{-} + C = 0 \tag{6}$$

$$\Phi^{+} = \gamma^{+}\begin{pmatrix} U_1^{+} \\ U_2^{+} \\ U_3^{+} \end{pmatrix},\quad \Phi^{-} = \frac{ia}{b^2\rho\omega\gamma^{-}}\begin{pmatrix} \sigma_{yz}^{-} \\ \sigma_{xz}^{-} \\ \sigma_{zz}^{-} \end{pmatrix},\quad \gamma^{\pm}(\eta) = \sqrt{\sqrt{1-\lambda^2} \pm \eta}, \tag{7}$$

The obtained A matrix is discontinuous at $\eta = \pm\infty$.

One can write system (6) for $|\eta| \approx \infty$, obtain from them two homogenuous equations with $v_{1,3}^{+}, \sigma_{xz}^{-}, \sigma_{zz}^{-}$, introduce new functions

$$v_{1,2}^{+} = \left(U_1^{+} \pm iU_3^{+}\right)\gamma^{+},\qquad \bar{\Lambda}_{1,2} = \frac{\sigma_{xz}^{-} \pm i\sigma_{zz}^{-}}{2b^2 i\rho\gamma^{-}}\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \tag{8}$$

for which are obtained scalar separated equations. To avoid discontinuity in their coefficients, one must introduce new functions

$$v_1^{+} = \tilde{\Phi}^{+}\left(\gamma^{+}\right)^{-2is_2},\qquad v_2^{+} = \tilde{\Psi}^{+}\left(\gamma^{+}\right)^{2is_2}, \tag{9}$$

$$\bar{\Lambda}_1^{-} = \bar{\Lambda}_3^{-}\left(\gamma^{-}\right)^{-2is_2},\qquad \bar{\Lambda}_2^{-} = \bar{\Lambda}_4^{-}\left(\gamma^{-}\right)^{2is_2}, \tag{10}$$

Choosing

$$s_2 = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \tag{11}$$

one can show, that obtained equations for $\tilde{\Phi}^{+}, \tilde{\Psi}^{+}, \Lambda_{3,4}^{-}$ have continuous coefficients. Then for these functions for all η system of Wienner-Hopf (6), (7) can be brought to corresponding one:

$$A_1\Phi_1^{+} + B_1\Phi_1^{-} + C_1 = 0 \tag{12}$$

$$\Phi_1^+ = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}^+ \\ \tilde{\Psi}^+ \\ \bar{U}_2^+ \gamma^+ \end{pmatrix}, \quad \Phi_1^- = \begin{pmatrix} \Lambda_3^- \\ \Lambda_4^- \\ \dfrac{\sigma_{yz}^-}{b^2 i \rho \gamma^-} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

where matrices $A_1 = (a_{ij}),\ B_1 = (b_{ij}), i, j = 1,2,3$ and their coefficients are continuous, expressed by $A, B;\ C_1$ is expressed by C .

System (12), as in [1], can be brought to Hilbert problem

$$\Phi_1^+ = G\Phi^- + g,\ G = -A_1^{-1}B_1,\ g = -A_1^- C_1 \tag{14}$$

with continuous matrix $G(\eta)$ on the η real axis.

Solution of (14) is [3]

$$\Phi_1(\eta) = \frac{X(\eta)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{X^+(\xi)\right\}^{-1} \frac{g(\xi)}{\xi - \eta} d\xi \tag{15}$$

where matrices $X^{\pm}(\eta)$ satisfy to homogeneous Hilbert problem $X^+ = GX^-$ and, as it is shown in [3-5] for X^- can be obtained Fredholm integral equations system

$$X^-(\eta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G^{-1}(\eta)G(\xi) - E}{\xi - \eta} X^-(\xi) d\xi = \gamma(\eta) \tag{16}$$

where $\gamma(\eta)$ represents behavior of $X^-(\eta)$ on infinity, and as can be shown for $|\eta| \approx \infty,\ G(\eta) = \text{const}$, one can believe that also $X^{\pm}(\eta)$ are constants, and $\gamma(\eta) = E$.

The inverse integral transformations of Laplace on t and Fourier on x, y bring solution for stresses under punch, i.e. for $z = 0, x > 0$ in Smirnov-Sobolev form. Near edge $x \approx 0$ one obtains solution

$$\frac{a}{b^2\rho} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{zz} \\ \dfrac{2}{\dfrac{b_2}{a^2}+1}\sigma_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi^3} \frac{1}{\dfrac{b^2}{a^2}+1} \operatorname{Re} \begin{pmatrix} \left(\dfrac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}+is_2} iI_1 + \left(\dfrac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}-is_2} iI_2 \\ \left(\dfrac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}+is_2} I_1 - \left(\dfrac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}-is_2} I_2 \\ \left(\dfrac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} iI_3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

where, due to convergence of integrals in previous solution for arbitrary $x > 0$, one can approximate by replace integrations limits $-\infty, \infty$ by $(-5, 5)$ and write

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= i^{\mp 2is_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-5}^{5} d\lambda \int_{-5}^{5} d\xi \left(t - \frac{y-\eta'}{a} + \frac{\xi'}{a}\xi\right)^{\frac{1}{2}\mp is_2} \tilde{\Lambda}_{3,4}^-, \\ I_3 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-5}^{5} d\lambda \int_{-5}^{5} d\xi \left(t - \frac{y-\eta'}{a} + \frac{\xi'}{a}\xi\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\tilde{\sigma}_{yz}^-}{b^2 i \rho \bar{\gamma}}, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_3^- \\ \tilde{\Lambda}_4^- \\ \dfrac{\tilde{\sigma}_{yz}^-}{b^2 i\rho\gamma^-} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi^2}\left\{ X^+(\xi)^{-1}\gamma^+(\xi)\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}\right\},$$

and coefficients of P, Q, R in $I_{1,2,3}$ can be calculated by numerical solution of (16), where aknew are taken integration limits $(-5,5)$, furthermore obtain X^+ and stresses intensities coefficients by (17), (18).

For values $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$, $y=0$, $t=0,1$; $\frac{\xi'}{at}=0,2$; $\frac{\eta'}{at}=0,2$; results of calculations are given in table

	P	Q	R
I_1	$-11384-37286i$	$-54104-91406i$	$-1593+654i$
I_2	$-104+120i$	$-2964+31720i$	$-69+27i$
I_3	$-13757+4988i$	$-1187-1608i$	$84065+5086i$

The same calculations are carried out for same problem of punch in form of rectangle or semi strip, in which are given constant displacements, and for other mentioned problems of punch and cracks.

REFERENCES

1. Bagdoev A.G., Martirosyan A.N., Martirosyan H.A., Pogosyan S.M. Solution of mixed dynamic problem on displacements given on boundary of elastic halfspace // Izvestia of Russian Academy of Sciences, Mechanica tvyordogo tela. N1. 2007. p.67-74.
2. Hakobyan V.N., Sahakyan A.V., Sargsyan A.H. The plane deformation state of elastic plane with finite rigid inclusion under harmonic load. // V International conference. The problems of dynamics of interaction of deformable media. Goris. 2005. p.61-65.
3. Vekua N.P. Systems of singular integral equations. M.: “Nauka”. 1970. 370p.
4. Plemelj J. Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe // Monatsch. Fur Math. und Phzs. XIX. 1908. p.211-245.
5. Hilbert D. Grundzuge der Integralgluchungen // Drittles Abschuft. 1912. Leipzig-Berlin.
6. Bagdoev A.G., Martirosyan A.N. Analytical and numerical solution on mixed dynamic boundary value problem for elastic halfspace. // In collection “Modern Problems of deformable bodies Mechanics” Yerevan. 2005. p.54-60.

Information about authors

Alexander G. Bagdoev
Corresponding-member NAS RA,
Institute of Mechanics NAS Armenia, chief sci.researcher
E-mail: bagdoev@mechins.sci.am

A.N. Martirosyan
Doctor of Sciences, chief of High Math. Dept. of Goris State University

A.S. Dinunts
Lecturer of High Math. Depart. of Goris State University

K.S. Kostandyan
Master’s Degree of High Math. Dept. of Stepanakert State University

NONCONSERVATIVE PROBLEMS OF STABILITY OF PLATES WITH HINGED TWO OPPOSITE EDGES

Belubekyan V.M , Belubekyan M.V.

Numerous papers consider stability of a rod under follower force. However, only few contributions are available on stability of rectangular plates under follower forces [1][2]. In the present paper a rectangular plate is considered, such that two opposite edges are hinged, and two others are free, loaded with follower forces. The problem is split into determination of symmetric and anti-symmetric shape of loss of stability. For symmetric shape, critical loads are determined using both static problem statement and dynamic problem statement, based on model suggested by Bolotin V.V. [3]. It is shown, that if the plate is narrow enough in the direction of loading forces, the critical loads of dynamic problems (flatter critical loads) are significantly smaller than critical loads of static problems (buckling critical load).

Let a rectangular plate in Cartesian coordinates to be defined by a domain:
$-0.5a \le x \le 0.5a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. The plate is uniformly compressed along the edges $x = \pm 0.5a$ with a constant load P. The stability equation in the frame of Kirchhoff's bending theory will be [4]:

$$D\Delta^2 w + P\partial^2 w/\partial x^2 = 0, \quad D = \frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)} \tag{1.1}$$

where w is the deflection, D flexural stiffness, E Young modulus, ν – Poisson ratio. The $y = 0, b$ edges of the plate are hinged. If on the edges $x = \pm 0.5a$ symmetric boundary conditions take place, then the problem of stability is split into two problems: buckling with odd and buckling with even shape.
The even shape of buckling, satisfying equation (1.1) and the boundary conditions at y=0,b is obtained as follows:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} \lambda_n p_1 x + B_n \operatorname{ch} \lambda_n p_2 x) \sin \lambda_n \tag{1.2}$$

Where the following notations are used

$$p_{1,2} = \sqrt{1-\frac{\eta_n^2}{4}} \pm i\frac{\eta_n}{2}, \quad \eta_n^2 = \left(\lambda_n^2 D\right)^{-1} P \ , \quad \lambda_n = n\pi/6 \tag{1.3}$$

In the (1.2) the undefined constants A_n , B_n , must be determined from boundary conditions at $x = \pm 0.5a$.
The problem of odd buckling shape was considered in [5].
It is assumed that edges $x = \pm 0.5a$ are free and the compressive load P is a follower load. The boundary conditions in this case will be [3]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(2-\nu\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{at } x = \pm 0{,}5a \tag{1.4}$$

Substitution of the symmetric solution (1.2) into boundary conditions (1.4) at $x = \pm 0.5a$ yields to following system of linear algebraic equations with respect of undefined constants A_n, B_n

$$\begin{aligned} &\left(p_1^2 - \nu\right) \operatorname{ch} p_1\zeta_n \ A_n - \left(p_2^2 - \nu\right) \operatorname{ch} p_2\zeta_n \ B_n = 0 \\ &p_1\left(p_1^2 - 2 + \nu\right) \operatorname{sh} p_1\zeta_n A_n + p_2\left(p_2^2 - 2 + \nu\right) \operatorname{sh} p_2\zeta_n B_n = 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Requiring the determinant of this system to be zero, we obtain the following equation for the critical load:

$$L\left(\eta_n\right) \equiv p_2\left(p_1^2 - \nu\right)\left(p_2^2 - 2 + \nu\right) \operatorname{th} p_2\zeta_n - p_1\left(p_2^2 - \nu\right)\left(p_1^2 - 2 + \nu\right) \operatorname{th} p_1\zeta_n = 0 \tag{1.6}$$

2. In the case when plate is elongated along the x axis (ξ_n << 1), the equation (1.6) can be reduced to the form:

$$L\left(\eta_n\right) \approx \left(p_2 - p_1\right) L_1\left(\eta_n\right) = 0 \tag{2.1}$$

where

$$L_1\left(\eta_n\right) = p_1^2 p_2^2 + 2\left(1-v\right) p_1 p_2 - v\left(p_1^2 + p_2^2\right) + v\left(2-v\right) \tag{2.2}$$

The equation $L_1\left(\eta_n\right) = 0$, taking into account (1.3) can be reduced to

$$\left(3+v\right)\left(1-v\right) + v\eta_n^2 = 0 \tag{2.3}$$

From (2.3) follows, that the elongated plate under follower load does not have symmetrical shape of buckling for loads such that $0 < \eta_n^2 < 4$. However from (2.3) also follows, that buckling is possible for extending loads $\left(\eta_n^2 < 0\right)$. It is possible to show, that in this case, the extending critical load is significantly greater than critical compressive conservative load.

For plates which are narrow in x direction, it is natural to assume n=1 [4]. In table 1 are provided values of critical loads in cases of conservative vs. follower loads. Calculations of follower critical loads are done for ratio of edges $\zeta_1^2 = 0{,}1$ $\left(b = \sqrt{10}\pi a/2\right)$ using the equation (1.5).

Table1

v / η_1^2	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
(2.23)	1	0,9	0,81	0,71	0,61	0,5
(3.13)	∞	44,7	37,04	34,27	32,79	31,91
(3.3)	104,61	101,05	100,88	100,82	100,79	100,77

3. To investigate the effect of dynamic approach, the idea by Bolotin V.V. is applied. This assumes existence of concentrated mass on the edges $x = \pm 0.5a$ [3]. In this case the boundary conditions are replaced with following:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(2-v\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = \beta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3.1}$$

where $\beta = m/D$, m is concentrated on the edges mass. In this case the (1.2) is replaced by following solution:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(i\omega t)(A_n \operatorname{ch}\lambda_n p_1 x + B_n \operatorname{ch}\lambda_n p_2 x)\sin\lambda_n y \tag{3.2}$$

Substituting (3.2) into boundary conditions (3.1) we obtain following system of homogeneous linear algebraic equations with respect to undefined constants A_n, B_n

$$\begin{gathered}\left(p_1^2 - v\right)\operatorname{ch} p_1\zeta_n A_n + \left(p_2^2 - v\right)\operatorname{ch} p_2\zeta_n B_n = 0 \\ \left[p_1\left(p_1^2 - 2 + v\right)\operatorname{sh} p_1\zeta_n + \beta\omega_n^2 \operatorname{ch} p_1\zeta_n\right]A_n + \left[p_2\left(p_2^2 - 2 + v\right)\operatorname{sh} p_2\zeta_n + \beta\omega_n^2 \operatorname{ch} p_2\zeta_n\right]B_n = 0\end{gathered} \tag{3.3}$$

Equating the determinant of this system to zero, we obtain the eigenfrequencies of the problem ω_n. Under condition $\eta_n^2 > 4$ and introducing notations

$$p_{1,2} = i\,q_{1,2}, \quad q_{1,2} = \sqrt{0{,}25\eta_n^2 - 1} \pm 0{,}5\eta_n \tag{3.4}$$

The expression of frequencies of vibrations yields:

$$\omega_n^2 = \frac{q_2(q_1^2+\nu)(q_2^2+2-\nu)\cos q_1\zeta_n \sin q_2\zeta_n - q_1(q_2^2+\nu)(q_1^2+2-\nu)\sin q_1\zeta_n \cos q_2\zeta_n}{\beta(q_1^2-q_2^2)\cos q_1\zeta_n \sin q_2\zeta_n} \quad (3.5)$$

The condition of nominator being equal to zero in expression (3.5) defines the critical load according to static approach (the buckling loss of stability) , while the condition of denominator of expression (3.5) being zero defines the critical load according to dynamical approach (the critical load of flatter) [3].

Assuming that for narrow plates the minimal critical load will happen under *n=1*, according to (3.5) the flatter instability will appear if the following condition will take place:

$$\cos q_1\zeta_1 = 0 \quad (3.6)$$

From (3.6) for the parameter for critical load we obtain:

$$\eta_{1k} = \frac{(2k-1)\pi}{2\zeta_1} + \frac{2\zeta_1}{(2k-1)\pi} \quad (3.7)$$

And consequently

$$\min_k \eta_{1k} = \frac{\pi}{2\zeta_1} + \frac{2\zeta_1}{\pi} \quad (3.8)$$

From (3.8) in particular follows, that under $\zeta_1^2 = 0{,}1$ the critical load parameter will be $\eta_1^2 \approx 26{,}73$. Comparing this with critical load from table 1 yields to a conclusion, that for narrow plates the flatter critical loads are significantly less than the buckling loads. In the same time, the flatter critical loads in problems with follower loads are significantly greater, than the critical loads in conservative case.

This contribution was provided within the INTAS grant 8886.

References:

1. Langthjem M.A. Dynamic Stability of Columns Subjected to Follow Loads: A Survey.// Journal of Sound and Vibration. 2000. 238 (5). P. 809-851.
2. Belubekyan V.M., Belubekyan M.V. Nonconservative Stability problems for axially compressed rectangular plate. “Physics and Control” Intern. Conf. Saint Peterburg, Russia, 2003. p 1070-1073.
3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Госизд. Физ-мат лит. 1961. 340 с.
4. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
5. Арутюнян И.Р., Белубекян М.В. Две задачи устойчивости прямоугольной пластинки./ В сб: “Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем” Ереван, 1997. С. 86-88.

Information about authors

Belubekyan V.M.
Yerevan State University, Doctor of sciences
Address: Armenia, Yerevan, M.Baghramyan ave. 24b
Phone: 52-15-03
E-mail: vbelu@excite.com

Belubekyan M.V.
Institute of mechanics NAS RA
Leading scientific researcher, Doctor of sciences,
Address: Armenia, Yerevan, M.Baghramyan ave. 24b
Phone: 52-15-03
E-mail: mbelubekyan@sci.am

USING LAWS OF THERMODYNAMICS FOR DERIVING DYNAMIC BOUNDARY VALUE PROBLEM AND HEAT CONDUCTION EQUATION OF AGEING PIEZOTHERMOELASTIC MATERIALS

Belyaev A.K., Muzaev A.A.

It is shown that the constitutive equations, dynamical boundary value problem and the heat conduction equation for simple piezoelectric materials with time-dependent properties can be derived directly from the first and second laws of thermodynamics.

Introduction. The basic laws of thermomechanics include the equations of motion in terms of balances of momentum and moment of momentum, state equations and the two laws of thermodynamics. The intent of the present paper is to show that the dynamic boundary value problem, state equations and the heat conduction equation for simple polarised thermoelastic materials are directly derived from the first and second laws of thermodynamics.

Basic equations for the time-dependent polarised thermoelastic material. For a polarised thermoelastic material the state equations for the Cauchy stress tensor $\boldsymbol{\tau}$, the heat flux vector **h**, the free energy *F*, the entropy *S* and the electromotive intensity $\mathbf{E}_*$ are functions of the following "defining arguments": **r** and **R** are the referential and spatial coordinates, θ and $\nabla\theta$ are the temperature are the temperature gradient (∇ and $\overset{\circ}{\nabla}$ are the Hamilton operators in the actual and reference configuration), **P** is the polarisation vector. $\mathfrak{R}$ is an orthogonal tensor accompanying deformation and *t* is time. cf. [1],[2]. The principle of material frame-indifference requires that the scalars are invariant under change of frame, e.g. $F(\nabla\mathbf{r},\mathbf{P}) = F(\mathbf{Q}\cdot\nabla\mathbf{r},\mathbf{Q}\cdot\mathbf{P})$ for any orthogonal tensor **Q**. For example, we can take $\mathbf{Q} = \mathbf{G}^{-1/2}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$, where **G** is the Cauchy-Green measure. Introducing the material measure of polarisation **p** as follows $\rho\mathbf{p} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\mathbf{P}$ (ρ is the mass density), we suggest another set of the defining parameters: $\mathbf{r},\mathbf{R},\theta,\nabla\theta,\mathbf{G},\mathfrak{R},\mathbf{p},t$. The explicit dependence of the state equations upon time *t* allows one to consider the materials with time-dependent properties.

The first and second laws of thermodynamics of polarised thermoelastic media. We consider a material volume *V* with surface *B* and assume that the part of the surface B_1 is at rest while the other part B_2 is subjected to an external force **F**. An integral form of the first law of thermodynamics of polarised thermoelastic media is

$$\frac{d}{dt}\left(T+\int_V u\,dV+\int_V u_e\,dV\right)-\int_V \rho\mathbf{K}\cdot\mathbf{v}\,dV-\int_B \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\,dB = \int_B \mathbf{N}\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}+\mathbf{v}u_e\right)dB+\int_V b\,dV-\int_B \mathbf{N}\cdot\mathbf{h}\,dB \tag{1}$$

Here **K** is the body force vector per unit mass, **N** is the external normal to *B*, and *b* is the specific supply of heat working. Further, *T* denotes the kinetic energy, *u* and $u_e = 0,5\left(\varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}+\mu_0\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}\right)$ denote the specific internal and electromagnetic energy. Here **E** and **H** are electric and magnetic fields, respectively, ε_0 and μ_0 are the dielectric constant and permeability in vacuum, respectively. The quantity $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ is known as the Poynting vector, cf. [2]. The scalar $\mathbf{N}\cdot\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ describes the flux of the electromagnetic energy through the surface *B* in the surrounding space while the scalar $\mathbf{N}\cdot\mathbf{v}u_e$ represents the influx of the electromagnetic energy due to the motion of the body through the external electromagnetic field.

Calculating the time flux of the electromagnetic energy for polarised but not magnetised piezoelectric materials (electric insulators) and taking into account of Maxwell equations yields another integral form of the first law

$$\frac{d}{dt}\left(T+\int_V u dV\right)-\int_V \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}dV-\int_V \rho\mathbf{K}\cdot\mathbf{v}dV-\int_B \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}dB=\int_V b dV-\int_B \mathbf{N}\cdot\mathbf{h}dB . \tag{2}$$

Another form of the first law is the local (differential) form, cf. [2]

$$\rho\dot{u}-\boldsymbol{\tau}:\mathbf{D}-\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{f}_L\cdot\mathbf{v}+\nabla\cdot\mathbf{h}-b=0 , \tag{3}$$

where **D** is the tensor of strain rate, **j** is the electric current density and $\mathbf{f}_L$ is the Lorentz force acting on the mass unit. Eqn (3) is proved to be rewritten in the form

$$\rho\dot{u}-\boldsymbol{\tau}:\mathbf{D}-\mathbf{P}^*\cdot\mathbf{E}_*+\nabla\cdot\mathbf{h}-b=0 , \tag{4}$$

where $\mathbf{P}^*=\partial\mathbf{P}/\partial t+\mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{P})+\nabla\times(\mathbf{P}\times\mathbf{v})$ is the Jaumann-Noll objective derivative (Jaumann-Noll rate) of the vector **P**.

In continuum mechanics the second law of thermodynamics is taken in the form of the Clausius-Duhem inequality, Refs. [1], [2]

$$\int_V \rho\dot{s}dV \geq \int_V \frac{b}{\theta}dV-\int_B \frac{\mathbf{N}\cdot\mathbf{h}}{\theta}dB . \tag{5}$$

After transforming the surface integral into a volume integral, one obtains the differential form of the second law of thermodynamics

$$\rho\dot{s}-\frac{b-\nabla\cdot\mathbf{h}}{\theta}-\frac{\mathbf{h}\cdot\nabla\theta}{\theta^2}\geq 0 . \tag{6}$$

Another form of the second law of thermodynamics is the dissipative inequality obtained by removing thermal terms from eqn (4) and substituting into eqn (6)

$$\boldsymbol{\tau}:\mathbf{D}+\mathbf{P}^*\cdot\mathbf{E}_*+\rho\dot{f}-\rho s\dot{\theta}-\frac{\mathbf{h}\cdot\nabla\theta}{\theta}\geq 0 . \tag{7}$$

Constitutive equations for piezothermoelastic material. Substituting general form of the constitutive equations into eqn (7) leads to the following inequality

$$\left(\boldsymbol{\tau}-2\rho\left(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\right)^T\cdot\frac{\partial f}{\partial\mathbf{G}}\cdot\left(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\right)\right):\mathbf{D}-\rho\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}+s\right)\dot{\theta}-\rho\frac{\partial f}{\partial\mathbf{R}}\cdot\mathbf{v}-\rho\frac{\partial f}{\partial(\nabla\theta)}\cdot(\nabla\theta)^{\bullet}-$$
$$-\rho\frac{\partial f}{\partial\Re}:\dot{\Re}-\rho\frac{\partial f}{\partial\mathbf{p}}\cdot\dot{\mathbf{p}}+\mathbf{E}_*\cdot\mathbf{P}^*-\rho\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\mathbf{h}\cdot\nabla\theta}{\theta}\geq 0 . \tag{8}$$

This inequality is linear in the generalised time rates which are not independent since $\dot{\mathbf{p}}$ and $\mathbf{P}^*$ are coupled. It can be proved that the equation $\mathbf{P}^*=(\nabla\mathbf{r})\cdot\dot{\mathbf{p}}\rho$ holds. This allows one to set eqn (8) in the following form

$$\left(\boldsymbol{\tau}-2\rho\left(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\right)^T\cdot\frac{\partial f}{\partial\mathbf{G}}\cdot\left(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\right)\right):\mathbf{D}-\rho\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}+s\right)\dot{\theta}-\rho\frac{\partial f}{\partial\mathbf{R}}\cdot\mathbf{v}-\rho\frac{\partial f}{\partial(\nabla\theta)}\cdot(\nabla\theta)^{\bullet}-$$
$$-\rho\frac{\partial f}{\partial\Re}:\dot{\Re}+\rho\left(\mathbf{E}_*\cdot(\nabla\mathbf{r})-\frac{\partial f}{\partial\mathbf{p}}\right)\cdot\dot{\mathbf{p}}-\rho\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\mathbf{h}\cdot\nabla\theta}{\theta}\geq 0 . \tag{9}$$

Since the coefficients of the generalised time rates $\mathbf{D},\dot{\theta},\mathbf{v},(\nabla\theta)^{\bullet},\dot{\Re},\dot{\mathbf{p}}$ are independent of these rates, the inequality (9) is satisfied if and only if the coefficients vanish and the last term in eqn (9) is non-negative, cf. [1], [2]. In particular, $\frac{\partial f}{\partial\mathbf{R}}=0,\ \frac{\partial f}{\partial(\nabla\theta)}=0,\ \frac{\partial f}{\partial\Re}=0$, which reduces the number of defining parameters to $\mathbf{r},\theta,\mathbf{G},\mathbf{p},t$. The remaining conditions are as follows

$$\boldsymbol{\tau}=2\rho\left(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\right)^T\cdot\frac{\partial f}{\partial\mathbf{G}}\cdot\left(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\right),\ s=-\frac{\partial f}{\partial\theta},\ \mathbf{E}_*=\frac{\partial f}{\partial\mathbf{p}}\cdot\left(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\right), \tag{10}$$

$$\rho\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\mathbf{h}\cdot\nabla\theta}{\theta}\le 0 \tag{11}$$

Further application of the laws of thermodynamics to continuum mechanics conventionally requires the prescription of the free energy in eqn (10) and heat flux $\boldsymbol{h}$. It is shown below that for polarised thermoelastic materials the equations of motion and the heat conduction equation are derived directly from the laws of thermodynamics.

