

## Влияние структурных особенностей аппроксимантов фрактальных систем на их оптические свойства

Ю. В. Рыжикова<sup>1,\*</sup>, П. В. Короленко<sup>1</sup>, С. Б. Рыжиков<sup>2</sup>  
 Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
 физический факультет

<sup>1</sup>кафедра оптики, спектроскопии и физики наносистем  
<sup>2</sup>кафедра общей физики

Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2  
 (Статья поступила 06.07.2017; Подписана в печать 07.07.2017)

Рассмотрены оптические характеристики аппроксимантов аperiodических решеток и многослойных систем разной геометрии с фрактальными признаками. Показана эквивалентность оптических характеристик аппроксимантов структур Фибоначчи, сформированных проекционным и блочным методами.

PACS: 42.25.Fx; 42.25.Hz; 07.05.Tr

УДК: 535.015

Ключевые слова: аппроксиманты, аperiodические системы, фракталы, дифракция, интерференция.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время широкий круг физических задач решается на основе использования фрактальных представлений [1]. В частности, фрактальный анализ применяется для оптимизации параметров аperiodических дифракционных решеток и многослойных систем. Часто их построение осуществляется с помощью одномерных моделей квазикристаллов [1, 2]. Использование таких аperiodических структур существенно расширило элементную базу оптических устройств и улучшило ряд диагностических методов, в частности, направленных на исследование свойств наноструктурированных материалов и сред [3, 4].

Несмотря на значительное число публикаций, посвященных изучению различных характеристик аperiodических структур [1–3, 5], оптические свойства их аппроксимантов [6–8] в полной мере не изучены.

В простейшем случае аппроксиманты можно представить в виде блочных систем вида:  $A_l = \{S_l\}^p$ , где  $S_l = \{A, B\}$  — элементарная ячейка аппроксиманта,  $l$  — уровень генерации, используемой числовой аperiodической последовательности (Фибоначчи и др.),  $A$  и  $B$  — элементы последовательности,  $p$  — порядок аппроксиманта, определяемый числом элементарных ячеек. Исследование характеристик аппроксимантов, занимающих промежуточное положение между аperiodическими и периодическими системами, представляет практический и общетеоретический интерес [9]. Замена аperiodических систем на их аппроксиманты в ряде случаев приводит к возможности получения более простых в изготовлении структур с желаемыми оптическими характеристиками [3, 9]. Схожесть оптических характеристик аппроксимантов, построенных разными способами, указывает на высокую устойчи-

вость к возможным детерминированным изменениям, вносимым в их структуру.

Цель данной работы состоит в оценке влияния геометрических особенностей задания исходных аperiodических систем (дифракционных решеток и многослойных систем) на оптические характеристики аппроксимантов. Это позволяет дополнить анализ устойчивости фрактальных свойств аperiodических структур и их аппроксимантов к возможным детерминированным и случайным изменениям их геометрии на этапе их формирования [10].

### 1. СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ АППРОКСИМАНТОВ АПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ ОПТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Построение аппроксимантов осуществлялось на основе использования свойств аperiodических числовых последовательностей  $S_l = \{A, B\}$ , где  $l$  — уровень генерации,  $A$  и  $B$  — элементы последовательности. В аperiodических дифракционных решетках размеры элементов  $A$  и  $B$  определяют расстояния между щелями. Рассматриваемые последовательности  $S_l$  определяют закон чередования элементов в первичной структуре. Для изучения оптических свойств решеток и их аппроксимантов также использовалось бинарное представление вида:  $S_l = \{0, 1\}$ . Применительно к решетчатым структурам положение единиц определяет распределение рассеивающих центров, а положение нулей — распределение свободных вакансий. В многослойных системах закон чередования элементов  $A$  и  $B$  определяет распределение слоев с высоким и низким показателем преломления.

Применительно к рассматриваемым аperiodическим структурам аппроксиманты можно разделить на два типа по способу их геометрического построения. Первый тип аппроксимантов — блочный:  $A_l^{(1)} = A_l = \{S_l\}^p$ . Реализация блочного метода построения аperiodических систем осуществляется с ис-

