

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М .В. ЛОМОНОСОВА

механико-математический факультет
кафедра теории вероятностей



на правах рукописи
УДК 519.21

Ирхина Наталья Александровна

**ПРИНЦИП ВАНГА
В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ
СТРАХОВАНИЯ**

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доцент, кандидат физ.-мат. наук
Лебедев Алексей Викторович

Москва — 2010г.

Оглавление

Введение	3
1 Достаточные условия сводимости	20
1.1 Основные определения и предшествующие результаты	20
1.2 Первое достаточное условие	22
1.2.1 Теорема о приближении ”ступеньки”	22
1.2.2 Примеры	24
1.2.3 Контрпримеры	26
1.3 Второе достаточное условие	28
1.3.1 Теорема о линейных комбинациях	28
1.3.2 Примеры	28
1.3.3 Обобщение на случай бесконечной дисперсии	38
1.4 Третье достаточное условие	39
1.4.1 Теорема о нелинейном приближении	39
1.4.2 Примеры	40
2 Границы и чувствительность премии	43
2.1 Определения и мотивация исследований	43
2.2 Чувствительность для распределений Парето	45
2.2.1 Абсолютная чувствительность	45
2.2.2 Относительная чувствительность	52
2.2.3 Чувствительность в случае бесконечной дисперсии	53
2.3 Пример Янг и его обобщения	55
2.3.1 История вопроса	55
2.3.2 Поведение премии и асимметрии в предельных случаях	58

2.3.3	Структура линий уровня асимметрии	64
2.3.4	Выводы	72
2.4	Границы премии при моментных условиях	74
3	Предельные теоремы и оценки	81
3.1	Теоремы о непрерывности и оценки разности	81
3.2	Предельные теоремы для сумм	87
3.3	Статистические оценки	90
4	Экономия от совместного страхования	100
4.1	Определения и постановка задачи	100
4.2	Основные свойства экономии	102
4.3	Случай независимых рисков	104
4.4	Случай зависимых рисков	114
	Список литературы	129

Введение

В современном обществе страхование является универсальным средством защиты всех форм собственности, доходов и других интересов предприятий и организаций, арендаторов, фермеров, отдельных граждан, т.е. юридических и физических лиц.

Страхование — это операция, посредством которой одна из сторон (страхователь), внося определенную сумму денег (премию или страховой взнос), обеспечивает себе или третьему лицу (выгодоприобретателю) при осуществлении риска (т.е. наступлении страхового случая) выплату возмещения другой стороной (страховщиком), принимающем на себя целый ансамбль рисков, которые он компенсирует в соответствии с законами теории вероятностей [1, с. 8].

В диссертации рассматривается модель, в которой страхователь страхует свои будущие случайные убытки, описываемые случайной величиной X (называемой *риском*), за что страховщик берет с него некоторую неслучайную сумму денег $H(X)$ (называемую *премией*). Различные методы (формулы, алгоритмы) подсчета премии называются *принципами*.

Одним из ключевых вопросов математической теории страхования является научно обоснованное построение принципов назначения страховых премий и изучение их свойств. С точки зрения теории вероятностей, страховые премии можно рассматривать как числовые характеристики случайных величин (рисков) и их распределений. Некоторые виды премий выражаются через более традиционные числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсию и др.), а некоторые имеют иную структуру. Но все их можно рассматривать как функционалы H на неотрицательных случайных величинах, отображающие $X \mapsto [0, \infty)$. Поиск надежного принципа подсчета премии является предметом многочисленных актуарных исследований, однако вопрос

о том, какой именно принцип предпочтителен, все еще не решен.

Интуитивно понятно и аналитически доказано, что если назначать премию за риск, руководствуясь соображениями равенства средних затрат страхователя и страховщика, то вероятность разорения последнего будет составлять $1/2$ в модели для совокупного убытка, что на практике недопустимо. Поэтому при расчете в тариф необходимо заложить некоторую рисковую надбавку, методы оценки которой активно исследуются учеными.

В страховой практике наиболее распространенными способами оценки премии являются методы, основанные на первых двух моментах распределения. Однако поскольку распределения убытков часто сильно ассиметричны, первые два момента не могут адекватно отразить степень страхового риска. Рамсэй [34] в своей формуле вычисления премии рассматривал также третий момент. Однако здесь возникают проблемы, связанные с порядком рисков. Первый стохастический порядок рисков определяется так: случайная величина X_1 стохастически не больше случайной величины X_2 (обозначают: $X_1 \preceq_{st} X_2$), если для любого t выполнено: $F_1(t) \geq F_2(t)$, где F_i — функция распределения X_i . Для премий весьма желательно, чтобы они сохраняли этот порядок, т.е. чтобы выполнялось $H(X_1) \leq H(X_2)$. Тем не менее, методы, основанные на моментах, обычно нарушают первый стохастический порядок рисков. Интерес актуариев к математическим методам упорядочивания рисков привлекли работы [13], [15], [23]. В течение последних десятилетий велись многочисленные исследования с целью получить условия, при которых различные лица, принимающие решения и имеющие различные предпочтения, делают одинаковый выбор в аналогичных ситуациях, связанных с неопределенностью. Несостоятельность в этом смысле методов, основанных на моментах, обсуждалась рядом авторов (см., например, [1], [37], [44]).

Помимо методов, основанных на моментах, которые наиболее часто применяются на практике, разработан ряд теоретических принципов подсчета премии (см., например, [1], [4], [24]). Большинство из них опираются на теорию полезности, например, принцип экспоненциальной полезности ([1], [4], [20], [21]), согласно которому премия $H(X)$ за риск X равна

$$H(X) = \frac{1}{\alpha} \ln (\mathbf{E}e^{\alpha X}), \quad \alpha > 0,$$

и принцип Эшера ([1], [4], [14]), согласно которому $H(X) = \mathbf{E}X_h$, где случай-

ная величина X_h имеет функцию распределения $F_{X,h}$, задаваемую соотношением:

$$dF_{X,h}(x) = \frac{e^{hx}}{g_X(h)} dF_X(x),$$

а $g_X(h) = \mathbf{E}e^{hX}$ — производящая функция моментов ($h > 0$). Однако Рейх ([35]) показал, что ни один из этих теоретических принципов не удовлетворяет условию сдвигово-масштабной инвариантности, которое также является желательным условием для премий.

Голландский принцип ([43]), который определяется следующим образом:

$$H(X) = \mathbf{E}(X + \theta \max[X - \alpha \mathbf{E}X, 0]), \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad \alpha \geq 1,$$

превосходит все предыдущие тем, что он является инвариантным относительно сдвигово-масштабных преобразований (точнее говоря, он обладает масштабной инвариантностью всегда, а сдвиговой — при $\alpha = 1$). Более того, он сохраняет первый стохастический порядок рисков. Однако в перестраховании данный принцип имеет существенные ограничения в применении, поскольку его относительная нагрузка $(H(X) - \mathbf{E}X)/\mathbf{E}X$ не превосходит 100%.

Деннеберг [18] предложил принцип абсолютного отклонения:

$$H(X) = \mathbf{E}X + \theta \tau(X), \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

где $\tau(X) = \mathbf{E}|X - \text{med}X|$ — среднее абсолютное отклонение от медианы. Данный принцип также является инвариантным относительно сдвигово-масштабных преобразований и сохраняет первый стохастический порядок рисков. Однако для рисков с вероятностью наступления страхового случая менее 50% он эквивалентен принципу среднего ($H(X) = (1 + \theta)\mathbf{E}X$, $\theta > 0$), что ограничивает его применимость.

В последние десятилетия особый интерес вызывает так называемый принцип Ванга подсчета премии, изложенный С.С. Вангом в [46] и [47]. Еще в 1991 году Вентер [44], изучая вопросы безарбитражности в страховом ценообразовании, предложил использовать принципы подсчета премии на основе трансформации функции распределения. Развивая идеи Вентера, Ванг предложил определить премию за риск, как полный интеграл от модифицированной функции дожития случайной величины убытка ($S_X(t) = P(X > t)$).

Первоначально [46] формула подсчета премии выглядела следующим образом:

$$\pi_{\rho}^{\text{PH}}(X) = \int_0^{\infty} S_X(t)^{1/\rho} dt, \quad \rho \geq 1,$$

где ρ — так называемый индекс неприятия риска, а принцип носил название Proportional Hazard Premium principle (PHp), т.е. пропорционального изменения интенсивности [1].

Несколько позднее Ванг [47] обобщил PHp, а именно, вместо степенной трансформации функции дожития случайной величины он предложил использовать произвольную возрастающую вогнутую функцию искажения $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, такую что $g(0) = 0$, $g(1) = 1$:

$$H_g(X) = \int_0^{\infty} g(S_X(t)) dt. \quad (Wp)$$

Условия на граничные значения функции g необходимы для того, чтобы не назначать премию в случае отсутствия риска и брать премию в полном объеме в случае, если страховое событие произойдет наверняка.

Можно отметить несколько положительных свойств данного метода. Во-первых, в случае вогнутости функции искажения рисковая надбавка является положительной величиной, но не чрезмерно увеличивает премию, т.е. общая премия за риск не оказывается больше максимально возможного убытка по данному риску:

$$EX \leq H_g(X) \leq \sup X.$$

Во-вторых, нагрузка не является необоснованной в том смысле, что если риск фиксированный, то за него не назначается рисковая надбавка:

$$P(X = b) = 1 \Rightarrow H_g(X) = b.$$

В-третьих, данный принцип инвариантен относительно сдвигово-масштабных преобразований в следующем смысле:

$$H_g(aX + b) = aH_g(X) + b, \quad a, b > 0.$$

В-четвертых, в случае вогнутости функции искажения Wp субаддитивен по произвольным случайным слагаемым, т.е. не дает преимуществ страхователю в случае дробления риска на части:

$$H_g(X + Y) \leq H_g(X) + H_g(Y).$$

Страховщик, определяя фиксированную премию за каждый риск, тем самым неявно упорядочивает риски. Поэтому еще одним важным свойством W_p является сохранение первого стохастического порядка рисков:

$$X \preceq_{st} Y \Rightarrow H_g(X) \leq H_g(Y).$$

Более того, данный механизм не использует функцию полезности, в связи с чем относительно более легок в применении в сравнении с традиционными методами теории полезности.

Помимо степенной функции искажения Ванг рассматривал следующие классы функций [47]:

- дуальные степенные: $g(x) = 1 - (1 - x)^\alpha$, $\alpha \geq 1$;
- кусочно-линейные, что соответствует принципу Деннеберга [18]:

$$g(x) = \begin{cases} (1+r)x, & 0 \leq x < 1/2, \\ r + (1-r)x, & 1/2 \leq x \leq 1; \end{cases} \quad 0 \leq r \leq 1;$$

- квадратичные, что соответствует принципу Джини: $g(x) = (1+r)x - rx^2$, $0 \leq r \leq 1$;

- включающие квадратные корни:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+rx}-1}{\sqrt{1+r}-1}, & r > 0, \\ x, & r = 0; \end{cases}$$

- включающие экспоненту:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{-rx}}{1-e^{-r}}, & r > 0, \\ x, & r = 0; \end{cases}$$

- включающие логарифм:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+rx)}{\ln(1+r)}, & r > 0, \\ x, & r = 0; \end{cases}$$

- а также смеси и композиции функций искажения.

Принцип Ванга обсуждался многими авторами, которые обобщили его для распределений на всей числовой оси [52], что позволило рассматривать преобразованные (например, центрированные) случайные величины и обеспечить

инвариантность относительно любых сдвигов (как положительных, так и отрицательных):

$$H_g(X) = \int_{-\infty}^0 (g(S_X(t)) - 1)dt + \int_0^{\infty} g(S_X(t))dt.$$

Поэтому мы будем далее понимать под рисками произвольные случайные величины без условия их неотрицательности, что позволяет распространить теорию не только на страховые, но и на финансовые риски.

Также последователи Ванга отказались от требования вогнутости функции искажения, что расширило класс допустимых функций, однако при этом было потеряно свойство суббаддитивности ([45], [50], [52]).

В настоящее время характерна тесная связь между актуарной и финансовой математикой. Существует глубокое внутреннее сходство между страхованием и хеджированием. Многие банки занимаются страхованием [1]. В этой связи необходимо отметить, что принципу Ванга в страховании соответствует очень важный класс когерентных мер риска в финансовой математике — $WV@R$ (взвешенный $V@R$) [16]. Данное соответствие устанавливается заменой знака у случайной величины риска, поскольку в страховании изучают убытки, а в финансовой математике — прибыли.

Было установлено, что принцип Ванга является надежной мерой риска, обладая рядом важных практических свойств (см. [17], [45]-[48], [50]-[52]). Однако формула Ванга подсчета премии достаточно громоздкая, а также требует знания всей функции распределения рассматриваемого риска, что не всегда доступно в реальных условиях. Поэтому важной задачей является определить, при каких условиях данный принцип эквивалентен более удобному в применении принципу подсчета премии, например, наиболее распространенному в страховой практике методу, основанному на двух первых моментах распределения. В качестве такого принципа рассматривался традиционный принцип подсчета премии по среднеквадратическому отклонению или среднеквадратический принцип (SDp — Standard Deviation Premium principle):

$$\pi_{\lambda}^{\text{SD}}(X) = \mathbf{E}X + \lambda\sqrt{\mathbf{D}X}, \quad \lambda > 0.$$

Кристофидес [17] изучал частный случай принципа Ванга и выяснил, что для нормального, логистического, треугольного, равномерного, гумбелевско-

го и вейбулловского семейств распределений рисков PH_ρ эквивалентен SD_ρ , т.е. для каждого $\rho > 1$ найдется такое $\lambda > 0$, что $\pi_\rho^{\text{PH}}(X) = \pi_\lambda^{\text{SD}}(X)$.

Янг [52] обобщила выводы Кристофидеса и доказала, что для фиксированной функции искажения принцип Ванга (W_ρ) эквивалентен SD_ρ на сдвигово-масштабных семействах распределений и некоторых других двухпараметрических семействах распределений, обладающих определенными свойствами.

Дж.-Л. Ванг [45] ввел понятие натурального множества как множества всех распределений, на котором W_ρ сводится к SD_ρ для фиксированной функции искажения, и доказал один фундаментальный результат о том, что для фиксированной функции искажения натуральное множество является объединением сдвигово-масштабных семейств, удовлетворяющих определенным условиям, и, более того, никакое другое множество не является натуральным.

Однако более интересным вопросом является изучение свойств натуральных множеств не для фиксированной функции искажения, а для целого класса таких функций. При этом натуральное множество для класса определяется как пересечение натуральных множеств по всем функциям этого класса. Были исследованы различные классы функций, а именно: множество всех функций искажения [45], множество ступенчатых функций, принимающих два значения: 0 и 1 [45], множество сюръективных функций [50], множество степенных функций [50].

В итоге, для различных классов функций искажения было доказано, что их натуральные множества являются сдвигово-масштабными семействами. В таких случаях говорят о сводимости принципа Ванга к среднеквадратическому принципу для заданного класса функций искажения (или о эквивалентности принципов). Понятно, что речь идет уже о более абстрактном понятии, чем в случае одной конкретной функции. Здесь, однако, необходимо отметить следующий замечательный факт: из справедливости данного утверждения для более узкого класса функций следует его справедливость для более широкого, поэтому интерес представляет доказательство для достаточно узких классов функций искажения. Более того, до сих пор не было известно никаких общих условий для проверки утверждения, и в каждом случае приходилось доказывать его отдельно, строя свои функции.

В главе 1 предложены достаточные условия сводимости принципа Ванга к среднеквадратическому принципу.

В параграфе 1 главы 1 диссертации изложены основные определения и предшествующие результаты.

В параграфе 2 главы 1 диссертации предложено достаточное условие сводимости W_p к SD_p , позволившее достаточно легко проверять эквивалентность принципов для различных классов функций искажения, в некотором смысле приближающих "ступеньку" (от 0 до 1). С его помощью было проведено доказательство сводимости W_p к SD_p для класса возрастающих ломаных (кусочно-линейных функций) из k звеньев ($k \geq 3$), класса, состоящего из склеек двух степенных функций, класса возрастающих многочленов, а также приведены контрпримеры. А именно, для некоторых классов функций искажения, не удовлетворяющих условию сводимости, построены примеры различных рисков (с нулевым средним и единичной дисперсией), для которых премии Ванга одинаковы при всех функциях искажения из данного класса [54], [56], [57].

В параграфах 3 и 4 главы 1 диссертации приводятся два более общих достаточных условия (второе и третье) сводимости принципа Ванга к среднеквадратическому принципу [55]. Их преимущество заключается в том, что они применимы и к некоторым классам вогнутых функций искажений, как это первоначально предполагал Ванг. С помощью этих условий проводится доказательство сводимости W_p к SD_p для класса возрастающих вогнутых ломаных из двух звеньев, класса многочленов вида $1 - (1-x)^n$, классов функций $\{x^{a_n}\}$ и $\{1 - (1-x)^{a_n}\}$, где $1/2 < a_1 < a_2 < \dots$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/a_n = +\infty$ и других специальных классов функций искажения (например, вида $g_r(x) = f(rx)/f(r)$, $r \in I \subseteq (0, +\infty)$, где $f(x)$ — аналитическая функция, обладающая определенными свойствами), в том числе, рассмотренных в работе Ванга [47]. В доказательствах используется известная теорема Мюнца (см., например, [3]).

В страховании могут наблюдаться распределения данных с конечными средними, но бесконечными дисперсиями, в частности, при изучении катастрофических рисков. Например, в работе Резника [36] обсуждаются данные о страховых потерях от пожаров в Дании, где показатель степенного хвоста распределения α оказывается около 1,4. В параграфе 3 главы 1 диссертации

рассказано о том, как можно обобщить результаты о сводимости на такие случаи, используя второе достаточное условие.

Отметим, что с помощью третьего достаточного условия удастся доказать сводимость РНр к SDр без дополнительных ограничений на распределения, введенных Ву [50], а именно, непрерывности функции дожития случайной величины и выпуклости ее носителя.

Поясним важность сводимости принципов подсчета премий для классов функций на следующем примере. Пусть у нас есть команда экспертов, которым нужно различить и упорядочить риски X и Y . Эксперты согласны в том, что нужно пользоваться принципом Ванга, и в том, из какого класса G следует выбирать функции искажения, однако каждый выбирает свою функцию g при вычислении премий для X и Y . Решение о различии рисков принимается при различии премий у кого-нибудь из экспертов, а решение о порядке, например, большинством голосов (т.е. $Y \prec X$, если у большинства экспертов премия для X получилась больше, чем для Y). Понятно, что конечным числом экспертов эти задачи в общем случае могут быть как решены, так и не решены. Однако при отсутствии сводимости для класса G можно подобрать такие риски X и Y , что эти задачи заведомо не смогут быть решены никогда, поскольку у всех экспертов будут получаться одинаковые значения премий для обоих рисков. Отсюда можно сделать вывод, что на практике предпочтительней использовать такие классы функций искажения, для которых имеет место сводимость.

В главе 2 автор сосредоточился, главным образом, на различиях между среднеквадратическим принципом и принципом Ванга, а также преимуществах последнего.

В параграфе 1 главы 2 изложены определения и мотивация исследований.

При изучении различий между принципом Ванга и среднеквадратическим принципом естественно рассматривать характеристику

$$\frac{H_g(X) - \mathbf{E}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}},$$

т.е. центрированную и нормированную премию. В случае, если для данной функции искажения эта характеристика остается постоянной (и равной, например, некоторому λ) на некотором семействе рисков, это означает, что на

данном семействе рисков имеет место сводимость принципа Ванга к средне-квадратическому, т.е.

$$H_g(X) = \pi_\lambda^{\text{SD}}(X) = \mathbf{E}X + \lambda\sqrt{\mathbf{D}X}.$$

В случае же, если указанная характеристика принимает различные значения, сводимости нет. При этом представляет интерес разброс этих значений.

Заметим, что в силу свойств принципа Ванга

$$\frac{H_g(X) - \mathbf{E}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}} = H_g\left(\frac{X - \mathbf{E}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}}\right),$$

т.е. вместо того, чтобы центрировать и нормировать премии для некоторого семейства рисков, мы можем сначала центрировать и нормировать сами риски, а потом рассматривать премии для них.

Таким образом, возникает задача изучения премий Ванга на семействах рисков с нулевым средним и единичной дисперсией. Понятно, что с помощью среднеквадратического принципа такие риски нельзя ни различить, ни упорядочить. А с помощью принципа Ванга это оказывается возможным. В качестве меры того, насколько хорошо это получается, предлагается использовать разность между верхней и нижней гранями премии Ванга с данной функцией искажения на данном семействе. Эта разность названа абсолютной чувствительностью премии [58].

В параграфе 2 главы 2 диссертации для класса центрированных и нормированных распределений Парето изучается зависимость чувствительности РН-премии от параметров модели и проводится ее максимизация. Отметим, что выбор распределения не случаен, поскольку именно распределение Парето наиболее часто используется на практике вследствие того, что оно хорошо описывает поведение тяжелых хвостов. По известной теореме Гнеденко-Пикандса-Балкемы-де Хаана при довольно общих условиях условное распределение превышения высокого уровня случайной величиной стремится к обобщенному распределению Парето (см. [30, с. 277]). Более того, как показано в параграфе 4 главы 2, на распределениях Парето достигается максимум РН-премий по классу всех распределений с нулевым средним и единичной дисперсией.

Помимо абсолютной чувствительности премии изучается и относительная чувствительность, определенная как отношение верхней грани премии Ван-

га к нижней грани. Также производится обобщение результатов на случай, когда параметр формы распределения Парето α лежит в интервале $(1,2)$, т.е. дисперсия бесконечна и среднеквадратический принцип подсчета премии вообще не применим.

Заметим, что коэффициент асимметрии распределения Парето (когда он существует) взаимно однозначно связан с параметром формы α . Поэтому, если зафиксировать асимметрию, получим сдвигово-масштабное семейство, на котором W_p эквивалентен SD_p . Это же верно и для ряда других часто используемых семейств распределений.

Еще в 1998 году при изучении принципа пропорционального изменения интенсивности Кристофидес предположил, что для любых параметрических семейств распределений с постоянной асимметрией P_{Hr} эквивалентен SD_p [17]. Янг удалось опровергнуть предположение Кристофидеса в общей его форме, предложив контрпример ([52]): двустороннее показательное распределение с конкретными значениями параметров и функцией искажения $g(x) = \sqrt{x}$.

Пример, найденный Янг, представляет собой теоретически важный (как контрпример к предположению Кристофидеса), но весьма частный случай. При его рассмотрении возникают, в том числе, следующие вопросы:

- 1) можно ли привести другие примеры или он единичен?
- 2) насколько велик разброс значений централизованной и нормированной премии — как на подмножествах постоянной асимметрии, так и на всем семействе рисков, предложенных Янг (ведь в ее числовом примере эта разница слишком мала, чтобы иметь практическое значение)?

В параграфе 3 главы 2 диссертации предлагаются ответы на поставленные вопросы. Без ограничения общности изучаемая модель параметризуется с помощью двух параметров, принимающих значения в единичном квадрате. Получены оценки верхней и нижней границ премии по квадрату, представлены формулы для нахождения значений премии на различных линиях уровня асимметрии. С помощью численного моделирования показано, что значения премии на концах линий уровня не всегда являются экстремумами, а именно, максимумы могут достигаться внутри единичного квадрата.

В общем случае, абсолютная чувствительность премии на подсемействах постоянной асимметрии составляет не менее $2 - 2 \ln 2 \approx 0,614$, что приблизи-

тельно равно 42% от абсолютной чувствительности премии по всему семейству распределений, равной $\sqrt{(2 \ln 2 - 1)^2 + 2} \approx 1,466$ [61].

В параграфе 4 главы 2 диссертации приводится ряд теорем, посвященных вычислению верхней и нижней границ для премий Ванга по классу случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией и предлагается формула максимума премии (нижняя граница оказывается равной нулю). Здесь используется вариационное исчисление и развиваются методы работы Хартли и Дэвида [25]. Полученные теоретические результаты проиллюстрированы рядом примеров для различных классов функций искажения. Например, для РНр максимум премии по классу случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией равен $(\rho - 1)/\sqrt{\rho(2 - \rho)}$, где $1 < \rho < 2$.

Понятно, что в силу сдвигово-масштабной инвариантности принципа Ванга по границам премий для класса рисков с нулевым средним и единичной дисперсией можно определить границы для любого класса с заданными средним и дисперсией (с помощью соответствующего сдвигово-масштабного преобразования).

Практический вывод из результатов главы 2 заключается в том, что принцип Ванга позволяет успешно различать и упорядочивать риски с близкими моментными характеристиками.

В главе 3 диссертации изучается вопрос непрерывности премий Ванга относительно функций искажения и распределений рисков.

В параграфе 1 главы 3 на множестве функций искажения определяется следующая специальная метрика:

$$\rho_q(g_1, g_2) = \sup_{0 < t < 1} \left| \frac{g_1(t) - g_2(t)}{q(t)} \right|,$$

где $q(t) \geq 0$, $q(0) = q(1) = 0$, и указанное выражение конечно. Вводится интеграл:

$$I_q(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(S_X(t)) dt.$$

Для конкретных видов функции $q(t)$ получены ограничения на $I_q(X)$ с помощью моментов случайной величины. Для ряда классов функций искажения проверяется их непрерывность в заданной метрике. И наконец, при определенных условиях доказаны теоремы о непрерывности премии Ванга и

ее чувствительности в случае непрерывности функций искажения по параметру (относительно введенной метрики).

В теории вероятностей широко изучается вопрос о сходимости распределения центрированных и нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин к стандартному нормальному распределению. Эта сходимость описывается центральной предельной теоремой и ее различными уточнениями. Она имеет большое практическое значение, в том числе, в страховании ([4]). Поэтому представляет интерес сходимость премий Ванга от центрированных и нормированных сумм.

В параграфе 2 главы 3 диссертации при определенных условиях на случайную величину, а именно, конечности абсолютного момента порядка $2 + \delta$, $0 < \delta \leq 1$ (что является существенным усилением результата по сравнению с более традиционным требованием конечности 3-го момента), а также на функцию искажения доказан ряд предельных теорем для премий Ванга в случаях обычных и пуассоновских сумм, получены оценки скорости сходимости. Для доказательства теорем существенно использовались неравномерные оценки абсолютного отклонения распределения преобразованной суммы от стандартного нормального распределения [4, гл. 2], [7].

С точки зрения математической статистики, важной задачей является получение оценок премий по наблюдениям. В параграфе 3 главы 3 диссертации построена эмпирическая оценка премии Ванга:

$$H_g[X]_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{(i)} g' \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) \quad (*)$$

и при определенных ограничениях на случайную величину и функцию искажения были доказаны теоремы о сходимости с вероятностью 1 и об асимптотической нормальности оценки. Приведены примеры построения оценок премий для конкретных функций искажения, найдены асимптотические дисперсии оценок для некоторых распределений рисков. Полученные оценки относятся к классу так называемых L-оценок, изучавшихся, например, в работах [8], [27]-[29], [38]-[41], [49].