Dynamic boundary value problem for piezothermoelastic material. Substituting eqn (10) into the first law of thermodynamics in integral form eqn (2) one obtains

$$\int_V \rho\left[\frac{\partial f}{\partial t}+\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}+s\right)\dot{\theta}+\theta\dot{s}+\frac{\partial f}{\partial\mathbf{G}}:2\rho\left(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\right)^T\cdot\mathbf{D}\cdot\left(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\right)+\left(\dot{\mathbf{v}}-\mathbf{K}\right)\cdot\mathbf{v}\right]dV+$$

$$+\int_V\left(\frac{\partial f}{\partial\mathbf{p}}\cdot\dot{\mathbf{p}}-\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}\right)dV-\int_V\left(b-\nabla\cdot\mathbf{h}\right)dV-\int_B\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}dB=0 \tag{12}$$

The following transformations are valid due to eqn (10)

$$\int_V\frac{\partial f}{\partial\mathbf{G}}:2\rho\left(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\right)^T\cdot\mathbf{D}\cdot\left(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\right)dV=\int_V\boldsymbol{\tau}:\mathbf{D}dV=-\int_V\left(\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\right)\cdot\mathbf{v}dV+\int_B\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v}dB,$$

in which the stress tensor is assumed to be symmetric. Substituting eqn (10) into eqn (12) and simplifying the result we obtain

$$\int_V\left[\rho\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\theta\dot{s}\right)+\left[E_*\cdot\nabla\mathbf{r}\right]\dot{p}\rho+b-\nabla\cdot\mathbf{h}-\left[\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}+\mathbf{f}_L+\rho\left(\mathbf{K}-\dot{\mathbf{v}}\right)\right]\cdot\mathbf{v}\right]dV-$$

$$-\int_V\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}dV+\int_B\left[\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\tau}-\mathbf{F}\right]\cdot\mathbf{v}dB=0.$$

Using Maxwell equations and Gauss transformation from the volume integral to a surface integral we can transform the latter equation to the following form

$$\int_V\left[\rho\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\theta\dot{s}\right)+b-\nabla\cdot\mathbf{h}-\left[\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}+\mathbf{f}_L+\rho\left(\mathbf{K}-\dot{\mathbf{v}}\right)\right]\cdot\mathbf{v}\right]dV+$$

$$+\int_B\left[\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\tau}+\mathbf{N}\left(\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}\right)-\mathbf{F}\right]\cdot\mathbf{v}dB=0.$$

After elimination of the term $\rho\theta\dot{s}+b-\nabla\cdot\mathbf{h}$ by means of the second law of thermodynamics, eqn (6), we have the following inequality

$$-\int_V\left[\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}+\mathbf{f}_L+\rho\left(\mathbf{K}-\dot{\mathbf{v}}\right)\right]\cdot\mathbf{v}dV+\int_B\left[\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\tau}+\mathbf{N}\left(\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}\right)-\mathbf{F}\right]\cdot\mathbf{v}dB\le\int_B\left(\rho\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\mathbf{h}\cdot\nabla\theta}{\theta}\right)dB$$

The right hand side of this inequality is positive due to eqn (11) and the left hand side is a linear function in the time rates. As described previously, the above equation holds if and only if

$$-\int_V\left[\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}+\mathbf{f}_L+\rho\left(\mathbf{K}-\dot{\mathbf{v}}\right)\right]\cdot\mathbf{v}dV+\int_B\left[\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\tau}+\mathbf{N}\left(\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}\right)-\mathbf{F}\right]\cdot\mathbf{v}dB=0$$

$$\textit{in volume } V:\quad\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}+\mathbf{f}_L+\rho\left(\mathbf{K}-\dot{\mathbf{v}}\right)=0, \tag{13}$$

$$\textit{on boundary } B_2:\quad\mathbf{v}=0.$$

The latter result can be rewritten in the local form

$$\textit{in volume } V:\quad\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}+\mathbf{f}_L+\rho\left(\mathbf{K}-\dot{\mathbf{v}}\right)=0, \tag{14}$$

$$\textit{on boundary } B:\quad\left[\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\tau}+\mathbf{N}\left(\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}\right)-\mathbf{F}\right]\cdot\mathbf{v}=0. \tag{15}$$

Equation (14) is the equation of dynamics for the polarised thermoelastic material, while eqn (15) gives the boundary condition. Equation (15) implies that the surface force is prescribed on part B_1 of the boundary

$$\textit{on boundary } B_1: \quad \mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\tau}+\mathbf{N}\left(\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}\right)-\mathbf{F}=0 \tag{16}$$

and another part B_2 is at rest

$$\textit{on boundary } B_2: \quad \mathbf{v}=0. \tag{17}$$

Equations (14), (16) and (17) provide one with the dynamic boundary value problem for the polarised thermoelastic media.

Heat conduction equation for the polarised thermoelastic material. After the substitution of the boundary value problem, eqns (14) and (15) into eqn (2) we obtain the heat conduction equation in integral form

$$\int_V \left[\rho\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\theta\dot{s}\right)+b-\nabla\cdot\mathbf{h}\right]dV=0,$$

from which the local form is easily derived

$$\rho\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\theta\dot{s}\right)+b-\nabla\cdot\mathbf{h}=0. \tag{18}$$

Let us consider now the case $\partial f/\partial t=0$. The inequality (11) can be rewritten now in the following form $\mathbf{h}\cdot\nabla\theta\le 0$ that imposes a restriction on the expressions for heat flux $\mathbf{h}$. The conventional expression for the heat flux is $\mathbf{h}=-\boldsymbol{\kappa}_0\cdot\nabla\theta$ where $\boldsymbol{\kappa}_0=\mathrm{const}$ represents the tensor of thermal conductivity of the medium. Inequality (11) takes now the form $\nabla\theta\cdot\boldsymbol{\kappa}_0\cdot\nabla\theta\ge 0$, that is the tensor of thermal conductivity $\boldsymbol{\kappa}_0$ is non-negative.

However the assumption $\mathbf{h}=-\boldsymbol{\kappa}_0\cdot\nabla\theta$ violates the principle of the material frame indifference. As the heat flux $\mathbf{h}$ and the temperature gradient $\nabla\theta$ are frame indifferent vectors, the principle of the material frame indifference demands the following, [3]

$$\mathbf{h}_Q=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{h},\ \left(\nabla\theta\right)_Q=\mathbf{Q}\cdot\nabla\theta\ , \tag{19}$$

where $\mathbf{Q}$ is a proper orthogonal tensor corresponding to a rigid rotation. Substitution of eqn (19) into $\mathbf{h}=-\boldsymbol{\kappa}_0\cdot\nabla\theta$ yields the condition of frame indifference

$$-\boldsymbol{\kappa}_0\cdot\left(\mathbf{Q}^T\cdot\nabla\theta\right)=-\mathbf{Q}^T\cdot\left(\boldsymbol{\kappa}_0\cdot\nabla\theta\right)$$

that does not hold for an arbitrary $\mathbf{Q}$. This equality holds for an arbitrary $\boldsymbol{Q}$ only for an isotropic tensor of thermal conductivity ($\boldsymbol{\kappa}_0=\kappa_0\mathbf{E}$), however the piezoelectrics are anisotropic materials.

It is proved that the tensor of thermal conductivity in the form $\boldsymbol{\kappa}=\Re^T\cdot\boldsymbol{\kappa}_0\cdot\Re$, $\boldsymbol{\kappa}_0=\mathrm{const}$ satisfies the principle of material frame indifference. The heat flux $\boldsymbol{h}$ is now given by $\mathbf{h}=-\left(\Re^T\cdot\boldsymbol{\kappa}_0\cdot\Re\right)\cdot\nabla\theta$ and the heat conduction equation then becomes

$$\nabla\cdot\left(\Re^T\cdot\boldsymbol{\kappa}_0\cdot\Re\right)\cdot\nabla\theta+b-\rho\theta\dot{s}=0\ .$$

The heat conduction equation for the time-dependent anisotropic polarised thermoelastic materials takes the following form

$$\nabla\cdot\left(\Re^T\cdot\boldsymbol{\kappa}_0\cdot\Re\right)\cdot\nabla\theta+b-\rho\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\theta\dot{s}\right)=0$$

and for these materials the restriction (11) is given by

$$\nabla\theta\cdot\left(\Re^T\cdot\boldsymbol{\kappa}_0\cdot\Re\right)\cdot\nabla\theta-\rho\theta\frac{\partial f}{\partial t}\ge 0\ .$$

Concluding remarks. The present study has shown that the equation of motion, boundary conditions and the constitutive equations for the polarised time-dependent thermoelastic materials are directly derived from two laws of thermodynamics. The defining parameters for these materials are determined. It is also shown that the conventional form of the heat conduction equation for geometrically nonlinear anisotropic polarised thermoelastic media does not satisfy the principle of material frame indifference. A necessary correction was made.

References

1. Truesdell, C. and Noll, W.: The Non-linear Field Theories of Mechanics. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
2. Parkus, H.: Magneto-Thermoelasticity. Springer-Verlag, Vienna, 1972.
3. Lurie, A.I.: Nonlinear Theory of Elasticity. North Holland, Amsterdam, 1990.

Сведения об авторах

Беляев Александр Константинович,
доктор физико-математических наук
зам. директора по научной работе,
Адрес: 199178, Санкт Петербург, Россия, В.О. Большой проспект, 61
Тел:+7 812 32-14-777; E-mail: belyaev@director.ipme.ru

Музаев Анзор Ахмедович,
кандидат технических наук, ректор Чеченского Государственного Университета, г. Грозный
Адрес: 364907, г.Грозный, Россия, ул.Шерипова, 32
Тел:+7 8712 33-24-05; E-mail: chgu@mail.ru

ON EXPLICIT SOLUTION TO THE EQUATION SYSTEM OF THERMOELASTICITY

Bitsadze L.

In the present paper explicit solutions to the first and second boundary value problems (BVP) of thermoelasticity are constructed for the two-dimensional equations of thermoelastic transversally isotropic half-plane. For their solutions we used the potential method and we constructed the special fundamental matrices, which reduces the first and second BVPs to a Fredholm integral equations of the second kind.

Let D be the upper half-plane with the boundary $S\left(S: x_3=0\right)$, and the normal is (0,1).

We say that a body is subject to a plane deformation parallel to the plane Ox_1x_3 if the second component of the displacement vector $u\left(u_1,u_2,u_3\right)$ equals zero and the components u_1,u_3 depend only on x_1,x_3, in this case the basic two-dimensional equations of thermoelasticity for the transversally isotropic body can be written as follows [1]

$$C(\partial x)u = B\operatorname{grad}u_4, \tag{1}$$

$$\left(a_4\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)u_4=0\ , \tag{2}$$

where $C(\partial x)=\left\|C_{pq}(\partial x)\right\|_{2\times 2}$, $B=\left\|B_{pq}\right\|_{2\times 2}$, $C_{11}(\partial x)=c_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+c_{44}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$,

$C_{21}(\partial x)=C_{12}(\partial x)=\left(c_{13}+c_{44}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}$, $C_{22}(\partial x)=c_{44}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+c_{33}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $B_{11}=\beta$, $B_{22}=\beta'$,

$B_{12}=B_{12}=0$, $a_4=\frac{k}{k'}$, $\beta=c_{13}\alpha'+2\alpha\left(c_{11}-c_{66}\right)$, $\beta'=c_{33}\alpha'+2\alpha c_{13}$; α, α' are coefficients of temperature extension, *k*, *k'* are coefficients of thermal conductivity, c_{11}, c_{44}, c_{13}, c_{33}, are Hooke's coefficients, $u=u\left(u_1,u_3\right)$ is a displacement vector, u_4 is the temperature of body.

Definition. The function $f(x)$ defined in D is called regular, if it has integrable in D continuous second derivatives and $f(x)$ itself and its first derivatives are continuously extendable at every point of S and the conditions of infinite are added $f(x)\in O(1)$, $\frac{\partial u}{\partial x_k}=O\left(|x|^{-2}\right)$, $k=1,3$, where $|x|^2=x_1^2+x_3^2$.

For the equation (1) -(2) we pose the following BVPs. Find a regular solution $u(x)$, $u_4(x)$, of the equations (1) -(2) if on the boundary S one of the following conditions are given:

Problem 1. $u^+=f\left(x_1\right)$, $u_4^+=f_4\left(x_1\right)$.

Problem 2. $\tau_{13}^+=c_{44}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)=f_1\left(x_1\right)$, $\tau_{33}^+=c_{13}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+c_{33}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}-\beta' u_4=f_3\left(x_1\right)$, $\frac{\partial u_4}{\partial x_3}=f_4\left(x_1\right)$.

From the equation (2) we find u_4 and the solution of the equation (1) will be presented in the form $u(x)=V(x)+u_0(x)$, where $V(x)$ is a solution of homogeneous equation $C(\partial x)V=0$, and $u_0(x)$ is a particular solution of equation $C(\partial x)u_0(x)=B\operatorname{grad}u_4$.

1. The basic fundamental matrix. In this section we will construct the basic fundamental matrix for the equation

$$C\left(\partial x\right)V = 0 \tag{3}$$

A more simple method for constructing fundamental solutions was suggested by *E*. Levi [2]. The method will be used for the system (3). According to Levi′s results, after some calculations we obtain the fundamental solution of the equation (3), which is denoted by d*(x-y)*,

$$\Gamma\left(x-y\right) = 2\,\mathrm{Im}\sum_{k=2}^{3}\begin{Vmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ A_{12}^{(k)} & A_{22}^{(k)} \end{Vmatrix}\ln\sigma_k\,, \tag{4}$$

$$\sigma_k = x_1 - y_1 + \alpha_k\left(x_3 - y_3\right),\quad \alpha_k = i\sqrt{a_k}\,,\quad A_{11}^{(k)} = \frac{i\left(-1\right)^k\left(c_{44} - c_{33}a_k\right)}{c_{44}c_{33}\sqrt{a_k}\left(a_2 - a_3\right)},$$

$$A_{12}^{(k)} = \frac{i\left(-1\right)^k\left(c_{13} + c_{44}\right)}{c_{44}c_{33}\left(a_2 - a_3\right)},\quad A_{22}^{(k)} = \frac{i\left(-1\right)^k i\left(c_{11} - c_{44}a_k\right)}{c_{44}c_{33}\sqrt{a_k}\left(a_2 - a_3\right)}$$

It is easy to show, that columns and rows of the matrix d(*x*-*y*) are solutions of the equation (3) with respect to *x*, for any *x*÷*y*.

2. Solution to the first BVP for half-plane. A solution to the equation (2) in the domain *D* is

$$u_4(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\int_s \frac{f_4(t)}{t - z_4}dt\,, \tag{5}$$

where $z_4 = x_1 + i\sqrt{a_4}x_3$, $f_4 \in H$.

One particular solution $u_0(x)$ to equation (1) is the following

$$u_0(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\sum_{k=2}^{4}\begin{Vmatrix} A_k & 0 \\ 0 & B_k \end{Vmatrix}\int_s \mathrm{grad}\sigma_k \ln\sigma_k\, f_4(t)dt\,, \tag{6}$$

where $\sigma_k = t - \left(x_1 + \alpha_k x_3\right)$, $\alpha_k = i\sqrt{a_k}$,

$$A_k = (-1)^k\left[A_4\left(c_{44} - c_{33}a_k\right)\sqrt{a_2a_3a_k^{-1}} + B_4\sqrt{a_4}\left(c_{13} + c_{44}\right)\right]d\,,$$

$$B_k = (-1)^k\left[-A_4\left(c_{44} + c_{13}\right)\sqrt{a_2a_3a_k^{-1}} + B_4\sqrt{a_4}\left(c_{44} - c_{33}a_2a_3a_k^{-1}\right)\right]d\,,$$

$$d^{-1} = \left(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}\right)\left(c_{44} + c_{33}\sqrt{a_2a_3}\right),\quad d_4^{-1} = c_{33}c_{44}\left(a_4 - a_2\right)\left(a_4 - a_3\right),$$

$$A_4 = \left[\beta\left(c_{44} - c_{33}a_4\right) + \beta' a_4\left(c_{13} + c_{44}\right)\right]d_4,\quad B_4 = \left[-\beta\left(c_{44} + c_{13}\right) + \beta'\left(c_{11} - c_{44}a_4\right)\right]d_4\,,$$

a_k $(k = 2,3)$ are the positive roots of a characteristic equation

$$c_{33}c_{44}a^2 - \left(c_{11}c_{33} - c_{13}^2 - 2c_{13}c_{44}\right)a + c_{11}c_{44} = 0\,.$$

It is easy to show, that $u_0(x) = 0$, when $x_3 = 0$.

A solution to the equation $C(\partial x)V = 0$, when $V^+ = f(t)$, will be sought in the domain *D* in terms of the double layer potential

$$V(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\sum_{k=2}^{3}\left\|N_{pq}^{(k)}\right\|_{2\times 2}\int_s \frac{g(t)dt}{t - z_k}\,, \tag{7}$$

where

$$N_{11}^{(k)} = (-1)^k d\left(c_{33}a_k - c_{44}\right)\sqrt{a_2a_3a_k^{-1}}\,,\ N_{21}^{(k)} = i(-1)^k d\left(c_{13} + c_{44}\right),\ N_{12}^{(k)} = \sqrt{a_2a_3}N_{21}^{(k)}\ ,$$

$$N_{22}^{(k)} = (-1)^k d\left(c_{44}a_k - c_{11}\right)\sqrt{a_k^{-1}}\,,\ k = 2,3.$$

$g(t)$ is an unknown real vector-function. To determine it we obtain the following integral equation

$$g\left(t_0\right) + \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\sum_{k=2}^{3}\left\|N_{pq}^{(k)}\right\|_{2\times 2}\int_s \frac{g(t)dt}{t-t_0} = f\left(t_0\right). \tag{8}$$

Taking into account the fact that $\sum_{k=2}^{3} N_{11}^{(k)} = \sum_{k=2}^{3} N_{11}^{(k)} = 1$, $\sum_{k=2}^{3} N_{12}^{(k)} = 0$, from the equation (8) we have $g\left(t_0\right) = f\left(t_0\right)$ and (7) takes the form

$$V(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\sum_{k=2}^{3}\left\|N_{pq}^{(k)}\right\|_{2\times 2}\int_s \frac{f(t)dt}{t-z_k}.$$

Thus we have obtained the Poisson type formula for the solution of the first BVP for the half-plane.

Note that $f \in C^{1,\alpha}(S)$ and satisfies the condition $f(t) = C + \frac{\alpha}{|t|^{1+\beta}}$ at infinity, where C and α are constant vectors and $\beta > 0$.

3. Solution to the second BVP for half-plane. The solution to the equation (2) has the form

$$u_4(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a_4}}\operatorname{Re}\int_s \ln\left(t - z_4\right) f_4(t)dt.$$

A particular solution $u_0(x)$ to the equation (1), when $\tau_{13}\left(u_0\right) = 0$, $\tau_{33}\left(u_0\right) = 0$ on S, is the following vector

$$u_0(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\sum_{k=2}^{4}\begin{Vmatrix} A_k & 0 \\ 0 & B_k \end{Vmatrix}\int_s \operatorname{grad}\sigma_k^2 \ln\sigma_k\, f_4(t)dt,$$

where $A_k = (-1)^k c_{44}\left(c_{13} + c_{33}a_k\right)\left(A_4 + B_4\right)\left(\sqrt{a_2a_3a_k^{-1}} - \sqrt{a_4}\right)n$,

$$B_k = (-1)^k c_{44}\left(c_{11} + c_{13}a_k\right)\left(A_4 + B_4\right)\left(\sqrt{a_2a_3a_k^{-1}} - \sqrt{a_4}\right)a_k^{-1}n,$$

$$n^{-1} = \left(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}\right)\left(c_{11}c_{33} - c_{13}^2\right),\ s^{-1} = 2c_{33}c_{44}\sqrt{a_4}\left(a_4 - a_2\right)\left(a_4 - a_3\right),$$

$$A_4 = \left[\beta\left(c_{44} - c_{33}a_4\right) + \beta' a_4\left(c_{13} + c_{44}\right)\right]s,\ B_4 = \left[-\beta\left(c_{44} + c_{13}\right) + \beta'\left(c_{11} - c_{44}a_4\right)\right]s.$$

Now let us consider the second BVP for the equation $C(\partial x)V = 0$. We look for the solution as a single layer potential of the second kind

$$V(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\sum_{k=2}^{4}\left\|L_{pq}^{(k)}\right\|_{2\times 2}\int_s \ln\left(t - z_k\right)h(t)dt, \tag{9}$$

where h is an unknown real vector and the coefficients $L_{pq}^{(k)}$ are the following

$$L_{11}^{(k)} = (-1)^k\left(c_{13} + c_{33}a_k\right)n,\ L_{12}^{(k)} = (-1)^k i\left(c_{13} + c_{33}a_k\right)\sqrt{a_2a_3a_k^{-1}}\,n,$$

$$L_{21}^{(k)} = (-1)^k i\left(c_{11} + c_{13}a_k\right)\sqrt{a_k^{-1}}\,n,\ L_{22}^{(k)} = (-1)^{k+1}\left(c_{11} + c_{13}a_k\right)a_k^{-1}\sqrt{a_2a_3}\,n.$$

Taking into account the boundary condition $\tau_{13}^{+}\left(V\right) = f_1\left(x_1\right)$, $\tau_{33}^{+}\left(V\right) = c_{13}\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + c_{33}\frac{\partial V_3}{\partial x_3} = f_3\left(x_1\right)$, $x_1 \in S$, after direct calculation we find $h(t) = f(t)$.

Therefore we have the following Poisson type formula for the solution of the second BVP

$$V(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\sum_{k=2}^{4}\left\|L_{pq}^{(k)}\right\|_{2\times 2}\int_{s}\ln\left(t-z_{k}\right)f(t)dt\,.$$

For the regularity of the solution $V(x)$ it is sufficient that $\int_{s} f(t)dt=0$, $f\in C^{0,\alpha}(S)$, $\alpha>0$, and $f(t)=O\left(\left|t^{-1-\beta}\right|\right)$, $\beta>0$, for large $|t|$.

ACKNOWLEDGEMENT. This work was supported by I. Javakhishvili Tbilisi State University.

Reference

1. W. Nowacki, Thermoelasticity (Russian), Moscow, 1962.

Information about authors

Dr. Lamara Bitsadze
Senior researcher, I. Vekua Institute of Applied Mathematics of I. Javakhishvili Tbilisi State University
Address: 2, University St., 0186, Tbilisi Georgia
Phone: (+995 32) 30-92-39
E-mail: lbits@viam.sci.tsu.ge

THE INTENSE AND DEFORMED CONDITION WITH THE STRUCTURE OF THE WATER HEAD SPILLWAY HOLLOW DAM

Gedenidze Z., Kvitsiani T., Avaliani S.

Solid gravity dams of a classical structure and particularly use at most 10-20% of the mechanical properties of the material (concrete) what in respect of the mechanics of the deformed bodies is a clear indication of their imperfect structure.

Design and technological measures to make the construction of gravity dams cheaper used up to present decrease the pour in the dam body for 10-15% only and the capital investment of building – for 5-12%.

With the aim of reducing the spillway mass (volume) and accelerating and making the building operations cheaper, the work represents a new structure of the water head spillway hollow dam with a design in fact representing a smooth mating of three thin-walled structures (Fig. 1).

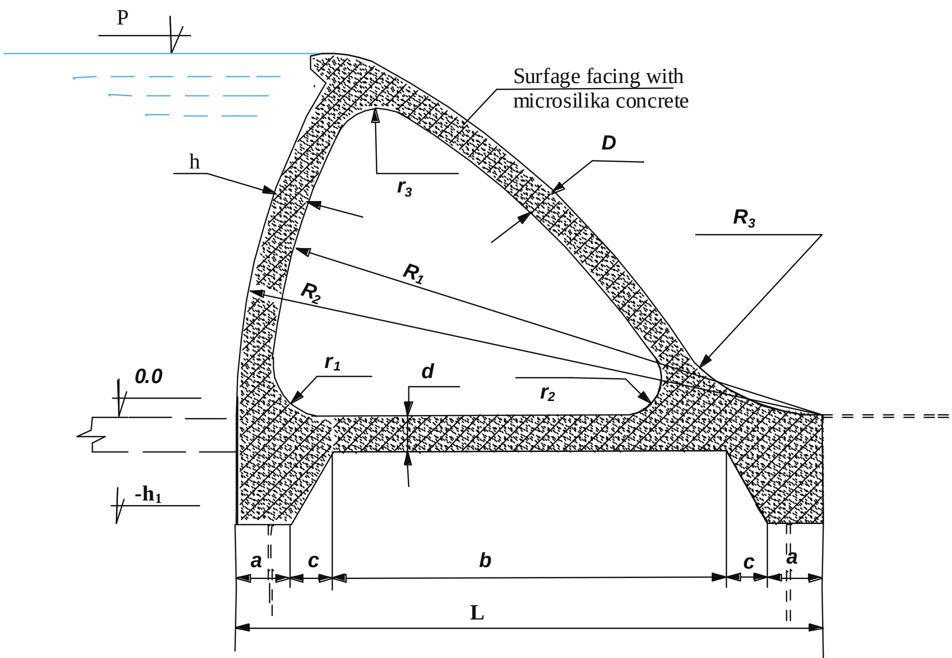


Fig. 1.