\*E-mail: ryzhikovaju@physics.msu.ru

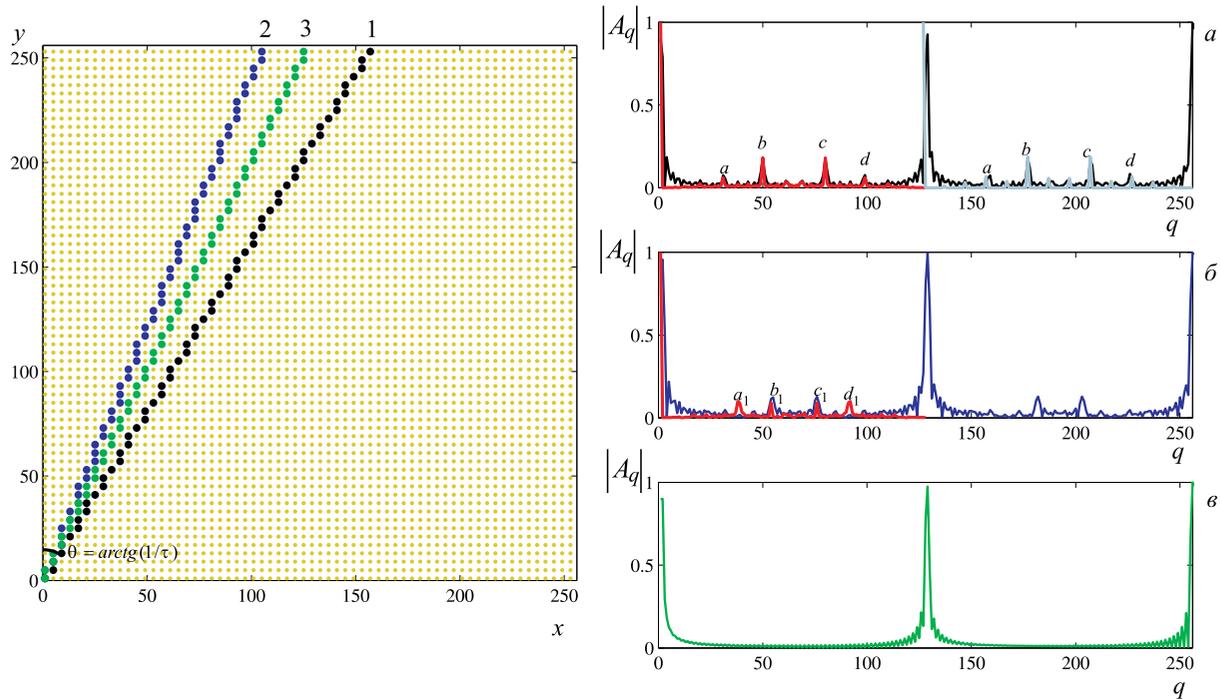


Рис. 1: Графическое представление решетчатых структур (1–3) и распределение амплитуды  $A_q$  (а–в) в поле дифракции волны на решетках с коэффициентом золотого сечения  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$  (1), серебряного сечения  $\tau = 1 + \sqrt{2}$  (2) и коэффициентом для периодической системы  $\tau = 2$  (3),  $q$  – пространственная частота,  $x, y$  – поперечные координаты. Красным цветом показаны на (а–б) фрагменты спектров  $|A_q|$ , соответствующие блочному заданию структур 1 и 2. Серым цветом на (а) приведено распределение амплитуды  $A_q$  на аппроксиманте Фибоначчи  $A_6^{(1)}$  с элементарной ячейкой из 13 элементов  $N_{cell} = 13$

пользованием правил замещения  $g$  [5], например:

$$\begin{aligned}
 g(A) &= A, B, A; & g(B) &= B, B, B; \\
 g(A) &= A, B; & g(B) &= B, A; \\
 g(A) &= A, B; & g(B) &= A, A; \\
 g(A) &= A, B; & g(B) &= A; \\
 g(A) &= A, A, B; & g(B) &= A;
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

справедливых соответственно для числовых последовательностей Кантора, Морса–Туэ, двойного периода, Фибоначчи и серебряного сечения. Для построения аperiodических структур формулу (1) необходимо дополнить заданием начальных уровней  $S_0$  или  $S_1$ .

Второй тип аппроксимантов  $\tilde{A}_l^{(2)} = \{\tilde{S}_l\}^P$  представляет последовательность элементарных ячеек  $\tilde{S}_l$ , аperiodическая структура которых может варьироваться в широких пределах без нарушения принципа построения исходной числовой последовательности. При этом элементарные ячейки не совпадают с уровнями генерации аperiodической структуры:  $\tilde{S}_l \neq S_l$ . Индекс  $l'$  – аналог  $l$  – определяет степень сложности элементарной ячейки. В частности, ко второму типу были отнесены аппроксиманты, полученные методом проектирования [11, 12].