Было отмечено, что для РН-принципа, в отличие от других рассмотренных семейств премий, всегда существует некоторый диапазон значений параметра ρ , в котором имеет место строгая состоятельность оценки, но мы не можем

гарантировать ее асимптотическую нормальность. Даже для распределений с моментами любого порядка мы накладываем условие $\rho < 2$. Так, пример показательного распределения указывает на то, что это условие не техническое, а содержательное, поскольку при $\rho \uparrow 2$ асимптотическая дисперсия стремится к бесконечности. Можно сделать вывод, что на практике нежелательно использовать РН-премии с $\rho \geq 2$, статистически оцениваемые по формуле (*).

В случае масштабного семейства распределений с положительными премиями построен доверительный интервал для премии Ванга [60].

Глава 4 посвящена проблеме совместного страхования рисков.

В параграфе 1 главы 4 изложены определения и постановка задачи.

Одним из важных свойств принципа Ванга является его субаддитивность в случае вогнутости функции искажения. Проще говоря, премия от суммы случайных величин не больше суммы премий от каждой случайной величины. С практической точки зрения интерес представляет величина экономии страхователя от совместного страхования рисков по сравнению с отдельным, названная Кристофидесом (применительно к РНр) "synergy value" [17]. В диссертации рассматривается относительная экономия, определенная как отношение экономии от совместного страхования к сумме рисковых надбавок за каждый риск:

$$\delta_g = \frac{(H_g(X) + H_g(Y)) - H_g(X + Y)}{(H_g(X) - \mathbf{E}X) + (H_g(Y) - \mathbf{E}Y)}.$$

Введенная величина является безразмерной и принимает значения от 0 до 1.

Предполагается, что распределения рисков X и Y принадлежат некоторым сдвигово-масштабным семействам. Тогда легко заметить, что экономия не зависит от параметров сдвига. Более того, она не зависит и от самих параметров масштаба распределений X и Y , а только от соотношения между ними. Поэтому целесообразным представляется следующая параметризация случайных величин: $X = \alpha X_0$, $Y = (1 - \alpha)Y_0$, где X_0 , Y_0 имеют стандартные распределения (в своих семействах), а α пробегает значения от 0 до 1. Таким образом, интерес представляет исследование зависимости $\delta_g(\alpha)$ от параметра α :

$$\delta_g(\alpha) = \frac{(\alpha H_g(X_0) + (1 - \alpha)H_g(Y_0)) - H_g(\alpha X_0 + (1 - \alpha)Y_0)}{\alpha(H_g(X_0) - \mathbf{E}X_0) + (1 - \alpha)(H_g(Y_0) - \mathbf{E}Y_0)}.$$

В параграфе 2 главы 4 диссертации получен ряд важных свойств относительной экономии.

Параграф 3 главы 4 посвящен случаю независимых рисков. Необходимо отметить, что вычисление относительной экономии в явном виде в большинстве случаев либо невозможно, либо затруднительно, поэтому рассмотрены конкретные примеры равномерного, показательного, нормального распределений рисков, распределения Лапласа и Бернулли, а также устойчивых распределений. В качестве функции искажения выбрана квадратичная функция $g(x) = 1 - (1 - x)^2$ (согласно принципу Джини). В результате, хотя были рассмотрены очень разные распределения, для них получились схожие графики с довольно близкими значениями максимальной относительной экономии. Это наводит на мысль, что относительная экономия слабо чувствительна к типу распределения, и для ее оценки на практике можно использовать модельные распределения из числа перечисленных выше.

Параграф 4 главы 4 посвящен случаю зависимых рисков. Сначала рассмотрена традиционная корреляционная зависимость для двумерного нормального распределения и нормальных масштабных смесей. Получен замечательный факт, что относительная экономия не зависит в этих случаях от выбора функции искажения. Отметим, что одномерные масштабные нормальные смеси подробно изучались в [4] (глава 12), а многомерные масштабные нормальные смеси — в [30].

Здесь, однако, необходимо отметить, что большинство данных на практике (в том числе, страховые и финансовые риски) имеют формы зависимости, сильно отличающиеся от гауссовской, и ее использование в расчетах может привести к серьезным ошибкам. Наиболее полной и при этом свободной от влияния частных распределений характеристикой зависимости случайных величин является копула [31].

В страховании копулы активно используются для агрегации рисков и моделирования капитала. В [42] показано, как построить довольно гибкую и реалистичную модель капитала, учитывающую зависимость рисков и при этом разделяющую эффекты каждой отдельно взятой характеристики распределения, как, например, тяжелые хвосты. Полученная структура позволяет исследовать влияние зависимости рисков на общий рисковый капитал. Главный

вывод о том, что различные копулы сильно варьируют результат, подчеркивает важность правильного выбора подходящей модели.

В [11] производится оценка рискованного капитала на основе агрегированной убыточности по компании. Оценки влияния зависимости между убытками от различных классов страхования производятся с помощью копул Гаусса и Стьюдента.

На основе копул в [10] предлагается модель структуры зависимости влияния штормов на автострахование и страхование имущества от пожаров. Определенные техники, примененные к данным французской страховой компании, позволили сделать вывод, что указанная зависимость наилучшим образом описывается с помощью копулы Клейтона.

Статистические свойства и применение копул для исследования взаимосвязи между различными эффектами в страховании жизни описаны в [19].

Для учета зависимости агрегированного убытка от шторма и наводнения в [32] используются копула Бернштейна и решетчатая копула в применении к эмпирическим факторным таблицам.

Отметим, что для упомянутых копул вычисление относительной экономии в явном виде невозможно или затруднительно, поэтому в диссертации рассмотрены более простые примеры, а именно, копулы Фарли-Гумбеля-Моргенштерна, Спирмена и Рафтери [31], причем только в случае показательного распределения обоих рисков и квадратичной функции искажения. Были получены функции относительной экономии, найдены их максимумы, построены графики.

Интересно выяснить, как влияет тип копулы на относительную экономию при одинаковой мере зависимости. В качестве такой меры предлагается использовать коэффициент корреляции Спирмена ρ_C . Рассмотрены три степени положительной зависимости рисков: слабая ($\rho_C = 0,25$), средняя ($\rho_C = 0,5$) и сильная ($\rho_C = 0,75$). Для них произведены сравнения соответствующих относительных экономий для разных копул [59].

Обобщая все вышесказанное, подчеркнем, что современная математическая теория страхования является бурно развивающейся областью в рамках теории вероятностей и математической статистики. Эта теория имеет широ-

кий круг применения на практике. В диссертации освещен актуальный вопрос оценки страховой премии за риск, рассмотрен и глубоко изучен эффективный и надежный принцип Ванга подсчета премии. Результаты и методы работы могут быть полезными как с теоретической, так и с практической точек зрения.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, кандидату физико–математических наук, доценту А.В. Лебедеву за постановку задач, постоянное внимание и помощь в работе.

Глава 1

Достаточные условия сводимости

1.1 Основные определения и предшествующие результаты

Сначала дадим несколько основных определений.

Определение 1.1 *Принцип подсчета премии по среднеквадратическому отклонению (Standard deviation premium principle):*

$$\pi_{\lambda}^{\text{SD}}(X) = \mathbf{E}X + \lambda\sqrt{\mathbf{D}X}, \quad (\text{SDp})$$

где X — риск, $\lambda > 0$, $\pi_{\lambda}^{\text{SD}}(X)$ — премия, назначаемая за риск X .

Определение 1.2 *Принцип Ванга подсчета премии (Wang's premium principle):*

$$H_g(X) = \int_{-\infty}^0 (g(S_X(t)) - 1)dt + \int_0^{\infty} g(S_X(t))dt, \quad (\text{Wp})$$

где $S_X(t) = P(X > t)$ — функция дожития для риска X , $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — неубывающая функция искажения.

Определение 1.3 Если в принципе Ванга подсчета премии ограничиться случаем, когда $g(x) = x^{1/\rho}$, то получим *принцип пропорционального изменения интенсивности (Proportional hazard premium principle):*

$$\pi_{\rho}^{\text{PH}}(X) = \int_{-\infty}^0 (S_X(t)^{1/\rho} - 1)dt + \int_0^{\infty} S_X(t)^{1/\rho}dt, \quad (\text{PHp})$$

где $\rho \geq 1$ — так называемый индекс неприятия риска.

Говорят, что Wp с фиксированной функцией g сводится к SDp на множестве случайных величин с распределениями из семейства \mathcal{F} , если для любых

невырожденных рисков X и Y с функциями распределения из \mathcal{F} верно:

$$\frac{H_g(X) - \mathbf{E}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}} = \frac{H_g(Y) - \mathbf{E}Y}{\sqrt{\mathbf{D}Y}},$$

поскольку в этом случае $H_g(X) = \pi_\lambda^{\text{SD}}(X)$ с некоторым λ .

Определение 1.4 Пусть \mathcal{L}_2 — множество распределений, имеющих конечные среднее и дисперсию. *Натуральным множеством* для функции g в отношении распределения $F_X \in \mathcal{L}_2$ случайной величины X называется:

$$N_g(X) = \left\{ F_Y : \frac{H_g(X) - \mathbf{E}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}} = \frac{H_g(Y) - \mathbf{E}Y}{\sqrt{\mathbf{D}Y}}, F_Y \in \mathcal{L}_2 \right\}.$$

Предполагается, что $H_g(X)$ конечно.

Определение 1.5 Натуральным множеством для класса функций искажения G называется $N_G(X) \equiv \bigcap_{g \in G} N_g(X)$. Предполагается, что в пересечение включаются только те функции $g \in G$, для которых $H_g(X)$ конечно.

Говорят, что Wr сводится к SDr для класса функций искажения G , если для любого $F_X \in \mathcal{L}_2$ множество $N_G(X)$ представляет собой сдвигово-масштабное семейство.

Обозначим через \mathcal{G} множество всех неубывающих функций $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, таких, что $g(0) = 0$, $g(1) = 1$. Далее под множествами функций будем понимать соответствующие подмножества \mathcal{G} . Пусть:

$\mathcal{D}_{0,1} \subset \mathcal{G}$ — множество ступенчатых функций, принимающих два значения: 0 и 1;

$\mathcal{S} \subset \mathcal{G}$ — множество сюръективных функций;

$\mathcal{R}_k \subset \mathcal{G}$ — множество строго возрастающих ломаных (кусочно-линейных функций) из k звеньев;

$\mathcal{R}_k(x_1, \dots, x_{k-1}) \subset \mathcal{G}$ — множество строго возрастающих ломаных из k звеньев с фиксированными точками излома в x_1, \dots, x_{k-1} . (Принцип Ванга с функцией искажения из множества $\mathcal{R}_2(1/2)$ соответствует принципу абсолютного отклонения Деннеберга [18]);

$\mathcal{P} \subset \mathcal{G}$ — множество степенных функций: $g(x) = x^c$, $c > 0$;

$\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{G}$ — множество, состоящее из склеек двух степенных функций:

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \in [0, x_0], \\ g_2(x), & x \in (x_0, 1]. \end{cases}$$

где

$$g_1(x) = \alpha_1 \left(\frac{x}{\beta_1} \right)^p, \quad p > 1,$$

$$g_2(x) = \alpha_2 \left(\frac{x - x_0}{\beta_2} \right)^q + g_1(x_0), \quad 0 < q < 1,$$

точка $x_0 \in (0, 1)$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — константы;

$\mathcal{M} \subset \mathcal{G}$ — класс возрастающих многочленов;

$\mathcal{M}_n \subset \mathcal{G}$ — класс возрастающих многочленов степени не выше n .

В выбранных обозначениях было доказано, что следующие множества являются сдвигово-масштабными семействами: $N_{\mathcal{G}}(X)$ [45], $N_{\mathcal{D}_{0,1}}(X)$ [45], $N_{\mathcal{S}}(X)$ [50], $N_{\mathcal{P}}(X)$, если функция дожития случайной величины X непрерывна, а носитель X — выпуклое множество [50].

В следующем параграфе будут приведены доказательства для $N_{\mathcal{R}_k}(X)$, $N_{\mathcal{P}_2}(X)$ и $N_{\mathcal{M}}(X)$.

1.2 Первое достаточное условие

1.2.1 Теорема о приближении ”ступеньки”

Теорема 1.2.1 Пусть $F_X \in \mathcal{L}_2$. Если в некотором классе функций $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ для любых a, b, c , таких, что $0 < a < b < 1$, $c > 0$, найдется функция g , такая, что

$$\begin{cases} g(x) \leq cx, & 0 < x < a, \\ g(x) \geq 1 - c(1 - x), & b < x < 1, \end{cases} \quad (1.1)$$

то $N_{\mathcal{A}}(X)$ является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} = N_{\mathcal{A}}(X)$. На этом множестве распределений W_p может быть сведен к SD_p для любой $g \in \mathcal{A}$. Поскольку F_X заведомо лежит в \mathcal{F} , получаем, что

$$\frac{H_g(X) - \mathbf{E}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}} = \frac{H_g(Y) - \mathbf{E}Y}{\sqrt{\mathbf{D}Y}}$$

для всех Y с распределением из \mathcal{F} и для любой $g \in \mathcal{A}$. Положим

$$U = \frac{X - \mathbf{E}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}}, \quad V = \frac{Y - \mathbf{E}Y}{\sqrt{\mathbf{D}Y}}.$$

Тогда

$$H_g(U) = H_g(V), \quad (1.2)$$

в силу сдвигово-масштабной инвариантности. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить, что если $H_g(U) = H_g(V)$ имеет место для любой $g \in \mathcal{A}$, то распределения U и V совпадают.

Обозначим через $S_U(t)$ и $S_V(t)$ функции дожития U и V соответственно. Теперь, используя доказательство от противного, покажем, что $S_U(t) = S_V(t)$ для $t \geq 0$. Предположим, что $\exists t_0 \geq 0$ такое что, $S_U(t_0) > S_V(t_0) = \alpha$. Тогда $\exists \varepsilon$ такое, что

$$0 < \varepsilon < S_U(t_0) - \alpha. \quad (1.3)$$

Рассмотрим следующие вспомогательные функции:

$$h_1(x) = \begin{cases} 1, & \alpha + \varepsilon < x \leq 1, \\ 0, & 0 \leq x \leq \alpha + \varepsilon; \end{cases} \quad h_2(x) = \begin{cases} 1, & \alpha < x \leq 1, \\ 0, & 0 \leq x \leq \alpha. \end{cases}$$

и обозначим для $i = 0; 1$:

$$u_i = \inf\{t : S_U(t) \leq \alpha + i\varepsilon\}, \quad v_i = \inf\{t : S_V(t) \leq \alpha + i\varepsilon\}.$$

Заметим, что $H_{h_1}(U) = u_1$, $H_{h_2}(V) = v_0 \leq t_0 < u_1$ в силу (1.3). Следовательно, $H_{h_1}(U) > H_{h_2}(V)$. Пусть $d = H_{h_1}(U) - H_{h_2}(V) = u_1 - v_0 > 0$.

Рассмотрим $g \in \mathcal{A}$, удовлетворяющую (1.1) с параметрами:

$$a = \alpha, \quad b = \alpha + \varepsilon, \quad c = \min(c_1, c_2), \quad \text{где}$$

$$c_1 = \frac{d}{3 \int_{-\infty}^{u_1} F_U(t) dt}, \quad c_2 = \frac{d}{3 \int_{v_0}^{+\infty} S_V(t) dt}.$$

Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{u_1} F_U(t) dt \leq \mathbf{E}|U| + u_1 < \infty, \quad \int_{v_0}^{+\infty} S_V(t) dt \leq \mathbf{E}|V| + |v_0| < \infty.$$

Следовательно, $c_1, c_2 > 0$.

Далее используем неравенства:

$$H_g(U) \geq H_{h_1}(U) - c \int_{-\infty}^{u_1} (1 - S_U(t)) dt \geq u_1 - \frac{d}{3},$$

$$H_g(V) \leq H_{h_2}(V) + c \int_{v_0}^{+\infty} S_V(t) dt \leq v_0 + \frac{d}{3}.$$

Тогда из $H_g(U) = H_g(V)$ следует, что $H_{h_1}(U) - H_{h_2}(V) \leq 2d/3$, что противоречит определению d .

Таким образом, доказано, что $S_U(t) = S_V(t)$ для любого $t \geq 0$. Для доказательства теоремы в случае, когда $t < 0$ сделаем замену $\tilde{U} = -U$, $\tilde{V} = -V$, а для функций дожития $S_{\tilde{U}}(t)$ и $S_{\tilde{V}}(t)$ утверждение уже доказано. \square

Далее будем предполагать, что $F_X \in \mathcal{L}_2$ по умолчанию.

1.2.2 Примеры

Приведем примеры применения первого достаточного условия.

Предложение 1.2.1 $N_{\mathcal{R}_k}(X)$ при $k \geq 3$ является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. Для любых фиксированных a, b и c построим функцию $g \in \mathcal{R}_k$, удовлетворяющую (1.1):

$$g(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x \leq a, \\ 1 - c(1 - x), & b \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Таким образом, построены первое и последнее звенья ломаной, все остальные звенья произвольным образом помещаем внутри интервала (a, b) . Тогда из Теоремы 1.2.1 вытекает справедливость Предложения 1.2.1. \square

Предложение 1.2.2 $N_{\mathcal{P}_2}(X)$ является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. Для любых фиксированных a, b и c построим функцию $g \in \mathcal{P}_2$, удовлетворяющую (1.1).

Возьмем

$$x_0 = \frac{a+b}{2}, \quad g_1(x) = x^p, \quad g_2(x) = \frac{1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^p}{\left(1 - \frac{a+b}{2}\right)^q} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^q + \left(\frac{a+b}{2}\right)^p.$$

Необходимо подобрать такие $p > 1$, $0 < q < 1$, чтобы

$$\begin{cases} g_1(x) \leq cx, & \forall 0 \leq x \leq a, \\ g_2(x) \geq 1 - c(1 - x), & \forall b \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Тогда поскольку $g_1(x)$ выпуклая, а $g_2(x)$ вогнутая, то достаточно выпол-

нения следующих условий:

$$\begin{cases} g_1(a) \leq c a, \\ g_2(b) \geq 1 - c(1 - b), \quad \text{т.е.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^p \leq c a, \\ \left(1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^p\right) \left(\frac{b-a}{2-(a+b)}\right)^q + \left(\frac{a+b}{2}\right)^p \geq 1 - c(1 - b). \end{cases}$$

Решая неравенства относительно p и q , получаем:

$$\begin{cases} p \geq 1 + \log_a c, \\ q \leq \log_{\frac{b-a}{2-(a+b)}} \left(1 - \frac{c(1-b)}{1 - \left(\frac{b+a}{2}\right)^p}\right). \end{cases}$$

Зафиксируем некоторое

$$p_0 = \max(1, 1 + \log_a c, \log_{\frac{a+b}{2}}(1 - c(1 - b)))$$

(последнее условие необходимо, чтобы аргумент у логарифма в неравенстве для q оказался положительным). Тогда поскольку

$$\log_{\frac{b-a}{2-(a+b)}} \left(1 - \frac{c(1-b)}{1 - \left(\frac{b+a}{2}\right)^{p_0}}\right) > 0,$$

то можем выбрать такое q_0 , что условие $0 < q_0 < 1$ будет выполнено. \square

Предложение 1.2.3 $N_M(X)$ является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. В качестве функции искажения g выберем многочлен следующего вида:

$$g(x) = \int_0^x f(y) dy, \quad \text{где } f(y) = \frac{\Gamma(m+n+2)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)} y^m (1-y)^n, \quad m, n \geq 1.$$

Легко проверить, что точка $y_0 = \frac{m}{m+n}$ является точкой максимума функции $f(y)$, слева от которой функция возрастает, а справа убывает. Положим $m = [sk]$, $n = [(1-s)k]$. Тогда $y_0 \rightarrow s$, $k \rightarrow \infty$.

Теперь рассмотрим, к какому пределу стремится значение многочлена $f(y)$ при стремлении m и n к бесконечности выбранным способом.

С помощью формулы Стирлинга можно показать, что $f(y) \rightarrow 0$ при любом $y \neq s$.

Теперь выберем такое k , чтобы построенная функция g удовлетворяла условию (1.1). Положим, $\frac{a+b}{2} = s \in (0, 1)$. Тогда при всех достаточно больших k верно, что $a < y_0 < b$, так что $f(y)$ возрастает на $[0, a]$ и убывает на $[b, 1]$. Так как $f(y) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, если $y < s$, то $\forall c > 0 \exists K_1 : \forall k > K_1$ верно, что $f(a) < c$, а тогда $f(x) < c$ на $[0, a]$ и, следовательно, $g(x) = \int_0^x f(y)dy < cx$ для всех $x \in [0, a]$. Так как $f(y) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, если $y > s$, то $\forall c > 0 \exists K_2 : \forall k > K_2$ верно, что $f(b) < c$, а тогда $f(x) < c$ на $[b, 1]$ и, следовательно, $g(x) = \int_0^x f(y)dy = 1 - \int_x^1 f(y)dy > 1 - c(1 - x)$ для всех $x \in [b, 1]$. Далее, выбрав $K = \max(K_1, K_2)$ и положив $k > K$, получим выполнение условия (1.1). \square

1.2.3 Контрпримеры

Теперь построим примеры, когда нет сводимости принципов.

Предложение 1.2.4 $N_{\mathcal{R}_2(1/2)}(X)$ не является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. Множество $\mathcal{R}_2(1/2)$ состоит из функций вида:

$$g(x) = \begin{cases} ax, & 0 \leq x < 1/2, \\ (2-a)(x-1) + 1, & 1/2 \leq x \leq 1; \end{cases} \quad 0 < a < 2.$$

Рассмотрим случайные величины U и V , имеющие следующие дискретные распределения:

$$\begin{aligned} P(U = \pm 3) &= 0,05; & P(V = \pm 3) &= 0,04; \\ P(U = \pm 2) &= 0; & P(V = \pm 2) &= 0,03; \\ P(U = \pm 1) &= 0,05; & P(V = \pm 1) &= 0,02; \\ P(U = 0) &= 0,8; & P(V = 0) &= 0,82. \end{aligned}$$

Тогда $EU = EV = 0$, $DU = DV = 1$. Следует отметить, что случайные величины U и V уже центрированные и нормированные, поэтому они могут принимать отрицательные значения. Между тем как исходные убытки X и Y можно полагать неотрицательными или положительными с помощью преобразований типа сдвига, например, $X = U + 5$, $Y = V + 5$.

Несложно проверить, что для обеих рассмотренных случайных величин U и V премии Ванга совпадают: $H_g(U) = H_g(V) = 0,4(a - 1)$, однако распределения U и V , очевидно, не совпадают.

Таким образом, показано, что принцип Деннеберга [18] не сводится к среднеквадратическому принципу. \square

Предложение 1.2.5 $N_{\mathcal{R}_3(0,1;0,9)}(X)$ не является сдвигово-масштабным семейством.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $\mathcal{R}_3(0,1;0,9)$ состоит из функций вида:

$$g(x) = \begin{cases} ax, & 0 \leq x < 0,1, \\ b(x - 0,1) + 0,1a, & 0,1 \leq x < 0,9, \quad 0 < a < 10, \quad 0 < b < \frac{10 - a}{8}, \\ (10 - a - 8b)(x - 1) + 1, & 0,9 \leq x \leq 1; \end{cases}$$

Рассмотрим те же центрированные, нормированные случайные величины U и V , что и в предложении 1.2.4. Несложно проверить, что для обеих рассмотренных случайных величин премии Ванга совпадают: $H_g(U) = H_g(V) = 0,4a + 1,6b - 2$, однако распределения U и V , очевидно, не совпадают.

Из примеров, рассмотренных в предложениях 1.2.1, 1.2.4 и 1.2.5, напрашивается вывод, что для сводимости принципа Ванга к среднеквадратическому принципу важно не количество звеньев у ломаной, а тот факт, что точки ее излома подвижные.

Предложение 1.2.6 $N_{\mathcal{M}_2}(X)$ не является сдвигово-масштабным семейством.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество \mathcal{M}_2 состоит из функций вида: $g(x) = ax^2 + (1 - a)x$, причем $-1 \leq a \leq 1$.

Рассмотрим случайные величины U и V , имеющие следующие дискретные распределения:

$$P(U = \pm 2) = 0; \quad P(V = \pm 2) = 0,1;$$

$$P(U = \pm 1) = 0,5; \quad P(V = \pm 1) = 0,1;$$

$$P(U = 0) = 0; \quad P(V = 0) = 0,6.$$

Тогда $EU = EV = 0$, $DU = DV = 1$. Несложно проверить, что для обеих рассмотренных случайных величин премии Ванга совпадают: $H_g(U) = H_g(V) = -0,5a$, однако распределения U и V , очевидно, не совпадают. \square

1.3 Второе достаточное условие

К сожалению, первое достаточное условие имеет ограниченную сферу применимости. В данном параграфе будет предложено более общее достаточное условие, применимое, в том числе, к классам вогнутых функций (как изначально и предполагал Ванг [47]).

1.3.1 Теорема о линейных комбинациях

Теорема 1.3.1 Пусть $F_X \in \mathcal{L}_2$. Если задан класс функций $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ и для любых a, b, c , таких, что $0 < a < b < 1$, $c > 0$, найдутся натуральное n , действительные $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и функции $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{A}$, такие, что функция $\tilde{g} = \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n$ принимает значения в отрезке $[0, 1]$ и верно:

$$\begin{cases} \tilde{g}(x) \leq cx, & 0 < x < a, \\ \tilde{g}(x) \geq 1 - c(1 - x), & b < x < 1, \end{cases} \quad (1.4)$$

то $N_{\mathcal{A}}(X)$ является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. Пусть U и V — случайные величины с $\mathbf{E}U = \mathbf{E}V = 0$, $\mathbf{D}U = \mathbf{D}V = 1$ и

$$H_g(U) = H_g(V) \quad (1.5)$$

для всех $g \in \mathcal{G}$. Как было отмечено в доказательстве теоремы 1.2.1, достаточно установить, что распределения U и V совпадают.

Заметим, что если (1.5) имеет место для всех $g \in \mathcal{A}$, то (1.5) верно и для всех g_1, \dots, g_n , а следовательно, и для \tilde{g} , как их линейной комбинации (так как H_g обладает свойством линейности по функции искажения). Таким образом,

$$H_{\tilde{g}}(U) = H_{\tilde{g}}(V). \quad (1.6)$$

Далее доказательство совпадает с доказательством теоремы 1.2.1. \square

Замечание 1.3.1 В отличие от условий теоремы 1.2.1, в данном случае функция \tilde{g} может и не принадлежать рассматриваемому классу функций \mathcal{A} .

1.3.2 Примеры

Приведем примеры применения второго достаточного условия.