The analysis of the gained results calculation demonstrates that the condition of plain sliding resistance in hollow dams is met with greater reserve than in solid ones; as for meeting the condition for overturning stability, this may need filling the hollow body with the ballast in concrete cases.

One of the responsible load-bearing members of the hollow water head dam is an upstream face, whose calculation diagram is represented as a cylindrical open shell, which is attached firmly (elastically) in the foundation and crest, and with rigidly-hinged connection along the slopes of the dam location. Under such boundary conditions and by considering the fact that the length of the dam as a rule, much more exceeds its height, the stress-strain state of an upstream face may be described with a practically acceptable accuracy by using the semi-moment shell theory [1]. For such a case, a system of the equilibrium equations, with proper kinematical admissions in radial W motions and in the coordinate system (x,φ) will be written down as follows: [2]

$$\frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8}+\frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6}+\frac{12R^6}{h^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=\frac{12R^4}{h^3}\left(\frac{\partial^3 q_2}{\partial \varphi^3}+\frac{\partial^4 q_3}{\partial \varphi^4}-R\frac{\partial^3 q_1}{\partial x\partial \varphi^2}\right) \qquad (1)$$

where $R = \dfrac{R_1 + R_2}{2}$ is a radius of curvature of the mean surface of the shell; h is the thickness of the shell (upstream face); $q_1,\ q_2$ and q_3 are the projections of external forces on appropriate axes.
The boundary conditions for circular sides of the shell will be written down as in the moment-free theory, when $x = \pm\dfrac{\lambda}{2}$ (l is the dam length across the flow), then

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0\,, \tag{2}$$

and along longitudinal sides, as in moment theory, when $\varphi = 0$ and $\varphi = \varphi_0$, then

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0\,, \tag{3}$$

where u and v are tangential displacements of the mean surface of the shell.
The solution to (1) decision equation $w = w(x, \varphi)$ should be sought as the following convergent series (Maurice Levy Problem):

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(\varphi)\cos\frac{2m-1}{\lambda}\pi x\,, \tag{4}$$

and by considering that under the action of hydrostatic pressure $q_1 = q_2 = 0$;
$q_3 = \gamma R\sin\varphi$ (γ is the volume weight of water), the external load will be as follows:

$$q = \gamma R\sin\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(\varphi)\cos\frac{2m-1}{\lambda}\pi x\,. \tag{5}$$

Thus, (1) against w is reduced to a common differential equation of the 8-th series with its performance equation

$$k^8 + k^6 + \frac{12R^6}{h^2}\left(\frac{2m-1}{\lambda}\pi\right)^4 = 0\,,$$

when its third member does not equal to $\dfrac{27}{256}$ [3], has only complex conjugate simple roots:

$$k_{2j+1} = a_j + ib_j,\quad k_{2j+2} = a_j - ib_j;\quad j = 0,1,2,3;\ i^2 = -1. \tag{6}$$

The general solution to the differential decision equation (1) will be written down as follows:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\left[k_m\sin\varphi + \sum_{i=1,3,5,7} e^{a_{\frac{i+1}{2}}\varphi}\left(c_1\cos b_{\frac{i+1}{2}}\varphi + c_{i+1}\sin b_{\frac{i+1}{2}}\varphi\right)\right]\cdot\cos\frac{2m-1}{\lambda}\pi x\,, \tag{7}$$

where $k_m = (-1)^m\dfrac{4\gamma\lambda^4}{EhR\left[(2m-1)\pi\right]^5}$, constants of integration $c_1, c_2, c_3, \ldots c_8,$ are defined through the (2) and (3) boundary conditions, first of all needing to express the u and v tangential displacements by w radial displacement [1]. All force factors can be easily defined according to the values of curvatures, by using the computer software created by us. Numerical experiment was used to study the question of convergence of each parameter to be defined. Figure 2 shows the distribution diagram of radial curvatures of the dam with the height $R = 10.0m$ and length $l = 40.0m$, . for which $R = 15.55m,\ \gamma = 10\,an/m^3;\ E = 2.4\times 10^7\ kn/m^2;\ \varphi_0 = 38^0;\ \Delta\varphi = 4^0 45'$

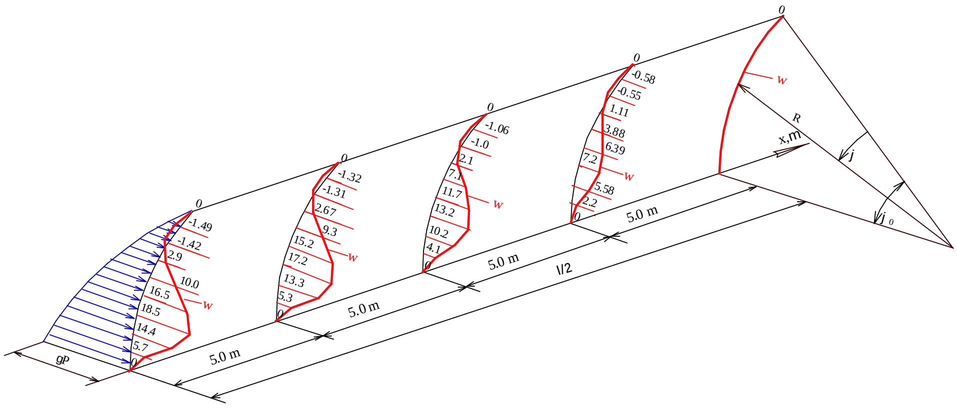


Fig. 2. Distribution diagram of radial curvatures, w, 10^4m

Another structural element of an hollow dam of no less significance than an upstream face is the foundation tile. The foundation tile in the work is calculated by using the technical theory offered by V. Vlasov and N. Leontyev, which is more accurate than the Winkler's and Tsimerman's Theory and simpler than the Theory of Elastic Half-Space. According to this theory, an elastic base is considered as a single- or multi-layered model with two characteristics [4]. The principal (decision) differential equation of curving of such a tile is as follows:

$$\nabla^2\nabla^2 w - 2r^2\nabla^2 w + S^4 w = \frac{Q}{D}, \tag{8}$$

where D is the flexural rigidity of the tile $D = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)}$; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ is the second series Laplace operator; $Q = Q(x, y)$ is the intensity of the surface force acting on the tile, which if deducted the reactive head of the elastic base, will produce general external load acting on the tile; r^2 and S^4 are the generalized elastic characteristics of tile and foundation:

$$r^2 = \frac{E_0}{4(1+\nu_0^2)D}\int_0^H \psi^2(z)dz = \frac{t}{D}, \quad S^4 = \frac{E_0}{(1-\nu_0^2)D}\int_0^H \psi'^2(z)dz = \frac{k}{D}, \tag{9}$$

base characteristics (E_0 and v_0) are defined by the following relation:

$$E_0 = \frac{E_{gr}}{1-\nu_{gr}^2}, \quad \nu_0 = \frac{\nu_{gr}}{1-\nu_{gr}}, \tag{10}$$

where E_{gr} and v_{gr} are the modulus of ground elasticity and Poisson ratio, accordingly; $\psi(z)$ - the transverse distribution function in the elastic height H, if thickness H is significant, they often take the following condition for the function of distribution of tile subsidence and pressures in the base:

$$\psi(z) = \frac{\operatorname{sh}\beta(H-z)}{\operatorname{sh}\beta H}, \tag{11}$$

where β is the coefficient characterizing the rate of subsidence damping in the base depth.

Let us fix the finite fixed securing of the foundation tile on the river slopes $\left(y = \pm\frac{l}{2}\right)$. In such a case, the solution to the problem and load on tile may be presented as (4) and (5). We will gain:

$$\frac{d^4 w_m}{dx^4} - 2(\lambda_m^2 + r^2)\frac{d^2 w_m}{dx^2} + (\lambda_m^4 + 2r^2\lambda_m^2 + S^4)w_m = \frac{Q_m}{D}, \tag{12}$$

where $\lambda_m = \dfrac{2m-1}{l}\pi$.

In accordance with (12), general integral of homogenous differential equation will be written down as follows:

$$w_m = c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + c_3\Phi_3 + c_4\Phi_4, \tag{13}$$

where $c_{1,} c_{2,} c_{3,} c_4$ are integration constants, $\Phi_{1,} \Phi_{2,} \Phi_{3,} \Phi_4$ are functions whose values are determined by an appropriate characteristic

$$k^4 - 2a_1^2k^2 + a_2^4 = 0.$$

The roots of the equation, which are dependant on the ratio of a_1 and a_2 [4]

$$a_1^2 = \lambda_m^2 + r^2; \quad a_2^4 = \lambda_m^4 + 2r^2\lambda_m^2 + S^4.$$

In order to determine the general solution to the heterogeneous equation (12), a particular solution should be added to (13) as a summand.

$$w_0 = (-1)^{m+1}\frac{4Q}{D(2m-1)\pi \cdot a_2^4}. \tag{14}$$

If admitting that the foundation tile is rigidly connected to upstream and downstream faces, along which the underground contour has the teeth, or when $x = \pm b$, then

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{15}$$

according to which the integration constants will be defined.
Accordingly, the general solution to equation (8) will be written down as follows:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + c_3\Phi_3 + c_4\Phi_4 + (-1)^{m+1}\frac{2b^4}{a_2^4}\cdot\frac{(Q_{\max}+Q_{\min})(1+\eta)}{D(2m-1)\pi}\right]\cos\frac{2m-1}{l}\pi y, \quad \left(\eta = \frac{x}{b}\right). \tag{16}$$

The calculation for the tile firmness has been accomplished by using the computer software created in advance. Figure 2 shows the schedule of radial curvatures of the dam, which $R = 10.0m$; $H = 30.0m$; $\beta = 0.5$; $l = 40.0m$; $b = 5.5m$; $d = 0.8m$; $E = 2.4\times 10^7\,mpa$; $\nu = 0.2$; $\nu_{gr} = 0.3$; $E_{gr} = 20.0mpa$; $Q_{\max} = 0.05mpa$; $Q_{\min} = 0.035mpa$.

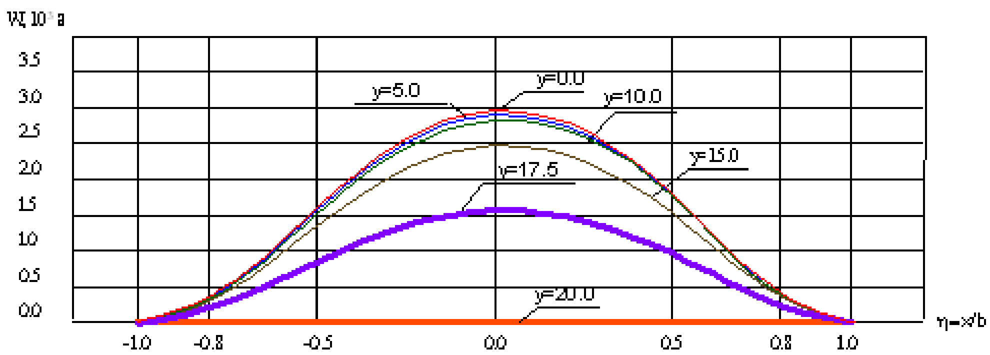


Fig. 3.

Reference

1. Mikeladze M. Introduction to the Technical Theory of ideally plastic thin shells. METSNIEREBA, Tbilisi, 1969, 182 pages.
2. Gedenidze Z. Stress-strain state of shell hydraulic structures and facilities. Tbilisi, GTU, 1991, 204 pages.
3. Gedenidze Z., Kvitsiani T., Avaliani S. Stress-strain state of an upstream face of an assembly type low water head spillway. //Journal “Energia”, (pp. 58-63) #2(42), Tbilisi, 2007.
4. Vlasov V., Leontyev N. Beams, tiles and shells on elastic foundation. Moscow. Physmathgiz. 1960, 491 pages.

Informationa about authors

Gedenidze Zurab
Doctor of Sciences, Dean of Construction Faculty, Georgian Technical University
Address: 68, Kostava str., GSU, Bld.1, Tbilisi, Georgia
Phone: +995 99-93-00-17; Fax: (+995 32) 52-84-74; E-mail: zurabg@mail.ru

Kvitsiani Tariel

Doctor of Sciences, Head of Dept. of Theoretical Mechanics, Georgian Technical University
Phone: (+995 77) 45-22-84;
E-mail: tarielk@mail.ru

LOCALIZED BENDING VIBRATION OF A RECTANGULAR PLATE WITH ONE FREE AND THREE CLAMPED EDGES

Ghazaryan K., Mkrtchyan H., Marzocca P., Milanese A.

This paper provides a theoretical background to identify the existence and presence of localized bending vibration for a rectangular elastic plate. The analysis is performed by conventional Galerkin's method with a single mode approximation and the time-harmonic plane wave solution. Localized bending waves have been found for a finite and semi-finite plates and it has been shown that the existence and frequency of localized waves depends on both mechanical and geometrical parameters of the structural component.

Introduction

The study of localized bending waves in an elastic isotropic semi-infinite plate was presented first in [1] and further developed in [2-8]. Such waves have properties analogous to a Rayleigh wave on an elastic half-space, they decay exponentially with distance from the edge. The flexural edge wave is also predicted by Mindlin's plate theory, and this prediction agrees with measured data. The dynamic problem for the elastic bending waves for an orthotropic cantilever with one edge being free from mechanical stresses and reinforced with rigid rib was investigated in [7] while the study of the magnetoelastic localized vibrations of a flat plate immersed in a uniform external magnetic field was carry out in [8].

Solution Methodology and Results

A rectangular elastic plate in a Cartesian reference system (x_1, x_2), $0 \le x_1 \le a$, $0 \le x_2 \le b$ is considered. Based on Kirchhoff's assumptions, the governing equation for the plate bending vibrations can be written as

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial x_2^4} + \frac{3\rho\left(1-\upsilon^2\right)}{Eh^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

where $W(x_1, x_2, t)$ is the normal displacement of middle plane of the plate, E and υ are the elastic modulus and Poisson ratio of the isotropic material, ρ is the density of the plate and $2h$ is its thickness. The following boundary conditions are imposed:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \upsilon\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} = 0 \qquad \frac{\partial^3 W}{\partial x_1^3} + (2-\upsilon)\frac{\partial^3 W}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 0 \qquad \text{for } x_1 = 0 \tag{2a}$$

$$W = 0 \qquad \frac{\partial W}{\partial x_1} = 0 \qquad \text{for } x_1 = a \tag{2b}$$

$$W = 0 \qquad \frac{\partial W}{\partial x_2} = 0 \qquad \text{for } x_2 = 0;\ x_2 = b \tag{2c}$$

Equation (2a) imposes no bending moment and generalized transverse force at the free edge, while Equations (2b) and (2c) impose no displacement and rotation at the clamped edges.
Applying the conventional Galerkin's method with a single mode approximation and the time-harmonic plane wave solution,

$$W(x_1, x_2, t) = U(x)V_m(y)\exp(i\omega t) \tag{3}$$

the following boundary value problem is posed:

$$\frac{d^4 U}{dx^4} - 2\alpha_m^2\frac{d^2 U}{dx^2} + \left(\lambda_m^4 - \tilde{\omega}_0^2\right)U = 0 \tag{4}$$

$$U = 0 \quad \text{and} \quad \frac{dU}{dx} = 0 \quad \text{for} \quad x = a/b \tag{5}$$

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \upsilon\alpha_n^2 U = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d^3 U}{dx^3} - (2-\upsilon)\alpha_n^2\frac{dU}{dx} = 0 \quad \text{for} \quad x = 0 \tag{6}$$

In Eqs.(3-6) $x = x_1/b;\ y = x_2/b$ are dimensionless coordinates, ω is a circular frequency of bending vibration, $\tilde{\omega}_0^2 = 3\rho\left(1-\upsilon^2\right)b^4/Eh^2$; $U(x)$ are functions to be determined, $V_n(y)$ are orthogonal eigen-functions of the following boundary value problem:

$$\frac{d^4V_m}{dy^4} = \lambda_m^4 V_m \text{ where } V_n = 0 \text{ and } \frac{dV_n}{dx} = 0 \text{ for } y = 0; y = 1 \tag{7a}$$

and

$$V_n(y) = \frac{\sin(\lambda_n y) - \mathrm{sh}(\lambda_n y)}{\sin(\lambda_n) - \mathrm{sh}(\lambda_n)} - \frac{\cos(\lambda_n y) - \mathrm{ch}(\lambda_n y)}{\cos(\lambda_n) - \mathrm{ch}(\lambda_n)} \tag{7b}$$

where $\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi;\ n = 1, 2......$

In Eq. (4-6) the parameter α_m^2 according to Galerkin's method is given by

$$\alpha_m^2 = \int_0^1 \left(dV_m/dx\right)^2 dx \Big/ \int_0^1 V_m^2 dx \tag{8}$$

The general solution of Eq. (4) can be written as

$$U(x) = C_1 \exp(-p_n x) + C_2 \exp(p_n x) + C_3 \exp(-q_n x) + C_4 \exp(q_n x) \tag{9}$$

where

$$p_n = \sqrt{\alpha_n^2 - \sqrt{\alpha_n^4 - \lambda_n^4 + \tilde{\omega}_0^2}} \text{ and } q_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \sqrt{\alpha_n^4 - \lambda_n^4 + \tilde{\omega}_0^2}}\ . \tag{10}$$

The semi-infinite plate in direction x ($a \to \infty$) is considered first. Instead of the boundary conditions (5) we shall use the attenuation condition (localization) at $x \to \infty$, that is

$$\lim_{x\to\infty} U(x) = 0 \tag{11}$$

Taking into account that for the numerical sequence $\sim_n / \mathrm{a}_n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_n}{\lambda_n}\right) = \to 1, \qquad \frac{\alpha_n}{\lambda_n} < \frac{\alpha_{n+1}}{\lambda_{n+1}}, \qquad \frac{\alpha_1}{\lambda_1} \approx 0.73 \quad , \quad \lambda_1 = 3\pi/2 \tag{12}$$

the condition for natural frequencies can be obtained as

$$\lambda_1^4 - \alpha_1^4 < \tilde{\omega}_0^2 < \lambda_1^4 \tag{13}$$

If Eq. (13) is verified the attenuation condition (localization) is valid and localized vibration can occur. In this case a general solution satisfying to attenuation condition can be written as

$$U(x) = C_1 \exp(-p_1 x) + C_3 \exp(-q_1 x) \tag{14}$$

Substituting Eq. (14) into the boundary condition Eq. (6), at $x = 0$:

$$\left(p_1 q_1\right)^2 + 2\,(1-\upsilon)\alpha_1^2 p_1 q_1 - \alpha_1^4 \upsilon^2 = 0 \tag{15}$$

From Eq. (10) it follows that

$$p_1 q_1 = \sqrt{\lambda_n^4 - \tilde{\omega}_0^2} \tag{16}$$

The equation defining frequency of the localized vibrations can be then written as:

$$F(\tilde{\omega}_0) \equiv \lambda_1^4 - \tilde{\omega}_0^2 + 2\,(1-\upsilon)\alpha_1^2 \sqrt{\lambda_1^4 - \tilde{\omega}_0^2} - \alpha_1^4 \upsilon^2 = 0 \tag{17}$$

For simply supported plate at $x_2 = 0, b$ instead of Eq. (17) the following was found [6]

$$F(\tilde{\omega}_0) \equiv \pi^4 - \tilde{\omega}_0^2 + 2\,(1-\upsilon)\pi^2 \sqrt{\pi^4 - \tilde{\omega}_0^2} - \pi^4 \upsilon^2 = 0 \tag{18}$$

The function $F(\tilde{\omega}_0)$ evaluated at $\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\lambda_1^4 - \alpha_1^4}$ and $\tilde{\omega}_0 = \lambda_1^2$ assumes the values

$$F\left(\sqrt{\lambda_1^4-\alpha_1^4}\right)=\alpha_1^4\left(1-\upsilon\right)\left(3-\upsilon\right)>0 \tag{19}$$

$$F\left(\lambda_1^2\right)=-\,\alpha_1^4\upsilon^2<0 \tag{20}$$

From here it follows that the Eq. (17) has solution correspond localized vibration frequencies, if and only if $\upsilon>0$. In Table 1 numerical results are presented for localized frequencies for different values of Poisson ratio υ and for simply supported and clamped plate at edges $x_2=0,b$.

By analogy with a semi-infinite plate, we define as finite plate localized vibrations those vibrations which natural frequencies satisfy Eq. (13). Rewriting the solution of Eq. (10) as

$$U\left(x\right)=\tilde{C}_1\sinh q_1x+\tilde{C}_2\cosh q_1x+\tilde{C}_3\sinh p_1x+\tilde{C}_4\cosh p_1x \tag{20}$$

and satisfying the boundary conditions of Eqs. (5) and (6), an homogeneous system of equations can be found. From imposing the determinant of this system to be zero, the following equation defining frequency of the localized vibration $\tilde{\omega}$ is obtained

$$F_1\left(\tilde{\omega}\right)\equiv\frac{\left[\left(1-\upsilon\right)^2-\left(1-2\upsilon\right)\beta^2\right]\tanh\left(\eta\alpha_1\sqrt{1-\beta}\right)\tanh\left(\eta\alpha_1\sqrt{1+\beta}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}+$$

$$+\frac{\left(1-\upsilon\right)^2-\beta^2}{\cosh\left(\eta\alpha_1\sqrt{1-\beta}\right)\cosh\left(\eta\alpha_1\sqrt{1+\beta}\right)}-\left(1-\upsilon\right)^2-\beta^2=0 \tag{21}$$

where $\beta\equiv\sqrt{1-\lambda_1^4/\alpha_1^4+\tilde{\omega}_0^2/\alpha_1^4}$, $\eta=a/b$. When $\eta\gg1$ $(a\gg b)$, that corresponds to the semi-infinite plate case, by taking $\tanh\left(\eta\alpha_1\sqrt{1-\beta}\right)\approx1;\tanh\left(\eta\alpha_1\sqrt{1+\beta}\right)\approx1$ and $\cosh\left(\eta\alpha_1\sqrt{1-\beta}\right)\to\infty;\cosh\left(\eta\alpha_1\sqrt{1+\beta}\right)\to\infty$ the following equation is obtained

$$\left[\left(1-\upsilon\right)^2+\beta^2\right]\sqrt{1-\beta^2}-\left(1-\upsilon\right)^2+\left(1-2\upsilon\right)\beta^2=0$$

Consequently, taking into account that

$$\left[\left(1-\upsilon\right)^2+\beta^2\right]\sqrt{1-\beta^2}-\left(1-\upsilon\right)^2+\left(1-2\upsilon\right)\beta^2\equiv$$

$$\equiv\frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}+1}\left[1-\beta^2+2\left(1-\upsilon\right)\sqrt{1-\beta^2}-\upsilon^2\right] \tag{22}$$

this can be reduced to

$1-\beta^2+2\left(1-\upsilon\right)\sqrt{1-\beta^2}-\upsilon^2=0$, with $\beta=\sqrt{1-\lambda_1^4/\alpha_1^4+\tilde{\omega}_0^2/\alpha_1^4}$ which coincides with Eq. (16). The function $F_1\left(\tilde{\omega}\right)$ has the following properties

$$F_1=0,\ \frac{dF_1}{d\tilde{\omega}}=0;\ \frac{d^2F_1}{d\tilde{\omega}^2}<0;\ \text{at}\ \tilde{\omega}=\sqrt{\lambda_1^4-\alpha_1^4}\ (\beta=0)$$

$$F_1\left(\lambda_1^2\right)=\frac{\eta\alpha_1\upsilon^2\tanh\left(\sqrt{2}\eta\alpha_1\right)}{\sqrt{2}}-\frac{\left(2-\upsilon\right)\upsilon}{\cosh\left(\sqrt{2}\eta\alpha_1\right)}-\left(2-2\upsilon+\upsilon^2\right) \tag{23}$$

Furthermore, the function $F_1\left(\tilde{\omega}\right)$ can have only one extreme value in the interval $\sqrt{\lambda_1^4-\alpha_1^4}<\tilde{\omega}<\lambda_1^2$. From this analysis it follows that Eq. (21) can have only one solution, that corresponds to the localization mode, if and only if $F_1\left(\lambda_1^2\right)>0$.

In Table 2 the limiting values of parameter $¦_0=a/b$ are given; below these values localized vibrations do not occur, that is Eq. (21) does not have solution.

Conclusions

The study of localized bending waves in thin rectangular plate can be useful to identify the presence of cracks in many engineering structures. This paper provides a theoretical background to identify the existence and presence of localized bending vibration for a rectangular elastic plate. The analysis is performed by conventional Galerkin's method with a single mode approximation and the time-harmonic plane wave solution. Localized bending waves have been found for a finite and semi-finite plates and it has been shown that the existence and frequency of localized waves depends on both mechanical and geometrical parameters of the structural component.

Table 1.