В литературе, как правило, проекционный метод построения аperiodических структур рассматривается

применительно к системам Фибоначчи и их аппроксимантам [1, 11, 12]. В основу проекционного подхода положено задание полосы с наклоном  $\theta = \text{arctg}(1/\tau)$ , где  $\tau$  определяет структуру. Полоска выделяется из 2D периодической структуры. Точки 2D решетки, покрытые этой полоской, проектируются на линию, которая параллельна построенной полоске с шириной равной периоду регулярной двумерной решетки. Если  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$  – получаем одномерную аperiodическую структуру с геометрией систем Фибоначчи. На рис. 1 с использованием графической формы [11] слева представлены полосы, выделенные в 2D периодической решетке при разных углах наклона, соответствующие бинарной функции пропускания:  $F^o(A, B) = \{1, 0\}$ .

При нормальном освещении структур 1–3 (рис. 1), получим проекции распределения амплитуды  $|A_q|$  ( $q_x = 128, q_y = q$ ), соответствующие разным углам наклона выделенных на графике структур (рис. 1, а–в). На рис. 1,а фрагмент амплитудного спектра соответствует заданию системы Фибоначчи с  $\tau \approx 1.618$  (черный цвет). Красным цветом показан фрагмент спектра  $|A_q|$  системы Фибоначчи, сформированной по формуле (1), соответствующей блочному методу построения. Из рис. 1,а видно, что распределение амплитуды  $A_q$  практически одинаково как для решетки полученной блочным методом, так и для решетки, сформированной

проекционным способом. Об этом свидетельствует высокий коэффициент корреляции между амплитудными фрагментами спектров  $|A_q|$ , соответствующими блочному и проекционному способу задания систем Фибоначчи ( $K \approx 0.9$  на интервале  $ad$ ). Серым цветом на рис. 1,а показан фрагмент спектра  $|A_q|$  для аппроксиманта системы Фибоначчи  $A_7^{(1)}$  с элементарной ячейкой из 13 элементов и периодом  $p = 10$ . В этом случае коэффициент корреляции по форме между амплитудными фрагментами спектров  $|A_q|_{q=1\dots 127}$  для блочной реализации системы Фибоначчи и ее аппроксиманта  $A_7^{(1)}$  составляет  $K \approx 0.96$ . Большое значение коэффициента корреляции  $K$  рассматриваемых оптических характеристик указывает на возможность замены аперидической системы на ее более простой периодический аналог — аппроксимант.

Если  $\tau = 1 + \sqrt{2} \approx 2.414$  — получаем аперидическую структуру с геометрией, характерной для систем на основе серебряного сечения. На рис. 1,б представлен фрагмент амплитудного спектра  $|A_q|$  ( $q_x = 128, q_y = q$ ) системы с  $\tau \approx 2.414$  (синий цвет). Красным цветом отмечен фрагмент амплитудного спектра  $|A_q|$ , полученный для структуры на основе серебряного сечения по формуле (1) с начальным уровнем генерации  $S_0 = B$ . Коэффициент корреляции между амплитудными фрагментами спектров  $|A_q|$ , соответствующими блочному и проекционному способу задания систем на основе серебряного сечения составил существенно меньшую величину  $K \approx 0.57$ . Этот результат указывает на значительное влияние изначального задания рассматриваемых систем с геометрией отличной от геометрии систем Фибоначчи.

Если  $\tau$  представляет собой целое число, то результатом метода проецирования является некоторая периодическая последовательность. Для примера на рис. 1,в показан фрагмент амплитудного спектра  $|A_q|$  ( $q_x = 128, q_y = q$ ), соответствующий регулярной структуре полосы 3 для наклона  $\theta = \arctg(1/2)$ .

Наилучшее совпадение (с  $K \approx 0.99$ ) спектров  $|A_q|$ , соответствующих блочному и проекционному способам задания аперидических систем, достигалось при использовании классического 1D проекционного представления систем Фибоначчи [12].

Результаты численного моделирования показали, что фурье-образы рассматриваемых аперидических систем обладают выраженными скейлинговыми свойствами и имеют фрактальный характер. Так, коэффициенты скейлинга  $\zeta$  для фрагментов амплитудных спектров  $|A_q|$  определялись отношением размеров самоподобных элементов в их структуре  $\zeta_1 = bc/ab$ ;  $\zeta_2 = a_1d_1/b_1c_1$ . Для систем на рис. 1,а —  $\zeta_1 \approx 1.6$ , на рис. 1, б —  $\zeta_2 \approx 2.41$ .