Предложение 1.3.1 Рассмотрим класс функций вида:

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} x/\alpha, & 0 \leq x \leq \alpha \\ 1, & \alpha < x \leq 1, \end{cases}$$

где $\alpha \in (0, 1]$. Тогда натуральное множество по данному классу функций является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\tilde{g}(x) = \lambda_1 g_a(x) + \lambda_2 g_b(x)$. Положим $\lambda_1 = \frac{a}{a-b}$, $\lambda_2 = \frac{b}{b-a}$. Тогда

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a \\ (a-x)/(a-b), & a < x \leq b \\ 1, & b < x \leq 1, \end{cases}$$

и условие (1.4) выполнено. Таким образом, выполнены все условия теоремы 1.3.1, и предложение доказано. \square

Предложение 1.3.2 Рассмотрим класс вогнутых ломаных из двух звеньев, лежащих в множестве функций \mathcal{G} . Тогда натуральное множество по данному классу функций является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$g_a(x) = \begin{cases} k_1 x, & 0 \leq x \leq a, \\ 1 - k_2(1-x), & a < x \leq 1; \end{cases} \quad g_b(x) = \begin{cases} m_1 x, & 0 \leq x \leq b, \\ 1 - m_2(1-x), & b < x \leq 1, \end{cases}$$

где $k_1, m_1 > 1$ (что обеспечивает вогнутость функций g_a, g_b), $k_2 = \frac{1-k_1 a}{1-a}$, $m_2 = \frac{1-m_1 b}{1-b}$. Будем предполагать, что $c < \frac{1}{1-b}$, что не ограничивает общности, поскольку интерес представляет случай очень маленьких c . Построим функцию

$$\tilde{g}(x) = \lambda_1 g_a(x) + \lambda_2 g_b(x).$$

Положим $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$. Подберем такие значения параметров m_1 и λ , чтобы функция \tilde{g} принимала следующие значения:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a, \\ m_1 \frac{1-k_1}{m_1-k_1} \frac{x-a}{1-a}, & a < x \leq b, \\ 1 - c(1-x) & b < x \leq 1. \end{cases}$$

При $0 \leq x \leq a$ получаем: $\lambda_1 k_1 x + (1 - \lambda_1) m_1 x = 0$, откуда $\lambda_1 = \frac{m_1}{m_1 - k_1}$.

При $b < x \leq 1$ получаем:

$$\lambda_1(1 - k_2(1 - x)) + (1 - \lambda_1)(1 - m_2(1 - x)) = 1 - c(1 - x),$$

откуда $\lambda_1 k_2 + (1 - \lambda_1) m_2 = c$. Подставив выражения для λ_1 , k_2 , m_2 через k_1 , m_1 , получим:

$$m_1(1 - k_1 a)(1 - b) - k_1(1 - m_1 b)(1 - a) = c(1 - a)(1 - b)(m_1 - k_1),$$

откуда

$$m_1((1 - a)(1 - c(1 - b)) - (b - a)(1 - k_1)) = k_1(1 - a)(1 - c(1 - b)).$$

Тогда

$$m_1 = \frac{k_1}{1 - \frac{b-a}{(1-a)(1-c(1-b))}(1 - k_1)}.$$

Проверим теперь, что $m_1 > 1$, что обеспечит вогнутость функции g_b . Заметим, что знаменатель в выражении для m_1 положителен, поскольку $a < b < 1$, $c < \frac{1}{1-b}$, $k_1 > 1$. Поэтому неравенство $m_1 > 1$ эквивалентно следующему:

$$k_1 > 1 - \frac{b-a}{(1-a)(1-c(1-b))}(1 - k_1),$$

что равносильно

$$\frac{b-a}{(1-a)(1-c(1-b))} < 1,$$

что после преобразований приводит к верному неравенству:

$$(1 - b)(1 - c(1 - a)) > 0.$$

Наконец, покажем, что $m_1 < k_1$, что обеспечит возрастание функции \tilde{g} в промежутке от a до b . Это условие равносильно следующему:

$$\frac{b-a}{(1-a)(1-c(1-b))}(1 - k_1) < 0,$$

что верно в силу условий на k_1 , a , b и c .

Таким образом, предложение 1.3.2 доказано. \square

Предложение 1.3.3 *Рассмотрим класс многочленов вида $1 - (1 - x)^n$, $n \geq 1$. Тогда натуральное множество по данному классу функций является сдвигово-масштабным семейством.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h_{s,k}(x) = \frac{\Gamma(m+n+2)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)} \int_0^x y^m(1-y)^n dy,$$

где $m = [sk]$, $n = [(1-s)k]$. Положим $a' = 1-b$, $b' = 1-a$, $s = (a'+b')/2$. В теореме 1.2.1 было доказано, что $\forall a', b', c: 0 < a' < b' < 1, c > 0 \exists K: \forall k > K$ выполняется

$$\begin{cases} h_{s,k}(x) \leq cx, & 0 < x < a', \\ h_{s,k}(x) \geq 1 - c(1-x), & b' < x < 1. \end{cases}$$

А из этого следует, что $\forall a, b, c: 0 < a < b < 1, c > 0 \exists K: \forall k > K$ выполняется:

$$\begin{cases} 1 - h_{1-s,k}(1-x) \leq cx, & 0 < x < a, \\ 1 - h_{1-s,k}(1-x) \geq 1 - c(1-x), & b < x < 1. \end{cases}$$

Представим многочлен $h_{1-s,k}(x)$ в следующем виде:

$$h_{1-s,k}(x) = \lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_l x^l$$

с некоторыми $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_l$. Заметим, что $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_l = 1$, поскольку $h_{1-s,k}(1) = 1$. Несложно проверить, что многочлен $1 - h_{1-s,k}(1-x)$ раскладывается в сумму функций $1 - (1-x)^n$ с теми же коэффициентами, т.е.

$$1 - h_{1-s,k}(1-x) = \lambda_0(1 - (1-x)^0) + \lambda_1(1 - (1-x)^1) + \dots + \lambda_l(1 - (1-x)^l).$$

Таким образом, все условия теоремы 1.3.1 выполнены и предложение доказано. \square

Замечание 1.3.2 В случае функции искажения $g_n(x) = 1 - (1-x)^n$, $n \geq 1$, премия Ванга имеет простой вероятностный смысл:

$$H_{g_n}(X) = \mathbf{E} \max(X_1, \dots, X_n),$$

где X_i ($i \geq 1$) независимы и распределены, как X .

Следствие 1.3.1 Рассмотрим класс вогнутых возрастающих многочленов, лежащих в множестве функций \mathcal{G} . Тогда натуральное множество по данному классу функций является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. Поскольку многочлены вида $1 - (1-x)^n$ являются подклассом более широкого класса вогнутых возрастающих многочленов, то утверждение верно и для последних. \square

Для доказательства следующих утверждений воспользуемся известной теоремой Мюнца (см., например, [3]) в следующей формулировке.

Теорема Мюнца. Если $0 < a_1 < a_2 < \dots$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/a_n = +\infty$, то система функций $\{1, x^{a_1}, \dots, x^{a_n}, \dots\}$ полна в $C[0, 1]$.

Предложение 1.3.4 Рассмотрим класс функций $\{x^{a_n}\}$, где $1 \leq a_1 < a_2 < \dots$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/a_n = +\infty$. Тогда натуральное множество по данному классу функций является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. Предположим сначала, что $a_1 = 1$. Поделим все функции класса на x и перейдем к системе $1, x^{a_2-1}, x^{a_3-1}, \dots$. Рассмотрим непрерывную функцию $v(x)$:

$$v(x) = \begin{cases} d, & 0 \leq x \leq a, b \leq x \leq 1, \\ d + \left(\frac{2}{b-a}\right)^2 (1-d)(x-a), & a < x \leq \frac{a+b}{2}, \\ d - \left(\frac{2}{b-a}\right)^2 (1-d)(x-b), & \frac{a+b}{2} < x \leq b. \end{cases}$$

Функция $v(x)$ построена так, что $\int_0^1 v(x)dx = 1$. Тогда согласно теореме Мюнца существует такая линейная комбинация функций из второй системы (т.к. она полна в пространстве непрерывных функций):

$$w(x) = \alpha_1 x^{a_{n_1}-1} + \alpha_2 x^{a_{n_2}-1} + \dots + \alpha_m x^{a_{n_m}-1},$$

что $|v(x) - w(x)| < \varepsilon < d$. Рассмотрим функцию

$$z(x) = \int_0^x w(y)dy = \beta_1 x^{a_{n_1}} + \beta_2 x^{a_{n_2}} + \dots + \beta_m x^{a_{n_m}},$$

которая является линейной комбинацией функций исходной системы. Заметим, что $1-\varepsilon \leq z(1) \leq 1+\varepsilon$. Положим $\tilde{g}(x) = z(x)/z(1)$. Функция \tilde{g} также является линейной комбинацией функций исходной системы, строго возрастает и $\tilde{g}(0) = 0, \tilde{g}(1) = 1$. Более того, для \tilde{g} выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x) &= \frac{z(x)}{z(1)} = \frac{\int_0^x w(y)dy}{z(1)} \leq \frac{d+\varepsilon}{z(1)}x \text{ при } 0 \leq x \leq a, \\ \tilde{g}(x) &= \frac{z(x)}{z(1)} = \frac{\int_0^1 w(y)dy - \int_x^1 w(y)dy}{z(1)} = \frac{z(1) - \int_x^1 w(y)dy}{z(1)} \geq \\ &\geq 1 - \frac{\int_x^1 (v(y) + \varepsilon)dy}{z(1)} = 1 - \frac{d+\varepsilon}{z(1)}(1-x) \text{ при } b \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

а с учетом условий на $z(1)$ для выполнения условия (1.5) на функцию \tilde{g} необходимо выбрать d и ε такие, что $\frac{d+\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq c$, например,

$$d = \frac{2c}{c+3}, \quad \varepsilon = \frac{c}{c+3}.$$

Таким образом, для случая $a_1 = 1$ предложение доказано.

Если $a_1 > 1$, то разделим каждую функцию класса $\{x^{a_n}\}$ на x^{a_1} и перейдем к системе: $1, x^{a_2-a_1}, x^{a_3-a_1}, \dots$. Рассмотрим непрерывную функцию $v(x)$:

$$v(x) = \begin{cases} d, & 0 \leq x \leq a, b \leq x \leq 1, \\ d + \frac{2}{b-a}(h-d)(x-a), & a < x \leq \frac{a+b}{2}, \\ d - \frac{2}{b-a}(h-d)(x-b), & \frac{a+b}{2} < x \leq b. \end{cases}$$

где

$$h = d + \frac{(a_1 - d)(a_1 + 1)(b - a)}{2} \left(a^{a_1+1} + b^{a_1+1} - 2 \left(\frac{a+b}{2} \right)^{a_1+1} \right)^{-1}.$$

Функция $v(x)$ построена так, что

$$\int_0^1 x^{a_1-1} v(x) dx = 1.$$

По теореме Мюнца существует такая линейная комбинация функций из полученной системы:

$$w(x) = \alpha_1 x^{a_{n_1}-a_1} + \alpha_2 x^{a_{n_2}-a_1} + \dots + \alpha_m x^{a_{n_m}-a_1},$$

что $|v(x) - w(x)| < \varepsilon < d$. Рассмотрим функцию

$$z(x) = \int_0^x y^{a_1-1} w(y) dy = \beta_1 x^{a_{n_1}} + \beta_2 x^{a_{n_2}} + \dots + \beta_m x^{a_{n_m}},$$

которая является линейной комбинацией функций исходной системы. Положим $\tilde{g}(x) = z(x)/z(1)$. Функция \tilde{g} также является линейной комбинацией функций исходной системы, строго возрастает и $\tilde{g}(0) = 0$, $\tilde{g}(1) = 1$. Более того, для \tilde{g} выполняются следующие неравенства:

$$\tilde{g}(x) = \frac{z(x)}{z(1)} = \frac{\int_0^x y^{a_1-1} w(y) dy}{z(1)} \leq \frac{x^{a_1-1} d + \varepsilon}{a_1 z(1)} x \leq \frac{d + \varepsilon}{z(1)} x \text{ при } 0 \leq x \leq a,$$

$$\tilde{g}(x) = \frac{z(x)}{z(1)} \geq 1 - \frac{\int_x^1 y^{a_1-1} (v(y) + \varepsilon) dy}{z(1)} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{1^{a_1-1} \int_x^1 (d + \varepsilon) dy}{z(1)} = 1 - \frac{d + \varepsilon}{z(1)}(1 - x) \text{ при } b \leq x \leq 1.$$

Таким образом, для выполнения условий (1.5) достаточно выбрать такие же d и ε , что и в случае $a_1 = 1$. \square

Предложение 1.3.5 Рассмотрим класс функций $\{1 - (1 - x)^{a_n}\}$, где $1 \leq a_1 < a_2 < \dots$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/a_n = +\infty$. Тогда натуральное множество по данному классу функций является сдвигово-масштабным семейством.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $a' = 1 - b$, $b' = 1 - a$. В предложении 1.3.4 было доказано, что $\forall a', b', c: 0 < a' < b' < 1, c > 0 \exists d, \varepsilon$: для функции

$$\tilde{g}(x) = \gamma_1 x^{a_{n_1}} + \dots + \gamma_m x^{a_{n_m}}$$

(построенной в предложении 1.3.4) выполнено:

$$\begin{cases} \tilde{g}(x) \leq cx, & 0 \leq x \leq a', \\ \tilde{g}(x) \geq 1 - c(1 - x), & b' \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Введем функцию $g^*(x) = 1 - g(1 - x) = \gamma_1(1 - (1 - x)^{a_{n_1}}) + \dots + \gamma_m(1 - (1 - x)^{a_{n_m}})$, тогда:

$$\begin{cases} g^*(x) \leq cx, & 0 \leq x \leq a, \\ g^*(x) \geq 1 - c(1 - x), & b \leq x \leq 1. \quad \square \end{cases}$$

Предложение 1.3.6 Рассмотрим класс функций $g_r(x) = f(rx)/f(r)$, $r \in I$, где $f(x)$ - аналитическая функция с $f(0) = 0$, ее разложение в степенной ряд $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ с радиусом сходимости $R > 0$ и промежуток $I \subset (0, R)$ такой, что f не убывает на I и для последовательности n_k номеров f_n , отличных от 0, выполнено условие Мюнца: $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/n_k = +\infty$. Тогда пересечение натуральных множеств по данному классу функций является сдвигово-масштабным семейством.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как было отмечено в теореме 1.2.1, для доказательства предложения достаточно показать, что если случайные величины U и V такие, что $\mathbf{E}U = \mathbf{E}V = 0$, $\mathbf{D}U = \mathbf{D}V = 1$ и $H_{g_r}(U) = H_{g_r}(V)$ для любой g_r из класса, то $S_U = S_V$. Равенство премий Ванга означает:

$$\int_{-\infty}^0 \left(\frac{f(rS_U(t))}{f(r)} - 1 \right) dt + \int_0^{\infty} \frac{f(rS_U(t))}{f(r)} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^0 \left(\frac{f(rS_V(t))}{f(r)} - 1 \right) dt + \int_0^{\infty} \frac{f(rS_V(t))}{f(r)} dt,$$

что после применения разложения $f(x)$ в ряд дает:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 \sum_{n=0}^{\infty} f_n((S_U(t))^n - 1)r^n dt + \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(S_U(t))^n r^n dt = \\ & = \int_{-\infty}^0 \sum_{n=0}^{\infty} f_n((S_V(t))^n - 1)r^n dt + \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(S_V(t))^n r^n dt. \end{aligned}$$

Далее поменяем местами знаки суммы и интеграла. Покажем, что это возможно на примере случайной величины U (для V все выкладки аналогичны). Во-первых, при фиксированном $r \in I$ функциональные ряды (по t):

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n((S_U(t))^n - 1)r^n \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} f_n(S_U(t))^n r^n$$

сходятся равномерно, поскольку функции мажорируются по модулю числами $f_n r^n$, ряд из которых сходится. Во-вторых, для любого n сходятся интегралы:

$$\int_{-\infty}^0 f_n((S_U(t))^n - 1)r^n dt \text{ и } \int_0^{+\infty} f_n(S_U(t))^n r^n dt,$$

поскольку для независимых случайных величин U_i ($i = \overline{1, n}$), распределенных как и U , существует

$$\mathbf{E} \min(U_1, \dots, U_n) = \int_{-\infty}^0 ((S_U(t))^n - 1) dt + \int_0^{+\infty} (S_U(t))^n dt,$$

т.к.

$$F_{\min(U_1, \dots, U_n)}(t) = 1 - (1 - F_U(t))^n = 1 - (S_U(t))^n$$

и

$$|H_{x^n}(U)| = |\mathbf{E} \min(U_1, \dots, U_n)| \leq \mathbf{E} \max(|U_1|, \dots, |U_n|) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{E}|U_i| = n\mathbf{E}|U|.$$

В-третьих, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^0 f_n((S_U(t))^n - 1)r^n dt + \int_0^{+\infty} f_n(S_U(t))^n r^n dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n r^n H_{x^n}(U)$$

сходится, т.к., как показано выше, $|H_{x^n}(U)| \leq n\mathbf{E}|U|$, а умножение коэффициентов на величину порядка $O(n)$ не меняет радиуса сходимости степенного ряда, а по условию предполагалось, что $r < R$.

Таким образом, мы получили две аналитические функции, совпадающие на промежутке I , следовательно, все их коэффициенты равны, т.е. $H_{x^n}(U) = H_{x^n}(V)$ для всех n , для которых коэффициенты f_n в разложении аналитической функции отличны от 0. Другими словами, получается, что $H_{x^{n_k}}(U) = H_{x^{n_k}}(V)$ и последовательность n_k удовлетворяет условию Мюнца, т.е. для полученного класса функций $\{x^{n_k}\}$ выполняется утверждение предложения 1.3.4, а именно, натуральное множество по данному классу функций является сдвигово-масштабным семейством. Следовательно, распределения U и V совпадают, что и требовалось доказать. \square

В работе [47] Вангом был предложен ряд классов функций искажения:

$$g_r(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{-rx}}{1-e^{-r}}, & r > 0, \\ x, & r = 0; \end{cases} \quad g_r(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+rx)}{\ln(1+r)}, & r > 0, \\ x, & r = 0; \end{cases}$$

$$g_r(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+rx}-1}{\sqrt{1+r}-1}, & r > 0, \\ x, & r = 0, \end{cases}$$

для которых с помощью предложения 1.3.6 легко доказывается утверждение о сводимости принципа Ванга (внутри круга сходимости степенных рядов для каждой функции искажения).

Следствие 1.3.2 *Рассмотрим класс функций вида:*

$$g_r(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{-rx}}{1-e^{-r}}, & r > 0, \\ x, & r = 0. \end{cases}$$

Тогда натуральное множество по данному классу функций является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. В обозначениях предложения 1.3.6: $R = \infty$,

$$f(x) = 1 - e^{-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

и $f_n \neq 0$ для всех $n \geq 1$, а ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$ расходится, т.е. удовлетворяет условию Мюнца. \square

Следствие 1.3.3 *Рассмотрим класс функций вида:*

$$g_r(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+rx)}{\ln(1+r)}, & 0 < r < 1, \\ x, & r = 0. \end{cases}$$

Тогда натуральное множество по данному классу функций является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. В обозначениях предложения 1.3.6: $R = 1$,

$$f(x) = \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

и $f_n \neq 0$ для всех $n \geq 1$, а ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$ расходится, т.е. удовлетворяет условию Мюнца. \square

Следствие 1.3.4 Рассмотрим класс функций вида:

$$g_r(x) = \begin{cases} \frac{(1+rx)^\beta - 1}{(1+r)^\beta - 1}, & 0 < r < 1, \\ x, & r = 0, \end{cases}$$

где $0 < \beta < 1$. Тогда натуральное множество по данному классу функций является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. В обозначениях предложения 1.3.6: $R = 1$,

$$f(x) = (1+x)^\beta - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)}{n!} x^n$$

и $f_n \neq 0$ для всех $n \geq 1$, а ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$ расходится, т.е. удовлетворяет условию Мюнца. \square

Следствие 1.3.5 Рассмотрим класс функций вида:

$$g_r(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+rx} - 1}{\sqrt{1+r} - 1}, & 0 < r < 1, \\ x, & r = 0. \end{cases}$$

Тогда натуральное множество по данному классу функций является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. В условиях следствия 1.3.4 положим $\beta = 1/2$. \square

Следствие 1.3.6 Рассмотрим класс функций вида

$$g_r(x) = \begin{cases} \frac{\sin rx}{\sin r}, & 0 < r \leq \pi/2, \\ x, & r = 0. \end{cases}$$

Тогда натуральное множество по данному классу функций является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. В обозначениях Предложения 1.3.6: $R = \infty$, условие на r (а именно, $0 < r \leq \pi/2$) наложено для обеспечения неубывания функции g_r ,

$$f(x) = \sin x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

и $f_n \neq 0$ для всех нечетных n , а ряд $\sum_{m=1}^{+\infty} 1/(2m-1)$ расходится, т.е. удовлетворяет условию Мюнца. \square

1.3.3 Обобщение на случай бесконечной дисперсии

В страховании могут наблюдаться распределения данных с конечными средними, но бесконечными дисперсиями, в частности, при изучении катастрофических рисков. Например, в работе Резника ([36]) обсуждаются данные о страховых потерях от пожаров в Дании, где показатель степенного хвоста распределения α оказывается около 1,4.

Предположим, что распределение F_X риска X не принадлежит \mathcal{L}_2 , но можно подобрать такое $p \in [1, 2)$, что $F_X \in \mathcal{L}_p$ (т.е. имеет конечный момент порядка p). По аналогии со среднеквадратическим отклонением определим среднее p -ическое отклонение:

$$\sigma^{(p)}(X) = (\mathbf{E}|X - \mathbf{E}X|^p)^{1/p}.$$

Введем премии

$$\pi_\lambda^{(p)} = \mathbf{E}X + \lambda\sigma^{(p)}, \quad \lambda > 0,$$

и соответственно обобщим определение натуральных множеств для \mathcal{L}_p :

$$N_g^{(p)}(X) = \left\{ F_Y : \frac{H_g(X) - \mathbf{E}X}{\sigma^{(p)}(X)} = \frac{H_g(Y) - \mathbf{E}Y}{\sigma^{(p)}(Y)}, F_Y \in \mathcal{L}_p \right\}$$

для функции g в отношении распределения с.в. X и

$$N_G^{(p)}(X) = \bigcap_{g \in G} N_g^{(p)}(X)$$

для класса функций искажения G .

В данном случае также можно говорить о сводимости, когда $N_G^{(p)}(X)$ является сдвигово-масштабным семейством. Поэтому можно получить аналог теоремы 1.3.1.

Теорема 1.3.2 Пусть $F_X \in \mathcal{L}_p$. Если задан класс функций $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ и для любых a, b, c таких, что $0 < a < b < 1$, $c > 0$, найдутся натуральное n , действительные $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и функции $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{A}$ такие, что функция $\tilde{g} = \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n$ принимает значения в отрезке $[0, 1]$ и верно:

$$\begin{cases} \tilde{g}(x) \leq cx, & 0 < x < a, \\ \tilde{g}(x) \geq 1 - c(1 - x), & b < x < 1, \end{cases}$$

то $N_{\mathcal{A}}^{(p)}(X)$ является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. Для доказательства теоремы 1.3.2 достаточно в доказательстве теоремы 1.3.1 заменить $\sqrt{\mathbf{D}X}$ на $\sigma^{(p)}(X)$. Существования дисперсии не требуется, а конечность $\mathbf{E}|X|$ имеет место при любом $p \in [1, 2)$. \square

1.4 Третье достаточное условие

Второе достаточное условие хотя и является менее ограничительным, чем первое, однако неприменимо, например, к принципу пропорционального изменения интенсивности (РНр). В данном параграфе будет предложено более общее достаточное условие сводимости принципа Ванга к среднеквадратическому принципу.

1.4.1 Теорема о нелинейном приближении

Теорема 1.4.1 Пусть $F_X \in \mathcal{L}_2$. Если задан класс функций $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ и для любых a, b, c , таких, что $0 < a < b < 1$, $c > 0$, найдутся натуральное n , действительные $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и функции $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{A}$ такие, что функция $\hat{g} = \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n$ принимает значения в отрезке $[0, 1]$ и для некоторых $\alpha, \beta > 1/2$ верно:

$$\begin{cases} \hat{g}(x) \leq cx^\alpha, & 0 < x < a, \\ \hat{g}(x) \geq 1 - c(1 - x)^\beta, & b < x < 1, \end{cases} \quad (1.7)$$

то $N_{\mathcal{A}}(X)$ является сдвигово-масштабным семейством.

Доказательство. Для доказательства теоремы 1.4.1 достаточно в доказательство теоремы 1.2.1 внести небольшие изменения. Положим

$$c_1 = \frac{d}{3 \int_{-\infty}^{u_1} F_U(t)^\beta dt}, \quad c_2 = \frac{d}{3 \int_{v_0}^{+\infty} S_V^\alpha(t) dt}.$$

Согласно неравенству Чебышева имеем

$$P(|X| \geq t) \leq \frac{\mathbf{E}X^2}{t^2}$$

в силу конечности дисперсии. Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{u_1} F_U(t)^\beta dt &\leq \int_{-\infty}^{-1} F_U(t)^\beta dt + (u_1 + 1) \leq \int_{-\infty}^{-1} \left(\frac{\mathbf{E}U^2}{t^2} \right)^\beta dt + (u_1 + 1) = \\ &= (\mathbf{E}U^2)^\beta \int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{|t|^{2\beta}} + (u_1 + 1) = \frac{(\mathbf{E}U^2)^\beta}{2\beta - 1} + (u_1 + 1), \\ \int_{v_0}^{+\infty} S_V(t)^\alpha dt &\leq \int_{v_0}^{+\infty} \left(\frac{\mathbf{E}V^2}{t^2} \right)^\alpha dt \leq (|v_0| + 1) + \frac{(\mathbf{E}U^2)^\alpha}{2\alpha - 1}. \end{aligned}$$

Следовательно, $c_1, c_2 > 0$.

Далее используем неравенства:

$$H_g(U) \geq H_{h_1}(U) - c \int_{-\infty}^{u_1} (1 - S_U(t))^\beta dt \geq u_1 - d/3,$$

$$H_g(V) \leq H_{h_2}(V) + c \int_{v_0}^{+\infty} S_V(t)^\alpha dt \leq v_0 + d/3.$$

Тогда из $H_g(U) = H_g(V)$ следует, что $H_{h_1}(U) - H_{h_2}(V) \leq 2d/3$, что противоречит определению d .