υ	$\tilde{\omega}$	
	Clamped edges	Hinged edges
0.1	22.19	9.86
0.2	22.18	9.85
0.3	22.17	9.84
0.4	22.12	9.78
0.5	22.02	9.64

Table 2.

υ	$\eta_0 = a/b$
0.1	74.58
0.2	16.81
0.3	6.83
0.4	12.04
0.5	3.51

References

1. Konenkov Y.W., 1960, "On Rayleigh Type Flexural Waves," Akust. Zh, **6**, pp.124-126, In Russian
2. Ambartsumyan S.A., and Belubekyan M.V., 1994, "On Bending Waves Localized Along the Edge of a Plate," Int. J. App. Mech. Translation of Prikl. Mechanica, **30**, pp. 135-140.
3. McKenna, J., Boyd, G.D., and Thurston, R.N., 1974, ''Plate Theory Solution for Guided Flexural Acoustic Waves Along the Tip of a Wedge,'' IEEE T. Son. Ultrason., **21**, pp. 178–186.
4. Norris A.N., Krylov V.V., and Abrahams I.D., 1998, "Flexural Edge Waves and Comments on ''A New Bending Wave Solution for the Classical Plate Equation,'' J. Acoust. Soc. Am., **104**, pp. 2220–2222.
5. Thurston R.N., and McKenna J., 1974, "Flexural Acoustic Waves Along the Edge of a Plate," '' IEEE T. Son. Ultrason, **4**, pp. 296-297.
6. Mkrtchyan H.P., 2003, "Localized Bending Waves in an Elastic Orthotropic Plate," Proceedings of NAS Armenia, Mechanics, **56** (4), pp.66-68.
7. Belubekyan M., Ghazaryan K., Marzocca P., Cormier C., "Localized Magnetoelastic Bending Vibration of an Electroconductive Elastic Plate," AIAA-2006-2110, Newport, Rhode Island, 1 - 4 May 2006.
8. Belubekyan M., Ghazaryan K., Marzocca P., Cormier C., 2007, "Localized bending waves in a Rib-reinforced elastic orthotropic plate," ASME Jour. Appl. Mech., **74** , 169-172.

Information about authors

K.Ghazaryan
Doctor of Science, Leading Scientific Researcher, Institute of Mechanics NAN, Yerevan, Armenia, E-mail: ghkarren@gmail.com

H. Mkrtchyan
Ph.D, Institute of Mechanics NAN, Yerevan, Armenia

P.Marzocca
Ph.D., Assistant Professor, Mechanical and Aeronautical Engineering Department, Clarkson University, Potsdam, NY, USA, E-mail: pmarzocc@clarkson.edu

A.Milanese, Postgraduate Student, Mechanical and Aeronautical Engineering Department, Clarkson University, Potsdam, NY, USA

A NUMERICO-ANALYTICAL SPLITTING METHOD FOR THE SOLUTION OF ELASTOVISCOPLASTIC EQUATIONS WITH INTERNAL VARIABLES

Kukudzhanov Vladimir N.

Abstract: The new numerico-analytical method for the integration static and dynamic problems of elastoplastic equations suggested. The method is based on the splitting of constitutive equations for the models independent on the time scale as well as for the strain rate dependent models. The proposed method has significant computational advantages as compared with the standard iteration methods.

1. INTRODUCTION

The distinctive feature of the constitutive equations of the plasticity theory with internal variables is that in addition to differential relations, these equations involve also a finite relation that constrains the stress tensor invariants and internal variables. Owing to this, various mathematical formulations are allowed for the constitutive relations of the model. The most widespread statement involves differentiation of the plasticity conditions to reduce the problem to a system of differential equations. A drawback of this approach is that the artificial differentiation leads to an increase in the order of the system of constitutive equations and substantially complicates solution.

We will show that there is another approach which is using decomposition of the constitutive equations, this allows one to simplify the solution of the problem.

The idea of the decomposition method is simple and well known. An additive operator $A(u)$ can be replaced by a multiplicative operator on a small time interval Δt.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(u) = \left(A_1 + A_2 + \cdots + A_n\right)u,$$
$$u^{n+1}\left(t+\Delta t\right) = \left[E + \left(A_1 + A_2 + \cdots + A_n\right)\Delta t\right]u^n\left(t\right) \tag{1}$$

where A_n are matrix differential operators with respect to the spatial variables, E is the identity operator, and u is a vector. The solution of the difference equation of (1) can be represented in the form of a multiplicative operator

$$u^{n+1}\left(t+\Delta t\right) = \left(E + A_1\Delta t\right)\left(E + A_2\Delta t\right)\cdots\left(E + A_n\Delta t\right)u^n\left(t\right) = \left(E + A\Delta t\right)u^n\left(t\right) + O\left(\Delta t^2\right) \tag{2}$$

This allows one to reduce the numerical integration of systems of differential equations of the form of (1) to the successive solution of problems for each of the operators A_n, with the initial conditions being obtained as the solution of the previous problem for A_{n-1}.

2. SPLITTING OF ELASTOPLASTIC EQUATIONS

The system of equations governing the behavior of a hypoelastoplastic medium subject to finite strains involves the conservation laws for mass, momentum, and energy. These equations should be supplemented with the constitutive equations of the hypoelastoplastic medium. In the Eulerian variables, these equations have the form

$$\frac{\mathrm{D}\sigma_{ij}}{\mathrm{D}t} = \frac{d\sigma_{ij}}{dt} + \Omega_{ik}\sigma_{kj} + \Omega_{jk}\sigma_{ki} = D_{ijkl}\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}^p_{ij}\right), \tag{3}$$

where $\mathrm{D}\sigma_{ij}/\mathrm{D}t$ is the Jaumann derivative or some other objective derivative, D_{ijkl} is the tensor of elastic moduli, and $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{v}_{i,j} - \mathrm{v}_{j,i}\right)$ is the rotation rate tensor. The plasticity condition in general form is expressed by a finite relation between the invariants of the stress J_i, strain E_i and strain rate $\dot{E}_i$ tensors and the internal parameters of the medium χ_k

$$F\left(J_i, E_i, \dot{E}_i, \chi_k\right) = 0, \qquad (i = 1,2,3, \quad k = 1,2,\ldots,n) \tag{4}$$

The plastic strain rate tensor is defined by the associated flow law

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \tag{5}$$

$$\dot{\chi}_k = f_k\left(J_i, \chi_k\right) \tag{6}$$

The dot stands for the material derivative with respect to time. Relation (3) follows from the additivity of strains combined with Hooke's law and provides the equation for stresses.
The decomposition general scheme looks as follows. To be decomposed is only Eq. (3).

The predictor is taken at $\dot{\varepsilon}_{ii}^{p} = 0$, which corresponds to the elastic material. In this case, for each step Δt, one should solve the elastic problem

$$\rho \frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial t} = \sigma_{ik,j}\,, \qquad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \Omega_{ik}\sigma_{kj} + \Omega_{jk}\sigma_{ki} = \frac{1}{2} D_{ijkl}\left(\mathrm{v}_{i,j} + \mathrm{v}_{j,i}\right) \tag{7}$$

subjected to the initial conditions obtained at the previous step for the complete problem.

The corrector is taken at $\dot{\varepsilon}_{ii} = 0$ in Eq. (3). In this case, Eqs. (3) and (5) lead to the stress relaxation equation

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = -\frac{d\Lambda}{dt} D_{ijkl} \frac{dF}{d\sigma_{kl}} \tag{8}$$

For the elastoplastic medium, the relaxation is completed before the elastic unloading has occurred. For the elastoviscoplastic medium, the relaxation is completed before the steady-state plasticity condition has held.

$$F\left(I_i, \dot{I}_i, \chi_i\right)\Big|_{\dot{I}_i = 0} = 0\,, \tag{9}$$

For the classical *elastoplastic medium*, the properties of which are independent of the change in the time scale, one can eliminate the time t from Eqs. (8)

$$\frac{d\sigma_{ij}}{d\Lambda} = -D_{ijkl} \frac{dF}{d\sigma_{kl}} \tag{10}$$

This system of differential equations on small time interval $\Delta\Lambda$ can be always linearized and solved in close analytical form with accuracy $O(\Delta\Lambda)$, the same as the main decomposition procedure has. Analytical solution significantly simplifies the solution.

Solve the equations of (10) and (6) subjected to the initial conditions $\Lambda = \Lambda_0$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{e}$, and $\chi_i = \chi_i^{e}$ (resulting from the solution of the elastic problem) we fined functions

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}\left(\Lambda, \sigma_{ij}^{e}, \chi_i^{e}\right), \qquad \chi_i = \chi_i\left(\Lambda, \sigma_{ij}^{e}, \chi_i^{e}\right) \tag{11}$$

Substitute (11) into the plasticity condition of (4) to obtain the equation for Λ

$$F\left(I_i(\Lambda), \chi_i(\Lambda), J_i^{e}, \chi_i^{e}\right) = 0 \tag{12}$$

By solving this equation and substituting the resulting Λ into (11) we obtain the final solution of the problem.

For the *isotropic hardening Mises plasticity*

$$J_2 = \left(\tfrac{1}{2} s_{ij} s_{ij}\right)^{1/2} = k_0 + 2\mu_1 \chi^{\beta} \tag{13}$$

we obtain the power-law nonlinear equation to determine the correction coefficient x

$$J_2^{e} - k_0 + 2\mu_1\left[\chi^{e} + \frac{\left(J_2^{e}\right)^{\alpha}}{2\alpha\mu}\left(1 - x^{\alpha}\right)\right]^{\beta} = 0, \qquad x = e^{-2\mu\left(\Lambda - \Lambda_0\right)} \tag{14}$$

For the linear hardening law $\beta = 1$, $\alpha = 1$, the solution is obtained in closed form

$$x = \frac{k_0 + \dfrac{\mu_1}{\mu}\left(J_2^{e} + 2\mu_1\chi^{e}\right)}{\left(1 + \dfrac{\mu_1}{\mu}\right) J_2^{e}} \tag{15}$$

For the case of perfect plasticity, $\mu_1 = 0$, we have $x = \frac{k_0}{J_2^e}$, $s_{ij}^{n+1} = s_{ij}^e \frac{k_0}{J_2^e}$. This is the well-known Wilkins correction rule that applies only to perfectly plastic media [1]. The formal extension of this rule to the hardening medium by setting $x = \frac{k_0 + 2\mu\chi^e}{J_2^e}$ leads to an erroneous result.

Another widely used plasticity theory is that due to *Prager and Drucker*.

$$F\left(J_1, J_2, k\right) = J_2 + aJ_1 - k = 0 \qquad \left(0 < a < 1\right) \tag{16}$$

The Eq. (12) gives the following expression for the correction coefficient *x*

$$J_2^e x + a\left[J_2^e - \frac{9Ka}{\mu} J_1^e\left(1-x\right)\right] - k_0 = 0, \qquad J_1 = J_1^e - \frac{9Ka}{\mu} J_1^e\left(1-x\right) \tag{17}$$

The correction coefficient involves an additional term due to the influence of the first invariant. One can see that the Wilkins correction rule does not apply in this case.

3. SPLITTING OF TIME-DEPENDED CONSTITUTIVE EQUATIONS

For the *elastoviscoplastic medium*, the plasticity condition is of differential type.

$$F_1\left(\sigma_{ij}^e, \chi_i^e, \Lambda, \dot{\Lambda}\right) = 0 \tag{18}$$

Solve this relation for $\dot{\Lambda}$ to obtain the equation

$$\tau \frac{d\Lambda}{dt} = \varphi\Big(F\left(J_i\left(\Lambda\right), \chi_i\left(\Lambda\right)\right)\Big) = \varphi\left(F\right) \tag{19}$$

where τ is the relaxation time and $\varphi(0) = 0$. The right-hand side of Eq. (19) involves the function $F = F\left(J_i\left(\Lambda\right), \chi_i\left(\Lambda\right)\right)$, that corresponds to the equilibrium plastic state for $\tau = 0$ of Eq. (12).

This decomposition scheme is stable, if the predictor scheme for the solution of the elastic problem is stable and there exist solutions of Eqs. (12) and (19).

Let consider the viscoplasticity condition of Mises type (13)

$$\tau \dot{E}_2^p = \varphi\Big(F\left(J_i, \chi_i\right) - k_0\Big), \qquad \varphi\left(0\right) = 0 \tag{20}$$

Than differential Eq. (19) will be in the following form

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2\mu}{\tau J_2^e}\left\{J_2^e x - k_0 + 2\mu_1\left[\chi^e + \frac{J_2^e}{2\alpha\mu}\left(1 - x^{\alpha}\right)\right]^{\beta}\right\}^{1/n} \tag{21}$$

For the perfect elastoviscoplastic medium we obtain

$$\frac{\Delta t}{\tau} = -\frac{1}{2\mu}\int_1^x \left(x - \frac{k_0}{J_2^e}\right)^{-1} dx, \qquad x - \frac{k_0}{J_2^e} = \left(1 - \frac{k_0}{J_2^e}\right)\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\frac{2\mu}{J_2^e}\right) \tag{22}$$

$$x \to x_*^p = \frac{k_0}{J_2^e} \qquad \text{when} \qquad \tau \to 0$$

This implies that the solution converges to the equilibrium one for $\frac{\Delta t}{\tau}\frac{2\mu}{J_2^e} >> 1$ and, hence, the difference scheme is absolutely stable at the corrector stage.

Another complicative example for implementation this approach is the multiscale model for the modeling damage and fracture of elastoviscoplastic materials suggested by author [3].

4. CONCLUSIONS

The proposed method has significant computational advantages as compared with the standard iteration methods. At each integration step, this method involves only one solution of an elasticity problem and the solution of one equation for the correction coefficients at the corrector stage. In contrast to this, the traditional methods require solving a system of n non-linear constitutive equations ($n \geq 6 + k$) at each point of the body in the case of explicit scheme, where k is the number of the internal variables. For the implicit schemes the advantage is greater in compare with explicit scheme [4].

ACKNOWLEDGMENTS
The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 06-01-00523) and by Program No. 13 of the Department of Energetic, Mechanical Engineering, Mechanics and Control Processes of the Russian Academy of Sciences.

REFERENCES

1. Wilkins M.L., ‘‘Numerical analysis of elastoplastic flows,” in Alder B., Fernbach S., and Rotenberg M. (Editors), Fundamental Methods in Hydrodynamics [Russian translation], pp. 212-263, Mir, Moscow, 1967.
2. V.N. Kukudzhanov, “Decomposition method for elastoplastic equations,” Mechanics of Solids, **1**, 73-80, 2004.
3. Kukudzhanov V.N., “Coupled models of elastoplasticity and damage and its integration of its equations, ”Mechanics of Solids, **6**, 103-135, 2006.
4. Kukudzhanov V.N., Levitin A.L., and Sinyk V.S., 2006, Numerical-analytical splitting method for modeling quasistatic processes of deforming damaged materials [in Russian]. In Problems of strength and plasticity. Proc. of High Schools, N-Novgorod, Vol. 68, pp. 7-21.

Information about authors

Professor **Vladimir N. Kukudzhanov**

Doctor of Sciences, Institute for Problems in Mechanics of RAS
Address: Pr. Vernadskogo 101, b.1, Moscow, 119526, Russia
E-mail: kukudz@ipmnet.ru

CONSINSTENT EULERIAN ELASTOPLAASTICITY

Meyers A., Xiao H., Bruhns O.T.

An Eulerian theory of elastoplasticity may be based on the additive decomposition of the stretching $\boldsymbol{D}$ in a recoverable and a dissipated part, i.e. $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{D}^{\mathrm{p}}$. Herein, the recoverable stretching $\boldsymbol{D}^{\mathrm{e}}$ is intended for the elastic resp. elastic-like behaviour while the dissipated stretching $\boldsymbol{D}^{\mathrm{p}}$ is related to the plastic flow in conjunction with a yield function f and hardening variables © for the isotropic hardening and α for the kinematic hardening. Since the spatial description relates to the actual, deformed, configuration, special care has to be taken for formulating the material law in an objective, frame indifferent way. This is of primary importance not only for the tensorial quantities in use but also for their time derivatives.
Based on Prager's yielding stationarity criterion [1], the exact integrability condition [2, 3, 4] and a weakened form of Ilyushin's postulate [5, 6] a consistent Eulerian description is presented that excels by the restricted number of material parameters and the simplicity of its formulation, and, moreover, is exempted from notions of elastic and plastic deformation.

1 Introduction

A valid phenomenological theory should be formulated in function of measurable physical quantities, like total deformation or total strain, forces or stresses etc, on one hand. On the other hand, elastoplastic deformations are characterised by elastic deformations and flow type deformation rates. The deformation may be not very small, even at the initiation of yielding. It may be expected that nonlinear effects in rotation and deformation may be essential, i.e. not negligible. This calls for an accurate formulation of elastoplasticity valid beyond the classical small-deformation case.

In the fifties of large century spatial, i.e. Eulerian, formulations were proposed by Hill [7] and Lehmann [8] for the phenomenological description of elastoplastic material behaviour. They were based on the additive decomposition of the stretching $\boldsymbol{D}$, namely,

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{D}^{\mathrm{p}} . \tag{1}$$

This decomposition may be motivated by the decomposition of the specific energy $\dot{W} = ² : \boldsymbol{D}$ into a recoverable (elastic behaviour) part $² : \boldsymbol{D}^{\mathrm{e}}$ and a dissipated (plastic flow) part $² : \boldsymbol{D}^{\mathrm{p}}$. Herein:

$\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})/2$	stretching,
$² = \mathrm{J}\ ±$	Kirchhoff Stress,
$±$	true (Cauchy) stress,
$\mathrm{J} = \det \boldsymbol{F}$	Jacobian,
$\boldsymbol{F} = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}}$	deformation gradient,
$\boldsymbol{L} = \dot{\boldsymbol{F}}\ \boldsymbol{F}^{-1}$	velocity gradient,
$\mathrm{d}\boldsymbol{X}$	undeformed line element element (reference configuration),
$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$	deformed line element element (actual configuration).

The description of $\boldsymbol{D}^{\mathrm{e}}$ and $\boldsymbol{D}^{\mathrm{p}}$, e.g. could be carried out by Truesdell's hypoelastic law [16] and Prandtl flow rule [17].

The discovery of the oscillatory stress behaviour in simple shear [9, 10, 11] was at the origin of new approaches to the theory of large elastic and inelastic deformations. Such approaches were based, e.g., on the introduction of a "primitive" quantity $\boldsymbol{E}^{\mathrm{p}}$ or the multiplicative decomposition of the deformation gradient into an elastic and a plastic part $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$. Such and similar decompositions create a number of new variables, partially related to the actual and partially to the reference configuration. It may be noteworthy to mention that any new variable additionally requires well founded physical interpretation and evolution law.

In the following it is shown that on the basis of well-approved principles it is possible to formulate an Eulerian material description, consistent with mathematics and justified by physics of elastoplastic material behaviour. This description is not requiring dodgy additional assumptions. Moreover, it is emphatic by the simplicity of its formulation.

2 Basic assumptions and deductions

We assume initially isotropic material, unstressed at its virgin state. Temperature effects are neglected.

Hencky strain and logarithmic rate Elastoplastic deformations are characterised by large deformations and the flow during elastoplastic loading. Suitable measures for the elastic deformation may be seen in the deformation gradient $\boldsymbol{F}$ and related quantities like the total strain for the deformation and the velocity gradient $\boldsymbol{L}$ and related quantities like the stretching $\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})$ and the vorticity $\boldsymbol{W} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})$ for the elastoplastic deformation. Using algebra it is shown in [12] that a corotational objective rate of the total Eulerian strain £ may be related to the stretching or deformation rate $\boldsymbol{D}$ by

$$\overset{\circ}{£} = \boldsymbol{D} \tag{2}$$

if and only if £ is the Hencky strain $\boldsymbol{h} = \frac{1}{2}\ln \boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\ln(\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})$ and the objective rate is the logarithmic rate [13, 14, 15], defined by

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{h}}{}^{(\log)} = \dot{\boldsymbol{h}} + \boldsymbol{h}\,\mathrm{t}^{\log} - \mathrm{t}^{\log}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \quad \text{with} \quad \mathrm{t}^{\log} = \boldsymbol{W} + \sum_{\mathrm{i}^1\mathrm{k}}^{\mathrm{m}}\left(\frac{\mathrm{b_k}+\mathrm{b_i}}{\mathrm{b_k}-\mathrm{b_i}} - \frac{2}{\mathrm{b_k}-\mathrm{b_i}}\right)\boldsymbol{B}_{\mathrm{i}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_k, \tag{3}$$

where $\boldsymbol{B}_i$ are the eigenprojections of $\boldsymbol{B}$ and $\mathrm{b_i}$ the *m* disparate eigenvalues. The importance of the use of a corotational rate may be clear from accepting the validity of Prager's yielding stationarity criterion, see below.

Prager's yielding stationarity criterion [1] Whenever the stress rate is vanishing, the yield surface $f(²\mathrm{l}\sim,©)$ should be stationary. Herein ~ is the back stress and κ the isotropic hardening parameter.

Let us assume that the backstress ~ and the kinematic hardening parameter κ obey the evolution laws

$$© = \boldsymbol{K}(²\mathrm{l}\sim,©) : \boldsymbol{D}^{\mathrm{p}}, \tag{4}$$

$$\overset{\circ}{\sim} = \mathcal{H}(²\mathrm{l}\sim,\kappa) : \boldsymbol{D}^{\mathrm{p}}, \tag{5}$$

where $\boldsymbol{K}$ and $\mathcal{H}$ are 2nd and 4th order tensors, respectively. In [4] it is shown that Prager's yielding stationarity criterion then leads to the double statement, that (i) the objective rates of the Kirchhoff and back stress have to be of same type and that (ii) this rate must be corotational.

Exact integrability 1984 Simo and Pister [15] showed that none of the known objective rates could make the hypoelastic equation

$$\boldsymbol{D} = \mathcal{K}(²) : \overset{\circ}{²} \tag{6}$$

exactly integrable to define an elastic relation. It should be noted that the logarithmic rate was unknown at that time. 1999 it has been shown [3] that only with the logarithmic rate an exactly integrable relation may be given, i.e. with the complementary potential $\overline{W}(2)$ we may formulate[1]

$$\boldsymbol{D} = \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial 2^2} : \overset{\circ}{2} \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{cases} \overset{\circ}{2} = \overset{\circ}{2}^{(\log)}, \\ \boldsymbol{h} = \dfrac{\partial \overline{W}}{\partial 2}. \end{cases} \tag{7}$$

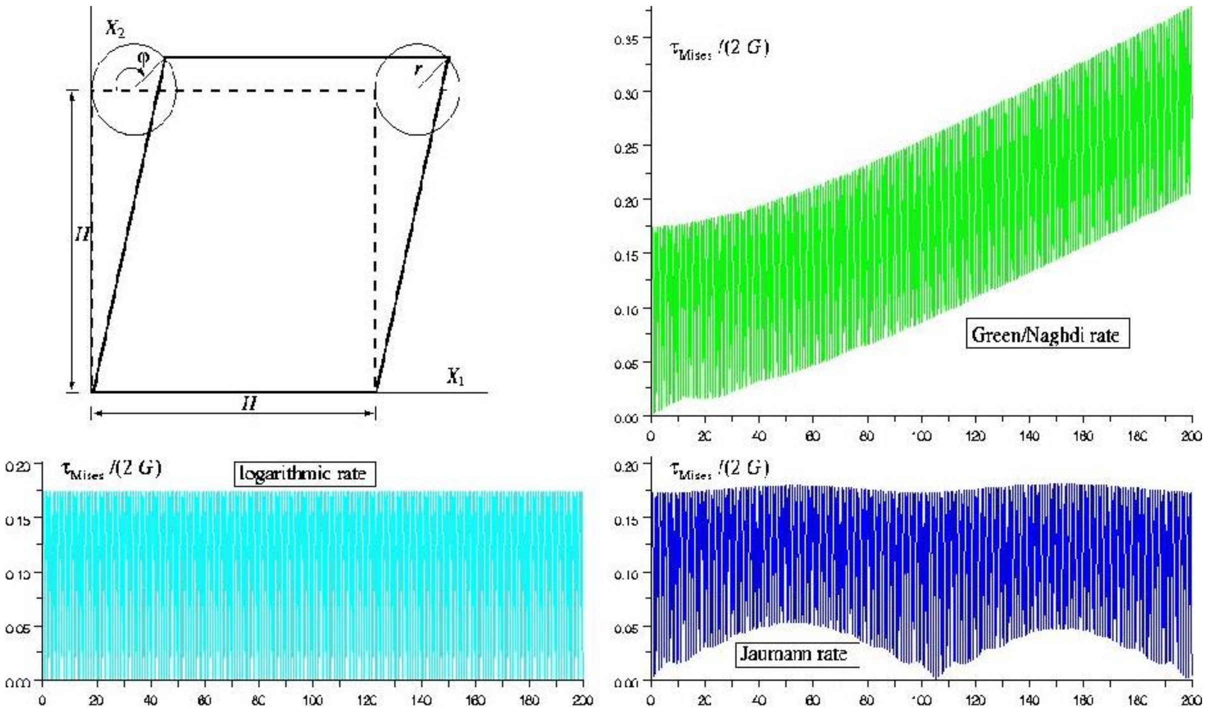


Figure 1: Cyclic deformation of a quadratic element

The effect of this statement may be clear from a cylic elastic tension/shearing process and hypoelastic material of grade zero. Let us consider a quadratic elastic element (Fig. 1, dashed line) where both upper corners are simultaneously rotated along a circle of radius $r = H/100$. The development of von Mises stress over the number of 200 cycles is shown for 3 different corotational rates. Evidently, the logarithmic rate is giving reliable results, thus confirming the results found above.