Отметим, что полученные коэффициенты скейлинга  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  оптических характеристик аппроксимантов, соответствуют ранее полученным коэффициентам скейлинга дифракционных спектров  $|A_q|$  для структур, характеризующихся коэффициентами золотого  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$  и серебряного сечения  $\tau = 1 + \sqrt{2}$  [10,

13]. Те же коэффициенты скейлинга, как показали расчеты, характеризуют структуры и спектральные характеристики многослойных систем (спектры отражения), сформированных на основе блочного и проекционного подходов [1, 11]. При этом было установлено, что, несмотря на некоторые отличия, аппроксиманты с разными уровнями генерации элементарных ячеек характеризуются одинаковой формой паттернов и одинаковыми значениями коэффициентов скейлинга  $\zeta$ . Подобными скейлинговыми свойствами обладают решетчатые и многослойные системы аппроксимантов Морса-Туэ, двойного периода,  $m$ -боначчи и ряда металлических сечений [3, 9, 14].

Расчеты спектров отражения аперидических многослойных систем (1D фотонных кристаллов) производились на базе известного матричного метода [15]. Вычисления были выполнены в предположении, что элементу  $A$  ставится в соответствие слой с низким показателем преломления  $N_A = 2$ , а  $B$  — с высоким  $N_B = 3$ . Показатель преломления окружающей среды равен  $N_C = 1$ . Для удобства выявления признаков самоподобия анализируемых оптических спектров рассчитывался коэффициент:  $r = -\ln(1 - R)$ , где  $R$  — коэффициент отражения.

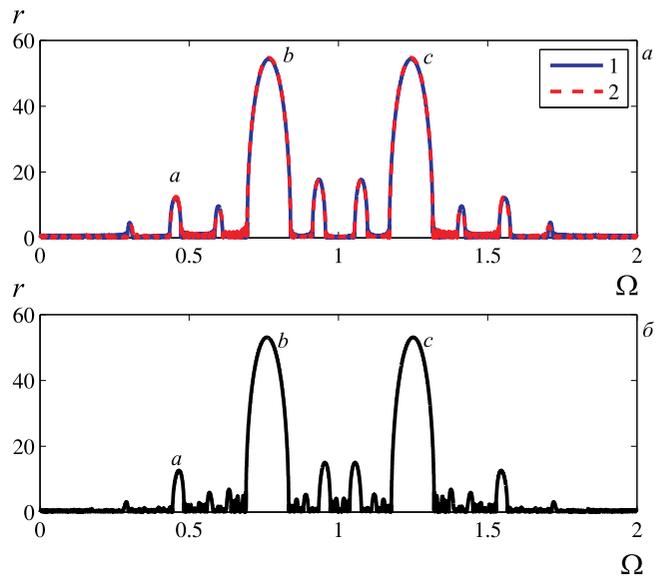


Рис. 2: Спектры коэффициентов  $r$  аппроксимантов системы Фибоначчи разной геометрии  $A_6^{(1)}$  и  $A_6^{(2)}$  ( $J = 234, N_{cell} = 13, p = 18$ ) (а) и многослойной первичной системы ( $J = 233$ ) (б). В качестве локальных паттернов выбрана система пиков на интервале  $bc$ . 1 — система, сформирована блочным методом, 2 — система построена проекционным методом

Для примера на рис. 2 показаны спектральные характеристики  $r = r(\omega/\omega_0) = r(\Omega)$  для многослойной системы Фибоначчи и ее аппроксиманта. Фазовые набег в слоях при распространении излучения через многослойные системы считались одинаковыми. Нор-

мировочная частота  $\omega_0$  соответствует фазовым набегам в слоях, равным  $\pi/2$ . Расчетный коэффициент скейлинга оказался равным  $\zeta_1 \approx 1.62$ .

Результаты численного моделирования (рис. 2,а) показывают эквивалентность оптических характеристик аппроксимантов многослойных систем Фибоначчи, построенных разными методами — проекционным [11, 12] и блочным (1).

Приведенные результаты на рис. 1,а и рис. 2 указывают на структурную схожесть по форме отдельных фрагментов (паттернов *bc* и *ab* [16]) спектральных характеристик рассмотренных аперiodических систем разной физической природы (картины дифракции, спектры отражения многослойных систем).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование указывает на эквивалентность оптических характеристик структур Фибоначчи

и их аппроксимантов, сформированных проекционным и блочным методом. Оптические характеристики аперiodических структур и аппроксимантов при  $\tau \neq (1 + \sqrt{5})/2$ , полученных на основе использования различных методов, имеют определенные отличия.