Следовательно, $H_{\hat{g}}(V) \leq H_{h_2}(V) < H_{h_1}(U) \leq H_{\hat{g}}(U)$, что противоречит (1.5). Таким образом, доказано, что $S_U(t) = S_V(t) \forall t \geq 0$. Для доказательства теоремы в случае, когда $t < 0$, сделаем замену $\tilde{U} = -U$, $\tilde{V} = -V$, а для функций дожития $S_{\tilde{U}}(t)$ и $S_{\tilde{V}}(t)$ утверждение уже доказано. \square

1.4.2 Примеры

Предложение 1.4.1 Рассмотрим класс функций $\{x^{a_n}\}$, где $1/2 < a_1 < a_2 < \dots$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/a_n = +\infty$. Тогда натуральное множество по данному классу функций является сдвигово-масштабным семейством.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть случай $a_1 < 1$, т.к. случай $a_1 \geq 1$ рассмотрен в предложении 1.3.4. Перейдем к системе $\{x, x^{a_2/a_1}, x^{a_3/a_1}, \dots\}$. Тогда согласно предложению 1.3.4 для $\tilde{a} = a^{1/a_1}, \tilde{b} = b^{1/a_1}, c > 0$, существует

$$\tilde{g}(x) = \alpha_1 x^{a_{n_1}/a_1} + \alpha_2 x^{a_{n_2}/a_1} + \dots + \alpha_m x^{a_{n_m}/a_1},$$

такая что

$$\begin{cases} \tilde{g}(x) \leq c x, & 0 < x < \tilde{a}, \\ \tilde{g}(x) \geq 1 - c(1 - x), & \tilde{b} < x < 1. \end{cases}$$

Положим $\hat{g}(x) = \tilde{g}(x^{a_1})$, тогда

$$\hat{g}(x) = \alpha_1 x^{a_{n_1}} + \alpha_2 x^{a_{n_2}} + \dots + \alpha_m x^{a_{n_m}},$$

т.е. функция является линейной комбинацией функций исходной системы. Тогда если выбрать $1/2 < \alpha \leq a_1, \beta = 1$, то будет верно

$$\begin{cases} \hat{g}(x) \leq c x^{a_1} \leq c x^\alpha, & 0 < x < a, \\ \hat{g}(x) \geq 1 - c(1 - x^{a_1}) \geq 1 - c(1 - x), & b < x < 1, \end{cases}$$

т.е. выполнено условие (1.7). \square

Следствие 1.4.1 РНр с бесконечным набором индексов неприятия риска $2 > \rho_1 > \rho_2 > \dots > 1$ сводится к SDр.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно заметить, что $g(x) = x^a$ соответствует РНр с $\rho = 1/a$ и положить $a_n = 1/\rho_n$. Имеем: $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n = +\infty$. \square

Следует отметить, что следствие 1.4.1 существенно перекрывает результат Ву [50], рассматривавшего класс функций искажения $g(x) = x^c, c > 0$, с дополнительными условиями на распределения рисков: выпуклость носителя и непрерывность функции дожития.

Предложение 1.4.2 Рассмотрим класс функций $g_r(x) = 1 - (1 - x^\alpha)^r, r \geq 1, 1/2 < \alpha < 1$. Тогда натуральное множество по данному классу функций является сдвигово-масштабным семейством.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предложению 1.3.5 для $\tilde{a} = a^{1/\alpha}, \tilde{b} = b^{1/\alpha}, c > 0$, существует

$$\tilde{g}(x) = \lambda_1(1 - (1 - x)^{r_1}) + \dots + \lambda_n(1 - (1 - x)^{r_n}),$$

такая, что

$$\begin{cases} \tilde{g}(x) \leq cx, & 0 \leq x \leq \tilde{a}, \\ \tilde{g}(x) \geq 1 - c(1 - x), & \tilde{b} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Введем функцию $\hat{g}(x) = \tilde{g}(x^\alpha)$. Тогда

$$\hat{g}(x) = \lambda_1(1 - (1 - x^\alpha)^{r_1}) + \dots + \lambda_n(1 - (1 - x^\alpha)^{r_n}),$$

т.е. функция является линейной комбинацией функций исходной системы и

$$\begin{cases} \hat{g}(x) \leq cx^\alpha, & 0 \leq x \leq a, \\ \hat{g}(x) \geq 1 - c(1 - x^\alpha) \geq 1 - c(1 - x), & b \leq x \leq 1, \end{cases}$$

т.е. выполнено условие (1.7) для известного α и $\beta = 1$. \square

Глава 2

Границы и чувствительность премии

2.1 Определения и мотивация исследований

В данной главе автор сосредоточится, главным образом, на различиях между принципом подсчета премии по среднеквадратическому отклонению и принципом Ванга, а также преимуществах последнего.

При изучении различий между принципом Ванга и среднеквадратическим принципом естественно рассматривать характеристику

$$\frac{H_g(X) - \mathbf{E}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}},$$

т.е. центрированную и нормированную премию. В случае, если для данной функции искажения эта характеристика остается постоянной (и равной, например, некоторому λ) на некотором семействе рисков, это означает, что на данном семействе имеет место сводимость принципа Ванга к среднеквадратическому, т.е.

$$H_g(X) = \pi_\lambda^{\text{SD}}(X) = \mathbf{E}X + \lambda\sqrt{\mathbf{D}X}.$$

В случае же, если указанная характеристика принимает различные значения, сводимости нет. Представляет интерес разброс этих значений.

Заметим, что в силу свойств принципа Ванга

$$\frac{H_g(X) - \mathbf{E}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}} = H_g\left(\frac{X - \mathbf{E}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}}\right),$$

т.е. вместо того, чтобы центрировать и нормировать премии для некоторого семейства рисков, мы можем сначала центрировать и нормировать сами риски, а потом рассматривать премии для них.

Таким образом, возникает задача изучения премий Ванга на семействах рисков с нулевым средним и единичной дисперсией. Понятно, что с помощью среднеквадратического принципа такие риски нельзя ни различить, ни упорядочить. А с помощью принципа Ванга это оказывается возможным. В качестве меры того, насколько хорошо это получается, предлагается использовать разность между верхней и нижней гранью премии Ванга с данной функцией искажения на данном семействе. Эту разность мы назовем чувствительностью. Далее будем изучать зависимость чувствительности от параметров модели и проводить ее максимизацию.

Определение 2.1.1 *Абсолютной чувствительностью премии $H(X)$ для класса рисков (случайных величин) R назовем разность:*

$$\eta(R, H) = \sup_{X \in R} H(X) - \inf_{X \in R} H(X).$$

Мы будем применять данное определение к премиям Ванга, и поскольку они однозначно определяются функциями искажения, то можно говорить о чувствительности соответствующей функции (здесь и далее абсолютная чувствительность будет для краткости именоваться просто чувствительностью). Заметим, что если мы рассмотрим класс рисков с одинаковыми средними и дисперсиями, то премия по среднеквадратическом принципу на нем будет постоянна, а ее чувствительность, соответственно, равна нулю. В это же время, премия по принципу Ванга может на таких распределениях принимать различные значения, и ее чувствительность тогда окажется положительна.

Определение 2.1.2 *Относительной чувствительностью премии $H(X)$ для класса рисков (случайных величин) R назовем отношение:*

$$\theta(R, H) = \frac{\sup_{X \in R} H(X)}{\inf_{X \in R} H(X)},$$

при условии, что $\inf_{X \in R} H(X) > 0$.

Определение 2.1.3 Премию назовем *биективной* на классе рисков, если разным рискам из этого класса она ставит в соответствие разные значения.

Таким образом, если премия биективна, то все риски в классе можно различить и строго упорядочить (по величине премии).

2.2 Чувствительность для распределений Парето

Определение 2.2.1 *Распределение Парето с параметрами (α, β) — распределение с функцией дожития:*

$$S_{X_{\alpha,\beta}}(t) = \left(\frac{\beta}{\beta + t} \right)^\alpha, \quad t \geq 0.$$

При $\alpha > 2$ распределение Парето имеет среднее и дисперсию:

$$\mathbf{E}X_{\alpha,\beta} = \frac{\beta}{\alpha - 1}, \quad \mathbf{D}X_{\alpha,\beta} = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)},$$

а РН-премия равна:

$$\pi_\rho^{\text{РН}}(X_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha/\rho - 1}, & \rho < \alpha, \\ \infty, & \rho \geq \alpha. \end{cases}$$

Будем рассматривать классы центрированных и нормированных рисков, распределенных по Парето: $R(\alpha_1) = \{Y_\alpha, \alpha \geq \alpha_1\}$, где $\alpha_1 > 2$ и

$$Y_\alpha := \sqrt{\frac{\alpha - 2}{\alpha}} \left(\frac{\alpha - 1}{\beta} X_{\alpha,\beta} - 1 \right),$$

где $X_{\alpha,\beta}$ — случайная величина, распределенная по Парето с параметрами (α, β) ($\alpha > 2$). Тогда $\mathbf{E}Y_\alpha = 0$, $\mathbf{D}Y_\alpha = 1$ и по свойству инвариантности принципа Ванга относительно сдвигово-масштабных преобразований

$$\pi_\rho^{\text{РН}}(Y_\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\alpha(\alpha - 2)} \frac{\rho - 1}{\alpha - \rho}, & \rho < \alpha, \\ \infty, & \rho \geq \alpha. \end{cases}$$

2.2.1 Абсолютная чувствительность

Обозначим

$$\rho_1^* = \alpha_1 - \sqrt{\alpha_1(\alpha_1 - 2)}, \quad \rho_2^* = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1}.$$

Данные точки будут критическими для индекса неприятия риска ρ в свете рассматриваемой задачи.

Теорема 2.2.1 *Для класса рисков $R(\alpha_1)$ чувствительность РН-премии*

вычисляется по следующей формуле:

$$\eta(\rho) = \begin{cases} (\rho - 1) \left(\frac{1}{\sqrt{\rho(2-\rho)}} - \frac{\sqrt{\alpha_1(\alpha_1-2)}}{\alpha_1 - \rho} \right), & 1 \leq \rho < \rho_1^*, \\ (\rho - 1) \left(\frac{1}{\sqrt{\rho(2-\rho)}} - 1 \right), & \rho_1^* \leq \rho < \rho_2^*, \\ (\rho - 1) \left(\frac{\sqrt{\alpha_1(\alpha_1-2)}}{\alpha_1 - \rho} - 1 \right), & \rho_2^* \leq \rho \end{cases}$$

РН-премия оказывается биективна при $\rho \geq \rho_2^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если рассматривать $\alpha > 2$, то $\pi_\rho^{\text{РН}}(Y_\alpha)$ растёт от нуля, достигает максимума в точке $\alpha = \rho/(\rho - 1)$ (обозначим ее α_{\max} , заметим, что может оказаться, что $\alpha_{\max} < \alpha_1$), что получается из условия:

$$(\pi_\rho^{\text{РН}}(Y_\alpha))'_\alpha = \frac{\rho - (\rho - 1)\alpha}{\sqrt{\alpha(\alpha - 2)}} \cdot \frac{\rho - 1}{(\alpha - \rho)^2} = 0,$$

а потом убывает и на бесконечности асимптотически стремится к значению

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \pi_\rho^{\text{РН}}(Y_\alpha) = (\rho - 1) \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{\alpha}}}{1 - \frac{\rho}{\alpha}} = \rho - 1.$$

При этом значение локального максимума:

$$\text{loc max}_\alpha \pi_\rho^{\text{РН}}(Y_\alpha) = \pi_\rho^{\text{РН}}(Y_\alpha)|_{\alpha=\alpha_{\max}} = \frac{\rho - 1}{\sqrt{\rho(2 - \rho)}}.$$

Для $\rho \geq \rho_2^*$ верно, что $\alpha_{\max} \leq \alpha_1$. Таким образом, максимум премии достигается в точке $\alpha = \alpha_1$, а нижняя грань — в точке $\alpha = +\infty$.

Для $\rho_1^* \leq \rho < \rho_2^*$ верно, что $\alpha_{\max} > \alpha_1$. Таким образом, максимум премии достигается в точке α_{\max} . Более того,

$$\pi_\rho^{\text{РН}}(Y_{\alpha_1}) = \sqrt{\alpha_1(\alpha_1 - 2)} \frac{\rho - 1}{\alpha_1 - \rho} > \rho - 1 = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \pi_\rho^{\text{РН}}(Y_\alpha),$$

т.е. нижняя грань премии достигается в точке $\alpha = +\infty$.

Для $1 < \rho < \rho_1^*$ верно, что $\alpha_{\max} > \alpha_1$. Таким образом, максимум премии достигается в точке α_{\max} . Более того,

$$\pi_\rho^{\text{РН}}(Y_{\alpha_1}) = \sqrt{\alpha_1(\alpha_1 - 2)} \frac{\rho - 1}{\alpha_1 - \rho} < \rho - 1 = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \pi_\rho^{\text{РН}}(Y_\alpha),$$

т.е. минимум премии достигается в точке $\alpha = \alpha_1$.

Используя полученные утверждения, получим требуемые формулы для чувствительности премии.

Биективность РН-премии при $\rho \geq \rho_2^*$ следует из того, что тогда функция $\pi_\rho^{\text{РН}}(Y_\alpha)$ оказывается монотонно убывающей по α . \square

Следствие 2.2.1 *Чувствительность премии $\eta(\rho)$ — функция непрерывная, кусочно-гладкая, с изломом в точке ρ_1^* , меняющаяся от 0 (в 1) до бесконечности (в α_1), возрастающая на промежутке от точки ρ_1^* до α_1 .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Чувствительность премии $\eta(\rho)$ задается непрерывными, гладкими функциями между критическими точками. Значения чувствительности в точках ρ_1^* и ρ_2^* , посчитанные по разным формулам из теоремы 2.2.1 (слева и справа), совпадают и равны соответственно:

$$\eta(\rho_1^*) = (\rho_1^* - 1) \left(\frac{1}{\sqrt{\rho_1^*(2 - \rho_1^*)}} - 1 \right), \quad \eta(\rho_2^*) = (\rho_2^* - 1) \left(\frac{1}{\sqrt{\rho_2^*(2 - \rho_2^*)}} - 1 \right).$$

Заметим, что

$$\eta'(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{(\rho(2-\rho))^{3/2}} - \frac{(\alpha_1-1)\sqrt{\alpha_1(\alpha_1-2)}}{(\alpha_1-\rho)^2}, & 1 < \rho < \rho_1^*, \\ \frac{1}{(\rho(2-\rho))^{3/2}} - 1, & \rho_1^* < \rho < \rho_2^*, \\ \frac{(\alpha_1-1)\sqrt{\alpha_1(\alpha_1-2)}}{(\alpha_1-\rho)^2} - 1, & \rho_2^* < \rho. \end{cases}$$

Значения левой и правой производных функции чувствительности в точке ρ_2^* совпадают:

$$\eta'(\rho_2^*) = \frac{1}{(\rho_2^*(2 - \rho_2^*))^{3/2}} - 1,$$

Значения левой и правой производных функции чувствительности в точке ρ_1^* не совпадают:

$$\frac{1}{(\rho_1^*(2 - \rho_1^*))^{3/2}} - \frac{\rho_1^{*2} - 2\rho_1^* + 2}{\rho_1^*(2 - \rho_1^*)} \neq \frac{1}{(\rho_1^*(2 - \rho_1^*))^{3/2}} - 1,$$

что дает разрыв производной и, следовательно, излом чувствительности в точке ρ_1^* .

Подставляя значения 1 и α_1 в формулу чувствительности, получаем $\eta(1) = 0$, $\lim_{\rho \rightarrow \alpha_1} \eta(\rho) = +\infty$.

При $\rho_1^* < \rho < \rho_2^*$

$$\eta'(\rho) = (\rho(2 - \rho))^{-3/2} - 1 > 0,$$

т.к. $1 > \rho(2 - \rho) = 1 - (\rho - 1)^2$.

При $\rho_2^* \leq \rho$

$$\eta'(\rho) = \frac{(\alpha_1 - 1)\sqrt{\alpha_1(\alpha_1 - 2)}}{(\alpha_1 - \rho)^2} - 1 > 0,$$

т.к. $(\alpha_1 - \rho)^2 < (\alpha_1 - 1)\sqrt{\alpha_1(\alpha_1 - 2)}$, поскольку $\alpha_1 > \alpha_{\max} = \rho/(\rho - 1)$.

Следовательно, $\eta(\rho)$ возрастает при $\rho_1^* \leq \rho$. \square

Далее будем использовать известную теорему Бюдана-Фурье о числе действительных корней многочлена на отрезке [6].

Теорема Бюдана-Фурье. *Если действительные числа a и b ($a < b$) не являются корнями многочлена $f(x)$ степени n с действительными коэффициентами, то число действительных корней этого многочлена, лежащих между a и b и подсчитываемых каждый столько раз, какова его кратность, либо равно, либо на четное число меньше разности между числом $W(f_a)$ перемен знака в ряду чисел $f(a), f'(a), \dots, f^{(n)}(a)$ и числом $W(f_b)$ перемен знака в ряду, полученном из ряда чисел $f(b), f'(b), \dots, f^{(n)}(b)$ заменой встречающихся в нем нулей такими отличными от нуля числами, что если $f^{(k-1)}(b) \neq 0, f^{(k)}(b) = \dots = f^{(k+l-1)}(b) = 0, f^{(k+l)}(b) \neq 0$, то число s_{k+i} , заменяющее $f^{(k+i)}(b)$ ($i = 0, 1, \dots, l - 1$), имеет тот же знак, что и $f^{(k+l)}(b)$, если разность $l - i$ четная, и противоположный знак, если эта разность нечетная.*

Следствие 2.2.2 *Существует критическое значение $\alpha^* = 1 + \frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}-1}(\sqrt{5}+3)}{8} \approx 2,029$ такое, что на интервале от 1 до ρ_1^* , при $\alpha_1 \leq \alpha^*$ функция $\eta(\rho)$ возрастает, а при $\alpha_1 > \alpha^*$ - сначала растет, а затем убывает, имея локальный максимум (в некоторой точке $\tilde{\rho}$), при этом в точке ρ_1^* получается локальный минимум (негладкий).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\eta_1(\rho)$ чувствительность премии по формуле, полученной при $1 \leq \rho < \rho_1^*$, но рассмотрим ее на всем промежутке от 1 до α_1 . Тогда

$$\eta_1'(\rho) = \frac{1}{(\rho(2 - \rho))^{3/2}} - \frac{(\alpha_1 - 1)\sqrt{\alpha_1(\alpha_1 - 2)}}{(\alpha_1 - \rho)^2}.$$

Найдем нули производной: $\eta_1'(\rho) = 0$. Данное уравнение сводится к

$$\alpha_1(\alpha_1 - 1)^2(\alpha_1 - 2)\rho^6 - 6\alpha_1(\alpha_1 - 1)^2(\alpha_1 - 2)\rho^5 + (12\alpha_1(\alpha_1 - 1)^2(\alpha_1 - 2) + 1)\rho^4 - 4\alpha_1(2(\alpha_1 - 1)^2(\alpha_1 - 2) + 1)\rho^3 + 6\alpha_1^2\rho^2 - 4\alpha_1^3\rho + \alpha_1^4 = 0.$$

Можно заметить, что это уравнение всегда имеет своим корнем ρ_2^* , но нас интересуют только его корни на отрезке от 1 до ρ_1^* . Поделив многочлен на $(\alpha_1 - 1)(\rho - \rho_2^*)$, получим многочлен 5-й степени, который обозначим $f(\rho)$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \alpha_1(\alpha_1 - 1)(\alpha_1 - 2)\rho^5 - \alpha_1(\alpha_1 - 2)(5\alpha_1 - 6)\rho^4 + \\ &+ (7\alpha_1^3 - 25\alpha_1^2 + 23\alpha_1 - 1)\rho^3 - \alpha_1(\alpha_1^2 - 6\alpha_1 + 11)\rho^2 - \alpha_1^2(\alpha_1 - 5)\rho - \alpha_1^3; \\ f'(\rho) &= 5\alpha_1(\alpha_1 - 1)(\alpha_1 - 2)\rho^4 - 4\alpha_1(\alpha_1 - 2)(5\alpha_1 - 6)\rho^3 + \\ &+ 3(7\alpha_1^3 - 25\alpha_1^2 + 23\alpha_1 - 1)\rho^2 - 2\alpha_1(\alpha_1^2 - 6\alpha_1 + 11)\rho - \alpha_1^2(\alpha_1 - 5); \\ f''(\rho) &= 20\alpha_1(\alpha_1 - 1)(\alpha_1 - 2)\rho^3 - 12\alpha_1(\alpha_1 - 2)(5\alpha_1 - 6)\rho^2 + \\ &+ 6(7\alpha_1^3 - 25\alpha_1^2 + 23\alpha_1 - 1)\rho - 2\alpha_1(\alpha_1^2 - 6\alpha_1 + 11); \\ f'''(\rho) &= 60\alpha_1(\alpha_1 - 1)(\alpha_1 - 2)\rho^2 - 24\alpha_1(\alpha_1 - 2)(5\alpha_1 - 6)\rho + 6(7\alpha_1^3 - 25\alpha_1^2 + 23\alpha_1 - 1); \\ f^{(IV)}(\rho) &= 120\alpha_1(\alpha_1 - 1)(\alpha_1 - 2)\rho - 24\alpha_1(\alpha_1 - 2)(5\alpha_1 - 6); \\ f^{(V)}(\rho) &= 120\alpha_1(\alpha_1 - 1)(\alpha_1 - 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= -(\alpha_1 - 1)^2 < 0; \quad f'(1) = 3(\alpha_1 - 1)^3 > 0; \quad f''(1) = -6(\alpha_1 - 1)^2 < 0; \\ f'''(1) &= -6(\alpha_1 - 1)(3\alpha_1^2 - 6\alpha_1 - 1); \quad f^{(IV)}(1) = 24\alpha_1(\alpha_1 - 2) > 0; \\ f^{(V)}(1) &= 120\alpha_1(\alpha_1 - 1)(\alpha_1 - 2) > 0. \end{aligned}$$

$$f(\rho_2^*) = 2(\alpha_1 - 2)^3 > 0;$$

$$f'(\rho_2^*) = \frac{3\alpha_1^2(\alpha_1 - 2)^2(\alpha_1^2 - 2\alpha_1 - 2)}{(\alpha_1 - 1)^3}; \quad f''(\rho_2^*) = -\frac{8\alpha_1(\alpha_1 - 2)(3\alpha_1^2 - 6\alpha_1 - 1)}{(\alpha_1 - 1)^2};$$

$$\begin{aligned} f'''(\rho_2^*) &= -\frac{6(3\alpha_1^4 - 2\alpha_1^3 + 24\alpha_1 - 1)}{\alpha_1 - 1} = \\ &= -6\frac{(\alpha_1 - 2)(3\alpha_1^3 + 4\alpha_1^2 + 8\alpha_1 + 40) + 79}{\alpha_1 - 1} < 0; \end{aligned}$$

$$f^{(IV)}(\rho_2^*) = 144\alpha_1(\alpha_1 - 2) > 0; \quad f^{(V)}(\rho_2^*) = 120\alpha_1(\alpha_1 - 1)(\alpha_1 - 2) > 0.$$

В обозначениях теоремы Бюдана-Фурье $W(f_1) = 3$.

Если $2 \leq \alpha_1 < 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$, то $f'(\rho_2^*) < 0$, $f''(\rho_2^*) > 0$ и $W(f_{\rho_2^*}) = 4$.

Если $1 + \frac{2}{3}\sqrt{3} \leq \alpha_1 < 1 + \sqrt{3}$, то $f'(\rho_2^*) < 0$, $f''(\rho_2^*) < 0$ и $W(f_{\rho_2^*}) = 2$.

Если $1 + \sqrt{3} \leq \alpha_1$, то $f'(\rho_2^*) > 0$, $f''(\rho_2^*) < 0$ и $W(f_{\rho_2^*}) = 2$.

По теореме Бюдана-Фурье, число корней многочлена $f(\rho)$, лежащих от 1 до ρ_2^* , равно 1. Таким образом, функция $\eta_1(\rho)$ имеет на интервале $(1, \rho_2^*)$ ровно 1 экстремум. А так как в точке ρ_2^* функция η_1 имеет минимум, поскольку

$$\eta_1'(\rho_2^*) = 0, \quad \eta_1''(\rho_2^*) = \frac{(\alpha_1 - 1)^4 \sqrt{\alpha_1(\alpha_1 - 2)}}{\alpha_1^3(\alpha_1 - 2)^3} > 0,$$

а в 1 начинается ее рост, т.к.

$$\eta_1'(1) = 1 - \frac{\alpha_1(\alpha_1 - 2)}{\alpha_1 - 1} > 0,$$

то данный экстремум является максимумом.

Найдем условие, при котором данный локальный максимум находится на интервале $(1, \rho_1^*]$. Для этого найдем α_1 , для которого точка локального максимума $\tilde{\rho}$ совпадет с точкой ρ_1^* , а именно,

$$\eta_1'(\rho)|_{\rho=\rho_1^*} = 0.$$

Сделаем обратную замену — выразим α_1 через ρ : $\alpha_1 = \frac{\rho^2}{2(\rho-1)}$, что приводит к условию:

$$\eta_1'(\rho) = \frac{1}{\rho(2-\rho)} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho(2-\rho)}} - ((\rho-1)^2 + 1) \right) = 0.$$

Решим данное уравнение относительно ρ :

$$\frac{1}{\sqrt{\rho(2-\rho)}} = ((\rho-1)^2 + 1)^2.$$

После преобразований получим:

$$(\rho-1)^4 + (\rho-1)^2 - 3 = 0.$$

Отсюда находим ρ из области определения:

$$\rho = 1 + \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2},$$

$$\alpha_1^* = 1 + \frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}-1}(\sqrt{5}+3)}{8}.$$

Таким образом, требуемое утверждение доказано. \square

Замечание 2.2.1 В случае $\alpha_1 > \alpha^*$ существует некоторое $\hat{\rho} \in (\rho_1^*, \alpha_1)$, такое, что $\eta(\hat{\rho}) = \eta(\tilde{\rho})$, т.е. функция $\eta(\rho)$ вторично достигает значения локального максимума.

Доказательство. Так как $\tilde{\rho}$ — точка локального максимума, то $\eta(\tilde{\rho}) > \eta(\rho_1^*)$. А поскольку на промежутке от ρ_1^* до α_1 функция η непрерывно возрастает до $+\infty$ (по следствию 2.2.1), то в некоторой точке $\hat{\rho} \in (\rho_1^*, \alpha_1)$ она снова принимает значение $\eta(\tilde{\rho})$, причем ровно один раз. \square

Расчеты показывают, что величина локального максимума быстро убывает с ростом α_1 , так что при $\alpha_1 = 3$ он уже равен 0,0117... А при стремлении α_1 к α^* справа величина максимума растет до 0,485868..., при этом он приближается к точке ρ_1^* и в пределе сливается с ней.

График чувствительности при $\alpha_1 = 3$ представлен на рисунке 2.1, при $\alpha_1 = \alpha^*$ — на рисунке 2.2.