Weakened form of Ilyushin's postulate Now let $\boldsymbol{D}^{e} = \dfrac{\partial^2 \overline{W}}{\partial 2^{0}} : \overset{\circ}{2}^{(\log)}$ and consider the plastic stretching following the general law $\boldsymbol{D}^{p} = ¶\ \mathcal{G}(\overset{\circ}{2}^{(\log)}, 2\ |\sim, ©)$, where ξ is the plastic multiplier and $\mathcal{G}$ a four – dimensional tensor. From a weakened form of Ilyushin's postulate [5] we have the two results [6]:

1. The normality rule holds

[1] Note that equation (7) represents a very restricted subgroup of Truesdell's hypoelasticity [16] represented by equation (6)

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{p}} = \left(\text{¶} \, \frac{1}{\mathrm{h}} \frac{\partial f}{\partial \text{²}} : \overset{\circ}{\text{²}}{}^{(\log)} \right) \frac{\partial f}{\partial \text{²}} \qquad \text{with} \begin{cases} f(\text{²l\textasciitilde},\text{©}) & \text{yield function,} \\ \text{¶} & \text{plastic indicator,} \\ h(\text{²l\textasciitilde},\text{©}) & \text{plastic function.} \end{cases} \tag{8}$$

2. The yield surface is convex

$$(\text{²} - \text{²}_0) : \frac{\partial f}{\partial \text{²}} \geq 0. \tag{9}$$

3 Consistent Eulerian model

From the foregoing we conclude that

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{D}^{\mathrm{p}} = \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \text{²}^2} : \overset{\circ}{\text{²}}{}^{(\log)} + \text{¶} \, \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial \text{²}} : \overset{\circ}{\text{²}}{}^{(\log)} \right) \frac{\partial f}{\partial \text{²}} \tag{10}$$

is a valid Eulerian formulation for large elastoplastic deformations. It is based on well established principles, i.e. Prager's yielding stationarity criterion, the exact integrability criterion and a weakened form of Ilyushin's postulate. From these principles all results are gained by purely mathematical operations. Therefore we call the model (10) mathematically consistent and physically sound. From the plastic consistency condition $\dot{f} = 0$ we find

$$h = -\frac{\partial f}{\partial \text{²}} : \mathcal{H} : \frac{\partial f}{\partial \text{²}} - \frac{\partial f}{\partial \text{©}} \frac{\partial f}{\partial \text{²}} : \boldsymbol{K} \, . \tag{11}$$

For the plastic indicator ¶ we may formulate the unified loading criteria

$$\text{¶} = \begin{cases} 1 \;\text{ if }\; f = 0 \;\text{ and }\; \dfrac{\partial f}{\partial \text{²}} : \left(\dfrac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \text{²}^2} \right)^{-1} : \boldsymbol{D} > 0, \\ 0 \;\text{ if }\; f = 0 \;\text{ and }\; \dfrac{\partial f}{\partial \text{²}} : \left(\dfrac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \text{²}^2} \right)^{-1} : \boldsymbol{D} \leq 0, \\ 0 \;\text{ if }\; f < 0, \end{cases} \tag{12}$$

valid for hardening and softening elastoplasticity.

4 Conclusions

Based on well established principles an Eulerian elastoplasticity model could be presented. It is mathematically consistent and physically sound. It doesn't have any recursion to the notion of strain or elastic and/or plastic deformation. Hence, no additional evolution laws are to be formulated for variables resulting from a deformation decomposition. It is expected that the simple structure of this Eulerian elastoplasticity model makes numerical computations fast and stable.

References

1. W. Prager. An elementary discussion of definitions of stress rate. Quart. Appl. Math., 18:403-407, 1960.
2. O. T. Bruhns, H. Xiao, and A. Meyers. Self-consistent Eulerian rate type elasto-plasticity models based upon the logarithmic stress rate. Int. J. Plasticity, 15:479-520, 1999.
3. H. Xiao, O. T. Bruhns, and A. Meyers. Existence and uniqueness of the integrable - exactly hypoelastic equation $\overset{\circ *}{\tau} = \lambda(\mathrm{tr}\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$ and its significance to finite inelasticity. Acta Mechanica, 138:31-50, 1999.
4. H. Xiao, O. T. Bruhns, and A. Meyers. The choice of ob jective rates in finite elasto - plasticity: general results on the uniqueness of the logarithmic rate. Proc. Roy. Soc. London A, 456:1865-1882, 2000.
5. A. A. Ilyushin. On a postulate of plasticity. Prikl. Math. Mekh., 25:503-507, 1961.
6. O. T. Bruhns, H. Xiao, and A. Meyers. A weakened form of Ilyushin's postulate and the structure of self-consistent Eulerian finite elastoplasticity. Int. J. Plasticity, 21:199-219, 2005.
7. R. Hill. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. J. Mech. Phys. Solids, 6:236-249, 1958.
8. Th. Lehmann. Einige Betrachtungen zu den Grundlagen der Umformtechnik. Ing.-Arch., 29:1-21, 1960.
9. Th. Lehmann. Anisotrope plastische Formänderungen. Romanian J. Techn. Sci. Appl. Mechanics, 17:1077-1086, 1972.
10. J. K. Dienes. On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies. Acta Mechanica, 32:217-232, 1979.
11. J. C. Nagtegaal and J. E. de Jong. Some aspects of non-isotropic work hardening in finite strain plasticity. In E. H. Lee and R. L. Mallet, editors, Plasticity of Metals at Finite Strain: Theory, Computation and Experiment, pages 65-106, Stanford University, Stanford, 1982.
12. H. Xiao, O. T. Bruhns, and A. Meyers. Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate. Acta Mechanica, 124:89-105, 1997.
13. Z. H. Guo, Th. Lehmann, and C. S. Man. Twirl tensors and the tensor equation**AX - XA = C**. J. Elasticity, 27:227-245, 1992.
14. D. R. Metzger and R. N. Dubey. Corotational rates in constitutive modelling of elastic - plastic deformation. Int. J. Plasticity, 4:341-368, 1987.
15. J. C. Simó and K. S. Pister. Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications. Compt. Meth. Appl. Mech. Engng., 46:201-215, 1984.
16. C. Truesdell. Hypo-elasticity. J. Rat. Mech. Anal., 4:83-133, 1955.
17. L. Prandt. Spannungsverteilung in plastischen Körpern. Proc. 1st Intern. Congr. Appl. Mech., pages 43-54, Delft, 1924

Information about authors

Dr.-Ing. Albert Meyers, Senior Academic Counsellor
Chair of Technical Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Ruhr-University Bochum
D-44780 Bochum, Germany, Tel: +49 / 234 / 32-22483,Fax: +49 / 234 / 32-02483
E-mail: meyers@tm.bi.rub.de

Prof. Dr.-Ing. Otto Timme Bruhns
Chair holder
Chair of Technical Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Ruhr-University Bochum
D-44780 Bochum, Germany, Tel: + 49 / 234 / 32-23080, Fax: +49 / 234 / 32-14229
E-mail: bruhns@tm.bi.rub.de

Prof. Dr. Heng Xiao
Chief Engineer
Chair of Technical Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Ruhr-University Bochum
D-44780 Bochum, Germany,Tel: + 49 / 234 / 32-22485, Fax: +49 / 234 / 32-14229
E-mail: xiao@tm.bi.rub.de

ELASTO-PLASTIC ANALYSIS IN SOIL AND ROCK MECHANICS BY USING HYBRID-TYPE PENALTY METHOD

Norio Takeuchi

1. INTRUDUCTION

In this paper, we propose Hybrid-type penalty method (HPM) [1]. Present method introduce hybrid displacement model based on the modified principle of virtual work. In this model, subsidiary conditions are introduced into the framework of the variational expression with Lagrange multipliers. Physical meaning of the Lagrange multiplier is equal to the surface forces on the intersection boundary. Then, the concept of the spring of RBSM[2] is applied to the Lagrange multiplier. Compatibility of the displacement on the intersection boundary is approximately introduced using the penalty as a spring constant. Therefore, the displacement filed can be assumed for each element without restraining by the condition of compatibility. In this paper, the theoretical basis of this method is described first, and then the applicability of the method to the stability problems of soil and rock foundations is discussed.

2. BRIEF FORMULATION OF HYBRID-TYPE PENALTY METHOD

The local form of the equilibrium equation can be written by

$$\mathrm{div}\sigma + f = 0 \ \text{ in } \Omega \tag{1}$$

$$\sigma = \sigma^t \ \text{ in } \Omega \tag{2}$$

where Ω is reference configuration, f is the body force per unit volume, σ is the Cauchy stress tensor respectively. Here $\Gamma_u := \partial_u \Omega \subset \partial\Omega$ ($\partial\Omega$: smooth boundary) where displacement are prescribed as

$$u_{\Gamma_u} = \hat{u} \ \left(\text{given}\right) \tag{3}$$

Where as $\Gamma_\pm := \partial_\pm \Omega \subset \partial\Omega$ where tractions $t := \pm n$ are prescribed as

$$\sigma\big|_{\Gamma_\sigma} \hat{n} = \hat{t} \ \left(\text{given}\right) \tag{4}$$

Here $\hat{n}$ is the field normal to the boundary $\Gamma_\pm$. The constitutive equation to the elastic body is provided as follows by the use of the elasticity tensor C .

$$\pm = C : £ \tag{5}$$

The domain Ω will be discretion by the finite number of sub-domain $\Omega^{(e)} \subset \Omega$ with the closed boundary $\Gamma^{(e)} := \partial\Omega^{(e)}$:

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{M} \Omega^{(e)} \ \text{ where } \Omega^{(e)} \cap \Omega^{(q)} = 0 \ \left(r \neq q\right) \tag{6}$$

where *M* is the total number of sub-domain.

We let $\Gamma_{<ab>}$ denote the common boundary in two sub-domain $\Omega^{(a)}$ and $\Omega^{(b)}$ adjoined, define as,

$$\Gamma_{<ab>} \underset{def}{=} \Gamma^{(a)} \cap \Gamma^{(b)} \tag{7}$$

Relative to $\tilde{u}^{(\sim)}$ and $\tilde{u}^{(b)}$ which is the displacement on the intersection boundary,

$$\tilde{u}^{(\sim)} = \tilde{u}^{(b)} \ \ on \ \Gamma_{<ab>} \tag{8}$$

This subsidiary condition is introduced into the framework of the variational expression with Lagrange multipliers ª as follows:

$$H_{ab} \underset{def}{=} ¢ \int_{\Gamma_{<ab>}} ª \left(\tilde{u}^{(\sim)} - \tilde{u}^{(b)}\right) dS \tag{9}$$

where $¢\left(\bullet\right)$ shows the variation of $\left(\bullet\right)$.

The hybrid type virtual work equation can be described as follows about N intersection boundary.

$$\sum_{e=1}^{M}\left(\int_{\Omega^{(e)}} \text{±} : grad(\text{¢}u)dV - \int_{\Omega^{(e)}} f \cdot \text{¢}udV\right) - \sum_{s=1}^{N}\left(\text{¢}\int_{\Gamma_{<a>}} \text{a} \cdot \left(\tilde{u}^{(a)} - \tilde{u}^{(b)}\right)dS\right) - \int_{\Gamma_{\text{±}}} \hat{t} \cdot \text{¢}udS = 0, \quad \forall \text{¢}u \in V \tag{10}$$

Physical meaning of the Lagrange multiplier a is equal to the surface force on the intersection boundary $\Gamma_{<ab>}$.

In this paper, we assume the following independent linear displacement field $u^{(e)}$ with rigid displacement, rigid rotation and constant strain in each sub-domain.

$$u^{(e)} = N_d^{(e)} d^{(e)} + N_{\text{£}}^{(e)} \text{£}^{(e)} \tag{11}$$

Where, $d^{(e)} = \left[u^p, v^p, \text{g}^p\right]^t$ is the displacement vector which has the rigid displacement and the rigid rotation at a typical point within the sub-domain, $\text{£}^{(e)} = \left[\text{£}_x^p, \text{£}_y^p, \text{¥}_{xy}^p\right]^t$ is the constant strain vector within the sub-domain and $N_d^{(e)}$ and $N_{\text{£}}^{(e)}$ is a linear interpolation function respectively.

We assume that the surface force $\text{a}_{<ab>}$ of boundary between sub-domain $\Omega^{(a)}$ and $\Omega^{(b)}$ is able to express as follow:

$$\text{a}_{<ab>} = k \cdot \text{¢}_{<ab>} \tag{12}$$

where, k is the penalty function, $\text{¢}_{<ab>}$ is relative displacement vector of sub-domain boundary $\Gamma_{<ab>}$ as follows:

$$\text{¢}_{<ab>} = R_{<ab>}^{(a)} \tilde{u}^{(a)} + R_{<ab>}^{(b)} \tilde{u}^{(b)} = \sum_{l=1}^{2} R_{<ab>}^{(l)} \tilde{u}^{(l)} \tag{13}$$

Equation (9) can be described as follows:

$$H_{ab} = -\text{¢}\int_{\Gamma_{<ab>}} \text{¢}_{<ab>}^t \cdot k \cdot \text{¢}_{<ab>} dS \tag{14}$$

The virtual displacement $\text{¢}u$ is expressed by the following equation.

$$\text{¢}u^{(e)} = N_d^{(e)} \text{¢}d^{(e)} + N_{\text{£}}^{(e)} \text{¢£}^{(e)} \tag{15}$$

Then, we obtain the following discretized equations.

$$KU = P \tag{16}$$

where, K and P are as follows:

$$K = \sum_{e=1}^{M} K^{(e)} + \sum_{s=1}^{N} K_{<s>}, \quad P = \sum_{e=1}^{M} P^{(e)},$$

$$K^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \left(B^{(e)}\right)^t D^{(e)} B^{(e)} dV, \quad K_{<s>} = \int_{\Gamma_{<s>}} B_{<s>}^t k B_{<s>} dS,$$

$$P^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \left(N^{(e)}\right)^t f dV + \int_{\Gamma_{\text{±}}} \left(N^{(e)}\right)^t T dS$$

The discretization equation of this model becomes a simultaneous linear equation shown in equation (16). Left coefficient matrix K consists of stiffness in the sub- domain and subsidiary condition on the intersection boundary for the adjacent sub-domain. The discontinuous phenomenon of opening etc. can be expressed without changing degree of freedom by changing the value of k of equation (12) to zero.

3. NUMERICAL ALGORITHM FOR MATERIAL NON-LINEAR ANALYSIS

For determination of spring constants in slip (shear) failure, the ordinary plastic flow rule is adopted. It is assumed that the plastic yielding will occur if the tractions on intersection boundary satisfy the following condition.

$$f(ª) = 0,\ Q(ª) = 0 \tag{17}$$

where, $f(ª)$ is the yield function in the flow theory of plasticity and $Q(ª)$ is the plastic potential, and ª is the surface force on the intersection boundary.

Based on the associated flow rule in which yield function is equal to plastic potential, the relation between stress increments and strain (relative displacement) increment can be finally obtained in the following form:

$$\Delta ª = k^{ep}\Delta ¢\,,\ k^{ep} = \left(k^e - \frac{k^e \dfrac{\partial f}{\partial ª}\dfrac{\partial Q}{\partial ª} k^e}{\dfrac{\partial f}{\partial ª} k^e \dfrac{\partial Q}{\partial ª}} \right) \tag{18}$$

where, k^e is the matrix for penalty function and superscript e indicates the status of elasticity. In equation (18), it obey the associate flow rule if $f \equiv Q$.

Yield function g and plastic potential Φ is expressed by:

$$g(\pm) = 0,\ \Phi(\pm) = 0 \tag{19}$$

where, ± is the stress in the element. In each element, we assume the relation of the stress-strain with the plastic flow rule. Then, we obtain following relation.

$$\pm = D^{ep}£^e\,,\ D^{ep} = \left(D^e - \frac{D^e \dfrac{\partial g}{\partial \pm}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \pm} D^e}{\dfrac{\partial g}{\partial \pm} D^e \dfrac{\partial \Phi}{\partial \pm}} \right) \tag{20}$$

In the above equation (20), it obey the associated flow rule if $g \equiv \Phi$.

The numerical algorithm is proposed by applying the incremental load procedure developed by YAMADA for the nonlinear problem of soil foundations whose failure condition is described the above.

The load $P^{(i+1)}$ at the (i+1)th step can be calculated by using the load $P^{(i)}$ and the rate of load increment r_i at the present step (i). If crack initiation will cause stress relaxation, relieved forces are taken into account as follows:

$$P^{(n)} = \prod_{i=0}^{n-1}[(1-r_i)]P + \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=k}^{n}[(1-r_i)]F^{(k-1)}\right) \tag{21}$$

where $F^{(k)}$ is the relieved force at the *k*th step.

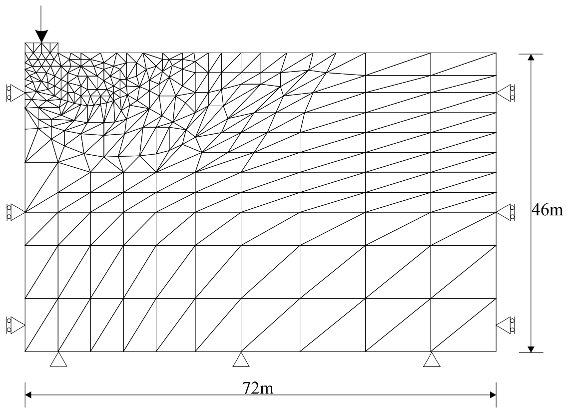
Here r_{TOTAL} implies the cumulative rate of load increment and it can be defined as follows:

$$r_{TOTAL} = \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=0}^{k-1}[(1-r_i)]\right)r_k \tag{22}$$

The calculation must be repeated until $r_{TOTAL} = 1$ in each stage of loading.

4. NUMERICAL EXAMPLES

We try to exam the problem of the bearing capacity. Figure 1 shows the analysis model and mesh division. It's analyzed under the condition of plane strain.



Young's Modulus = 98.1 kN/mm^2 Poison's ratio = 0.3
Shear stress = 9.81 kN/mm^2
Angle of internal friction = 30 deg
Specific weight = 17.16 KN/mm^3

Figure 1. Numerical model and mesh division, material properties

Figure 2 is the model of considering on the intersection boundary and yielding in each element at the same time. It shows the slip line and yield area. In the early stage, it seems the progress of fracture near the loading plate. And in the collapse load, fracture has spread in the whole region.

Figure 3 show the relation of Load-Displacement. As shown in figure, in case of the model which deal the fracture on the intersection boundary, limit load exceed the bearing capacity. And also, in case of the model which deal the fracture on intersection boundary and yielding in each element at the same time, the solution is smaller than the limit bearing capacity. So, it's obtained the upper and lower bound value. Therefore, true solution exists between upper bound value and lower bound value (hatching area).

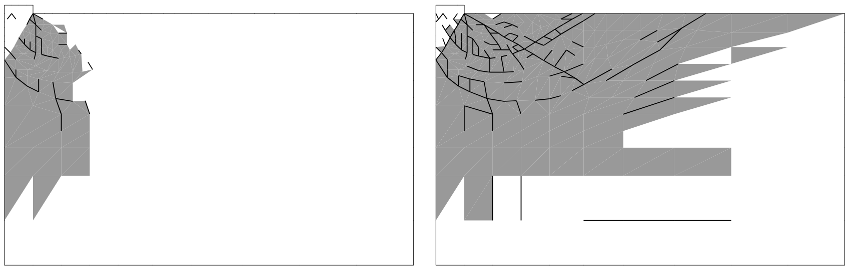


Figure 2. Slip line and Yielding Area (50.21KN, 99.87KN)

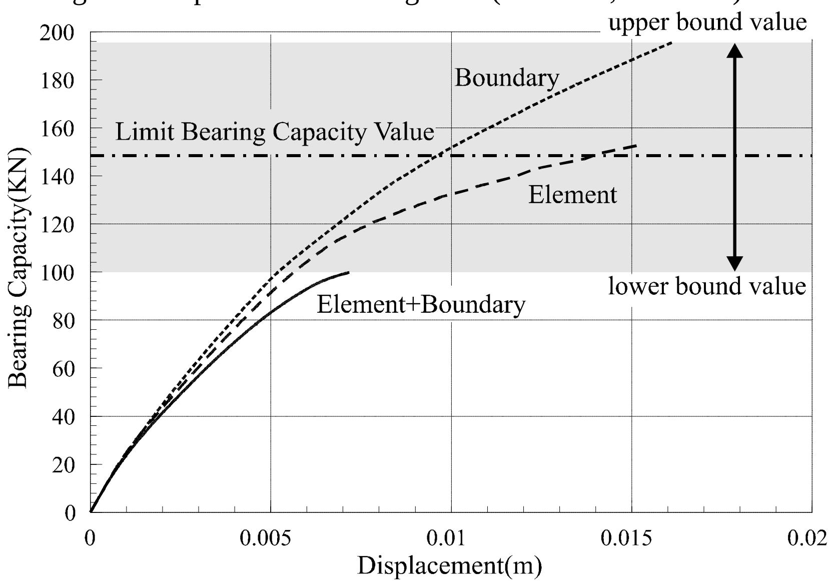


Figure 3. Relation of Load-Displacement

5. CONCLUSION

This paper presents the new approach for the discrete limit analysis by using HPM. Present method is satisfied the continuity of surface force and collapse feature. So, it is known to obtain the upper bound solution. And more, present method can estimate the stiffness matrix in each sub-domain. Namely, we can obtain the upper bound and lower bound solution considers the plasticity condition in each element.

REFERENCES

1) Takeuchi, N., Ohki, H., Kambayashi, A. and Kusabuka, M. : Non-linear analysis by using discrete model applied penalty method in hybrid displacement model, Transactions of Japan Society for Computational Engineering and Science Paper No. 20010002, 2001.(in Japanese)

2) Kawai, T.: New element models in discrete structural analysis, Journal of the Society of Naval Architects of Japan, No.141, pp.187-193, 1977.

Information about authors

Norio Takeuchi
Dr. Eng., Professor
Address : 3-7-2 Kajino-cho, Koganei, Tokyo 184-8584, Japan
Phone: +81-42-387-6272; E-mail: takeuchi@hosei.ac.jp

THE PENETRATION OF DEFORMABLE INDENTOR INTO HALF-SPACE IN THE PRESENCE OF DISCHARGE CURRENT AND MAGNETIC FIELD

Vantsyan A.A., Hovsepyan D.Kh.

The problem of distribution of densities of current and force fields in the presence of capacitor discharge through electroconducting media by form of cylinder is considered. Based on both theoretical and experimental investigations of the above simplified problem is carried out in [1,2]. The electroconducting body (1) perforating the plate (2) and conducting with electroconducting media (3) circuit a chain shortly, after which the discharge of capacitor (4) takes place (Fig.1).

The significant action of discharge current on the process of further motion of body in media was considered experimentally and theoretically in [1÷3].

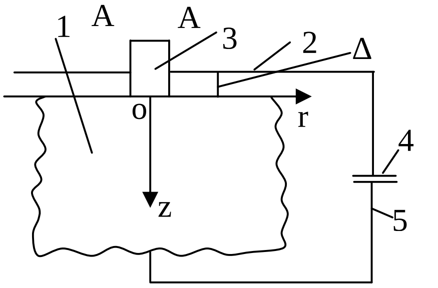


Fig. 1

In order to clarify of quantitative action of discharge current passed through body and media it is necessary to know the distribution of densities of currents components j_z and j_r depending from the space coordinates r,z, and coordinate of time.

By means of distribution of regularity of j_r and j_z, the change of Ampere-force $\bar{j} \times \overline{H}$ can be determined from coordinates and time.

For the purpose of maximal braking of penetration of bodies into media it is necessary optimally to use the energy of capacitor $CU^2/2$. For that it is necessary, that the maximal discharge of capacitor was carried out on the process of short circuit of chain, i.e. till the moment when the body penetrating into media entirely passed the plate 2. The action of currents and magnetic fields induced in media on the penetration process is less efficient not regarding that without Ampere-forces which act on body as before as after the switching off the chain the effect of electronoplasticity takes place. Namely, the current passing through body till switch off the chain brings to obtuse of penetrating bodies. So, the maximal using of capacitors energy till switch off the chain is essential. The control of discharge process of capacitor may carry out by variation of parameters L,R,C.

The discharge of chains characterized by equations

$$L\frac{d^2 j_0}{dt^2} + R\frac{dj_0}{dt} + \frac{j_0}{C} = 0 \qquad (1)$$

by given initial conditions $t = 0,\ j = 0,\ \frac{dj}{dt} = 10^5\ \frac{A}{m^2\sec}$, which are taken from experiments [3], L,R,C are inductivity, resistance and capacity of chains respectively, j-density of current.

The scheme of solution of problem is shown on Fig. 2, where the following boundary conditions are valid [4,5]:

$\Omega_1 = \omega_1 \cup \omega_2$ is the surface of the penetrating indentor, $\Omega_2 = \omega_3 \cup \omega_4$ is the free surface.

$\sigma_{nn} = \sigma_{n\tau} = 0$ for $(r,z) \in \omega_1 \cup \omega_3$, $u = \text{v}$ for $(r,z) \in \omega_4$

(is fulfilled automatically, and starting from the solution we can take μ_4 enough large such that it will correspond to the model of infinite media). On ω_2 $u_n^+ = u_n^-$, $u_\tau^+ = u_\tau^-$ or $u_r^+ = u_r^-$, $u_z^+ = u_z^-$ which is corresponding to the condition $\bar{u}^+ = \bar{u}^-, \bar{\text{v}}^+ = \bar{\text{v}}^-$ of continuity of the displacement vectors and velocities on the contact surface, where the quantities signed by + are the solutions by the side of indentor, and *-s* are the solutions by the side of target.