Рассмотренные вопросы о влиянии геометрического задания аппроксимантов аперiodических структур на их оптические свойства находятся в русле решения общетеоретической проблемы фрактальной оптики, связанной с определением общих закономерностей между структурными особенностями объектов и фрактальностью их характеристик [16]. Ее решение применительно к аппроксимантам разной геометрии позволит выработать единые критерии для идентификации широкого класса аперiodических объектов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-32-00386 мол\_а.

- 
- [1] *Negro L. D.* Optics of Aperiodic Structures. Fundamentals and Device Applications. CRC Press Taylor & Francis Group, 2014.
  - [2] *Albuquerque E. L., Cottam M. G.* Phys. Rep. 2003. **376**. P. 225.
  - [3] *Короленко П. В., Логачев П. А., Рыжиков С. Б., Рыжикова Ю. В.* Физические основы приборостроения. 2014. **3**, №3. С. 66.
  - [4] *Рыжикова Ю. В., Короленко П. В., Рыжиков С. Б.* Сборник тезисов докладов научной конференции «Ломоносовские чтения». Секция физики. С. 7. М.: Физический факультет МГУ, 2017.
  - [5] *Macia E.* Rep. Prog. Phys. 2006. **69**. P. 397.
  - [6] *Entin-Wohlman O., Kleman M., Pavlovitch A. J.* Phys. France. 1988. **49**. P. 587.
  - [7] *Olsson S., Broitman E., Garbrecht M., Birch J., Hultman L., Eriksson F. J.* Mater. Res. 2016. **31**, N 2. P. 232.
  - [8] *Unal B., Evans J. W., Thiel P. A.* Acta Physica Polonica A. 2014. **126**, N 2. P. 608.
  - [9] *Korolenko P. V., Logachev P. A., Ryzhikova Yu. V.* Phys.Wave Phenom. 2015. **23**, N 1. P. 46.
  - [10] *Рыжикова Ю. В., Короленко П. В., Логачев П. А.* Ученые записки физического ф-та Московского Ун-та. 2014. № 4. С. 144330.
  - [11] *Tsai An Pang* Sci. Technol. Adv. Mater. 2008. **9**. P. 013008.
  - [12] *Фаддеев М. А.* Вестник Нижегородского университета имени Н.И.Лобачевского. Сер. Физика твердого тела. 2001. №1. С. 44.
  - [13] *Korolenko P. V., Mishin A. Y., Ryzhikova Yu. V.* Optik–International J. for Light and Electron Optics. 2013. **124**(19). P. 3946.
  - [14] *Давыдова М. Г., Короленко П. В., Рыжикова Ю. В.* Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2016. №4. С. 56. (*Davydova M. G., Korolenko P. V., Ryzhikova Yu. V.* Mosc. Univ. Phys. Bull. 2016. **71**, Iss. 4. P.395).
  - [15] *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1970.
  - [16] *Korolenko P. V., Ryzhikov S. B., Ryzhikova Yu. V.* Phys.Wave Phenom. 2013. **21**, N. 4. P. 256.

## Influence of structural features of fractal system approximants on their optical properties

**Yu. V. Ryzhikova<sup>1,a</sup>, P.V. Korolenko<sup>1</sup>, S.B. Ryzhikov<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Department of optics, spectroscopy and nanosystems physics*

<sup>2</sup>*Department of general physics*

*Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.*

*E-mail: <sup>a</sup>ryzhikovaju@physics.msu.ru*

Optical characteristics of approximants of aperiodic gratings and multilayer systems with different geometries and fractal features are considered. Equivalence of optical characteristics of approximants of Fibonacci structures formed by projection and block methods is shown.

PACS: 42.25.Fx; 42.25.Hz; 07.05.Tp.

*Keywords:* approximants, aperiodic systems, fractals, diffraction, interference.

*Received 06 July 2017.*

**Сведения об авторах**

1. Рыжикова Юлия Владимировна — канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-57-40, e-mail: gyzhikovaju@physics.msu.ru.
2. Короленко Павел Васильевич — доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор; тел.: (495) 939-57-40, e-mail: pvkorolenko@rambler.ru.
3. Рыжиков Сергей Борисович — доктор пед. наук, доцент, доцент; тел.: (495) 939-57-40, e-mail: gyzhikovaju@physics.msu.ru.