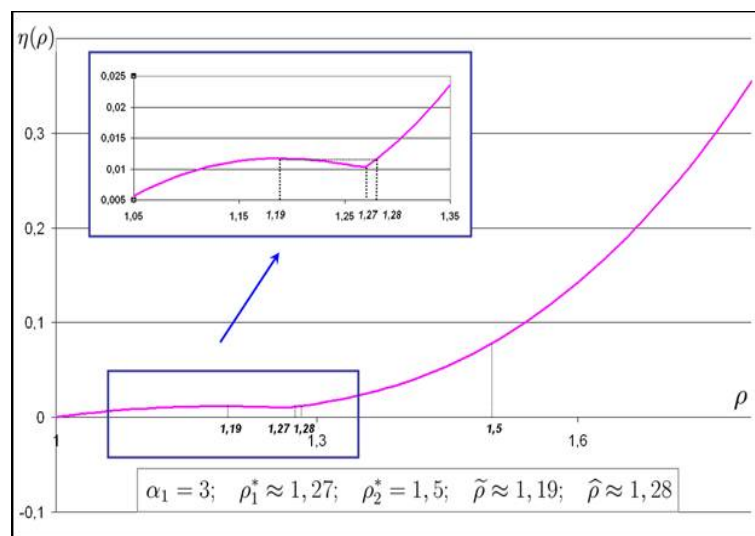


Рис. 2.1: График чувствительности при $\alpha_1 = 3$

Следствие 2.2.3 Пусть параметр ρ ограничен отрезком $[\rho_1, \rho_2] \subset (1, \alpha_1)$. Если $\alpha_1 \leq \alpha^*$, то максимум чувствительности достигается в точке ρ_2 вне зависимости от положения точки ρ_1 . Если $\alpha_1 > \alpha^*$, то максимум чувствительности достигается в точке ρ_2 при $\rho_2 < \tilde{\rho}$ или $\rho_2 \geq \hat{\rho}$, в точке $\tilde{\rho}$ при $1 \leq \rho_1 \leq \tilde{\rho} \leq \rho_2 < \hat{\rho}$, в точке ρ_1 при $\tilde{\rho} \leq \rho_1 < \rho_2 < \rho_1^*$. Если же $\tilde{\rho} \leq \rho_1 \leq \rho_1^* \leq \rho_2 < \hat{\rho}$, то максимум чувствительности достигается либо в ρ_1 , либо в ρ_2 , в зависимости от того, где $\eta(\rho)$ больше.

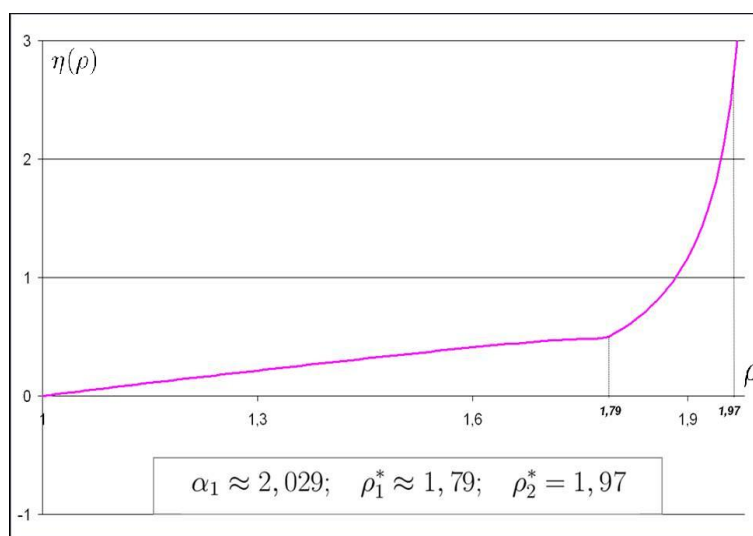


Рис. 2.2: График чувствительности при $\alpha_1 = \alpha^*$

2.2.2 Относительная чувствительность

Теорема 2.2.2 Для класса рисков $R(\alpha_1)$ относительная чувствительность РН-премии вычисляется по следующей формуле:

$$\theta(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1(\alpha_1-2)}} \cdot \frac{\alpha_1-\rho}{\sqrt{\rho(2-\rho)}}, & 1 \leq \rho < \rho_1^*, \\ \frac{1}{\sqrt{\rho(2-\rho)}}, & \rho_1^* \leq \rho < \rho_2^*, \\ \frac{\sqrt{\alpha_1(\alpha_1-2)}}{\alpha_1-\rho}, & \rho_2^* \leq \rho. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полностью повторяет доказательство теоремы 2.2.1. \square

Следствие 2.2.4 Относительная чувствительность премии $\theta(\rho)$ — функция непрерывная, кусочно-гладкая с изломом в точке ρ_1^* , убывающая от $\frac{\alpha_1-1}{\sqrt{\alpha_1(\alpha_1-2)}}$ в 1 до $\frac{1}{\sqrt{\rho_1^*(2-\rho_1^*)}}$ в ρ_1^* , возрастающая до $+\infty$ на промежутке от точки ρ_1^* до α_1 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Относительная чувствительность премии $\theta(\rho)$ задается непрерывными, гладкими функциями между критическими точками. Значения относительной чувствительности в точках ρ_1^* и ρ_2^* , посчитанные по разным формулам из теоремы 2.2.2, совпадают и равны соответственно:

$$\theta(\rho_1^*) = \frac{1}{\sqrt{\rho_1^*(2-\rho_1^*)}}, \quad \theta(\rho_2^*) = \frac{1}{\sqrt{\rho_2^*(2-\rho_2^*)}}.$$

Заметим, что

$$\theta'(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1(\alpha_1-2)}} \cdot \frac{(\alpha_1-1)\rho-\alpha_1}{(\rho(2-\rho))^{3/2}}, & 1 < \rho < \rho_1^*, \\ \frac{\rho-1}{(\rho(2-\rho))^{3/2}}, & \rho_1^* < \rho < \rho_2^*, \\ \frac{\sqrt{\alpha_1(\alpha_1-2)}}{(\alpha_1-\rho)^2}, & \rho_2^* < \rho. \end{cases}$$

Значения левой и правой производных функции чувствительности в точке ρ_2^* совпадают:

$$\theta'(\rho_2^*) = \frac{\rho_2^* - 1}{(\rho_2^*(2 - \rho_2^*))^{3/2}},$$

Значения левой и правой производных функции чувствительности в точке ρ_1^* не совпадают:

$$-\frac{\rho_1^* - 1}{(\rho_1^*(2 - \rho_1^*))^{3/2}} \neq \frac{\rho_1^* - 1}{(\rho_1^*(2 - \rho_1^*))^{3/2}},$$

что дает разрыв производной и, следовательно, излом относительной чувствительности в точке ρ_1^* .

При $\rho \geq \rho_1^*$ получаем, что $\theta'(\rho) > 0$, а при $\rho < \rho_1^*$ получаем, что $\theta'(\rho) < 0$, т.к. $\rho < \rho_1^* < \rho_2^*$, что и дает возрастание и убывание относительной чувствительности на соответствующих интервалах. \square

Следствие 2.2.5 Пусть параметр ρ ограничен отрезком $[\rho_1, \rho_2] \subset (1, \alpha_1)$. Максимум относительной чувствительности достигается в точке ρ_1 , если $\rho_2 < \rho_1^*$, в точке ρ_2 , если $\rho_1 > \rho_1^*$. Если же $\rho_1 \leq \rho_1^* \leq \rho_2$, то максимум относительной чувствительности достигается либо в ρ_1 , либо в ρ_2 в зависимости от того, где $\theta(\rho)$ больше.

График относительной чувствительности при $\alpha_1 = 3$ представлен на рисунке 2.3.

2.2.3 Чувствительность в случае бесконечной дисперсии

Заметим, что при $1 < \alpha < 2$ дисперсия распределения Парето бесконечна и принцип назначения премии по среднеквадратическому отклонению неприменим. Однако в этом случае вместо среднеквадратического отклонения можно использовать, например, среднее абсолютное отклонение, которое для распределения Парето равно:

$$E|X_{\alpha,\beta} - EX_{\alpha,\beta}| = 2\frac{\beta}{\alpha-1} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}.$$

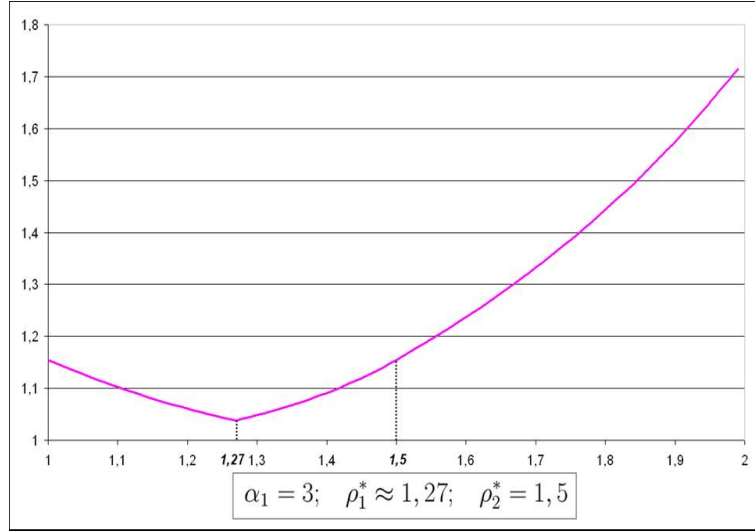


Рис. 2.3: График относительной чувствительности при $\alpha_1 = 3$

Таким образом, обобщим исследования чувствительности на случай $\alpha_1 > 1$. Рассмотрим классы: $Q(\alpha_1) = \{Z_\alpha, \alpha \geq \alpha_1\}$, где

$$Z_\alpha := \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)^{\alpha - 1} \left(\frac{\alpha - 1}{\beta} X_{\alpha, \beta} - 1 \right).$$

Тогда по свойству инвариантности принципа Ванга относительно сдвигово-масштабных преобразований

$$\pi_\rho^{\text{PH}}(Z_\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)^{\alpha - 1} \frac{\alpha(\rho - 1)}{\alpha - \rho}, & \rho < \alpha, \\ \infty, & \rho \geq \alpha. \end{cases}$$

Теорема 2.2.3 Для класса рисков $Q(\alpha_1)$ чувствительность РН-премии вычисляется по следующей формуле:

$$\tilde{\eta}(\rho) = \frac{\rho - 1}{2} \left(\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1} \right)^{\alpha_1 - 1} \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \rho} - e \right).$$

РН-премия оказывается биективна на всем интервале $(1, \alpha_1)$.

Доказательство. Заметим, что

$$(\pi_\rho^{\text{PH}}(Z_\alpha))'_\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)^{\alpha - 1} \frac{\alpha(\rho - 1)}{\alpha - \rho} \left(\ln \frac{\alpha}{\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha - \rho} \right) < 0, \text{ т.к.}$$

$$\ln \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1} \right) < \frac{1}{\alpha - 1} < \frac{1}{\alpha - \rho},$$

Значит, $\pi_\rho^{\text{PH}}(Z_\alpha)$ убывает по α и достигает нижней грани на бесконечности:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \pi_\rho^{\text{PH}}(Z_\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)^{\alpha - 1} \frac{\alpha(\rho - 1)}{\alpha - \rho} = \frac{\rho - 1}{2} e.$$

Биективность РН-премии следует из монотонного убывания $\pi_\rho(Z_\alpha)$ по α . \square

Следствие 2.2.6 *Чувствительность премии $\tilde{\eta}(\rho)$ для класса рисков $Q(\alpha_1)$ — функция непрерывная, гладкая, возрастающая от 0 в 1 до $+\infty$ в α_1 .*

Доказательство. Производная чувствительности равна:

$$\tilde{\eta}'(\rho) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1} \right)^{\alpha_1 - 1} \frac{\alpha_1(\alpha_1 - 1)}{(\alpha_1 - \rho)^2} - e \right).$$

Заметим, что формально $\tilde{\eta}'(\rho) = 0$ при

$$\rho = \alpha_1 \pm \sqrt{\frac{\alpha_1(\alpha_1 - 1)}{e} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1} \right)^{\alpha_1 - 1}}.$$

Оба нуля производной выходят за пределы интервала $(1, \alpha_1)$, а между ними она положительна. Таким образом доказано, что чувствительность возрастает. Непрерывность и гладкость следует из явного вида функций чувствительности и ее производной. \square

Следствие 2.2.7 *Пусть параметр ρ ограничен отрезком $[\rho_1, \rho_2] \subset (1, \alpha_1)$. Тогда максимум чувствительности для класса рисков $Q(\alpha_1)$ всегда достигается в точке ρ_2 .*

График чувствительности для класса рисков $Q(\alpha_1)$ при $\alpha_1 = 1,5$ представлен на рисунке 2.4.

2.3 Пример Янг и его обобщения

2.3.1 История вопроса

Еще в 1998 году при изучении принципа пропорционального изменения интенсивности Кристофидес предположил, что для любых параметрических семейств распределений с постоянной асимметрией РНр эквивалентен SDp [17]. Янг удалось опровергнуть предположение Кристофидеса в общей его форме, предложив контрпример ([52]): двустороннее показательное распределение с конкретными значениями параметров и функцией искажения $g(x) = \sqrt{x}$.

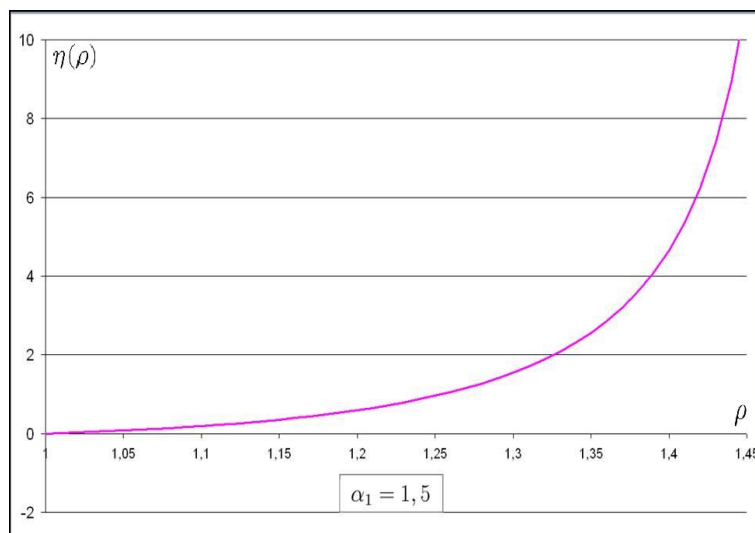


Рис. 2.4: График чувствительности для класса рисков $Q(\alpha_1)$ при $\alpha_1 = 1,5$

Пример, найденный Янг, представляет собой теоретически важный (как контрпример к предположению Кристофидеса), но весьма частный случай. При его рассмотрении возникают, в том числе, следующие вопросы:

- 1) можно ли привести другие примеры или он единичен?
- 2) насколько велик разброс значений центрированной и нормированной премии — как на подмножествах постоянной асимметрии, так и на всем семействе рисков, предложенных Янг (ведь в ее числовом примере эта разница слишком мала, чтобы иметь практическое значение)?

Далее мы попытаемся ответить на эти вопросы.

Напомним определение асимметрии случайной величины.

Определение 2.3.1 Асимметрия случайной величины X :

$$\text{Skew } X = \frac{\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^3}{\sqrt{(\mathbf{D}X)^3}}.$$

Следуя Янг, рассмотрим класс случайных величин, имеющих двустороннее экспоненциальное распределение с параметрами (α, β, w) , $\alpha, \beta > 0, 0 < w < 1$. Функция дожития имеет следующий вид:

$$S_X(t) = \begin{cases} w + (1 - w)(1 - e^{\beta t}), & t < 0, \\ we^{-\alpha t}, & t \geq 0, \end{cases}$$

а плотность:

$$f_X(t) = -S'_X(t) = \begin{cases} (1 - w)\beta e^{\beta t}, & t < 0, \\ w\alpha e^{-\alpha t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Найдем числовые характеристики распределения:

$$\mathbf{E}X = \frac{w}{\alpha} - \frac{1-w}{\beta},$$

$$\mathbf{D}X = \frac{w(2-w)}{\alpha^2} + \frac{1-w^2}{\beta^2} + 2\frac{w(1-w)}{\alpha\beta},$$

$$\text{Skew } X = 2 \frac{\frac{1-(1-w)^3}{\alpha^3} - \frac{1-w^3}{\beta^3} + 3\frac{w(1-w)}{\alpha\beta} \left(\frac{1-w}{\alpha} - \frac{w}{\beta} \right)}{\sqrt{\left(\frac{w(2-w)}{\alpha^2} + \frac{1-w^2}{\beta^2} + 2\frac{w(1-w)}{\alpha\beta} \right)^3}}.$$

Рассмотрим $g(x) = \sqrt{x}$. Тогда

$$H_g(X) = 2\frac{\sqrt{w}}{\alpha} + \frac{2}{\beta} \left((\sqrt{w} - 1) - \ln \frac{\sqrt{w} + 1}{2} \right),$$

$$\frac{H_g(X) - \mathbf{E}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}} = \frac{\frac{\sqrt{w}}{\alpha}(2 - \sqrt{w}) - \frac{1}{\beta} \left((1 - \sqrt{w})^2 + 2 \ln \frac{\sqrt{w} + 1}{2} \right)}{\sqrt{\frac{w(2-w)}{\alpha^2} + \frac{1-w^2}{\beta^2} + 2\frac{w(1-w)}{\alpha\beta}}}.$$

Как показала Янг, если взять $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 2,27466$, $w_1 = 0,9$, $w_2 = 0,1$, то у случайных величин X_1 и X_2 асимметрии равны: $\text{Skew } X_1 = \text{Skew } X_2 = 1,84166$, однако

$$\frac{H_g(X_1) - \mathbf{E}X_1}{\sqrt{\mathbf{D}X_1}} = 0,98684, \quad \frac{H_g(X_2) - \mathbf{E}X_2}{\sqrt{\mathbf{D}X_2}} = 1,02386,$$

т.е. принцип Ванга и среднеквадратический принцип не эквивалентны.

Поскольку в дальнейшем мы будем изучать поведение приведенной (т.е. центрированной и нормированной) премии, то для простоты введем новую случайную величину:

$$Y = \frac{X - \mathbf{E}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}}.$$

Тогда

$$H_g(Y) = \frac{H_g(X) - \mathbf{E}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}}, \quad \text{Skew } Y = \text{Skew } X.$$

Заметим, что величины $\text{Skew } Y$, $H_g(Y)$ зависят не столько от α и β , сколько от их отношения, а именно, если увеличить α и β в одинаковое количество раз, то рассматриваемые величины не изменятся. Положим $\alpha + \beta = 1$, т.е. $\beta = 1 - \alpha$ и пусть $\alpha \in (0, 1)$. Тогда $\alpha/\beta \in (0, \infty)$. Таким образом, получается, что рассмотренные величины можно изучать в единичном квадрате (по w и по α).

Выразив β через α и проведя ряд преобразований, получим:

$$H_g(Y) = \frac{\sqrt{w}(2 - \sqrt{w}) - \alpha \left(1 + 2 \ln \frac{1+\sqrt{w}}{2}\right)}{\sqrt{-w^2 + 2(1 - \alpha)w + \alpha^2}}, \quad (2.1)$$

$$\text{Skew } Y = 2 \frac{w^3 - 3(1 - \alpha)w^2 + 3(1 - \alpha)^2w - \alpha^3}{\sqrt{(-w^2 + 2(1 - \alpha)w + \alpha^2)^3}}. \quad (2.2)$$

Далее исследуем поведение премии и асимметрии на единичном квадрате вообще и поведение премии на линиях уровня асимметрии в частности.

2.3.2 Поведение премии и асимметрии в предельных случаях

Утверждение 2.3.1 *Асимметрия обладает следующим свойством:*

$$\text{Skew } Y(w, \alpha) = -\text{Skew } Y(1 - w, 1 - \alpha).$$

Доказательство. Сделаем замену: $u = 1 - w, \beta = 1 - \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Skew } Y(w, \alpha) &= 2 \frac{w^3 - 3(1 - \alpha)w^2 + 3(1 - \alpha)^2w - \alpha^3}{\sqrt{(-w^2 + 2(1 - \alpha)w + \alpha^2)^3}} = \\ &= 2 \frac{(1 - u)^3 - 3\beta(1 - u)^2 + 3\beta^2(1 - u) - (1 - \beta)^3}{\sqrt{(-(1 - u)^2 + 2\beta(1 - u) + (1 - \beta)^2)^3}} = \\ &= -2 \frac{u^3 - 3(1 - \beta)u^2 + 3(1 - \beta)^2u - \beta^3}{\sqrt{(-u^2 + 2(1 - \beta)u + \beta^2)^3}} = -\text{Skew } Y(1 - w, 1 - \alpha). \square \end{aligned}$$

Заметим, что обе функции — премии и асимметрии — продолжаются по непрерывности на стороны квадрата, за исключением точек $(0,0)$ и $(1,1)$.

Утверждение 2.3.2 *На сторонах и в углах единичного квадрата премия и асимметрия ведут себя следующим образом:*

2.1. $w = 0$

$$\text{Skew } Y = -2, \quad H_g(Y) = 2 \ln 2 - 1 \approx 0,386; \quad (2.3)$$

2.2. $w = 1$

$$\text{Skew } Y = 2, \quad H_g(Y) = 1; \quad (2.4)$$

2.3. $\alpha = 0$

$$\text{Skew } Y = 2 \frac{w^2 - 3w + 3}{\sqrt{w(2 - w)^3}}, \quad H_g(Y) = \frac{2 - \sqrt{w}}{\sqrt{2 - w}}; \quad (2.5)$$

2.4. $\alpha = 1$

$$\text{Skew } Y = -2 \frac{w^2 + w + 1}{\sqrt{(1-w)(1+w)^3}}, \quad H_g(Y) = -\frac{(1-\sqrt{w})^2 + 2 \ln \frac{1+\sqrt{w}}{2}}{\sqrt{1-w^2}}; \quad (2.6)$$

2.5. $\alpha = 0, w \rightarrow 0$

$$\text{Skew } Y \rightarrow +\infty, \quad H_g(Y) \rightarrow \sqrt{2}; \quad (2.7)$$

2.6. $\alpha = 1, w \rightarrow 1$

$$\text{Skew } Y \rightarrow -\infty, \quad H_g(Y) \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Переходим к соответствующим пределам в формулах (2.1) и (2.2). \square

Возникает вопрос — имеют ли значения премии на сторонах квадрата содержательный смысл или это просто формальные пределы? Ответ на него дает следующее утверждение.

Утверждение 2.3.3 *Рассмотрим случайные величины $Y_{a \rightarrow i}$, ($i = 0; 1$) с функциями дожития $\lim_{a \rightarrow i} S_Y(t)$, где a — один из параметров распределения случайной величины Y . Тогда*

3.1.

$$S_{Y_{w \rightarrow 0}}(t) = \begin{cases} 1 - e^{(t-1)}, & t < 1, \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$$

3.2.

$$S_{Y_{w \rightarrow 1}}(t) = \begin{cases} 1, & t < -1, \\ e^{-(t+1)}, & t \geq -1. \end{cases}$$

3.3.

$$S_{Y_{\alpha \rightarrow 0}}(t) = \begin{cases} 1, & t < -\sqrt{\frac{w}{2-w}}, \\ we^{-\sqrt{w}(\sqrt{w} + \sqrt{2-w}t)}, & t \geq -\sqrt{\frac{w}{2-w}}. \end{cases}$$

3.4.

$$S_{Y_{\alpha \rightarrow 1}}(t) = \begin{cases} w + (1-w) \left(1 - e^{-\sqrt{1-w}(\sqrt{1-w} - \sqrt{1+wt})}\right), & t < \sqrt{\frac{1-w}{1+w}}, \\ 0, & t \geq \sqrt{\frac{1-w}{1+w}}. \end{cases}$$

и

$$\lim_{a \rightarrow i} H_g(Y) = H_g(Y_{a \rightarrow i}), \quad i = 0; 1.$$

Доказательство. Заметим, что:

$$S_Y(t) = \begin{cases} w + (1-w)(1 - e^{(1-\alpha)(\mathbf{E}X + \mathbf{D}Xt)}), & t < -\frac{\mathbf{E}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}}, \\ we^{-\alpha(\mathbf{E}X + \mathbf{D}Xt)}, & t \geq -\frac{\mathbf{E}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}}. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} w + (1-w)(1 - e^{\frac{1}{\alpha}((w-\alpha) + \sqrt{-w^2 + 2(1-\alpha)w + \alpha^2}t)}), & t < \frac{\alpha-w}{\sqrt{-w^2 + 2(1-\alpha)w + \alpha^2}}, \\ we^{\frac{1}{1-\alpha}((\alpha-w) - \sqrt{-w^2 + 2(1-\alpha)w + \alpha^2}t)}, & t \geq \frac{\alpha-w}{\sqrt{-w^2 + 2(1-\alpha)w + \alpha^2}}. \end{cases}$$

Тогда равенства 3.1–3.4 получаются предельным переходом в силу непрерывности функции дожития по параметрам. Рассмотрим премии:

$$H_g(Y_{w \rightarrow 0}) = \int_{-\infty}^0 (\sqrt{1 - e^{t-1}} - 1) dt + \int_0^1 \sqrt{1 - e^{t-1}} dt =$$

$$= 1 + \int_{-\infty}^1 (\sqrt{1 - e^{t-1}} - 1) dt = \left[\sqrt{1 - e^{t-1}} = y \right]$$

$$= 1 + \int_1^0 (y - 1) \left(-\frac{2y}{1 - y^2} \right) dy = 1 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + y} \right) dy =$$

$$= 1 - 2 [y - \ln(1 + y)] \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - 1 = \lim_{w \rightarrow 0} H_g(Y).$$

$$H_g(Y_{w \rightarrow 1}) = \int_{-1}^0 (e^{-0,5(t+1)} - 1) dt + \int_0^{+\infty} e^{-0,5(t+1)} dt =$$

$$= \int_{-1}^{+\infty} e^{-0,5(t+1)} dt - 1 = \frac{1}{\sqrt{e}} \int_{-1}^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} dt - 1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} (-2) \left[e^{-\frac{t}{2}} \right] \Big|_{-1}^{+\infty} - 1 = 2 - 1 = 1 = \lim_{w \rightarrow 1} H_g(Y).$$

$$H_g(Y_{\alpha \rightarrow 0}) = \int_{-\sqrt{\frac{w}{2-w}}}^0 \left(\sqrt{we^{-0,5\sqrt{w}(\sqrt{w} + \sqrt{2-w}t)}} - 1 \right) dt +$$

$$+ \int_0^{+\infty} \sqrt{we^{-0,5\sqrt{w}(\sqrt{w} + \sqrt{2-w}t)}} dt =$$

$$= \int_{-\sqrt{\frac{w}{2-w}}}^{+\infty} \sqrt{we^{-0,5\sqrt{w}(\sqrt{w} + \sqrt{2-w}t)}} dt - \sqrt{\frac{w}{2-w}} =$$

$$= \sqrt{we^{-0,5w}} \left(-\frac{2}{\sqrt{w(2-w)}} \right) \left[e^{-0,5\sqrt{w(2-w)}t} \right] \Big|_{-\sqrt{\frac{w}{2-w}}}^{+\infty} - \sqrt{\frac{w}{2-w}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\sqrt{2-w}} - \sqrt{\frac{w}{2-w}} = \frac{2 - \sqrt{w}}{\sqrt{2-w}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} H_g(Y). \\
H_g(Y_{\alpha \rightarrow 1}) &= \int_{-\infty}^0 \left(\sqrt{w + (1-w)(1 - e^{-\sqrt{1-w}(\sqrt{1-w} - \sqrt{1+wt})})} - 1 \right) dt + \\
&\quad + \int_0^{\sqrt{\frac{1-w}{1+w}}} \sqrt{w + (1-w)(1 - e^{-\sqrt{1-w}(\sqrt{1-w} - \sqrt{1+wt})})} dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{1-w}{1+w}}} \left(\sqrt{w + (1-w)(1 - e^{-\sqrt{1-w}(\sqrt{1-w} - \sqrt{1+wt})})} - 1 \right) dt + \sqrt{\frac{1-w}{1+w}} = \\
&\quad \left[\sqrt{w + (1-w)(1 - e^{-\sqrt{1-w}(\sqrt{1-w} - \sqrt{1+wt})})} = y \right] \\
&= \int_1^{\sqrt{w}} (y-1) \frac{-2y}{\sqrt{1-w^2}(1-y^2)} dy + \sqrt{\frac{1-w}{1+w}} = \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-w^2}} \int_1^{\sqrt{w}} \frac{y}{1+y} dy + \sqrt{\frac{1-w}{1+w}} = \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-w^2}} \left((\sqrt{w}-1) - \ln \frac{1+\sqrt{w}}{2} \right) + \sqrt{\frac{1-w}{1+w}} = \\
&= -\frac{(1-\sqrt{w})^2 + 2 \ln \frac{1+\sqrt{w}}{2}}{\sqrt{1-w^2}} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} H_g(Y). \square
\end{aligned}$$

Таким образом, значения премии на сторонах квадрата, за исключением точек $(0, 0)$ и $(1, 1)$, соответствуют некоторым предельным (в смысле слабой сходимости) распределениям. А именно, стороне квадрата $w = 1$ соответствует одно, сдвинутое показательное распределение (что объясняет постоянство там премии и асимметрии). Стороне $\alpha = 0$ соответствуют различные смеси вырожденных и сдвинутых показательных распределений. Противоположным сторонам $w = 0$ и $\alpha = 1$ соответствуют противоположные распределения (в смысле замены знака случайной величины).