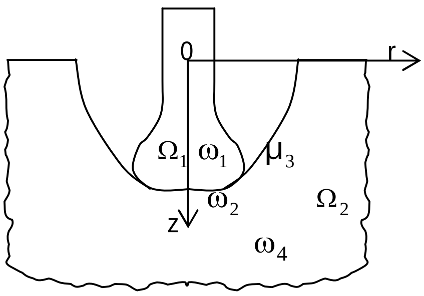
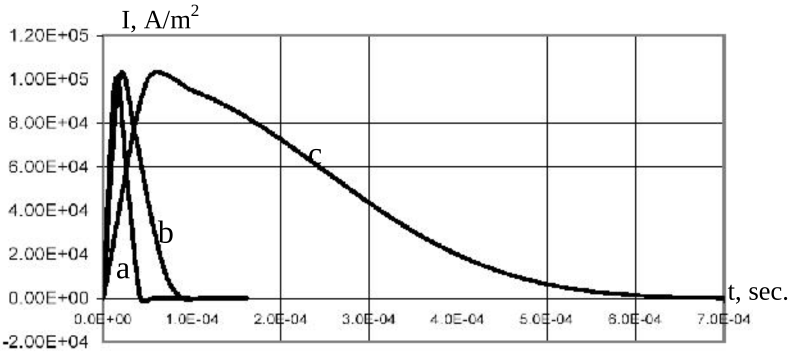


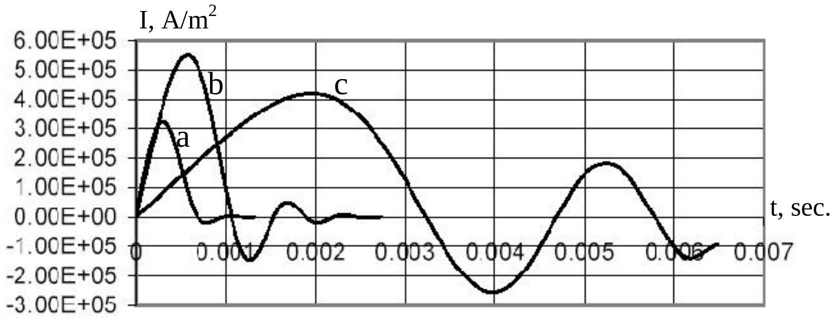
Fig. 2

On Fig. 3,4,5 the dependence of full current of chains from parameters L,R,C are brought. As it is seen from graphs by variation of parameters L,R,C the main part of discharge current should be used till switch-off moment of chain in order to use the energy of capacitor maximally.



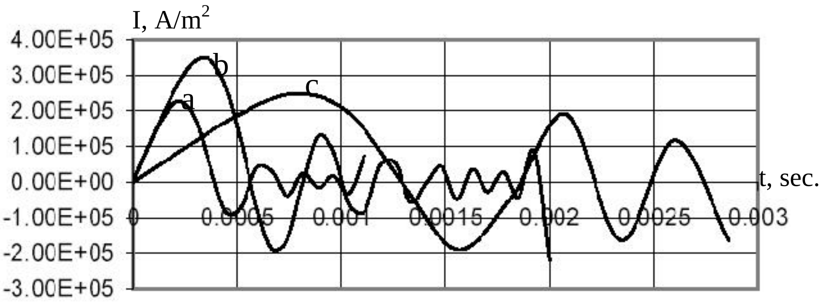
a) C=0.002F, b) C=0.004F, c) C=0.02F, $\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{dt}} = 10^5 \frac{A}{m^2 \sec}$, $\mathrm{L} = 0$, $\mathrm{R} = 0.001\mathrm{Ohm}$

Fig. 3, Dependence of full current from capacity



a)L=10^{-8}Hn, b)L=$5 \cdot 10^{-8}$Hn, c)L=10^{-6}Hn, $\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{dt}} = 10^5 \frac{A}{m^2 \sec}$, $\mathrm{R} = 0.001\mathrm{Ohm}$, $\mathrm{C} = 0.02\mathrm{F}$

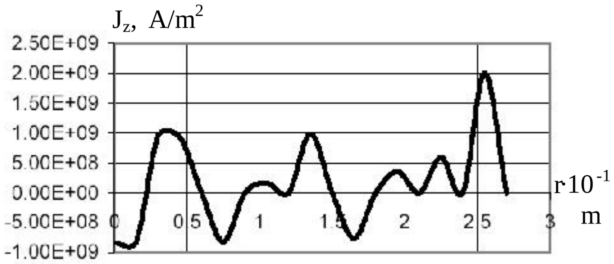
Fig. 4, Dependence of full current from inductivity of chain



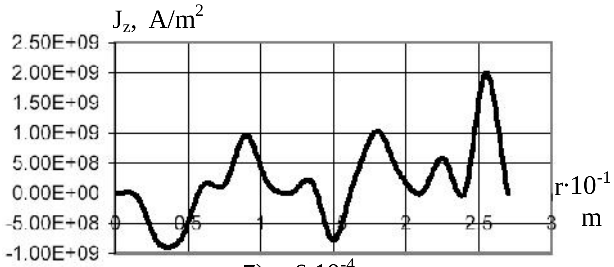
a)L=10^{-8} Hn, b)L=$5 \cdot 10^{-8}$Hn, c)L=10^{-6}Hn, $\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{dt}} = 10^5 \frac{A}{m^2 \sec}$, $\mathrm{R} = 0.001\mathrm{Ohm}$, $\mathrm{C} = 0.002\mathrm{F}$

Fig. 5, Dependence of full current from inductivity of chain

On Fig. 6,7 the dependence of $j_z(r,t)$ from initial value I_0 and value of parameters L,R,C are shown for the case of impact velocity V_0=500m/sec. Easy to note, that for $\mathrm{t} \approx 10^{-6}$ sec. the discharge currents are force out on cylindrical surface of media, later the currents during tends to axis of cylinder of time $\mathrm{t} \approx 10^{-5}$ sec., i.e. the reverse Skin-effect takes place. For time $\mathrm{t} \approx 10^{-5}$ sec. near axis currents are predominance, as Pinch-effect by value $\bar{\mathrm{j}} \times \overline{\mathrm{H}}$ prevents the motion of body into media. On dependence from nose form of penetrating body the contact surface of body and media can be different, the current I_0 at the moment t=0 also can be different. As simple case in the paper the values of dI/dt =1000A/(m^2sec), L=$8 \cdot 10^{-5}$Hn, R=0.001Ohm, C=0.02F are considered.



6) $t=7\cdot10^{-4}$sec.



7) $t=6\cdot10^{-4}$sec.

The Ampere-force along on-z from current J_r also prevent of penetration of bodies into media.

Analyzing the results of numerical calculations of present paper and the results of experiments presented in [3] one can conclude that the distribution of discharge current in metallic media have the vibration character both of space coordinate as well as of time coordinate.

Analyzing the graphs of value of stress σ_{zz} and σ_{rr} for indicated parameters L,R,C of chains and the graphs of velocities of impact V for different time of penetration, one can see the behaviour of compress and rarefaction waves in target, also of motion of plasticity fronts in target and indentor.

At contact moment of indentor with target consequence of discharge, explosion near nose of indentor the fly away of fragments takes place. The motion and density of fragments are investigated in details.

For clarifying of influence of distance between plate and target Δ the phenomenon of penetration for different Δ are represented. It is easy to see that along penetration in the case of closing of chain LRC the significant deformation of indentor carried out. After switch off the chain in the equations $j = 0$ must be taken.

The comparison shows that the presence of current brings to essential deformation of indentor, consequence to degree of depth of penetration.

References

1. Areshyan G.A., Vantsyan A.A., Piliposyan G.T. Theoretical and experimental investigations of distribution of discharge currents in the cylindrical forms. Izv. AS Arm SSR, Mechanica, 1991, v. 44, №1, pp 37-43.
2. Bagdoev A.G., Vantsyan A.A., Pakhalov V.B. Definition of the distribution of currents and elastic fields in the presence of impulse discharging in metals. Izv. AS Arm SSR, Mechanica, 1986, v. 39, №1, pp 3-11.
3. Vantsyan A.A. The influence of electromagnetic fields and anisotropic properties of media on dynamic phenomena in continuous media. “Gitutyun” NAS AR., E, 2004, 224p.
4. Vantsyan A.A., Hovsepyan D.Kh. The penetration of media in the presence of magnetic field.V International conference “The problems of dynamics of interaction of deformable media”. Goris, 2005, p 105-115.
5. Vantsyan A.A., Hovsepyan D.Kh. The stress-strain state in impact of deformable indentor on elastic half-space in the presence of discharge currents. V International conference “The problems of dynamic interaction of deformable media”. Goris, 2005, pp 116-123.
6. Gridneva V.A., Korneev A.I., Trushkov V.G. The numerical calculation of stress state and destructions of plate by finite thickness in the case of impact by projectiles on different form. Izv.AS SSSR, MTT.1977, №1 pp.146-157.

Contact Information:

Vantsyan A.A., Chief Sci. Res. Doctor Ph.M. Sci. Professor Institute of Mechanics of NAS RA
Tel: (374 10)242365(h.), (374 10)568192, (374 93)524501(cell).E-mail: Vantsyan@mechins.sci.am
Hovsepyan D.Kh., Junior Sci. Res. Institute of Mechanics of NAS RA
Tel: (374 10)348375(h.), (374 10)568192, (374 94)552008(cell).E-mail: hovsepyan@hotmail.com

BASIC SYSTEMS OF EQUATIONS OF CONTINUUM MECHANICH REFINED THEORIES FOR THIN-WALLED VISCO-ELASTIC STRUCTURES

Tamaz S.Vashakmadze

Below there is constructing three-dimensional (respect to spatial coordinates) nonlinear dynamical systems of partial differential equations (PDE) which contains as particular cases Navier-Stokes' equations and nonlinear systems of PDE theory of elasticity. By this presentation we prove that nonlinear appearances, observed in problems of solid mechanics, may be detected in the Navier-Stokes' type equations and vice versa.

Using C.Fletchers version [1] and the methodology by P.Ciarlet [2], the basic system of PDE of continuum mechanics may be written in the following form:

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)= f-(1-\Gamma)\nabla p+\nabla\left[(1+\nabla u)\tau\right] , \qquad (1)$$

where ° is a density, p is pressure, $v=(v_1,v_2,v_3)^T$ is vector of velocities, f is known volume forces, D/Dt is total or convective derivative, ² is stress tensor, $u=(u_1,u_2,u_3)^T$ denotes displacement vector, $\partial u/\partial t=v$, $\nabla=\left(\partial_1,\partial_2,\partial_3\right)^T=\text{grad}$.

It's evident that Newton's law for viscous flow and Hooke's generalized law for solid structures may be rewrite in the common form:

$$\tau=\left[\left(1-\Gamma\right)\frac{\partial}{\partial t}+\Gamma\right]A_\Gamma\cdot\varepsilon , \qquad (2)$$

where symmetric matrix A_Γ corresponds to fluids, if $\Gamma=0$ and – to solid media if $\Gamma=1$. The strain tensor is $\varepsilon=\left(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{33},\varepsilon_{23},\varepsilon_{13},\varepsilon_{12}\right)^T$, $2\varepsilon_{ij}=\partial_i u_j+\partial_j u_i+u_{i,k}u_{j,k}$.

For conditions of conservation of mass or equations of continuity we have:

$$\left[(1-\Gamma)\partial t+\Gamma\right]B_\Gamma\left[\varepsilon\right]=0 . \qquad (3)$$

Here $B_0\left[\rho,\varepsilon\right]=\rho+\nabla(\rho v)$, $B_1[\varepsilon]=\left(B_{11},B_{12},B_{13},B_{14},B_{15},B_{16}\right)^T$ describes of B. Saint-Venant – E. Beltrami conditions of continuity, which have a form

$$\begin{aligned}&B_{1i}(\varepsilon)=\varepsilon_{ii,kl}+\varepsilon_{kl,ii}-\varepsilon_{li,ki}-\varepsilon_{ki,li}+C_{1i}\left(u\right), i=1,2,3, k\neq l, i\neq k, i\neq l\\&B_{17-i}\left(\varepsilon\right)=\varepsilon_{ii,kl}+\varepsilon_{kl,ii}-\varepsilon_{li,ki}-\varepsilon_{ki,li}+C_{17-i}\left(u\right), i=1,2,3, k=l=i, x_1=x_4,\end{aligned} \qquad (4)$$

$C_{ij}\left(u\right)$ are nonlinear differential forms of at most than 3 order.

From (1) follows of Euler and Navier–Stokes' PDEs, if $\Gamma=0$, $\nabla u=0$ $\tau_{ij}=-\frac{2}{3}\mu\delta_{ij}\text{div}v+\mu\left(v_{i,j}+v_{j,i}\right)$ (see [1], ch.11).

If $\Gamma=1$ and $\nabla\left(1+\nabla u\right)\tau=\left(\partial_j\left(\tau_{1j}+\tau_{kj}u_{1,k}\right),\partial_j\left(\tau_{2j}+\tau_{kj}u_{2,k}\right),\partial_j\left(\tau_{3j}+\tau_{kj}u_{3,k}\right)\right)^T$, from (1) follows system of nonlinear PDE of spatial theory elasticity (see [2]). If $\Gamma=0$ and $\nabla u\neq 0$, (1) represents Navier – Stokes type PDEs.

Between publications dedicating to construction and justification of plate and shell theory we separate [3]. In this monograph the problem of physical soundness of the von Karman system is studied. P. Ciarlet in particular wrote here: "The two-dimensional von Karman equations for nonlinearly elastic plates, originally proposed by T. von Karman in 1910 (see p. lxiii), play an almost mythical role in applied mathematics. While they have been abundantly, and satisfactory, studied from the mathematical standpoint, as regards notably various questions of existence, regularity, and bifurcation of their solutions, their physical soundness has often been seriously questioned. Using the same method as in ch.4 we show in this chapter that the von Karman equations may be given a full justification by means of the leading term of a formal assymptotic expansion (in terms of the thickness of the plate as the “small “parameter) of the exact three-dimensional equations of nonlinear elasticity associated with a specific class of boundary conditions that characterizes the von Karman plates” (in full see [3], ch.5, pp. 367-406,[4], ch.17, pp.694-699).

We remind, that for the justification of von Karman theory the basic bounds (which used in[3], ch.5,pp.369-370) are following relations, artificial in the whole and typical for asymptotic methods:

Below by [5], ch.1, we suggest the direct method constructing the von Karman equations in physical soundness; presented in these equations values have concrete physical sense inasmuch as they are: averaged components of the displacement vector, bending and twisting moments, shearing forces, surface efforts and rotations of normals. Further, the von Karman equations follow as result of an equality to zero of the main vector and moment for the equilibriuming elastic body.

Let the initial spatial problem of the theory of elasticity for an anisotropic homogeneous elastic plate has a form (see e.g. [2]). Equilibrium system of differential equations:

$$\partial_j\left(\sigma_{ij}+\sigma_{kj}\sigma_{ik}\right)=f_i\ . \tag{5}$$

Boundary conditions:

$$l^{\pm}[u]=\sigma_{i3}+\sigma_{j3}u_{i,j}=g_i^{\pm},\ x\in S^{\pm}=D\times\{\pm h\}\ , \tag{6}$$

$$l[u]=l(\partial_1,\partial_2,\partial_3)u=g\ ,\ x\in S=\partial D\times]-h,h[\ , \tag{7}$$

the Cauchy nonlinear relations and generalized Hooke’s law:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}+A_{ij}\right),\ A_{ij}=u_{k,i}u_{k,j},\ x\in\overline{\Omega}_h, \tag{8}$$

$$\sigma=B\varepsilon,\ \varepsilon=A\sigma. \tag{9}$$

We remind that matrices of pliability - A and rigidity - B in the formulae (9) contain no more than thirteen independent elastic constants, i.e., at any point of body Ω_h even if one plane of elastic symmetry spreads, which is parallel to the coordinate plane- oxy .

Using of formula (2.25) [5], which follows from the relations (9), we have:

$$\sigma_{\alpha\alpha}=c_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\beta}+c_{\alpha\alpha}\varepsilon_{12}+b_{13}b_{33}^{-1}\sigma_{33},\ \sigma_{\alpha3}=c_{3+\alpha3+\alpha}\varepsilon_{\alpha3}+b_{45}\varepsilon_{\alpha3-\alpha},$$
$$\sigma_{12}=c_{\alpha6}\varepsilon_{\alpha\alpha}+c_{66}\varepsilon_{12}+b_{36}b_{33}^{-1}\sigma_{33}, \tag{10}$$

where

$$c_{\alpha\alpha}=b_{\alpha\alpha}-b_{\alpha3}^2b_{33}^{-1},\quad c_{12}=c_{21}=b_{12}-b_{13}b_{23}b_{33}^{-1},\quad c_{\alpha6}=b_{\alpha6}-b_{\alpha3}b_{36}b_{33}^{-1},\quad c_{66}=b_{66}-b_{36}^2b_{33}^{-1}.$$

Then, obviously, from equations (1.1) and (1.6) it follows:

$$2h\left[c_{\alpha\alpha}\left(\bar{u}_{\alpha,\alpha\alpha}+\frac{1}{2}\bar{A}_{\alpha\alpha,\alpha}\right)+c_{\alpha3-\alpha}\left(\bar{u}_{3-\alpha,12}+\frac{1}{2}\bar{A}_{3-\alpha3-\alpha,\alpha}\right)+\frac{1}{2}c_{\alpha6}\left(\bar{u}_{\alpha,12}+\bar{u}_{3-\alpha,\alpha\alpha}+\bar{A}_{12,\alpha}\right)\right]$$
$$+2h\left[c_{6\sim}\left(\bar{u}_{\sim,12}+\frac{1}{2}\bar{A}_{\sim\sim,3-\sim}\right)+\frac{1}{2}c_{66}\left(\bar{u}_{\sim,3-\sim3-\sim}+\bar{u}_{3-\sim,12}+\bar{A}_{12,3-\sim}\right)\right]$$
$$+b_{33}^{-1}\left(b_{\alpha3}\partial_\alpha+b_{36}\partial_{3-\alpha}\right)\int_{-h}^{h}\sigma_{33}dz=\int_{-h}^{h}f_\alpha dz-\partial_\beta\left(\sigma_{k\beta}u_{\alpha,k}\right)-\left(g_\alpha^{+}-g_\alpha^{-}\right)$$

From these equations, using the method ch. I [5], we have:

$$2h\left[\left(c_{\alpha\alpha}\partial_{\alpha\alpha}+\frac{3}{2}c_{\alpha6}\partial_{12}+\frac{1}{2}c_{66}\partial_{3-\alpha3-\alpha}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2}c_{\alpha6}\partial_{\alpha\alpha}+\left(c_{12}+\frac{1}{2}c_{66}\right)\partial_{12}+c_{3-\alpha6}\partial_{3-\alpha3-\alpha}\right)\bar{u}_\alpha\ \bar{u}_{3-\alpha}\right]$$

$$+h\left[\left(c_{\alpha\alpha}\partial_\alpha+c_{\alpha 6}\partial_{3-\alpha 3-\alpha}\right)\left(\bar{u}_{3,\alpha}\right)^2+\left(c_{\alpha 6}\partial_\alpha+c_{66}\partial_{3-\alpha}\right)\bar{u}_{3,1}\bar{u}_{3,2}\right.$$

$$\left.+\left(c_{12}\partial_\alpha+c_{3-\alpha 6}\partial_{3-\alpha}\right)\left(\bar{u}_{3,3-\alpha}\right)^2\right]+b_{33}^{-1}\left(b_{\alpha 3}\partial_\alpha+b_{\alpha 6}\partial_{3-\alpha}\right)\int_{-h}^{h}\sigma_{33}dz=\bar{f}_\alpha. \qquad (11)$$

The system of equations (11), if we neglect the remainder terms R, for a linear case corresponds to the problem of defining generalized plane stress-stain state. For a nonlinear case from (11) it follows immediately one of the basic equations of the von Karman system, corresponding to the Airy function if each equation is differentiated and summed (for details see below).

For an isotropic case, obviously, for coefficients we have $c_{\alpha\alpha}=\lambda^*+2\mu$, $c_{66}=2\mu$, $c_{12}=\lambda^*$, $c_{\alpha 6}=0$, $\lambda^*=2\lambda\mu\left(\lambda+2\mu\right)^{-1}$, λ and μ are the Lame coefficients. Then the system (11) is presented in a form:

$$\begin{aligned}
&\left(\lambda^*+2\mu\right)\partial_1\tau+\mu\partial_2\omega=\frac{1}{2h}\bar{f}_1+\mu(\partial_1\left(\bar{u}_{3,2}\right)^2-\partial_2\left[\bar{u}_{3,1}\bar{u}_{3,2}\right])-\frac{\lambda}{2h\left(\lambda+2\mu\right)}\int_{-h}^{h}\sigma_{33,1}dz,\\
&-\mu\partial_1\omega+\left(\lambda^*+2\mu\right)\partial_2\tau=\frac{1}{2h}\bar{f}_2+\mu(\partial_2\left(\bar{u}_{3,1}\right)^2-\partial_1\left(\bar{u}_{3,1}\bar{u}_{3,2}\right))-\frac{\lambda}{2h\left(\lambda+2\mu\right)}\int_{-h}^{h}\sigma_{33,2}dz,
\end{aligned} \qquad (12)$$

where the functions $\tau=\bar{\varepsilon}_{\alpha\alpha}$, $\omega=\bar{u}_{1,2}-\bar{u}_{2,1}$,correspond to plane expansion and rotation.

If we introduce the Airy function by a well-known way (see more exactly ch.1,[5]):

$$\sigma_{\alpha\beta}=\left(-1\right)^{\alpha+\beta}\partial_{3-\alpha\,3-\beta}\Phi\,,\ \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\partial_{3-\alpha\,3-\alpha}\Phi dz=\Delta\Phi^*, \qquad (13)$$

from (12) it follows the second equation of the von Karman system

$$\Delta^2\Phi^*=-\frac{E}{2}\left[\bar{u}_3,\bar{u}_3\right]+\frac{\nu}{2}\Delta\left(g_3^++g_3^-\right)+\frac{1+\nu}{2h}\bar{f}_{\alpha,\alpha}\ , \qquad (14)$$

For orthotropic case $c_{\sim 6}=0$. Then from (11), obviously, it follows

$$2h\left[c_{\alpha\alpha}\partial_\alpha\bar{\varepsilon}_{\alpha\alpha}+\left(c_{12}+c_{66}\right)\partial_\alpha\bar{\varepsilon}_{3-\alpha 3-\alpha}+\frac{1}{2}\left(-1\right)^{3-\alpha}c_{66}\partial_{3-\alpha}\left(\bar{u}_{1,2}-\bar{u}_{2,1}\right)\right]$$

$$+hc_{66}\left[\partial_{3-\alpha}\left(\bar{u}_{3,1}\bar{u}_{3,2}\right)-\partial_\alpha\left(\bar{u}_{3,2}\right)^2\right]=\bar{f}_\alpha-b_{\alpha 3}b_{\alpha 3}^{-1}\int_{-h}^{h}\sigma_{33,\alpha}dz-R_\alpha^{AN}, \qquad (15)$$

If coefficients b and c satisfy the condition of generalized transversality ([5], p. 27), i.e. there are true the relations:

$$c_{11}=c_{22}=c_{12}+c_{66},\ b_{13}=b_{23}\ ,$$

then from (15) immediately it follows:

$$\begin{aligned}
&c_{11}\partial_1\tau+\frac{1}{2}c_{66}\partial_2\omega=\frac{1}{2h}\bar{f}_1-b_{13}b_{33}^{-1}\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\sigma_{33,1}dz-hc_{66}\left[\partial_2\left(\bar{u}_{3,1}\bar{u}_{3,2}\right)-\partial_1\left(\bar{u}_{3,2}\right)^2\right]-R_1^{AN}\\
&c_{11}\partial_2\tau-\frac{1}{2}c_{66}\partial_1\omega=\frac{1}{2h}\bar{f}_2-b_{23}b_{33}^{-1}\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\sigma_{33,2}dz-hc_{66}\left[\partial_1\left(\bar{u}_{3,1}\bar{u}_{3,2}\right)-\partial_2\left(\bar{u}_{3,2}\right)^2\right]-R_2^{AN}.
\end{aligned} \qquad (16)$$

The systems of differential equations (11), (12), (15) and (16), obviously, are a splitting of one, corresponds to the function Φ^* from the von Karman equations and equivalent to it in case differentiability of the functions $\bar{u}_\alpha$, which are averaged on a thickness of the plate of horizontal components of displacement vector.

Thus, obtained by us the system of differential equations (11), (12), (15) and (16) is constructed from the initial three-dimensional problem of the theory of elasticity (6) - (9) with respect to the averaged on a thickness of the components of displacement vector-$\bar{u}$.

The other basic equation of the von Karman system corresponds for a linear case to a bending problem. For clarity and completeness we now give a presentation of the second basic relation in case, when Ω_h is an isotropic elastic plate of constant thickness (more general case, when an elastic plate of a variable thickness with finite displacement is anisotropic and non-homogeneous see [5], ch.1).

$$\begin{gathered}\frac{(1-\nu)D}{2}\Delta u_\alpha^* + \frac{(1+\nu)D}{2}\partial_\alpha u_{\beta,\beta}^* - \frac{3(1-\nu)D}{2h^2(1+2\gamma_\alpha)}(u_\alpha^* + \bar{u}_{3,\alpha}) = f_\alpha^* + R_{\alpha+2}\left[u_\alpha\right], \\ \frac{3(1-\nu)D}{2h^2(1+2\gamma_\alpha)}\left(\Delta\bar{u}_3 + u_{\alpha,\alpha}^*\right) = f_3^* + R_5\left[\bar{u}_3\right], \quad u_\alpha^* = \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} z u_\alpha dz,\end{gathered} \tag{17}$$

R_{2+i} are remainder terms, D is a cylindrical rigidity of bending, γ_α are arbitrary parameters. Obviously, the equations (11) (or (12)-(17)) without remainder terms present full system of KRM type differential equations with respect to functions $\bar{u}_i(x,y)$ and $u_\alpha^*(x,y)$.

We remark that the non-linear two-dimensional models for Reissner type DEs with layered effects for anisotropic elastic plates first were constructed in [5].Then, the system (17) will have an another equivalent form, if unknown values are chosen with Reissner averaged $\bar{u}_3$ and shearing forces Q_α instead of u_α^* (for details see chapter 1, [5]). Then we will have:

$$\begin{aligned}D\Delta^2\bar{u}_3 = {}&\left(1-\frac{h^2(1+2\gamma)(2-\nu)}{3(1-\nu)}\Delta\right)\left(g_3^+ - g_3^-\right) + 2h\left(1-\frac{2h^2(1+2\gamma)}{3(1-\nu)}\Delta\right)\left[\bar{u}_3,\Phi^*\right] \\ &+h\left(g_{3,\alpha}^+ - g_{3,\alpha}^-\right) - \int_{-h}^{h}\left(zf_{\alpha,\alpha} - \left(1-\frac{1}{1-\nu}\Delta\left(h^2-z^2\right)f_3\right)\right)dz + R_3\left[\bar{u}_3;\gamma\right]\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}Q_{\alpha3} - \frac{1+2\gamma}{3}h^2\Delta Q_{\alpha3} = {}&-D\Delta\bar{u}_{3,\alpha} + \frac{h^2(1+2\gamma)}{3(1-\nu)}\partial_\alpha\left(g_3^+ - g_3^- + 2h(1+\nu)\right)\left[\bar{u}_3,\Phi^*\right] \\ &+h\left(g_\alpha^+ - g_\alpha^-\right) - \int_{-h}^{h} zf_\alpha dz + \frac{1+\nu}{2(1-\nu)}\int_{-h}^{h}\left(h^2-z^2\right)f_{3,\alpha}dz + R_{3+\alpha}\left[Q_{\alpha3};\gamma\right]\end{aligned} \tag{19}$$

From these equations, if we neglect the remainder terms R, for $\gamma=-0,5$ from the first equation the second basic equation of von Karman system follows:

$$D\Delta^2 w = (1+\Delta)\left(g_3^+ - g_3^-\right) + 2h[w,\varphi] + h\left(g_{\alpha,\alpha}^+ - g_{\alpha,\alpha}^-\right) - \int_{-h}^{h} z\left(f_{\alpha,\alpha} - f_3\right)dz \tag{20}$$

where w and ¨ are approximate values, correspond to functions $\bar{u}_3$ and Φ^* ..

The system (14),(18),(19) without reminder terms R represents 2D system of refined theories with control parameters¥ . By choosing ¥ we got all refined theories and from other ¥ some new ones. Let us consider (19) equation, where the main members are

$$D'\Delta[w,\varphi] = D'\left([\Delta w,\varphi] + [w,\Delta\varphi] + 2\left[\partial_\alpha w,\partial_\alpha\varphi\right]\right), D\Delta^2 w, \ (D' = 4h^3(1+2\gamma)/3(1-\nu)).$$

Using relations type of (1.9a) [6], we have $\partial_{11}\varphi = \bar{\sigma}_{12}$, $\partial_{12}\varphi = -\bar{\sigma}_{12}$, $\partial_{22}\varphi = \bar{\sigma}_{11}$. Then the last expression may be rewritten in the following form :

$$D'\Delta[w,\varphi]=D'\Big[\big(\bar{\sigma}_{11}\partial_{11}\Delta w+2\bar{\sigma}_{12}\partial_{12}\Delta w+\bar{\sigma}_{22}\partial_{22}\Delta w\big)+\big(\partial_{11}w\Delta\bar{\sigma}_{11}+2\partial_{12}w\Delta\sigma_{12}+\partial_{22}w\Delta\sigma_{22}\big).$$
$$+\ 2\big(\bar{\sigma}_{11,\alpha}\partial_{11}w_{,\alpha}+2\bar{\sigma}_{12,\alpha}\partial_{12}w_{,\alpha}+\bar{\sigma}_{22,\alpha}\partial_{22}w_{,\alpha}\big)\Big] \tag{21}$$

The calculate and simple analysis by these expressions of a symbolical determinant show that the characteristic form of systems type (18) and (14) may be positive, negative numbers or zero as well as an arbitrary continuous function of x, y. Here we must remark that $ED' = 4(1+2¥)(1+¬)D$, as so if $\{f\}$ denotes physical dimension of value f, it's evident $\{\Delta^2 w\} = \{\Delta[w, \Phi/E]\}$.

Thus, the first and second summands of (21) are defining the nonlinear wave processes for static cases. Summand obviously corresponds to 2D soliton type solutions of Kadomtsev-Petviashvili kind.

As is well known, the direct way of constructing Boussinesq, Burgers, Korteweg-de Vries, Kadomtsev-Petviashvili, Dorodnitsin's equations and other well-known systems described turbulent flows one and two dimensional solitons in fluids and continuum plasma physics shok waves are given in many articles and monographs (see i.e.M.Ablovitz [7]). The same member present in (1) $\Gamma = 1$ as we prove by (21). In another way members type $\Delta[u,\ddot{}\ ]$ be present in Navier–Stokes type equations, when $\Delta u \neq 0$. *Thus we prove that nonlinear appearances, observed in problems of solid mechanics, may be detected in the Navier – Stokes' type equations and vice versa.*

For dynamic case a corresponding system contains wave processes not only in the vertical, but also in the horizontal direction. The second equation of KMR system respect to stress function Φ has the following form:

$$\left(\Delta^2 - \frac{1-v^2}{E}\rho\Delta\partial_{tt}\right)\Phi = -\frac{E}{2}[w,w] + \frac{v}{2}\left(\Delta - \frac{2\rho}{E}\partial_{tt}\right)\left(g_3^+ + g_3^-\right) + \frac{1+v}{2h} f\ . \tag{22}$$

Now we consider the problem of creating and justifying 2D mathematical models of KMR type for some dynamic nonlinear models of visco-elasticity. If we using 3D nonlinear spatial system byJ.L.Sanders, Jr.H.G.McComb, F.R.Schlechte [8] the system of PDE having the following form

$$\partial_t\left[\sigma_{ij,j} + \partial_j\left(\sigma_{ik}u_{j,k}\right)\right] = f_i + \rho\partial_{tt}u_i\ ,\ (t,x)\in Q_T = (0,T)\times\Omega_h(x),$$

and other same basic relations then the creation and justification of refined theories of KLM type didn't contain any difficulties and are realized similarly as in elastic case.

References

1. C. Fletcher. Computational Techniques for Fluid Dynamics, 2, Springer – Verlag, 1988.
2. P. Ciarlet. Mathematical Elasticity, Vol.1: Three Dimensional Elasticity, North Holland, 1993.
3. P. Ciarlet. Mathematical Elasticity, Vol.II: Theory of Plates, Elsevier, 1997.
4. S.S.Antman. Nonlinear Problems in Elasticity. Springer-Verlag, 2005
5. T.Vashakmadze. The Theory of Anisotropic Elastic Plates, Kluwer, Springer-Ver. 1999.
6. T. Vashakmadze. To von Karman-Reissner Type Equations and Mathematical Modelling of Poro-Elasto-Plastic Media. Proceed. Javakhishvili Tbilisi State University, Series: Applied Mathematics and Computer Sciences. Vol. 343(21). 2001, pp. 69-86.
7. M. Ablovitz, H. Segur, Solutions and the Inverse Scattering Transform, SIAM, 1981.
8. J.L.Sanders,Jr.H.G.McComb,F.R.Schlechte. A Variational Theorem for Creep with Applications to Plates and Columns. Report 1342-NACA.1957, 117-123

Information about author

Tamaz S.Vashakmadze

Professor of Iv.Javakhishvili Tbilisi State University,I.Vekua Institute of Applied Mathematics

Address: 2, University Str., 0143,Tbilisi,Georgia

Phone: (99532)23-09-18 or 99-90-33; E-mail: tamazvashakmadze@yahoo.com

CONTENTS AND ABSTRACTS

In this work a completely new explanation is given for newly-come snow formation. It is proved that it is the result of cavitations in the domain of the clouds. Nowadays the newly-come snow is considered to be a type of snow. But compared to snow the newly-come snow has the following principal contradictions: a) Certainly the newly-come snow is consisted of grains, but not of grains of microscopic measures. The grains have globelike form and a diameter about 1mm. b). The density of snow is 10-20 times smaller than that of newly-come snow.

A system consisting of two controlled objects which make special movements is considered. The task is set to construct control enabling the transition of the objects from the initial states to the given final states at different moments of time and guaranteeing that no collision takes place during the movement. An algorithm on the least period of time for simultaneous movement is proposed, by the help of which the task may be solved with any initial and final states...

In the present work the first boundary problem of compound body consists of three infinite wedges with arbitrary opening angles is investigated. Average wedge on the line of its bisectrix contains a crack of finite length the faces of which are loaded with equilibrated external loads

Due to the asymptotic method of solution of singular perturbed differential equations the solution of dynamic first boundary problem for the orthotropic strip of rectangle is found.
The solution is obtained from the internal problem solution as well as boundary layers. Iterative processes for the determination of tensor stress components and displacement vector are made.

On the base of the equations of a space dynamic problem of elasticity theory forced vibrations of anisotropic rectangular plates fastened by one of the facial surfaces with absolutely rigid foundation are considered. Anisotropy is general (21 constants of elasticity), on the opposite facial surface normal and tangential loads, which harmonically change in time, act. Using dimensionless coordinates and dimensionless components of displacement vector, the system of the space problem equations becomes singularly perturbed by small parameter, which is solved by the asymptotic method.
The asymptotic orders of all the sought values in the inner problem are established and the characteristic equations for determining these values are derived. It is shown that unlike the isotropic and orthotropic plates, the vibrations are not purely shear and longitudinal. The amplitudes of the forced vibrations are determined; the conditions of the resonance rise are established………………......

In the present work owing to new approach suggested in [1-3] the solution of beam bending contact problem of finite length on the edge of elastic half-plane is found. With the help of Fourier transformation and Wiener-Hopf method a problem solution is obtained in power series form with separated features. For the determination of unknown resolution ratios the infinite system of simple structure linear algebraic equations is received.

Given work is targeted at the method of construction development of cotangential trajectory of flights between given orbits during which it would be possible to use only the construction with the help of compass and ruler.

The structure of a fiberglass reinforced composite of a spar of rotor blade of the helicopter (mi-28) is in-process investigated. Static and dynamic methods of definition of mechanical properties of these composite materials are developed. It is developed cae - support of these tests on the basis of combination fem and genetic algorithms.

The axis-symmetrical stress state of infinite elastic composite space from two different semi-spaces, when there is a absolutely rigid thin coin-type inclusion at the joint-plane, is considered. The closed solutions are built and the behavior of contact stresses near the boundary circle of inclusion is determined under the different models of contacting inclusion with semi-spaces.

An axisymmetric contact problem of round stamp torsion of elastic layer of finite but sufficiently large thickness with a free lower boundary is considered. The stamp is rigidly fixed on the upper boundary of layer and the torsional moment is applied to it. An integral equation concerning the unknown contact tangential force under the stamp is formulated.

A number of works are dedicated to the study of stress deformable condition of elastic homogeneous and compound bodies at boundary of which the power loads and absolutely rigid stamp are moving with constant velocity. In the present work the plane deformable condition of compound half-plane consists of infinite elastic strip and elastic half-plane with various elastic characteristics under the influence of uniformly moving concentrated normal and tangent loads when on the contact line of strip with half-plane the condition of full cohesion or smooth contact are taking place.

About an interaction of stress concentrates various types

In many field of applied mechanics e.g. in mining mechanics, mechanics of composites etc. commonly encountered the problems of determination of stress-deformable condition of homogeneous and non-homogeneous elastic bodies containing various types of stress concentrates. In the role of various stress concentrates are mostly introduced the cracks and absolutely rigid thin inclusions

Optimization of Parameters of the Rectangular Plate under the Action of the Shearing Load

The optimal geometrical parameters of the rectangular plate, which secure the maximal load-carrying capacity of the construction under the action of the shear bending load, are determinate. The rectangular plate is simply supported by the longitudinal edges and is reinforced by transverse rigid ribs in the middle and at the free edges of the plate.

Piezoelectric surface elertroelastic wave of Love in a layered system of orthorombik substructures and isotropic conducting plat

In a paper “dispersiv solutions” of Love wave have been found.

Approaches to building up classic and non-classic type models of continua

Approaches to building up classic and non-classic type models of continua are considered.
Axiomatic approaches in classical continuum mechanics are discussed. The new theory is proposed to describe mechanical properties of resistance of materials: the system of concepts and axioms is introduced, the general reduced form of the system of constitutive relations is obtained including a constriction relation and constitutive expressions for stress field as well as for a field of mass-density of inner body-forces. The arbitrariness of these fields caused by the presence of inner constrictions is discussed. Special attention is paid to finite pre-history of bodies and to properties of (non-homogeneous) ageing studied in works by N.Kh.Arutyunyan. The general reduced forms of Ilyushin—Arutyunyan and Noll—Arutyunyan constitutive equations are proposed for media with an arbitrary (finite or ifinite) pre-history.

The influence of ageing on getinck’s elastisity modulus taking into account the pressure of thermopressing

The results of investigation of elasticity module and getinacks’ strength in depend on the ageing in laboratory conditions are considered. It is shown that the natural ageing brings to significant reduction of getinacks’ elasticity module. Thus, the greater value of thermopressing pressure corresponds to the smaller value of elasticity module.

Analitical and Numerical Solution for Determination of Free Bending Vibrations Frequencies of Magnetoelastic and Piezoelectric Plates and Shells

By exact space treatment are derived dispersion relations of bending vibrations of magnetoelastic, ferromagnetic and piezoelectric plates. For the former ones are obtained simple formulae for frequencies by expansion on magnetic field parameter. Also are done numerical solutions of third order determinant equations for arbitrary magnetic fields. There are obtained sixth order determinant equations for shells made from mentioned materials and they are solved

Several kinematic models of manipulator robots and problems of kinematic control are given in the report. The solutions of problems of kinematic control for examined kinematic models are given both with hard and elastic properties. The expressions of control functions providing the movement of manipulators in different criteria of quality are received.

The problem of existence of free vibrations of an elastic orthotropic thin-shell structure composed of identical non-closed infinite circular cylindrical shells with free and rigid clamping boundary generators and elastic orthotropic thin-shell structure composed of identical non-closed finite circular cylindrical shells with free and rigid clamping boundary generators with conditions of Nave's hinged support along boundary directional curve is studied.

The functions of the type of boundary layer are determined in work for different boundary conditions, is determined velocities of their decrease, when removing from lateral surface in inside shells. They are brought the first some numerical meanings of the velocity of the fading of function of the boundary layer. Execution analysis of the behavior of boundary layer for different boundary conditions

The problem of determining of stress-state visco-elastic space with finite-length slot under the conditions of anti-plane deformation by the theory of creep of inhomogeneously ageing mediums is considered. At the same time the analogical problem with the thin absolutely rigid inclusion instead of slot is discussed.

The present work is dedicated to the questions of stability of magnetostrictive plates in external magnetic field. An investigation is carried out on the base of linearized equations and boundary conditions describing the behavior of small perturbations in the magnetostrictive medium.

Nonlinear interaction of elastic waves in porous material (phase-group synchronism)

Nonlinear interaction of quasiharmonic longitudinal waves which propagate in solid porous material was investigated theoretically. It was shown that as a result of such interaction between low-frequency waves (vibration field) and high-frequency waves (ultrasound) an ultrasound wave of summarized frequency will be generated. This newly generated waves can be in a phase-group synchronism with the vibration field.

Zaitsev Aleksey V., Trefilov Nikolay V. 177

Inelastic deformation and failure of random-structured unidirectional fibre-reinforced composites under multiaxial proportional loading and shear

Algorithms for generating a random structure of composites were developed. The influence of morphology (size and shape) of reinforcement aggregates on the stochastic field properties were analyzed and the maximal volume fractions of fibres were determined. The results of computer-generation showed that a guaranteed matrix layer around every fibre is the necessary condition for appearing a periodicity in the random-structure fields. The generation of a composite structure with a high volume fraction of inclusions is accompanied by a quasi-determinate additional movement and rotation of fibres. These nonrandom modifications lead to a self-organization and regularization. By using the correlation analysis, the characteristic size of the representative volume domain was determined with account of the multi-particle interaction in the system of reinforcement elements. A special research into composite structures with randomly distributed fibre diameters allowed us to elucidate that the type of statistical distribution significantly influenced the character of multiparticle interaction on scale intervals from half to two average fibre diameters. These scales predetermine the strain and stress inhomogeneities in undamaged composites and produce the decisive influence on the initial stage of damage accumulation.

Zoubko I.Yu., Oglesneva S.A., Trusov P.V. 182

Diffusional mass transfer through a contact surface of rigid bodies under mechanical alloying

The developed multilevel model for process of mechanical alloying is presented in the report. A microlevel problem for welding and shattering of particles dust hitting between spheres at epicyclic mill is formulated. A periodic contact-problem for the diffusion through the external surface is solved for researching of mechanisms of cold (i.e. diffusion) welding conjugated surfaces of rigid bodies. Approximation of locally-equilibrium thermodynamics based on dependence of a chemical potential on the first invariant of stress tensor is used for description of diffusion. The bulk changes caused by admixture diffusion leads to changes of a stress-strain state and taken into account by the modified Hooke’s law. If the conditions of a small concentration of admixture is fulfilled, the problems for determination of stress and strain fields at the contact regions and for vacancy-type diffusion are solved separately for the known field of stress. A flux fields of admixture atoms are constructed under pressing of periodic-surface stamp into an elastic half-space. It is shown, that an intensity of admixture atoms under compression accompanied by shear is higher, than at pure compression and the micro-irregularities describing by tops of sinusoid leads to complicated stress field near contact zones and to more intensive diffusion.

Ivanochkin P.G., Nasedkin A.V., Chebakov M.I. 187

Analytical and numerical methods in the contact problems for two-layer foundations

The contact problems for two-layer plane stripe,for two-layer cylindrical bearing in the plane andthree-dimensional statements and for two-layerspherical axisymmetric bearing are considered.For solving these problems the numerical - analyticalmethod and the finite element method with speciallydeveloped programs for finite element package ANSYSare applied. The analysis of numerical results iscarried out for different material parameters andgeometrical characteristics of the tribosystems.Finite element results are compared with the numerical -analytical results received from the solution of thecorresponding integral equations for the plane and axisymmetric contact problems.

On some relations in theory of stress state

Some relations of theory stress-state from which the main relations of the theory of limiting state [1] follow is considered.

Dynamic effects in a material at its structural - phase transformations

The problem of the description of structural and phase transitions in mechanics of a deformable solid is well-known. As a rule, the fact of such transitions is considered to be done, and the problem about presence of a biphase state is reduced to studying stability of interphase border. The question on dynamic character of transition from one stable branch of the static diagram ± −£ on another stable and about influence of character of reorganization of the structure of a material till now remains open.

In the present work for the first time on an example of dynamically loaded road of finite length is considered the influence of parameters of the evolutionary equations describing reorganization of internal structure of a material, and also it is underlined an essential role of inertial forces of the road. In the mathematical interpretation it corresponds to studying of received equation of Lienar's type and, accordingly, of bifurcation points of a stable limiting cycle, and also strange attractor.

Axisymmetric contact problem about splice

In this paper we consider axisymmetric contact problem for viscoelastic foundation with a coating. We assume that this coating is ideally attached to a punch, i.e. a shape of the surface of the coating conform the shape of the punch base (the punch is glued to the foundation by thin coating). Such a problem often arises in engineering and technology.Two-dimensional mixed integral equation for this problem was obtained. It contains simultaneously integral operators with constant and variable limits as well as complimentary conditions. Using generalized projection method we construct its solution. A number of numerical calculations is realized. Qualitative conclusions are made.

Dynamics of prestressed structurally inhomogeneous electro-elastic bodies

The research results are presented for patterns of dynamic behavior for structurally inhomogeneous prestressed electro-elastic bodies, which are subjected to initial mechanical and electrostatical stresses. The analysis has been carried out in the framework of the linearized theory of superposition for a small deformation on a finite one and is based on a reduction of boundary value problems to the integral equations of first kind. The distinctive feature of kernels for these equations is oscillation, which is caused by structural heterogeneity of medium. The last circumstance implies the use of special methods for the solution of the integral equations, taking into account with a high accuracy the dynamic properties of medium.

The influence of old concrete's humidity extent on it elastisity properties

Results of changes of elastisity modulus and Poisson's ratio of old concretes investigated the dependance on the humidity extent both for the absorption and desorption of free moisture are brought.

A numerico-analytical splitting method for the solution of elastoviscoplastic equations with internal variables

The periodic wear – contact problem for a viscoelastic foundation

A wear model for the structurally inhomogeneous materials in contact with a viscoelastic body is proposed. Sliding with a constant velocity of the viscoelastic body over the rigid surface is considered. There is a complete contact between two bodies (without any gaps). The model is constructed for the steady state regime, when the stationary solution exists. The obtained results analyzed with respect to the geometrical and tribological characteristics of the inhomogeneous half space and the sliding velocity. The problem could be applied for the wear process of pavement by pneumatic.

Mechanics of accreted solids: state-of-the-art, problems, and perspectives

This paper is a brief overview of the scientific works in the new field of continuum mechanics — mechanics of accreted solids. The state-of-the-art of the theory and applications of accreted solid mechanics are under consideration. Main results of solving torsion, plane, and spatial problems are presented. The outstanding role of Academician N. Kh. Arutyunyan and his scientific school in the development of this new scientific field is underlined.

Some problems of accreted solids torsion

The theory of torsion of accreted solids mechanics is considered in this paper. Classical and non-classical initial boundary-value problems of solid mechanics are considered. Methods for solving problems of torsion of accreted solids are proposed. These methods are based on the reduction of non-classical problems of accretion of viscoelastic aging solids to the problems of elasticity with a time parameter. Some numerical results for accreted triangles are presented. In particular it is established that the maximum of share stress intensity can be not only on the surfaces of the accreted solids but inside them as well.

On a mixed problem for the elastic bar with a crack of finite length

The problems of cracks are closely connected with the problems of interaction of massive deformable bodies with absolutely rigid thin inclusions that are not resisting to the bending. Based on their theoretical and practical importance in the questions of mechanics of composites and strength of various engineering constructions they became the subject of investigation of different authors.

A plate under the action of tangential loads taking into account the transversal shears according to S.A. Ambartsumyan 's theory

A plate under the action of tangential loads taking into account transversal shears by the theory of S.A. Ambartsumyan is considered in the article. The problem is investigated under an arbitrary load and fixed edges. In particular case of constant tangential load is considered. It is shown that, in the presence of transversal shear the deflection reduces.

To plate flutter problem in supersonic flow in a case of concentrated mass at edges

The present paper is devoted to the analysis of the stability of a thin plate model in a supersonic airflow. The plate's mass is ignored, but it is considered than the concentrated mass is on the hinges supported and on the smooth contact edges. The critical velocity of the airflow are found, which reduce to the fluttered instability.

Optimization of elasic body geometry in the vicinity of singular points and its relartion to stress singularity

The problem of constructing singular solutions to the problems of elasticity theory has been the focus of attention of many investigators. In the context of two-dimensional problems the investigation of singular stresses is generally concerned with the analysis of stress state at the apex of a plane wedge. Within these problems consideration was given to almost all variants of wedge-shaped bodies. The solutions to two-dimensional problems provide data necessary for estimation of the stress singularity at the edge points of three-dimensional wedges. Examination of the works dealing with the investigation of stress singularity for other versions of three-dimensional problems (trihedral or polyhedral wedges, cones) has clearly demonstrated that the number of the obtained numerical solutions to this class of problems is rather small compared to the two-dimensional problems. In view of this fact we have proposed a method allowing us to analyze numerically the character of stress singularity in the vicinity of different singular points of elastic bodies. This method has proved to be rather effective for solving two-and three-dimensional problems in the cases, for which solutions by other methods are difficult if not impossible to realize. Among the problems solved by this method are a composite wedge made of linearly anisotropic materials, a trihedral wedge under different types of homogeneous boundary conditions at the lateral facets, circular and non-circular cones, hollow and built-up cones, cones with combined boundary conditions at the lateral surfaces. Estimation of the data obtained from the analysis of stress singularity has clearly demonstrated that these solutions have rather limited applications to strength analysis and numerical estimation of stresses in the bodies of arbitrary configuration.

Minimax aiming at several target sets for proper linear stochastic systems

The problem of rapprochement with m target sets when movement of system is described by system of the proper linear stochastic differential equations is considered. The stochastic hypothetical mismatch is constructed. The stochastic differential of a hypothetical mismatch which gives a condition for definition of extreme strategy is received.

Three dimensional problem of propagation of elastic surface waves in hexagonal piezoelectric half–space

The problem of propagation of elastic surface waves in hexagonal piezoelectric half-space, when on the surface of half-space all three components of stress and potential are equal to zero, is considered. It is supposed that the surface of half-space is plane of isotropy. It is shown, that in this case the parameter of speed of surface wave became greater, then in the case when $e_{ij} = 0$.

Method for estimation of retained vibro-strength of clay soils under the certain constant vibration acceleration values

The paper outlines a method for estimation of retained vibro-strength of clay soils, when its values, estimated under the different normal stresses, correspond to the same value of torsional vibration acceleration.