Утверждение 2.3.4 Нижняя грань премии $H_g(Y)$ по квадрату равна 0, а верхняя грань равна $\sqrt{(2 \ln 2 - 1)^2 + 2} \approx 1,466$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что при приближении к точке $(1, 1)$ по направлению $\alpha = 1$, премия стремится к 0. А поскольку значение премии не может быть меньше 0, то делаем вывод, что 0 — это нижняя грань премии на сторонах квадрата и по всему квадрату.

Далее, покажем, что $\sqrt{2}$ — верхняя грань премии по сторонам квадрата. На сторонах квадрата $w = 0$ и $w = 1$ премия постоянна и меньше, чем $\sqrt{2}$. По стороне квадрата $\alpha = 0$ премия убывает по w , т.к. ее производная отрицательна:

$$(H_g(Y))'_w = -\frac{1 - \sqrt{w}}{\sqrt{w(2-w)^3}} < 0.$$

Следовательно, наибольшее значение достигается при $w \rightarrow 0$ и равно $\sqrt{2}$.

По стороне квадрата $\alpha = 1$ премия также убывает по w , т.к. ее производная отрицательна:

$$(H_g(Y))'_w = -\sqrt{\frac{w}{1-w^2}} \left((1-w) + 2\sqrt{w} \ln \frac{1+\sqrt{w}}{2} \right) < 0.$$

Поясним это. Воспользуемся свойством логарифма: $\ln(1+x) \geq \frac{x}{c} \ln(1+c)$ при $0 \leq x \leq c$ для $c = 1$. Тогда $\ln(1+x) \geq x \ln 2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} (1-w) + 2\sqrt{w} \ln(1+\sqrt{w}) &\geq 2\sqrt{w} \ln(1+\sqrt{w}) \geq \\ &\geq 2\sqrt{w}(\sqrt{w} \ln 2) = 2w \ln 2 \geq 2\sqrt{w} \ln 2. \end{aligned}$$

Тем самым, наибольшее значение достигается при $w \rightarrow 0$ и равно $2 \ln 2 - 1 < \sqrt{2}$. Таким образом, верхняя грань премии по сторонам квадрата получилась равной $\sqrt{2}$, значит, верхняя грань по всему квадрату не меньше.

Для нахождения максимума премии рассмотрим производную премии по α при фиксированном w . Обозначим: $u = \ln \frac{1+\sqrt{w}}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} H_g(Y) &= \frac{\sqrt{w}(2-\sqrt{w}) - \alpha(1+2u)}{\sqrt{(\alpha-w)^2 + 2w(1-w)}}, \\ (H_g(Y))'_\alpha &= \frac{2\sqrt{w}(1-\sqrt{w}-u\sqrt{w})\alpha - 2w(uw + \sqrt{w} - 2u - 1)}{((\alpha-w)^2 + 2w(1-w))^{3/2}}. \end{aligned}$$

Условие $(H_g(Y))'_\alpha = 0$ выполнено для

$$\alpha = \frac{uw + \sqrt{w} - 2u - 1}{1 - \sqrt{w} - u\sqrt{w}} \sqrt{w} := \alpha_0(w).$$

Можно проверить, что эта формула действительно дает точку максимума премии по α при фиксированном w .

На рисунке 2.5 представлен график зависимости α_0 от w .

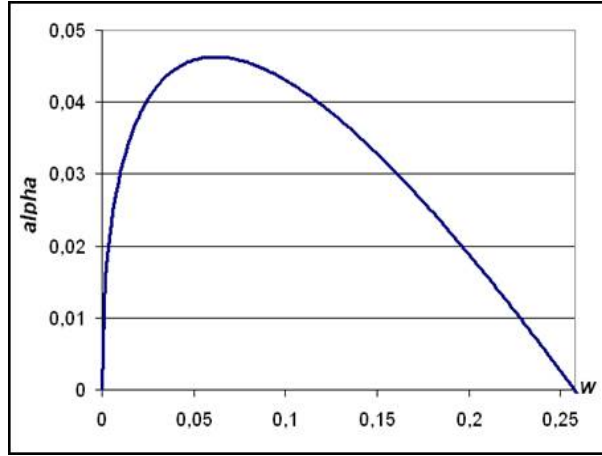


Рис. 2.5: График зависимости оптимального α от w .

Численно получено, что начиная с $w_0 \approx 0,258$ параметр $\alpha_0(w)$ выходит за пределы допустимых значений — становится отрицательным. Поэтому можно сделать вывод, что экстремум премии достигается на $\alpha_0(w)$ для $w < w_0$ и на стороне $\alpha = 0$ для $w > w_0$.

Подставим полученное $\alpha_0(w)$ в формулу для премии:

$$H_g(Y) = \frac{\sqrt{w}(2 - \sqrt{w}) - \frac{uw + \sqrt{w} - 2u - 1}{1 - \sqrt{w} - u\sqrt{w}} \sqrt{w}(1 + 2u)}{\sqrt{\left(\frac{uw + \sqrt{w} - 2u - 1}{1 - \sqrt{w} - u\sqrt{w}} \sqrt{w} - w\right)^2 + 2w(1 - w)}} = \frac{A}{\sqrt{B}}, \quad (2.9)$$

$$A = (1 - 2u^2)w - 4(u + 1)\sqrt{w} + (4u^2 + 4u + 3),$$

$$B = (2u^2 - 1)w^2 + 4(u + 1)w\sqrt{w} - 2(3u^2 + 2u + 1)w - 4(u + 1)\sqrt{w} + (4u^2 + 4u + 3).$$

На рисунке 2.6 представлен график зависимости максимальной премии $H_g(Y)$ от параметра w . При $w < w_0$ она задается формулой (2.9), при $w > w_0$ — (2.5).

Из графика видно, что премия убывает с ростом w , следовательно верхняя грань премии достигается в пределе при $w \rightarrow 0$ и равна:

$$H_g(Y) = \sqrt{4u^2 + 4u + 3} + o(\sqrt{w}) \rightarrow \sqrt{(2 \ln 2 - 1)^2 + 2} \approx 1,466.$$

Аналитически докажем, что производная премии отрицательна в нуле.

$$(H_g(Y))'_w = \frac{2A'B + B'A}{B\sqrt{B}},$$

$$A'\sqrt{w}(1 + \sqrt{w}) = -(2u^2 + 2u - 1)w - (2u^2 + 2u + 3)\sqrt{w} + 2u,$$

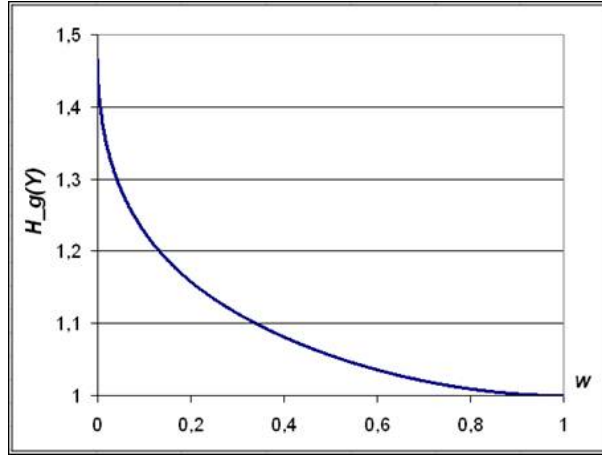


Рис. 2.6: График зависимости премии $H_g(Y)$ от параметра w для оптимального α .

$$B'\sqrt{w}(1 + \sqrt{w}) = 2(2u^2 + 2u + 1)w^2 + 2(2u^2 + 3u + 5)w\sqrt{w} - \\ - 2(3u^2 + 2u + 1)w - 6(u^2 + u + 1)\sqrt{w} + 2u.$$

Тогда при $w \rightarrow 0$:

$$(H_g(Y))'_w B\sqrt{B}\sqrt{w}(1 + \sqrt{w}) = 2u(4u^2 + 4u + 3) + \bar{o}(\sqrt{w}) \rightarrow \\ \rightarrow -2 \ln 2((1 - 2 \ln 2)^2 + 2) < 0. \quad \square$$

2.3.3 Структура линий уровня асимметрии и поведение премии на них.

Из утверждения 2.3.2 мы видим, что при подходе к точке $(0, 0)$ по линии $\alpha = 0$ асимметрия стремится к $+\infty$, а по линии $w = 0$ — к -2 . Значит, точка $(0, 0)$ является точкой разрыва асимметрии, в окрестности которой принимаются любые значения асимметрии, большие -2 , так что из нее выходят все соответствующие линии уровня асимметрии.

Аналогично, при подходе к точке $(1, 1)$ по линии $\alpha = 1$ асимметрия стремится к $-\infty$, а по линии $w = 1$ — к 2 . Значит, точка $(1, 1)$ является точкой разрыва асимметрии, в окрестности которой принимаются любые значения асимметрии, меньшие 2 , так что из нее выходят все соответствующие линии уровня асимметрии.

Найдем линию уровня асимметрии $\text{Skew } Y = 2s$. Путем возведения выражения (2.2) для асимметрии в квадрат получим уравнение в разложении по

степеням w :

$$\begin{aligned}
& (1 + s^2)w^6 - \\
& -6(1 - \alpha)(1 + s^2)w^5 + \\
& +3(5(1 - \alpha)^2 - \alpha^2 s^2 + 4(1 - \alpha)^2 s^2)w^4 - \\
& -2(\alpha^3 + 9(1 - \alpha)^3 + 4(1 - \alpha)^3 s^2 - 6\alpha^2(1 - \alpha)s^2)w^3 + \quad (2.10) \\
& +3(3(1 - \alpha)^4 + 2\alpha^3(1 - \alpha) + \alpha^4 s^2 - 4\alpha^2(1 - \alpha)^2 s^2)w^2 - \\
& -6\alpha^3(1 - \alpha)((1 - \alpha) + \alpha s^2)w + \\
& +\alpha^6(1 - s^2) = 0.
\end{aligned}$$

Данное уравнение описывает как линию уровня асимметрии $2s$, так и $-2s$, вместе (при $s \neq 0$).

В общем случае решить данное уравнение в явном виде нельзя ни относительно α , ни относительно w . Это можно сделать в единственном случае нулевой асимметрии.

Решим уравнение: $\text{Skew } Y = 0$. Достаточно приравнять нулю числитель (2.2):

$$w^3 - 3(1 - \alpha)w^2 + 3(1 - \alpha)^2 w - \alpha^3 = 0.$$

Отсюда выразим w :

$$w = (1 - \alpha) - \sqrt[3]{(1 - \alpha)^3 - \alpha^3} = (1 - \alpha) - \sqrt[3]{1 - 3\alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3}.$$

График зависимости премии $H_g(Y)$ от α в случае $\text{Skew } Y = 0$ представлен на рисунке 2.7.

Исследовав график и проведя численный анализ полученных результатов, можно сделать вывод, что премия для нулевой линии уровня асимметрии возрастает от значения около 0,4 при $\alpha = 0$, достигает значения локального максимума 0,87 при $\alpha \approx 0,35$ ($w \approx 0,37$), убывает до 0,8 при $\alpha = 0,5$, где она имеет излом, и возрастает до 1 при $\alpha = 1$.

Теперь исследуем значения премии на концах линии уровня аналитически.

Утверждение 2.3.5 *Для нулевой линии уровня асимметрии*

$$w = \frac{1}{3}\alpha^3 + \bar{o}(\alpha^3), \quad \alpha \rightarrow 0.$$

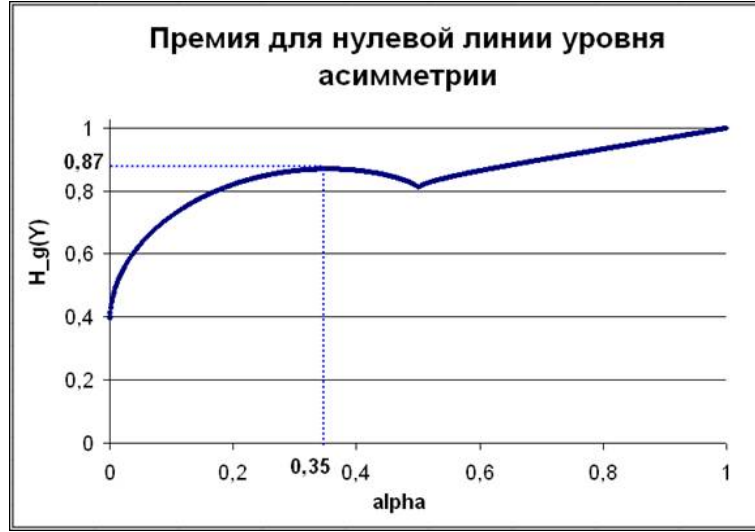


Рис. 2.7: Премия для нулевой линии уровня асимметрии

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся разложением в ряд Тейлора при $\alpha \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} w &= (1 - \alpha) - (1 - 3\alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3)^{1/3} = \\ &= (1 - \alpha) - \left(1 - \alpha - \frac{1}{3}\alpha^3 + \bar{o}(\alpha^3)\right) = \frac{1}{3}\alpha^3 + \bar{o}(\alpha^3). \square \end{aligned}$$

Утверждение 2.3.6 Для нулевой линии уровня асимметрии $H_g(Y) \rightarrow 2 \ln 2 - 1$ при $(\alpha, w) \rightarrow (0, 0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя полученную в утверждении 2.3.5 асимптотику $w(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow 0$, получаем:

$$\begin{aligned} H_g(Y) &= \frac{\sqrt{w}(2 - \sqrt{w}) - \alpha \left(1 + 2 \ln \frac{1 + \sqrt{w}}{2}\right)}{\sqrt{-w^2 + 2(1 - \alpha)w + \alpha^2}} = \\ &= \frac{\alpha \sqrt{\frac{\alpha}{3} + \bar{o}(\alpha)} (2 - \alpha \sqrt{\frac{\alpha}{3} + \bar{o}(\alpha)}) - \alpha \left(1 + 2 \ln \frac{1 + \alpha \sqrt{\frac{\alpha}{3} + \bar{o}(\alpha)}}{2}\right)}{\sqrt{\frac{2\alpha^3}{3} + \alpha^2 + \bar{o}(\alpha^4)}} = \\ &= \frac{\sqrt{\frac{\alpha}{3} + \bar{o}(\alpha)} (2 - \alpha \sqrt{\frac{\alpha}{3} + \bar{o}(\alpha)}) - \left(1 + 2 \ln \frac{1 + \alpha \sqrt{\frac{\alpha}{3} + \bar{o}(\alpha)}}{2}\right)}{\sqrt{\frac{2\alpha}{3} + 1 + \bar{o}(\alpha^2)}} \rightarrow \\ &\quad \rightarrow 2 \ln 2 - 1. \quad \square \end{aligned}$$

Утверждение 2.3.7 Для нулевой линии уровня асимметрии

$$w = 1 - \frac{1}{3}(1 - \alpha)^3 + \bar{o}((1 - \alpha)^3), \quad \alpha \rightarrow 1.$$

Доказательство. Вытекает из утверждений 2.3.1 и 2.3.5. \square

Утверждение 2.3.8 Для нулевой линии уровня асимметрии $H_g(Y) \rightarrow 1$ при $(\alpha, w) \rightarrow (1, 1)$.

Доказательство. Используя полученную в утверждении 2.3.7 асимптотику $w(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow 1$, получаем (сделав замену $\beta = 1 - \alpha$):

$$H_g(Y) = \frac{\sqrt{w}(2 - \sqrt{w}) - \alpha \left(1 + 2 \ln \frac{1 + \sqrt{w}}{2}\right)}{\sqrt{-w^2 + 2(1 - \alpha)w + \alpha^2}} = \frac{C}{D},$$

$$C = \sqrt{1 - \frac{1}{3}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3)} \left(2 - \sqrt{1 - \frac{1}{3}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3)}\right) - (1 - \beta) \left(1 + 2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{3}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3)}}{2}\right),$$

$$D = \sqrt{-\left(1 - \frac{1}{3}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3)\right)^2 + 2\beta \left(1 - \frac{1}{3}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3)\right) + (1 - \beta)^2}.$$

$$\left(1 - \frac{1}{3}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3)\right)^{1/2} = 1 - \frac{1 - 3}{6}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3), \quad \beta \rightarrow 0,$$

$$\ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{3}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3)}}{2} = \ln \left(1 - \frac{1}{12}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3)\right) = \frac{1}{12}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3), \quad \beta \rightarrow 0.$$

$$H_g(Y) = \frac{2 \left(1 - \frac{1}{6}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3)\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3)\right) - (1 - \beta) \left(1 + \frac{1}{6}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3)\right)}{\sqrt{-1 + \frac{2}{3}(1)\beta^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \beta^6 + 2\beta - \frac{2}{3}(1)\beta^4 + 1 - 2\beta + \beta^2}} = \frac{\beta + \bar{o}(\beta)}{\beta + \bar{o}(\beta)} \rightarrow 1. \quad \square$$

Таким образом, можно сделать вывод, что для нулевой линии уровня асимметрии, нижняя грань премии равна $2 \ln 2 - 1$, а верхняя -1 .

Общую структуру линий уровня можно изучать численно. На графике 2.8 представлены области, где асимметрия принимает значения из интервалов $[n; n + 1)$, где $n = \overline{-5; 5}$. Границы между этими областями показывают линии уровня (целочисленных асимметрий).

Численное моделирование плохо отражает поведение линий уровня в окрестностях точек $(0, 0)$ и $(1, 1)$, но из результатов предыдущего раздела

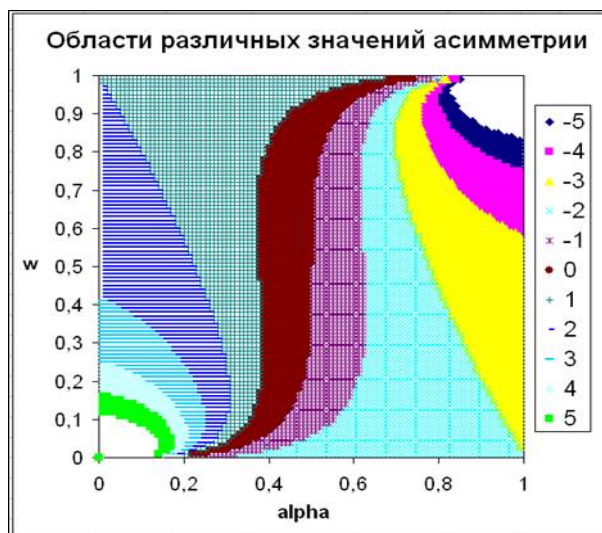


Рис. 2.8: Области различных значений асимметрии

мы знаем, что линии входят в эти точки. Из графика мы можем предположить, что они входят туда по касательной к прямым $w = 0$ и $w = 1$, и далее мы убедимся аналитически, что это действительно так, а также изучим поведение премии на концах линий уровня. Понятно также, что поскольку значения асимметрии, большие 2 и меньше -2 , достигаются на сторонах квадрата $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, то соответствующие линии уровня должны иметь концы на этих сторонах. Кроме того, для асимметрий -2 и 2 мы убедимся, что соответствующие линии входят в точки $(1, 0)$ и $(0, 1)$.

Утверждение 2.3.9 Для линии уровня асимметрии $\text{Skew } Y = 2s$ ($-1 < s < +\infty$) асимптотически при $\alpha \rightarrow 0$:

$$w = \frac{1+s}{3}\alpha^3 + \bar{o}(\alpha^3).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что в силу асимптотической малости мы можем пренебречь частью слагаемых в уравнении линии уровня асимметрии (2.10), а именно, получится следующее уравнение:

$$9w^2 - 6\alpha^3w + (1 - s^2)\alpha^6 + \bar{o}(\alpha^6) + \bar{o}(w\alpha^3) + \bar{o}(w^2) = 0$$

$$(2w - \alpha^3)^2 = s^2\alpha^6 + \bar{o}(\alpha^6) + \bar{o}(w\alpha^3) + \bar{o}(w^2)$$

$$w = \frac{1 \pm s}{3}\alpha^3 + \bar{o}(\alpha^3).$$

Перед s необходимо выбрать знак '+', поскольку линии положительных уровней асимметрии должны проходить ближе к стороне $\alpha = 0$, чем линия нулевого уровня, а значит, выше ее. \square

Утверждение 2.3.10 Для линии уровня асимметрии Skew $Y = 2s$ ($-1 < s < +\infty$) премия $H_g(Y) \rightarrow 2 \ln 2 - 1$ при $(\alpha, w) \rightarrow (0, 0)$.

Доказательство. Используя полученную в утверждении 2.3.9 асимптотику $w(\alpha)$ при $\alpha, w \rightarrow 0$, получаем:

$$\begin{aligned} H_g(Y) &= \frac{\sqrt{w}(2 - \sqrt{w}) - \alpha \left(1 + 2 \ln \frac{1+\sqrt{w}}{2}\right)}{\sqrt{-w^2 + 2(1-\alpha)w + \alpha^2}} = \\ &= \frac{\alpha \sqrt{\frac{s+1}{3}\alpha + \bar{o}(\alpha)} \left(2 - \alpha \sqrt{\frac{s+1}{3}\alpha + \bar{o}(\alpha)}\right) - \alpha \left(1 + 2 \ln \frac{1+\alpha \sqrt{\frac{s+1}{3}\alpha + \bar{o}(\alpha)}}{2}\right)}{\alpha \sqrt{\frac{2(s+1)}{3}\alpha + \bar{o}(\alpha)} + 1} = \\ &= \frac{\sqrt{\frac{s+1}{3}\alpha + \bar{o}(\alpha)} \left(2 - \alpha \sqrt{\frac{s+1}{3}\alpha + \bar{o}(\alpha)}\right) - \left(1 + 2 \ln \frac{1+\alpha \sqrt{\frac{s+1}{3}\alpha + \bar{o}(\alpha)}}{2}\right)}{\sqrt{\frac{2(s+1)}{3}\alpha + \bar{o}(\alpha)} + 1} \rightarrow \\ &\rightarrow 2 \ln 2 - 1. \quad \square \end{aligned}$$

Утверждение 2.3.11 Для линии уровня асимметрии Skew $Y = -2s$ (при $-1 < s < +\infty$) асимптотически при $\alpha \rightarrow 1$:

$$w = 1 - \frac{1-s}{3}(1-\alpha)^3 + \bar{o}((1-\alpha)^3).$$

Доказательство. Вытекает из утверждений 2.3.1 и 2.3.9. \square

Утверждение 2.3.12 Для уровня асимметрии Skew $Y = -2s$ ($-1 < s < +\infty$) премия $H_g(Y) \rightarrow 1$ при $(\alpha, w) \rightarrow (1, 1)$.

Доказательство. Используя полученную в утверждении 2.3.11 асимптотику $w(\alpha)$ при $\alpha, w \rightarrow 1$, получаем (сделав замену $\beta = 1 - \alpha$):

$$\begin{aligned} H_g(Y) &= \frac{\sqrt{w}(2 - \sqrt{w}) - \alpha \left(1 + 2 \ln \frac{1+\sqrt{w}}{2}\right)}{\sqrt{-w^2 + 2(1-\alpha)w + \alpha^2}} = \frac{E}{F}, \\ E &= \sqrt{1 - \frac{1-s}{3}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3)} \left(2 - \sqrt{1 - \frac{1-s}{3}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3)}\right) - \\ &\quad - (1-\beta) \left(1 + 2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1-s}{3}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3)}}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \sqrt{-\left(1 - \frac{1-s}{3}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3)\right)^2 + 2\beta\left(1 - \frac{1-s}{3}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3)\right) + (1-\beta)^2}. \\
\left(1 - \frac{1-s}{3}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3)\right)^{1/2} &= 1 - \frac{1-3}{6}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3), \quad \beta \rightarrow 0 \\
\ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1-s}{3}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3)}}{2} &= \ln\left(1 - \frac{1-s}{12}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3)\right) = \\
&= \frac{1-s}{12}\beta^3 + \bar{o}(\beta^3), \quad \beta \rightarrow 0. \\
H_g(Y) &= \frac{\beta + \bar{o}(\beta)}{\beta + \bar{o}(\beta)} \rightarrow 1. \quad \square
\end{aligned}$$

Утверждение 2.3.13 На линии уровня $\text{Skew } Y = 2$ премия $H_g(Y) \rightarrow 1$ при $(\alpha, w) \rightarrow (0, 1)$.

Доказательство. В предыдущих обозначениях рассмотрим случай $s = 1$, т.е. $\text{Skew } Y = 2$. Разделим уравнение (2.10) на $w(w-1)$:

$$\begin{aligned}
&2w^4 - 2(5 - 6\alpha)w^3 + (24\alpha^2 - 42\alpha + 17)w^2 + \\
&+ 3(4\alpha^3 - 14\alpha^2 + 12\alpha - 3)w + 6\alpha^3(1 - \alpha) = 0.
\end{aligned}$$

Устремим $\alpha \rightarrow 0$, тогда:

$$2w^4 - 10w^3 + 17w^2 - 9w = 0.$$

Данное уравнение имеет корни $w = 0$ и $w = 1$. Таким образом, линия уровня асимметрии 2 имеет концы $(0,0)$ и $(0,1)$.

Найдем асимптотику при $\alpha \rightarrow 0, w \rightarrow 1$. Перепишем уравнение по степеням α :

$$6\alpha^4 - 6(2w+1)\alpha^3 - 6w(4w-7)\alpha^2 - 6w(2w^2-7w+6)\alpha - w(2w^3-10w^2+17w-9) = 0.$$

Заметим, что в силу асимптотической малости мы можем пренебречь частью слагаемых (с более высокими степенями α) в уравнении:

$$-w(2w^3 - 10w^2 + 17w - 9) - 6w(2w^2 - 7w + 6)\alpha + \bar{o}(\alpha) = 0.$$

Сделаем замену $u = 1 - w \rightarrow 0$. Тогда

$$-u(2u^2 + 4u + 3) - 6(2u^2 + 3u + 1)\alpha + \bar{o}(\alpha) = 0.$$

В силу асимптотической малости мы можем пренебречь частью слагаемых (с более высокими степенями u) в уравнении:

$$6\alpha - 3u + \bar{o}(\alpha) + \bar{o}(u) = 0,$$

$$u = 2\alpha + \bar{o}(\alpha),$$

$$w = 1 - 2\alpha + \bar{o}(\alpha),$$

$$\begin{aligned} H_g(Y) &= \frac{\sqrt{w}(2 - \sqrt{w}) - \alpha \left(1 + 2 \ln \frac{1+\sqrt{w}}{2}\right)}{\sqrt{-w^2 + 2(1-\alpha)w + \alpha^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{1 - 2\alpha + \bar{o}(\alpha)} \left(2 - \sqrt{1 - 2\alpha + \bar{o}(\alpha)}\right) - \alpha \left(1 + 2 \ln \frac{1+\sqrt{1-2\alpha+\bar{o}(\alpha)}}{2}\right)}{\sqrt{-(1 - 2\alpha + \bar{o}(\alpha))^2 + 2(1-\alpha)(1 - 2\alpha + \bar{o}(\alpha)) + \alpha^2}} \rightarrow \\ &\rightarrow 1 \text{ при } \alpha \rightarrow 0. \quad \square \end{aligned}$$

Утверждение 2.3.14 На линии уровня $\text{Skew } Y = -2$ премия $H_g(Y) \rightarrow 2 \ln 2 - 1$ при $(\alpha, w) \rightarrow (1, 0)$.

Доказательство. С учетом свойств линии уровня $\text{Skew } Y = 2$, полученных в доказательстве утверждения 2.2.13, и с помощью утверждения 2.2.1, получаем, что линия уровня асимметрии $\text{Skew } Y = -2$ имеет концы $(1,1)$ и $(1,0)$, причем асимптотика в окрестности точки $(1,0)$ имеет вид:

$$1 - w = 1 - 2(1 - \alpha) + \bar{o}(w),$$

$$\alpha = 1 - \frac{w}{2} + \bar{o}(w).$$

Найдем асимптотическое поведение (при $w \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 1$) премии для уровня асимметрии $\text{Skew } Y = -2$:

$$\begin{aligned} H_g(Y) &= \frac{\sqrt{w}(2 - \sqrt{w}) - \alpha \left(1 + 2 \ln \frac{1+\sqrt{w}}{2}\right)}{\sqrt{-w^2 + 2(1-\alpha)w + \alpha^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{w}(2 - \sqrt{w}) - \left(1 - \frac{w}{2} + \bar{o}(w)\right) \left(1 + 2 \ln \frac{1+\sqrt{w}}{2}\right)}{\sqrt{-w^2 + 2 \left(1 - \left(1 - \frac{w}{2} + \bar{o}(w)\right)\right) w + \left(1 - \frac{w}{2} + \bar{o}(w)\right)^2}} \rightarrow 2 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

при $w \rightarrow 0$. \square

Таким образом, делаем вывод, что нижняя грань премии на линии уровня асимметрии $\text{Skew } Y = -2$ не больше $2 \ln 2 - 1$ (соответствующее значение на

границе), а верхняя грань премии на линии уровня асимметрии $Skew Y = 2$ не меньше 1 (соответствующее значение на границе).

Аналогичные рассуждения верны и в случае произвольной линии уровня асимметрии. Было бы хорошо, если бы значения премии на концах были экстремумами, но это не так: численное моделирование показывает, что максимумы могут достигаться не на концах линий, а внутри квадрата.

Численно были получены максимальные значения премии для некоторых положительных значений асимметрии и минимальные значения премии для некоторых отрицательных значений асимметрии. Данные результаты представлены в следующих таблицах:

Skew Y	на границе			максимум		
	$H_g(Y)$	α	w	$H_g(Y)$	α	w
5	1,1760	0	0,1660	1,1952	0,1486	0,0924
4	1,1341	0	0,2495	1,1521	0,1940	0,1009
3	1,0770	0	0,4146	1,0993	0,2443	0,0888
2	1	0	1	1,0368	0,2853	0,0706

Skew Y	минимум (на границе)		
	$H_g(Y)$	α	w
-5	0,1471	1	0,8340
-4	0,1823	1	0,7505
-3	0,2401	1	0,5854
-2	0,3863	1	0

2.3.4 Выводы

Суммируя результаты утверждений 2.3.2, 2.3.3, 2.3.5, 2.3.7, 2.3.9, 2.3.11-2.3.13 и численного анализа (рис. 2.5, 2.6), приходим к следующим выводам.

1. Нижняя грань премии по квадрату равна 0, а верхняя грань равна $\sqrt{(2 \ln 2 - 1)^2 + 2}$.

2. На линиях уровня асимметрии в отрезке от -2 до 2 предел премии на нижнем конце равен $2 \ln 2 - 1$, на верхнем -1 .

3. На линиях уровня асимметрии, большей 2 , предел премии на нижнем конце равен $2 \ln 2 - 1$, а на верхнем — некоторому числу в интервале от 1 до

$\sqrt{2}$, которое можно найти численно по формулам (2.5) для данного значения асимметрии.

4. На линиях уровня асимметрии, меньшей -2 , предел премии на верхнем конце равен 1, а на нижнем — некоторому числу в интервале от 0 до $2 \ln 2 - 1$, которое можно найти численно по формулам (2.6) для данного значения асимметрии.

Ниже, на рисунке 2.9, представлен график зависимости премии на верхнем и нижнем концах линии уровня от асимметрии, иллюстрирующий выводы 2-4.

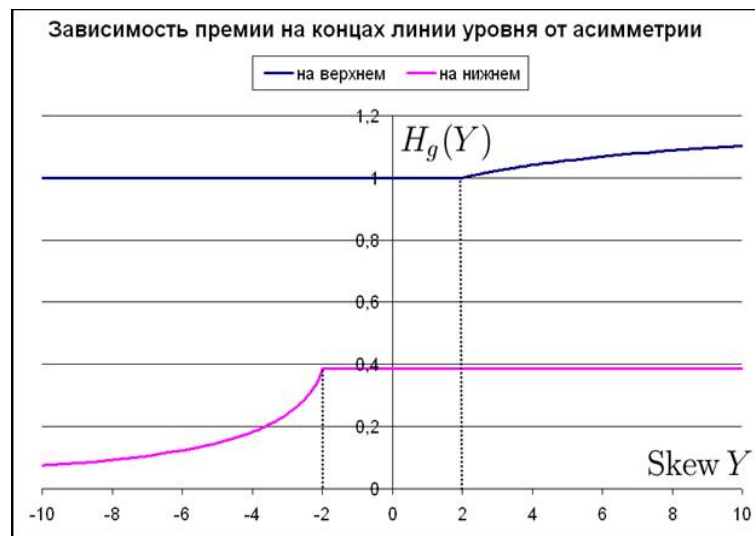


Рис. 2.9: График зависимости премии на верхнем и нижнем концах линии уровня от асимметрии

С учетом этого, можно оценить нижнюю и верхнюю грани премии на любой линии уровня. Понятно, что нижняя грань не больше наименьшего из предельных значений на концах, а верхняя грань — не меньше наибольшего из этих значений.

В общем случае, абсолютная чувствительность премии на подсемействах постоянной асимметрии составляет не менее $2 - 2 \ln 2 \approx 0,614$, что приблизительно равно 42% от абсолютной чувствительности премии по всему семейству распределений, равной $\sqrt{(2 \ln 2 - 1)^2 + 2} \approx 1,466$.

2.4 Границы премии при моментных условиях

Будем рассматривать класс рисков

$$CN = \{X : EX = 0, DX = 1\}.$$

Понятно, что в силу сдвигово-масштабной инвариантности принципа Ванга по границам премий для класса рисков с нулевым средним и единичной дисперсией можно определить границы для любого класса с заданными средним и дисперсией (с помощью соответствующего сдвигово-масштабного преобразования).

Утверждение 2.4.1 *При любой вогнутой функции искажения, имеющей производную в точке 1, нижняя граница премии Ванга по классу CN равна нулю.*

Доказательство. Рассмотрим класс рисков с дискретным распределением:

$$\{X : P(X = a) = p; P(X = b) = 1 - p, EX = 0, DX = 1\} \subseteq CN,$$

где $a < 0, b > 0$. Условия на среднее и дисперсию дают следующие уравнения на параметры:

$$\begin{aligned} EX &= ap + b(1 - p) = 0, \\ DX &= a^2p + b^2(1 - p) = 1, \end{aligned}$$

откуда получаем:

$$a = -\frac{1}{b}, \quad p = \frac{b^2}{b^2 + 1}.$$

Премия Ванга равна

$$\begin{aligned} H_g(X) &= \int_{-\infty}^0 (g(S_X(t)) - 1)dt + \int_0^{+\infty} g(S_X(t))dt = \\ &= g(1 - p)(b - a) + a = \frac{1}{b} \left((b^2 + 1)g\left(\frac{1}{b^2 + 1}\right) - 1 \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим предел премии при $b \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow 0} H_g(X) &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{(b^2 + 1)g\left(\frac{1}{b^2 + 1}\right) - 1}{b} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\left((b^2 + 1)g\left(\frac{1}{b^2 + 1}\right) - 1\right)'}{b'} = \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow 0} bg\left(\frac{1}{b^2 + 1}\right) - 2 \lim_{b \rightarrow 0} \frac{b}{b^2 + 1} g'\left(\frac{1}{b^2 + 1}\right) = 0, \end{aligned}$$

поскольку $g'(1) < 1$ в силу вогнутости функции g . Таким образом, предел премии при $b \rightarrow 0$ есть ноль, а т.к. меньше премия быть не может, то ноль (который получается для двухточечных распределений) — это нижняя грань премии Ванга по всем распределениям. \square

Утверждение 2.4.2 Если $g(x) \geq A\sqrt{x}$, $A > 0$, в некоторой окрестности нуля, то максимум премии Ванга по классу CN равен бесконечности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим риск X с функцией дожития

$$S_X(t) = \begin{cases} 1, & t < e \\ \frac{e^2}{t^2(\ln t)^{3/2}}, & e \leq t. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= \int_0^e dt + \int_e^{+\infty} \frac{e^2}{t^2(\ln t)^{3/2}} dt < \infty, \\ \mathbf{D}X &= \int_e^{+\infty} e^2 \frac{4 \ln t + 3}{2t(\ln t)^{5/2}} dt - (\mathbf{E}X)^2 < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, среднее и дисперсия X конечны, поэтому его можно центрировать и нормировать так, чтобы он принадлежал классу CN . При этом для функции искажения $g(x) \geq A\sqrt{x}$ при $0 \leq x \leq x_0$ премия Ванга

$$H_g(X) \geq \int_0^e dt + \int_e^{S_X^{-1}(x_0)} g(S_X(t)) dt + A \int_{S_X^{-1}(x_0)}^{+\infty} \frac{e}{t(\ln t)^{3/4}} dt = +\infty.$$

При центрировании и нормировании X премия Ванга останется бесконечной. \square

Далее будем рассматривать задачу поиска верхней границы премии Ванга

$$H_g(X) = \int_{-\infty}^0 (g(S_X(t)) - 1) dt + \int_0^{\infty} g(S_X(t)) dt = \int_0^1 F_X^{-1}(u) g'(1-u) du$$

для класса CN , т.е. при выполнении следующих условий:

$$\mathbf{E}X = \int_0^1 F_X^{-1}(u) du = 0, \quad \mathbf{D}X = \int_0^1 (F_X^{-1}(u))^2 du = 1.$$

Это задача вариационного исчисления, относящаяся к классу изопериметрических, и решать мы ее будем методом неопределенных множителей Лагранжа (см., например, [25]). Обозначим $x(u) := F_X^{-1}(u)$. Здесь и далее под $F_X^{-1}(u)$ будем понимать $F_X^{-1}(u) = \inf\{x : F_X(x) \geq u\}$.

Теорема 2.4.1 Пусть функция искажения g возрастающая, вогнутая на $[0,1]$, имеющая непрерывную производную на $(0,1)$. Пусть $G = \int_0^1 (g'(u))^2 du < \infty$. Тогда $\max_{X \in \mathcal{CN}} H_g(X) = \sqrt{G-1}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = \int_0^1 xg'(1-u)du + \lambda_1 \int_0^1 xdu + \lambda_2 \left(\int_0^1 x^2 du - 1 \right).$$

Метод множителей Лагранжа дает следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x} = g'(1-u) + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \int_0^1 xdu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \int_0^1 x^2 du - 1 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем

$$x = -\frac{g'(1-u) + \lambda_1}{2\lambda_2}.$$

Подставим $x(u)$ в последние два уравнения системы:

$$\int_0^1 -\frac{g'(1-u) + \lambda_1}{2\lambda_2} du = -\frac{1 + \lambda_1}{2\lambda_2} = 0,$$

откуда $\lambda_1 = -1$, и

$$\int_0^1 \frac{1}{4\lambda_2^2} (1 - g'(1-u))^2 du - 1 = \frac{1}{4\lambda_2^2} \left(\int_0^1 (g'(u))^2 du \right) - 1 = 0,$$

откуда $\lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{G-1}$. Значение λ_2 выбирается отрицательным, поскольку $x(u)$ должна быть неубывающей функцией. Следовательно,

$$x = \frac{g'(1-u) - 1}{\sqrt{G-1}}.$$

Тогда

$$H_g(X) = \int_0^1 \frac{g'(1-u) - 1}{\sqrt{G-1}} g'(1-u) du = \frac{1}{\sqrt{G-1}} (G-1) = \sqrt{G-1}.$$

Покажем, что это глобальный максимум. Из неравенства Коши-Буняковского:

$$\int_0^1 (x + \mu)g'(1-u)du \leq \left[\left(\int_0^1 (g'(1-u))^2 du \right) \left(\int_0^1 (x + \mu)^2 du \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно,

$$H_g(X) + \mu \leq \sqrt{G}\sqrt{1 + \mu^2},$$

откуда

$$H_g(X) \leq \sqrt{G}\sqrt{1 + \mu^2} - \mu.$$

Обозначим

$$f(\mu) = \sqrt{G}\sqrt{1 + \mu^2} - \mu$$

и найдем минимум по μ .

$$f'(\mu) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G}{1 + \mu^2}}2\mu - 1 = \sqrt{G}\frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} - 1 = 0,$$

откуда

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{G - 1}}.$$

Таким образом,

$$H_g(X) \leq \sqrt{G}\sqrt{1 + \frac{1}{G - 1}} - \frac{1}{G - 1} = \sqrt{G - 1},$$

откуда следует, что методом вариаций был найден глобальный максимум премии. \square

Пример 2.4.1 Рассмотрим случай, когда $g_r(u) = 1 - (1 - u)^r$, $r > 1$. Данный пример для натуральных r рассмотрен в [25].

$$\max_{X \in CN} H_{g_r}(X) = \sqrt{\int_0^1 r^2(1 - u)^{2r-2} du} - 1 = \sqrt{\frac{r^2}{2r - 1}} - 1 = \frac{r - 1}{\sqrt{2r - 1}}.$$

$$\max_{X \in CN} H_{g_r}(X) \sim \sqrt{\frac{r}{2}}, \quad r \rightarrow \infty.$$

Пример 2.4.2 Рассмотрим случай РН-принципа, т.е. когда $g_\rho(u) = u^{1/\rho}$, $\rho > 1$.

$$\max_{X \in CN} H_{g_\rho}(X) = \sqrt{\int_0^1 \frac{1}{\rho^2} u^{2/\rho-2} du} - 1 = \sqrt{\frac{1}{\rho(2 - \rho)}} - 1 = \frac{\rho - 1}{\sqrt{\rho(2 - \rho)}}.$$

В данном примере (из доказательства теоремы 2.4.1) получается, что

$$S_X(t) = \left(\frac{1}{\rho + \sqrt{\frac{\rho}{2 - \rho}}(\rho - 1)t} \right)^{\frac{\rho}{\rho - 1}}, \quad t \geq -\frac{2 - \rho}{\rho}$$

т.е. максимум премии дает центрированное, нормированное распределение Парето с параметром $\alpha = \frac{\rho}{\rho-1}$ (см. параграф 2.2).

Пример 2.4.3 Рассмотрим

$$g_r(u) = \frac{1 - e^{-ru}}{1 - e^{-r}}, \quad r > 0.$$

Тогда максимум премии равен

$$\begin{aligned} \max_{X \in CN} H_{g_r}(X) &= \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{re^{-ru}}{1 - e^{-r}} \right)^2 du} - 1 = \sqrt{\frac{r(1 - e^{-2r})}{2(1 - e^{-r})^2}} - 1 = \\ &= \sqrt{\frac{(r - 2) + 4e^{-r} - (r + 2)e^{-2r}}{2(1 - e^{-r})^2}}. \end{aligned}$$

Имеет место асимптотика:

$$\max_{X \in CN} H_{g_r}(X) \sim \sqrt{\frac{r}{2}}, \quad r \rightarrow \infty.$$

Пример 2.4.4 Рассмотрим

$$g_r(u) = \frac{\ln(1 + ru)}{\ln(1 + r)}, \quad r > 0.$$

Тогда максимум премии равен

$$\begin{aligned} \max_{X \in CN} H_{g_r}(X) &= \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{r}{\ln(1 + r)}(1 + ru) \right)^2 du} - 1 = \\ &= \sqrt{\frac{r^2}{(1 + r) \ln^2(1 + r)}} - 1 = \frac{\sqrt{r^2 - (1 + r) \ln^2(1 + r)}}{\ln(1 + r) \sqrt{1 + r}}. \end{aligned}$$

Имеет место асимптотика:

$$\max_{X \in CN} H_{g_r}(X) \sim \frac{\sqrt{r}}{\ln r}, \quad r \rightarrow \infty.$$

Пример 2.4.5 Рассмотрим

$$g_r(u) = \frac{(1 + ru)^\beta - 1}{(1 + r)^\beta - 1}, \quad 0 < \beta < 1, \quad r > 0.$$

Пусть сначала $\beta = 1/2$. Тогда максимум премии равен

$$\max_{X \in CN} H_{g_r}(X) = \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{r}{2(\sqrt{1 + r} - 1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + ru}} \right)^2 du} - 1 =$$

$$= \frac{\sqrt{r \ln(r+1) - 4(\sqrt{r+1} - 1)}}{2(\sqrt{r+1} - 1)}.$$

Имеет место асимптотика:

$$\max_{X \in CN} H_{g_r}(X) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\ln r}, \quad r \rightarrow \infty.$$

Пусть теперь $\beta \neq 1/2$. Тогда максимум премии равен

$$\begin{aligned} \max_{X \in CN} H_{g_r}(X) &= \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{\beta r}{(1+r)^\beta - 1} (1+ru)^{\beta-1} \right)^2 du - 1} = \\ &= \sqrt{\frac{\beta^2 r}{((1+r)^\beta - 1)^2} \frac{(1+r)^{2\beta-1} - 1}{2\beta - 1} - 1}. \end{aligned}$$

Пусть $\beta > 1/2$. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{X \in CN} H_{g_r}(X) = \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\beta^2 \frac{1}{r+1} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^{2\beta-1}} \right)}{\left(1 - 2 \frac{1}{(1+r)^\beta} + \frac{1}{(1+r)^{2\beta}} \right) (2\beta - 1)} - 1} = \frac{\beta}{\sqrt{2\beta - 1}}.$$

Пусть $\beta < 1/2$. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{X \in CN} H_{g_r}(X) = \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\beta^2 ((1+r)^{1-2\beta} - 1)}{\left(\left(\frac{1}{r} + 1 \right)^{2\beta} - 2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \right)^\beta + \frac{1}{r^{2\beta}} \right) (1 - 2\beta)} - 1} = \infty.$$

Имеет место асимптотика:

$$\max_{X \in CN} H_{g_r}(X) \sim \frac{\beta}{\sqrt{1 - 2\beta}} r^{\frac{1}{2} - \beta}, \quad r \rightarrow \infty.$$

Пример 2.4.6 Рассмотрим

$$g_r(u) = \frac{\sin ru}{\sin r}, \quad 0 < r \leq \frac{\pi}{2}.$$

Тогда максимум премии равен

$$\begin{aligned} \max_{X \in CN} H_{g_r}(X) &= \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{r}{\sin r} \cos(ru) \right)^2 du - 1} = \\ &= \sqrt{\frac{r}{\sin^2 r} \cdot \frac{\sin 2r + 2r}{4} - 1}. \end{aligned}$$

При $r = \pi/2$ получаем:

$$\max_{X \in CN} H_{g_r}(X) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Утверждение 2.4.3 *Если $G = +\infty$, то верхняя граница премии Ванга по классу CN равна бесконечности.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{u_n\}$ такую, что $0 < u_n < 1$, $u_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Построим функции

$$g_n(u) = \begin{cases} u \frac{g(u_n)}{u_n}, & u \leq u_n, \\ g(u), & u > u_n. \end{cases}$$

Тогда

$$G_n = \frac{g^2(u_n)}{u_n} + \int_{u_n}^{+\infty} (g'(u))^2 du \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

По теореме 2.4.1 для каждого g_n найдется такое $X_n \in CN$, что $H_{g_n}(X_n) = \sqrt{G_n - 1}$. С другой стороны, $H_g(X_n) \geq H_{g_n}(X_n)$ в силу вогнутости функции g . Получаем, что $H_g(X_n)$ стремится к бесконечности, а отсюда уже следует, что верхняя граница премии Ванга по классу CN равна бесконечности (т.е. можно найти такую последовательность, по которой предел бесконечен). \square

Глава 3

Предельные теоремы и оценки

3.1 Теоремы о непрерывности и оценки разности

Введем следующую метрику, определенную на множестве функций искажения (таких, что указанное выражение конечно):

$$\rho_q(g_1, g_2) = \sup_{0 < t < 1} \left| \frac{g_1(t) - g_2(t)}{q(t)} \right|,$$

где $q(t) \geq 0$, $q(0) = q(1) = 0$.

Обозначим $I_q(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(S_X(t)) dt$.

Рассмотрим также следующую метрику, определенную на множестве случайных величин и называемую средней метрикой:

$$\zeta_1(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} |F_1(t) - F_2(t)| dt,$$

где F_i — функция распределения с.в. X_i .

Лемма 3.1.1 *Если $\rho_q(g_1, g_2) < \infty$ и $I_q(X) < \infty$, то верно следующее неравенство:*

$$|H_{g_1}(X) - H_{g_2}(X)| \leq \rho_q(g_1, g_2) I_q(X).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} |H_{g_1}(X) - H_{g_2}(X)| &\leq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (g_1(S_X(t)) - g_2(S_X(t))) dt \right| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g_1(S_X(t)) - g_2(S_X(t))| dt \leq \rho_q(g_1, g_2) \int_{-\infty}^{+\infty} q(S_X(t)) dt = \\ &= \rho_q(g_1, g_2) I_q(X). \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 3.1.1 Рассмотрим класс функций $g_r(x)$, непрерывных в точке r_0 в метрике ρ_q , т.е. $\rho_q(g_r, g_{r_0}) \rightarrow 0$, $r \rightarrow r_0$. Пусть $I_q(X) < \infty$. Тогда $H_{g_r}(X) \rightarrow H_{g_{r_0}}(X)$ при $r \rightarrow r_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 3.1.1 имеем:

$$|H_{g_r}(X) - H_{g_{r_0}}(X)| \leq \rho_q(g_r, g_{r_0})I_q(X) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow r_0. \quad \square$$

Лемма 3.1.2 Если для всех $X \in R$ верно $|H_{g_1}(X) - H_{g_2}(X)| \leq \varepsilon$, то $|\eta_1 - \eta_2| \leq 2\varepsilon$, где $\eta_i = \eta(R, H_{g_i})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из того, что $|H_{g_1}(X) - H_{g_2}(X)| \leq \varepsilon$, следует, с одной стороны, что

$$H_{g_1}(X) \leq H_{g_2}(X) + \varepsilon \leq \sup_X H_{g_2}(X) + \varepsilon.$$

А поскольку это верно для всех $X \in R$, то можно перейти к супремуму:

$$\sup_X H_{g_1}(X) \leq \sup_X H_{g_2}(X) + \varepsilon.$$

С другой стороны,

$$H_{g_1}(X) \geq H_{g_2}(X) - \varepsilon \geq \inf_X H_{g_2}(X) - \varepsilon.$$

А поскольку это верно для всех $X \in R$, то можно перейти к инфимуму:

$$\inf_X H_{g_1}(X) \geq \inf_X H_{g_2}(X) - \varepsilon.$$

Следовательно, $\eta_1 \leq \eta_2 + 2\varepsilon$. А в силу симметрии η_1 и η_2 верно и обратное, т.е. $\eta_2 \leq \eta_1 + 2\varepsilon$. Таким образом, получаем, что $|\eta_1 - \eta_2| \leq 2\varepsilon$. \square

Теорема 3.1.2 Рассмотрим семейство рисков R такое, что $\forall X \in R$ верно $I_q(X) \leq C$ и класс функций $g_r(x)$, непрерывных по r в точке r_0 в метрике ρ_q . Тогда чувствительность $\eta_r = \eta(R, H_{g_r})$ непрерывна в точке r_0 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 3.1.1 для всех $X \in R$ имеем:

$$|H_{g_r}(X) - H_{g_{r_0}}(X)| \leq C\rho_q(g_r, g_{r_0}) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow r_0.$$

Согласно лемме 3.1.2 получаем, что $|\eta_r - \eta_{r_0}| \rightarrow 0$ при $r \rightarrow r_0$. Следовательно, чувствительность непрерывна по r в точке r_0 . \square

Следствие 3.1.1 Если в условиях теоремы 3.1.2 функции $g_r(x)$ непрерывны по r на некотором отрезке K в метрике ρ_q , то η_r имеет максимум на отрезке K .