An anti-plane problem of contact interaction of layer with half-space taking into account the creep

In the theory of creep of non-homogeneous inherently-ageing bodies an anti-plane problem of contact interaction of infinite layer with half-space is considered. In various viscoelastic characteristics of layer and half-space as well as in the presence of definite external load a law of contact tangential stress distribution is determined. The solution of the problem with the help of Fourier transformation is brought to the solution of Volter second type integral equation. The numerical analysis is brought and defined conclusions are deduced.

The some problems for viscoelastic cylindrical shells and beams

The following solution of problems for viscoelastic (mainly typical materials) cylindrical shells and beams is brought.

1. Impact on end of semi-infinite cylinder,
2. Statical stability of cylindrical shell under moving load,
3. The stability of component parts of beam,
4. One dimensional contact problem for inhomogeneous viscoelascity,

Optimal control of motion of beam.

Micromechanical model of non-linear straining of shape memory alloys

Unique mechanical properties of shape memory alloys (SMA) are connected with thermoplastic phase transition taken place in these materials. In this investigation in framework of solid mechanics approach with taken into account the main micromechanical features of thermo elastic phase transition model of non-linear straining of SMA is created. This model qualitative and quantitative correct describes the total complex of properties and phenomena peculiar to SMA namely direct and oriented transformation straining, monotone, reverse and two way shape memory effects, martensite inelastisity, superelasticity, latent heat emanation and absorption during phase transition, dissipative phenomenon and so on. The micromechanical and thermodynamic system of constitutive equations for SMA is created. The different statements of boundary value problems and initial-boundary value problems of solid mechanics and thermo mechanics for SMA are investigated. Analytical and numerical methods for solution of these problems are proposed.

Influence of localized oscillations to diffusion-controlled growth of thin films

A thin film with growth islands is modelled as a two-component structure. The first material component of the film is the lattice submitted to elastic stresses. The second material component (the diffusion flux of atoms) is modeled by a fluid layer. Mathematically, the problem is reduced to analysis of a system of nonlinear equations describing the growth of island nuclei and wave propagation in the films. For the corresponding frequency-domain problem we present a trapped mode solution. It is shown that in the time-domain problem a perturbation force will excite a localized wave near the islands and in the absence of friction the wave will persist for all time. This creates additional stress in the film and leads to increase in the rate of island growth.

Limit analysis of difficultly reinforced ferro-concrete shells and plates

The problem of definition of the top cinematic border of carrying capacity difficultly reinforced ferro-concrete undergrad shells of rotation under action of mass loading is formulated and solved by a method of linear programming in view of active influence of a ground. It is shown, that to different ferro-concrete compositions there correspond the different rational structures of reinforcing providing the greatest maximum load. Various "mechanisms" of destruction of domes are investigated and the opportunity of existence.

The asymptotic method is used to solve the three-dimensional dynamic problem of the elasticity theory on free vibration of multi-layer orthotropic plate at full contact conditions between layers. The lower side of the lower layer is rigidly fastened and the upper surface of the upper layer is free. The algorithm is formulated with program Mathematica to find the main magnitudes of frequencies of free vibrations at arbitrary quantity of layers.

An asymmetric deformation of three-layered in radial direction hollow cylinder of finite length L is considered in given work. One end of the cylinder is completely fixed, side surface and another end are free of stress, and the cylinder deforming only under the action of own weight that acting transversely to cylinder axis.

It is considered the calculation of main factors of force and deformation in sections of shoes' instep depending on curve's form of instep's axis, the law of unevenly regulated load on it and the settling form of instep.

The work researches laws of evolution of elastic and aging viscoelastic isotropic bodies stress-strain state in quasistatic processes of their sectionally continuous accretion in mass forces fields of various nature. The researches are based on fundamental approaches and methods of mathematical theory of accreted bodies. Processes of deformation of globe solids growing due to surface material onflow in an arbitrary central force field (e.g. the self-gravitation field) are studied. Processes of layerwise fabrication of cylindrical bodies and coatings via material application onto the external or internal surface of a rotating former or a billet are investigated taking into consideration the centrifugal forces. The problem of building-up a heavy round vault on a smooth foundation using such techniques as creation of initial stresses in the added constructs and local vault support during fabric is solved. As a result of analysis of all obtained solutions and numerous numerical computations performed some noval mechanical effects are discovered and thoroughly studied. A number of practically important conclusions is made. Some general aspects of mechanical behaviour and state of elastic and aging viscoelastic bodies growing and having been formed during an accretion process are studied.

The substantial increasing of nanocomposites fracture toughness is based on the strengthening effects of reinforcements by nanofibers. The model of a crack with a large scale bridged zone is used to analyze the fracture toughness of these materials. The evaluation of mechanical parameters is performed on the basis of the fracture criterion for cracks with bridged zones. The estimations of the fracture toughness, the adhesion fracture energy and the external fracture stresses depending on the crack size are also presented.

Investigation of creep of materials at decreasing of stresses

As it is known at decreasing of stresses in time the theories of creep describe the creep strain of materials very badly. For example, the theory of hardening often does not describe the reversal creep and the theory of heredity on contrary describes reversal creep considerably more than it is in reality.

In the present work the version of heredity with delayed plasticity is considered and the experimental results obtained from creep of chromium-nickel steel and of clay soils, confirmed this version are presented.

Modelling of self-lubrication mechanism and wear in metal-polymer tribocontact

A model is proposed for calculating of parameters (such as wear and friction coefficient) of metal-polymer tribocontact. It is based on the molecular-mechanical friction theory and adhesion-energetic mechanism of friction transfer. The modeling is proposed for evaluation of tribological parameters by means of conducting virtual experiments.

The review of authors' investigations on mechanics during 1997-2007

A new method of studying stress and strain state of elastic media with numerous defects

The work considers an aggregate of elementary types of defects, i.e. plane cracks and rigid inclusions, located in the elastic layered medium in parallel planes. A new method has been offered for developing matrix-functional relationships for the problem under study, which makes it possible to study effectively stress and strain state of elastic media containing numerous defects.

On one mixed problem for elastic space with T-form crack under the anti-plane deformation

The anti-plane stress state of homogeneous elastic space, weakened by T-form crack with mixed conditions on banks is considered. The determining equations of formulated problem are obtained as a system of singular integral equations. The solution of system is built by the numerical-analytical method of discrete singularities.

Propogation of magnetoelastic coupled waves in homogeneous ferromagnetic elastic layer

In this paper is analyzed the interaction of magnetic (spin) and antiplane-elastic surface waves in homogeneous ferromagnetic elastic layer. The existence of magnetoelastic surface waves is shown. Also, the existence of a frequency range of waves, which are not passed by media, is shown.

A unified approach to solving problems of stress distribution around sharp and rounded v-shaped notches

The unified approach to solve problems of stress distribution around sharp and rounded V-shaped notches based on singular integral equation method was proposed. At first, the problem was solved for an elastic domain with V-shaped notch with rounded vertex of large curvature. Then the passage to the limit was used to obtain stress intensity factor at the vertex of sharp V-notch. Numerical results for a rhombic hole in an elastic plane and for an edge V-shaped notch in a half-plane were discussed.

Calculation and analyze of plate, which two opposite edges of the plate jointly supported,other two edges are free

A problem of plates bending with uniformly distributed load has been solved by Kirchhoff theory, improved theory and by numerical methods (method of finite elements). Two opposite edges of the plate are jointly supported, other two edges are free. The behavior of cutting forces and bending moments in corners and in edges of plate is investigated. It is shown, that in the corners of the plate, when thickness is lessening the point forces arise, which are equal to point forces by Kirchhoff theory in magnitude. With the help of creating program on influence of plate sizes and coefficient of Poisson on kinematical and statistical characteristic of plates have been investigated.

An elastic equilibrium of circular sector at the boundary conditions of smooth contact on the radial sides

The plane problem of the theory of elasticity of circular sector with single radius and opening angle $\alpha\left(0<\alpha<2\pi\right)$, when on the boundary $r=1$ external loads are given and on radial sides $\varphi=0$ and $\varphi=\alpha$ are putting into effect the conditions of smooth contact (the conditions of contact with rigid stamp without friction) is investigated.

The plane problem of the theory of elasticity with non-classical boundary conditions

The plane problem of the theory of elasticity for the rectangular and circular regions area is considered when on one edge the boundary conditions are underdetermined and on the other edge they are over determined. In case of rectangle area the general solution of biharmonic equation having the form of Fourier's series with unknown coefficient problems is reduced to the solution of infinite systems of the linear algebraic equations.The regularity of the system is studied which is comparable with the case that corresponds with the problem of classical boundary conditions. The solution is illustrated by an example with finite amount polynomials. For circular ring region in case of axis-symmetric pressure, the solution obtained as the problem of thermoelasticity.

To the theory of non-linear viscoelastic shells and plates with consideration of transversal shear

During the last years the significant attention is given to the deformation calculations, which based on the linear theory of viscoelasticity. At the same time the gap was formed between problems readiness in these frameworks and almost absence of the proved calculatation tool, which considering nonlinear viscoelasticity, based on sufficient number of experimental data.In the present work the calculation tool is constructed for definition of stress-strain condition of nonlinear-viscoelastic shells and plates with taking into account the transversal shear.

Continual Theory of Micropolar Elastic Multi-layered Thin Plates

In present work the asymptotic method is developed for constructing continual models of layered thin plates on the basis of micropolar (asymmetrical, momental) theory of elasticity. Depending on the values of physical constants of micropolar materials, there are constructed three different continuall theories of micropolar layered thin plates. The first theory is - the continual theory of micropolar layered plates with free rotation, the second theory is - the continual theory of layered plates with

Stabilization of statically unstable systems by vibration

A problem of stabilization of a vertical (inverted) position of a pendulum by high frequency vibration of the suspension point is considered. Small viscous damping is taken into account, and periodic excitation function describing vibration of the suspension point is assumed to be arbitrary. A formula for stability region of Hill's equation with damping near zero frequency is obtained. For several examples it is shown that analytical and numerical results are in good agreement with each other. An asymptotic formula for stabilization region of the inverted pendulum is derived. It is shown that the effect of small viscous damping is of the third order, and taking it into account leads to increasing critical stabilization frequency. The method of stability analysis is based on calculation of derivatives of the monodromy (Floquet) matrix with respect to parameters [1]. In 1956 V.N. Chelomei showed that elastic systems can be made more stable by imposing vibration. In particular he came to the conclusion that the elastic column compressed by an axial force exceeding critical (Euler) value can be stabilized by high frequency excitation force applied to the end of the column. In this paper formulas for higher and lower critical frequencies of the column stabilization are obtained. It is shown that unlike high frequency stabilization of an inverted pendulum with vibrating suspension point the column is stabilized by excitation frequency of the order of the main eigenfrequency of transverse vibrations belonging to some interval.

On substantiation of the Navier solution

The Navier solution $w(x,y)$ for deflection function in the problem of bending of a rectangular simply supported plate is studied. The plate is supposed to be loaded by a uniform pressure distributed on the rectangle with the sides, parallel to the sides of the plate. The author uses his original approach, which is based on some results of the classical theory of functions, to prove that

a) $w(x,y) \in C^3$ in a closed rectangle G of the plate. The partial derivatives up to the third order in G can be calculated by differentiating the Navier series term by term under both symbols of summing.

b) All the derivatives $\partial^4 w(x,y) / \partial x^k \partial y^{4-k}$, k = 0, 2, 4 are continuous functions in set E which is coinciding with subtraction from G the lines passing through the sides of the rectangle of load application. In E these derivatives can be calculated by differentiating the Navier series term by term under both symbols of summing.The obtained results substantiate the Navier solution.

New possibilities of electromagnetic radiation method for study of high-velocity processes in microfibers

The main objective of the present work is to develop this promising method and to show its possibilities for registration of fracture and wave propagation phenomena within the non-conductive micro fibers. With this aim, special experimental systems have been devised. The electric signals were recorded by an antenna over radio range of frequency spectrum. Many tests have been carried out with the artificially charged fibers in order to study their transversal oscillations as a string (polymer fibers) or as an elastic cantilever (glass fibers). As a result, a new method for obtaining dynamic elastic parameters of thin fibers by means of measurements of frequencies of these oscillations with help of the electric signal registration has been developed. This method also can be used for nondestructive damage control of a fiber face. The basis for such possibility is the effect of sharp increasing decrement of the charge resolution from the fiber surface which has been revealed in the experiments with repeated oscillations of the glass fibers. The glass fibers 6.5, 10, 18, and 150 μm in diameter and polyethylene threads from fibers (~10^2) 7-12 μm in diameter and fibers (60-300 μm) also were tested in the experiments on fracture at tension as well.

Using Veiss's effective electric field and Boltzmann statistics mathematical model of constitutive equations of ferroelectrics ceramic is constructed.

The mathematical model described generation and evolution of strain and stress fields over a wide range of temperature variations, including crystallization and glass transition is considered. Parameters of model for two types of glass polymers are defined from thermomechanical tests. The formulation of quasistatic boundary- value problem includes new kinetic equations and physical relations that describe thermomechanical effects under relaxation and phase transition with high accuracy. For solving of the system of integral-differential equations the numerical stepped finite-element procedure is used. As example, the solution results for problems of residual stress determination in glassy short cylinder and crystallizing pipe are shown.

When detecting defects and system of defects of complex shape in metallic and composite materials there arises the problem of precise calculation of multiple re-reflections of the ultrasonic waves from curved boundaries. Very often in literature there are used formulas analogous to re-reflections from plane boundaries. Such an approach leads to considerable errors when calculating the amplitude of ultrasonic wave. In the present work on the basis of the asymptotic method developed by the authors we construct an explicit solution of the posed problem in the high-frequency regime.

The method of rolling contact investigation for the case of coated bodies is presented. The axisymmetrical contact problem is solved to find contact pressure and the size of the contact zone. The variation method is used to obtain tangential contact stresses and stick/sleep zones. Stresses inside the layer and the foundation are calculated and analyzed.

Formulations of boundary linear viscoelastic problems of anisotropic and partly homogeneous materials are considered. In general these formulations contain several independent viscoelastic operators. This situation is typical when considering problems of composite materials and constructions deforming made both of components with different properties (fibers, matrixes) and of different materials (plastics, polyethilen, etc.). This paper is devoted to approaches and results of multioperator problems solution illustrating regularities of stress evolution in viscoelastic composite constructions.

The present work is a continuation of the study of wave processes in the framework of the Cosserat medium. A number of new results have been obtained for this model. It has been found that there is dispersion of elastic surface Rayleigh waves. Components of displacements and rotations have been analyzed in detail. A new solution has been obtained which has no analogous in the classical elasticity theory. This solution can describe the wave with one transverse component of the displacement vector and two components of the rotation vector propagating in the plate.

The possible control of process of electroelastic shear waves propagation in the piezoelectric layer with one fastened surface at different piezoelectric crystals is considered, when the material of the layer is a piezocrystal of the class 6mm in case of which localization of wave energy is possible at free boundary of half-space.The influence of the fastened surface on existence of an electroelastic wave and on distribution of electroelastic wave energy along the thickness of a layer as well as the influence of temporary electroelastic load on the behavior of advancing wave is considered.

The inverse problem of impact in the frames of rigid body mechanics is considered.It is assumed, that parameters (the mass, the velocity before and after impact) for one of collided bodies, which possess relatively small mass, cannot be observed or measured.This definition of problem simulate the outer impact of small-mass unknown bodies with the satellites, aircrafts or the inner impact of unknown small-mass fragments, which are break away from equipment in the closed volumes as stream-generators, nuclear reactors, pipelines.In order to construct the closed system of equations the Newton’s suggestion on the constancy of ratio of relative velocities of bodies before and after impact is applied and a new coefficient is introduced. This coefficient specifies the distribution of the restitution potential energy among colliding bodies.The solution of received equations system is illustrated by the examples.

A precise solution of some boundary value and boundary- contact problems of the thermoelastic equilibrium of one- and multilayer bodies, bounded by coordinate surfaces of the cylindrical coordinate system is constructed using the method of separation of variables. The cylindrical surfaces of the body are affected by a stationary thermal field and surfacedisturbances (the stresses, displacements or their combinations are defined). On the remaining part of the surface homogeneous conditions of symmetry or anti-symmetry are defined. The elastic body is assumed to be weaklytranstropic (transversally isotropic) with the plane of isotropy orthogonal to the cylindrical surface. Weakly transtropic layers of the multilayer body contact along the cylindrical surfaces.

It is considered the task of a choice of optimum elastic - geometrical parameters of high-speed rotor settled on combined supports. Proposed algorithm and program of calculation are used for solution of optimization problems to minimize dynamic loads in supports and the amplitude of rotor’s vibration.

There are many problems in Mechanical Engineering, which engineers couldn’t solve analytically or it demands huge expenses for the experimental realization. Particularly the unique opportunity of the express analysis is computer aided mathematical modeling. The most widespread and universal method of engineering analysis is the Finite Element Method - (FEM). In this work the Finite Element analysis of the problems of the localized instability of a plate with free edge is considered and discussed. Comparative analysis of the values of the critical loading obtained analytically and by FEA analysis is curried out.

The non-linear (physically, geometrically) viscous (generalized model) dispersive elastic medium is considered. In such media are possible slowly variating (equilibrium) and rapidly variating (frozen) waves. In the last case in expressions, connecting stresses and deformations as basic functions are taken $\dot{\sigma}_{ik}$, $\dot{\varepsilon}_{ik}$. From general system are derived equations describing rapidly variating waves. Are derived for layer evolutionary equations for two waves, on one edge of layer are given longitudinal displacements, and other edge is free from stresses. Are obtained nonlinear modulation equations for mentioned waves and are derived solutions for narrow beams, when coefficients of modulation equation are the complex numbers.

The vibrations of electrical machine spinning rotor in the magnetic field taking into account the irregularity of air clearance between rotor and stator, field pulsation and higher toothed harmonics are considered. The investigations of the system of obtained nonlinear equations of Mathe-Hills' type allowed to substitute the zones of indefinitely-increasing solutions on the flatness of parameters and received the conditions for the determination of dynamic instability region boundaries.

In this article the existence and the propagation behavior of magneto-elastic Love waves in a layered structure consisting of an isotropic dielectric substrate, an isotropic magnetostrictive layer and a dielectric medium is considered. The mathematical model of the problem is formulated. The dispersion equation for the existence of Love surface waves is obtained with respect to phase velocity. Numerical investigation of the solutions of the dispersion equation is carried out.

Using integral transformations method unsteady plane and three-dimensional problems of elasticity for semi infinite stumps and cracks are derived correspondingly two, three, four and six Wienner-Hopf equations, which are regularized and brought to Hilbert problems with continuous matrix. The solution is brought to corresponding order system of Fredholms integral equations, which are solved numerically by program Mathematica 5.1. Thus it is solved mathematical problem of factorization of complex matrices. Besides in all cases are inverted integral transformations on time and coordinates and are obtained effective solution in Smirnov-Sobolev form for stresses on surfaces of half-planes and half-spaces under punches as well as on banks of cracks. Also there are obtained and calculated stress intensities coefficients near edges of punches and cracks.

Numerous papers consider stability of a rod under follower force. However, only few contributions are available on stability of rectangular plates under follower forces [1][2]. In the present paper a rectangular plate is considered, such that two opposite edges are hinged, and two others are free, loaded with follower forces. The problem is split into determination of symmetric and anti-symmetric shape of loss of stability. For symmetric shape, critical loads are determined using both static problem statement and dynamic problem statement, based on model suggested by Bolotin V.V. [3]. It is shown, that if the plate is narrow enough in the direction of loading forces, the critical loads of dynamic problems (flatter critical loads) are significantly smaller than critical loads of static problems (buckling critical load).

Using laws of thermodynamics for derivingdynamic boundary value problem and heat conduction equation of ageing piezothermoelastic materials

The set of basic laws of thermomechanics includes the equations of motion formulated in terms of balances of momentum and moment of momentum, state equations and two laws of thermodynamics. The intent of the presentation is to show that the dynamic boundary value problem, state equations and the heat conduction equation for certain simple materials are derivable from the first and second laws of thermodynamics in the framework of the geometrically nonlinear continuum mechanics. This idea is applied to "ageing" (time-dependent) simple polarized thermoelastic materials. In the present analysis only mechanical, thermal and electromagnetic phenomena are considered, i.e. the energies associated with e.g. chemical conversions and others excluded from the present analysis. It is also shown that the conventional form of the heat conduction equation for geometrically nonlinear anisotropic polarized thermoelastic media does not satisfy the principle of material frame indifference. A necessary correction is made.

On explicit solution to the equation system of thermoelasticity

In the paper the fundamental and some other matrices of singular solutions are constructed for two-dimensional equations to thermoelastic transversally isotropic body. Using these matrices, the simple and dual layer type potentials are composed and their fundamental properties near the boundary are studied.The explicit solutions to first and second boundary value problems of thermoelasticity are constructed for the two-dimensional equations of thermoelastic transversally isotropic half-plane. For their solutions we use the potential method and we constructed the special fundamental matrices, which reduce the first and second BVPs to a Fredholm integral equations of the second kind. By the aid of these equations, in this paper we have obtained the Poisson type formula for the solution to the first and second BVPs for the half-plane.

The intense and deformed condition with the structure of the water head spillway hollow dam

The stress-strain state of a cylindrical upstream face of the type dam is studied by using the semi-moment shell theory, and the calculation of the foundation tile is conducted for one and multi-layer areas on an elastic foundation with two characteristics. Computer software for numerical implementation of theoretical solutions has been developed.

Localized bending vibration of a rectangular plate with one free and three clamped edges

The dynamic problem of localized bending waves in thin rectangular plates is studied. The plate has one edge free from mechanical stresses, while the other three are assumed to be rigidly clamped. This type of structural configuration corresponds to several engineering systems, and the specific set of boundary conditions has been selected also to simulate damaged structural components with cracks. A time-harmonic plane wave solution is assumed; using variational methods the necessary and sufficient conditions for the existence of a localized bending wave are obtained. The frequency of the localized wave is the lowest among the spectrum of natural frequencies of the plate. For finite and semi-finite plates, the minimal frequencies of localized mode are derived analytically, as a function of mechanical properties and geometrical parameters of the elastic plate.

Vladimir Kukudzhanov 483

A numerico-analytical splitting method for the solution of elastoviscoplastic equations with internal variables

Meyers A., Xiao H., Bruhns O.T. 487

Consinstent eulerian elastoplaasticity

An Eulerian theory of elastoplasticity may be based on the additive decomposition of the stretching D in a recoverable and a dissipated part, i.e. $D = D^{\mathrm{e}} + D^{\mathrm{p}}$. Herein, the recoverable stretching D^{e} is intended for the elastic resp. elastic-like behaviour while the dissipated stretching D^{p} is related to the plastic flow in conjunction with a yield function f and hardening variables κ for the isotropic hardening and α for the kinematic hardening. Since the spatial description relates to the actual, deformed, configuration, special care has to be taken for formulating the material law in an objective, frame indifferent way. This is of primary importance not only for the tensorial quantities in use but also for their time derivatives.Based on Prager's yielding stationarity criterion [1], the exact integrability condition [2, 3, 4] and a weakened form of Ilyushin's postulate [5, 6] a consistent Eulerian description is presented that excels by the restricted number of material parameters and the simplicity of its formulation, and, moreover, is exempted from notions of elastic and plastic deformation.

Takeuchi Norio 492

Elasto-plastic analysis in soil and rock mechanics by using hybrid-type penalty method

This paper presents new approach for the numerical analysis in the soil and rock mechanics by using Hybrid-type penalty method (HPM). HPM with the linear displacement field assume rigid displacement, rigid rotation and constant strain as the parameter in each sub-domain and introduce subsidiary condition about the continuity of displacement into the framework of the variational expression with Lagrange multipliers. This compatibility of the displacement on the intersection boundary is approximately introduced using the penalty as a spring constant which is applied to the Lagrange multiplier. Present method can be deal with the fracture on the intersection boundary and yielding in the each element at the same time. First, We explain the formulation of HPM. In addition, we develop the nonlinear analysis for the progressiveness destruction, and examine accuracy of the collapse load and crack patterns. Finally, we apply to some geotechnical engineering problems, and verify the validity of HPM.

Vantsyan Anushavan, Hovsepyan Dukhik 497

The Penetration of Deformable Indentor into Half-Space in the Presence of Discharge Current and Magnetic Field

The penetration of deformable indentor into target in the presence of magnetic field are investigated numerically. The fields of stress in target and indentor are determined. The forms of indentor, crater and free surface in arbitrary moment of penetration are founded. Shown the form of fly away of fragments. The problem for different time of action of magnetic field are considered. The graphs of velocity of indentor in the process of penetration, the equipotential surface of energy in target and the bounders of elastic-plastic regions in target and indentor also are obtained. By numerical calculations as a result it's obtained the occurrence of the surface and axial-closely currents during the penetration process of the deformable indentor into the media, which are known as Pinch-effect and the Inverse-pinch-effect phenomena.

Vashakmadze Tamaz 500

Basic Systems of Equations of Continuum Mechanics and Refined Theories for Thin-walled Viscoelastic structures

There is constructing three-dimensional(3D respect to spatial coordinates) nonlinear dynamical systems of partial differential equations(PDE) which contains as particular cases Navier-Stokes' equations and nonlinear systems of PDE theory of visco-elasticity. By this presentation we prove that nonlinear appearances, observed in problems of solid mechanics may be detected in the Navier-Stokes' type equations and vice versa. In the second part we are creating and justifying 2D mathematical models (refined theories) of von Karman-Mindlin-Reissner type system of PDEs for anisotropic elasto-creeping media for thin-walled structures with variable thickness by direct method without emploiment simplifying assumptions of geometric or mechanical characters. Our methodology is different with considerations of [1]. In this aim we also investigate the problem of explaining "Physical Soundness" in the Truesdell-Ciarlet sense for some dynamic nonlinear models of visco-elasticity.

О Г Л А В Л Е Н И Е