Утверждение 3.1.1 Пусть $q(t) = t(1-t)$. Тогда при условии существования конечного первого момента у случайной величины верно неравенство: $I_q(X) \leq \mathbf{E}|X| < \infty$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} I_q(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} q(S_X(t))dt = \int_{-\infty}^0 S_X(t)(1-S_X(t))dt + \int_0^{+\infty} S_X(t)(1-S_X(t))dt \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^0 F_X(t)dt + \int_0^{+\infty} S_X(t)dt = \mathbf{E}|X|. \end{aligned}$$

Далее, для $q(t) = t(1-t)$ исследуем на непрерывность в метрике ρ_q некоторые классы функций $g_r(x)$, имеющих конечную производную в нуле, а именно, будем проверять условие $\rho_q(g_r, g_{r_0}) \rightarrow 0, r \rightarrow r_0$. \square

Пример 3.1.1 Покажем, что класс функций $g_r(t) = 1 - (1-t)^r$ обладает свойством непрерывности в метрике ρ_q при $r > 1$. Для $r_1 < r_2$:

$$\begin{aligned} \rho_q(g_{r_1}, g_{r_2}) &= \sup_{0 < t < 1} \left| \frac{(1-t)^{r_1} - (1-t)^{r_2}}{t(1-t)} \right| = \\ &= \sup_{0 < t < 1} \left| \frac{(1-t)^{r_1-1}(1-(1-t)^{r_2-r_1})}{t} \right| \leq \\ &\leq \sup_{0 < t < 1} \left| \frac{(1-t)^{r_1-1}(r_2-r_1)\ln(1-t)}{t} \right| = \\ &= (r_2-r_1) \sup_{0 < t < 1} \left| \frac{(1-t)^{r_1-1}\ln(1-t)}{t} \right|. \end{aligned}$$

Функция под знаком супремума конечна, если t отстоит от 0 и 1. Соответственно, необходимо рассмотреть пределы при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow 1$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{(1-t)^{r_1-1}\ln(1-t)}{t} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{(1-t)^{r_1-1}t}{t} \right| = 1.$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left| \frac{(1-t)^{r_1-1}\ln(1-t)}{t} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{t^{r_1-1}\ln t}{1-t} \right| = 0.$$

Следовательно, функция под знаком супремума конечна для всех $0 < t < 1$. И значит, $\rho_q(g_r, g_{r_0}) \rightarrow 0, r \rightarrow r_0$ для $r_0 > 1$.

Пример 3.1.2 Покажем, что класс функций

$$g_r(t) = \begin{cases} t/r, & 0 \leq t \leq r \\ 1, & r < t \leq 1, \end{cases}$$

обладает свойством непрерывности в метрике ρ_q при $r > 0$. Для $r_1 < r_2$

$$\begin{aligned} \rho_q(g_{r_1}, g_{r_2}) &= \sup_{0 < t < 1} \left| \frac{g_{r_1}(t) - g_{r_2}(t)}{t(1-t)} \right| = \\ &= \max \left\{ \sup_{0 < t \leq r_1 < r_2} \left| \frac{t/r_1 - t/r_2}{t(1-t)} \right|, \sup_{r_1 < t \leq r_2} \left| \frac{1 - t/r_2}{t(1-t)} \right| \right\} = \\ &= \max \left\{ \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2 (1 - r_1)}, \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2 (1 - r_2)} \right\} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2 (1 - r_2)}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $r_0 > 0$ верно $\rho_q(g_r, g_{r_0}) \rightarrow 0, r \rightarrow r_0$.

Лемма 3.1.3 *Предположим, что функция f имеет 2 непрерывные ограниченные производные на $[0, c]$ и $f(0) = 0$. Тогда для $0 < a < b < c, 0 < t < 1$ дробь*

$$\frac{f(b)f(at) - f(a)f(bt)}{(b-a)t(1-t)}$$

ограничена.

Доказательство. Обозначим

$$F(t) = f(b)f(at) - f(a)f(bt).$$

Тогда $F'(t) = f(b)af'(at) - f(a)bf'(bt)$. По теореме Лагранжа

$$\begin{aligned} \frac{F(t)}{t} &= \frac{F(t) - F(0)}{t - 0} = F'(\xi) = f(b)af'(a\xi) - f(a)bf'(b\xi) = \\ &= [f(b)af'(a\xi) - f(a)af'(a\xi)] - [f(a)af'(a\xi) - f(a)bf'(b\xi)], \end{aligned}$$

где $0 < \xi < t < 1$. Тогда

$$\frac{F(t)}{t(b-a)} = af'(a\xi) \left[\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \right] + f(a) \left[\frac{af'(a\xi) - bf'(b\xi)}{b-a} \right].$$

Заметим, что по теореме Лагранжа

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi_1), \quad a < \xi_1 < b,$$

$$\frac{af'(a\xi) - bf'(b\xi)}{b-a} = \frac{a\xi f'(a\xi) - b\xi f'(b\xi)}{b\xi - a\xi} = -(xf'(x))'|_{x=\xi_2}, \quad 0 < \xi_2 < c.$$

Поэтому

$$\left| \frac{f(b)f(at) - f(a)f(bt)}{(b-a)t(1-t)} \right| \leq \frac{M_1}{1-t}, \quad M_1 = M_1(f, c).$$

Аналогично получаем, что

$$\left| \frac{f(b)f(at) - f(a)f(bt)}{(b-a)t(1-t)} \right| \leq \frac{M_2}{t}, \quad M_2 = M_2(f, c).$$

Следовательно,

$$\left| \frac{f(b)f(at) - f(a)f(bt)}{(b-a)t(1-t)} \right| \leq \min \left(\frac{M_1}{1-t}, \frac{M_2}{t} \right) \leq M(f, c). \quad \square$$

Пример 3.1.3 Покажем, что класс функций $g_r(t) = \frac{f(rt)}{f(r)}$, где f имеет 2 непрерывные ограниченные производные на некотором отрезке $[0, \tilde{r}]$ и $f(0) = 0$, обладает свойством непрерывности в метрике ρ_q на промежутке $(0, \tilde{r}]$. Для $r_1 < r_2$:

$$\begin{aligned} \rho_q(g_{r_1}, g_{r_2}) &= \sup_{0 < t < 1} \left| \frac{\frac{f(r_1 t)}{f(r_1)} - \frac{f(r_2 t)}{f(r_2)}}{t(1-t)} \right| = \\ &= \frac{1}{f(r_1)f(r_2)} \sup_{0 < t < 1} \left| \frac{f(r_2)f(r_1 t) - f(r_1)f(r_2 t)}{t(1-t)} \right|. \end{aligned}$$

Обозначив $a = r_1$, $b = r_2$, $c = \tilde{r}$, согласно лемме 3.1.3 получим

$$\left| \frac{f(r_2)f(r_1 t) - f(r_1)f(r_2 t)}{t(1-t)} \right| \leq M(r_2 - r_1).$$

Следовательно, $\rho_q(g_r, g_{r_0}) \rightarrow 0$, $r \rightarrow r_0$ для $r_0 \in (0, \tilde{r}]$.

Лемма 3.1.4 $I_q(X)$ обладает свойством однородности, а именно $I_q(cX) = cI_q(X)$, $c > 0$.

Доказательство. Поскольку $S_{cX}(t) = S_X(t/c)$, то

$$I_q(cX) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(S_{cX}(t)) dt = c \int_{-\infty}^{+\infty} q \left(S_X \left(\frac{t}{c} \right) \right) d \left(\frac{t}{c} \right) = cI_q(X). \quad \square$$

Утверждение 3.1.2 Пусть $q(t) = t^\gamma(1-t)$, $0 < \gamma < 1$. Тогда при условии существования конечного $\mathbf{E}|X|^r$, где $r > 1/\gamma$, верно неравенство $I_q(X) \leq (\mathbf{E}|X|^r)^{1/r} \frac{2r\gamma-1}{r\gamma-1} < \infty$.

Доказательство.

$$I_q(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(S_X(t)) dt = \int_{-\infty}^0 S_X^\gamma(t)(1-S_X(t)) dt + \int_0^{+\infty} S_X^\gamma(t)(1-S_X(t)) dt \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^0 F_X(t)dt + \int_0^{+\infty} S_X^\gamma(t)dt.$$

Согласно неравенству Чебышева

$$P(|X| \geq u) \leq \frac{\mathbf{E}|X|^r}{u^r}, \quad r > 1.$$

Выберем X такое, что $\mathbf{E}|X|^r = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} S_X^\gamma(t)dt &= \int_0^1 S_X^\gamma(t)dt + \int_1^{+\infty} S_X^\gamma(t)dt \leq \\ &\leq 1 + \int_1^{+\infty} \left(\frac{\mathbf{E}|X|^r}{t^r}\right)^\gamma dt = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{r\gamma}} = 1 + \frac{1}{r\gamma - 1}. \\ \int_{-\infty}^0 F_X(t)dt &\leq \mathbf{E}|X| \leq (\mathbf{E}|X|^r)^{1/r} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_q(X) \leq 1 + 1 + \frac{1}{r\gamma - 1} = \frac{2r\gamma - 1}{r\gamma - 1}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\mathbf{E}|X|^r \neq 1$. Введем $Y = \frac{X}{(\mathbf{E}|X|^r)^{1/r}}$. Тогда $\mathbf{E}|Y|^r = 1$ и $I_q(Y) \leq \frac{2r\gamma - 1}{r\gamma - 1}$. С другой стороны, согласно свойству однородности I_q (лемма 3.1.4): $I_q(Y) = \frac{I_q(X)}{(\mathbf{E}|X|^r)^{1/r}}$. Откуда

$$I_q(X) \leq (\mathbf{E}|X|^r)^{1/r} \frac{2r\gamma - 1}{r\gamma - 1}. \quad \square$$

Пример 3.1.4 Покажем, что для $q(t) = t^\gamma(1-t)$ класс функций $g_r(t) = t^r$, $0 < r < 1$ обладает свойством непрерывности в метрике ρ_q при $\gamma < r$. Для $r_1 < r_2$

$$\begin{aligned} \rho_q(g_{r_1}, g_{r_2}) &= \sup_{0 < t < 1} \left| \frac{t^{r_1} - t^{r_2}}{t^\gamma(1-t)} \right| = \sup_{0 < t < 1} \left| \frac{t^{r_1-\gamma}(1-t^{r_2-r_1})}{1-t} \right| \leq \\ &\leq \sup_{0 < t < 1} \left| \frac{t^{r_1-\gamma}(r_2 - r_1) \ln t}{1-t} \right| = |r_2 - r_1| \sup_{0 < t < 1} \left| \frac{t^{r_1-\gamma} \ln t}{1-t} \right| = \\ &= |r_2 - r_1| \sup_{0 < t < 1} \left| \frac{(1-t)^{r_1-\gamma} \ln(1-t)}{t} \right|. \end{aligned}$$

Функция под знаком супремума конечна, если t отстоит от 0 и 1. Соответственно, необходимо рассмотреть пределы при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow 1$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{\ln(1-t)}{t} \right| = 1.$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} |(1-t)^{r_1-\gamma} \ln(1-t)| = \lim_{t \rightarrow 0} |t^{r_1-\gamma} \ln t| = 0.$$

Следовательно, функция под знаком супремума конечна для всех $0 < t < 1$. И значит, $\rho_q(g_r, g_{r_0}) \rightarrow 0$, $r \rightarrow r_0$ для $\gamma < r_0 < 1$.

Лемма 3.1.5 *Если функция искажения g вогнута и $g'(0) < \infty$, то*

$$|H_g(X_1) - H_g(X_2)| \leq g'(0)\zeta_1(X_1, X_2).$$

Доказательство. Заметим, что для вогнутой неотрицательной функции с $g(0) = 0$ верно: $|g(x) - g(y)| \leq g(|x - y|)$ и $g(x) \leq g'(0)x$. Тогда

$$\begin{aligned} |H_g(X_1) - H_g(X_2)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(S_{X_1}(t)) - g(S_{X_2}(t))| dt \leq \\ &\leq g'(0) \int_{-\infty}^{+\infty} |S_{X_1}(t) - S_{X_2}(t)| dt = g'(0)\zeta_1(X_1, X_2). \quad \square \end{aligned}$$

3.2 Предельные теоремы для сумм

В теории вероятностей широко изучается вопрос о сходимости распределения центрированных и нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин к стандартному нормальному распределению. Эта сходимость описывается центральной предельной теоремой и ее различными уточнениями. Она имеет большое практическое значение, в том числе, в страховании ([4]). Поэтому представляет интерес сходимость премий Ванга от центрированных и нормированных сумм.

Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — н.о.р.с.в.: $\mathbf{E}\xi_1 = \mu$, $\mathbf{D}\xi_1 = \sigma^2$. Обозначим

$$X_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}. \quad (3.1)$$

Тогда $X_n \xrightarrow{d} \tilde{X}$, $n \rightarrow \infty$, где \tilde{X} имеет стандартное нормальное распределение.

Теорема 3.2.1 *Если $\mathbf{E}|\xi_1|^{2+\delta} < \infty$, $0 < \delta \leq 1$, функция искажения g вогнута и $g'(0) < \infty$, то*

$$\left| H_g(X_n) - H_g(\tilde{X}) \right| \leq \frac{K_1}{n^{\delta/2}},$$

где

$$K_1 = \frac{2}{2+\delta} B \left(\frac{1}{2+\delta}, 1 - \frac{1}{2+\delta} \right) \frac{\mathbf{E}|\xi_1 - \mu|^{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}} g'(0) C(\delta),$$

$B(a, b)$ — бета-функция, $C(\delta)$ — абсолютная постоянная ([4, с.72].)

В частности, если существует конечный третий момент, то

$$\left| H_g(X_n) - H_g(\tilde{X}) \right| \leq \frac{K_1^*}{\sqrt{n}},$$

где

$$K_1^* = g'(0) \frac{\beta}{\sigma^3}, \quad \beta = \mathbf{E}|\xi_1 - \mathbf{E}\xi_1|^3.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае конечного третьего момента согласно лемме 3.1.5 получаем:

$$\left| H_g(X_n) - H_g(\tilde{X}) \right| \leq g'(0) \zeta_1(X_n, \tilde{X}).$$

В [9, теорема 4] приводится следующая оценка средней метрики:

$$\zeta_1(X_n, \tilde{X}) \leq \frac{\beta}{\sigma^3 \sqrt{n}},$$

что доказывает вторую часть утверждения.

Если $\mathbf{E}|\xi_1|^{2+\delta} < \infty$, $0 < \delta \leq 1$, то

$$\left| H_g(X_n) - H_g(\tilde{X}) \right| \leq g'(0) \int_{-\infty}^{+\infty} |F_{X_n}(t) - \Phi(t)| dt,$$

где $\Phi(t)$ — функция стандартного нормального распределения.

В [4, с.71-72] дана следующая неравномерная оценка:

$$|F_{X_n}(x) - \Phi(x)| \leq \frac{C(\delta)}{n^{\delta/2}} \cdot \frac{\mathbf{E}|\xi_1 - \mu|^{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}(1 + |x|^{2+\delta})}.$$

Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + |x|^{2+\delta}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^{2+\delta}} = \frac{2}{2 + \delta} B\left(\frac{1}{2 + \delta}, 1 - \frac{1}{2 + \delta}\right).$$

Таким образом,

$$\left| H_g(X_n) - H_g(\tilde{X}) \right| \leq \frac{2}{2 + \delta} B\left(\frac{1}{2 + \delta}, 1 - \frac{1}{2 + \delta}\right) g'(0) \frac{C(\delta)}{n^{\delta/2}} \cdot \frac{\mathbf{E}|\xi_1 - \mu|^{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}}. \square$$

Теорема 3.2.2 Если $\mathbf{E}|\xi_1|^{2+\delta} < \infty$, $0 < \delta \leq 1$, функция искажения g вогнута и $g'(0) = \infty$, но $g(x) \leq Ax^\alpha$, $1/(2 + \delta) < \alpha < 1$, $A > 0$, то

$$\left| H_g(X_n) - H_g(\tilde{X}) \right| \leq \frac{K_2}{n^{\alpha\delta/2}},$$

где

$$K_2 = \frac{2A}{2+\delta} B \left(\frac{1}{2+\delta}, \alpha - \frac{1}{2+\delta} \right) \left(\frac{C^\alpha(\delta) \mathbf{E}|\xi_1 - \mu|^{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}} \right)^\alpha.$$

Доказательство. Заметим, что в силу вогнутости g

$$\begin{aligned} & \left| H_g(X_n) - H_g(\tilde{X}) \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(S_{X_n}(t)) - g(S_{\tilde{X}}(t))| dt \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^{+\infty} g(|S_{X_n}(t) - S_{\tilde{X}}(t)|) dt \leq A \int_{-\infty}^{+\infty} |F_{X_n}(t) - \Phi_X(t)|^\alpha dt \leq \\ & \leq A \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{C(\delta)}{n^{\delta/2}} \cdot \frac{\mathbf{E}|\xi_1 - \mu|^{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}(1+|t|^{2+\delta})} \right)^\alpha dt = \\ & = A \cdot \frac{1}{n^{\alpha\delta/2}} \left(\frac{C^\alpha(\delta) \mathbf{E}|\xi_1 - \mu|^{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}} \right)^\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+|t|^{2+\delta})^\alpha} = \\ & = A \cdot \frac{1}{n^{\alpha\delta/2}} \left(\frac{C^\alpha(\delta) \mathbf{E}|\xi_1 - \mu|^{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}} \right)^\alpha \frac{2}{2+\delta} B \left(\frac{1}{2+\delta}, \alpha - \frac{1}{2+\delta} \right). \quad \square \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$X_\lambda = \frac{\sum_{n=1}^N \xi_n - \lambda\mu}{\sqrt{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)}},$$

где N — с.в., имеющая распределение Пуассона с параметром λ , не зависящая от ξ_n , $n \geq 1$.

Теорема 3.2.3 Если $\mathbf{E}|\xi_1|^{2+\delta} < \infty$, $0 < \delta \leq 1$, функция искажения g вогнута и $g'(0) < \infty$, то

$$\left| H_g(X_\lambda) - H_g(\tilde{X}) \right| \leq \frac{K_3}{\lambda^{\delta/2}},$$

где

$$K_3 = \frac{2}{2+\delta} \cdot \frac{K(\delta) \mathbf{E}|\xi_1|^{2+\delta}}{(\mu^2 + \sigma^2)^{(2+\delta)/2}} B \left(\frac{1}{2+\delta}, 1 - \frac{1}{2+\delta} \right),$$

$K(\delta)$ — абсолютная постоянная [7, табл. 2].

Доказательство. Заметим, что

$$\left| H_g(X_\lambda) - H_g(\tilde{X}) \right| \leq g'(0) \int_{-\infty}^{+\infty} |F_{X_\lambda}(t) - \Phi(t)| dt,$$

где $\Phi(t)$ — функция стандартного нормального распределения.

В [7, теор. 4] дана следующая неравномерная оценка:

$$|F_{X_\lambda}(x) - \Phi(x)| \leq \frac{K(\delta) \mathbf{E}|\xi_1|^{2+\delta}}{\lambda^{\delta/2} (\mu^2 + \sigma^2)^{(2+\delta)/2} (1 + |x|^{2+\delta})}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \left| H_g(X_\lambda) - H_g(\tilde{X}) \right| &\leq g'(0) \frac{K(\delta) \mathbf{E}|\xi_1|^{2+\delta}}{\lambda^{\delta/2} (\mu^2 + \sigma^2)^{(2+\delta)/2}} \cdot 2 \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2+\delta}} = \\ &= \frac{2}{2+\delta} \cdot \frac{K(\delta) \mathbf{E}|\xi_1|^{2+\delta}}{\lambda^{\delta/2} (\mu^2 + \sigma^2)^{(2+\delta)/2}} B\left(\frac{1}{2+\delta}, 1 - \frac{1}{2+\delta}\right). \square \end{aligned}$$

Теорема 3.2.4 Если $\mathbf{E}|\xi_1|^{2+\delta} < \infty$, $0 < \delta \leq 1$, функция искажения g вогнута и $g'(0) = \infty$, но $g(x) \leq Ax^\alpha$, $1/3 < \alpha < 1$, $A > 0$, то

$$\left| H_g(X_\lambda) - H_g(\tilde{X}) \right| \leq \frac{K_4}{\lambda^{\delta\alpha/2}},$$

где

$$K_4 = \frac{2}{2+\delta} \cdot \frac{AK(\delta)^\alpha (\mathbf{E}|\xi_1|^{2+\delta})^\alpha}{(\mu^2 + \sigma^2)^{(2+\delta)\alpha/2}} B\left(\frac{1}{2+\delta}, \alpha - \frac{1}{2+\delta}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что в силу вогнутости g

$$\begin{aligned} \left| H_g(X_\lambda) - H_g(\tilde{X}) \right| &= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(S_{X_\lambda}(t)) - g(S_{\tilde{X}}(t))| dt \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} g(|S_{X_\lambda}(t) - S_{\tilde{X}}(t)|) dt \leq A \int_{-\infty}^{+\infty} |F_{X_\lambda}(t) - \Phi_X(t)|^\alpha dt \leq \\ &\leq A \frac{K(\delta)^\alpha (\mathbf{E}|\xi_1|^{2+\delta})^\alpha}{\lambda^{\delta\alpha/2} (\mu^2 + \sigma^2)^{(2+\delta)\alpha/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+|x|^{2+\delta})^\alpha} = \\ &= \frac{2}{2+\delta} \cdot \frac{AK(\delta)^\alpha (\mathbf{E}|\xi_1|^{2+\delta})^\alpha}{\lambda^{\delta\alpha/2} (\mu^2 + \sigma^2)^{(2+\delta)\alpha/2}} B\left(\frac{1}{2+\delta}, \alpha - \frac{1}{2+\delta}\right). \square \end{aligned}$$

3.3 Статистические оценки

Пусть X_1, \dots, X_n — случайная выборка из распределения F . Если в формулу Ванга подставить вместо точной функции распределения эмпирическую, то получится следующая оценка:

$$H_g[X]_n = \sum_{i=1}^n X_{(i)} \left(g\left(1 - \frac{i-1}{n}\right) - g\left(1 - \frac{i}{n}\right) \right),$$

где $X_{(i)}$ — i -ая порядковая статистика. Это так называемая линейная или L-оценка, которым посвящена обширная литература (см., например, [8], [12], [22], [39], [40], [41], [49], [53]). Исследования в данной области ведутся начиная с работы Юнга [27]. Однако наиболее часто рассматриваются L-оценки, для

которых порядковые статистики умножаются на значения некоторой функции $J : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n J\left(\frac{i}{n+1}\right) X_{(i)}.$$

В случае принципа Ванга, используя приближение приращения функции через производную, естественно положить $J(x) = g'(1-x)$ и рассмотреть соответствующие оценки:

$$H_g[X]_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{(i)} g'\left(1 - \frac{i}{n+1}\right). \quad (3.2)$$

Далее будем предполагать, что оцениваемая премия $H_g(X)$ конечна.

Лемма 3.3.1 ([49, пример 1]). *Пусть X_1, \dots, X_n — случайная выборка из распределения F такого, что $\mathbf{E}|X|^r < \infty$ для некоторого $r > 0$. Пусть для некоторой функции $J : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$*

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n J(t_{ni}) X_{(i)},$$

где $\max_{1 \leq i \leq n} |t_{ni} - i/n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и предположим, что для некоторого $a > 0$

$$a \left[\frac{i}{n} \wedge \left(1 - \frac{i}{n}\right) \right] \leq t_{ni} \leq 1 - a \left[\frac{i}{n} \wedge \left(1 - \frac{i}{n}\right) \right] \quad (3.3)$$

для $1 \leq i \leq n$. Предположим, что

$$|J(t)| \leq M(t(1-t))^{-1+1/r+\delta}, \quad 0 < t < 1$$

для некоторого $\delta > 0$, где J непрерывна за исключением, быть может, конечного числа точек. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \int_0^1 J(u) F^{-1}(u) du \text{ с вероятностью } 1.$$

Теорема 3.3.1 *Пусть X_1, \dots, X_n — случайная выборка из распределения F такого, что $\mathbf{E}|X|^r < \infty$ для некоторого $r > 0$. Рассмотрим эмпирическую оценку премии Ванга:*

$$H_g[X]_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{(i)} g'\left(1 - \frac{i}{n+1}\right),$$

где $X_{(i)}$ — i -ая порядковая статистика. Предположим, что

$$|g'(t)| \leq M(t(1-t))^{-1+1/r+\delta}, \quad 0 < t < 1 \quad (3.4)$$

для некоторого $\delta > 0$, где g' непрерывна за исключением, быть может, конечного числа точек. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_g[X]_n = H_g(X) \text{ с вероятностью } 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем премию Ванга к следующему виду:

$$\begin{aligned} H_g(X) &= \int_{-\infty}^0 (g(S_X(t)) - 1) dt + \int_0^{\infty} g(S_X(t)) dt = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} t dg(S_X(t)) = \int_0^1 F_X^{-1}(u) g'(1-u) du. \end{aligned}$$

Обозначим $J(t) = g'(1-t)$, $t_{ni} = i/(n+1)$. Тогда условие (3.3) выполняется для $a = 1/2$. Очевидно, что $\max_{1 \leq i \leq n} |i/(n+1) - i/n| = 1/(n+1) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, все условия леммы 3.3.1 выполнены, откуда следует требуемое утверждение. \square

Следствие 3.3.1 В условиях теоремы 3.3.1 предположим, что $r > 1$, а вместо условия (3.4), что $|g'(t)| \leq C$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_g[X]_n = H_g(X) \text{ с вероятностью } 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимо получить неравенство:

$$|g'(t)| \leq C \leq M(t(1-t))^{-1+1/r+\delta}.$$

Заметим, что в силу условия $r > 1$ возможно выбрать δ таким, чтобы выполнялось $-1 + 1/r + \delta < 0$. Тогда

$$\min_{0 < t < 1} (t(1-t))^{-1+1/r+\delta} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1+1/r+\delta} > 1.$$

Таким образом, достаточно выбрать $M \geq C$. \square

Приведем несколько примеров сходимости оценок для премий Ванга.

Пример 3.3.1 Пусть $E|X|^r < \infty$, $r > 1$ и РНр с $\rho < r$. Тогда $g'(t) = (1/\rho)t^{-1+1/\rho}$, все условия теоремы 3.3.1 выполнены и, значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho n} \sum_{i=1}^n X_{(i)} \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^{1/\rho-1} = \pi_{\rho}^{\text{РН}}(X) \text{ с вероятностью } 1.$$

Пример 3.3.2 Пусть $E|X|^r < \infty$, $r > 1$, и $g(t) = 1 - (1 - t)^2$. Тогда $g'(t) = 2(1 - t) \leq 2$. Поэтому по следствию 3.3.1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n iX_{(i)} = H_g(X) \text{ с вероятностью } 1.$$

Пример 3.3.3 Пусть $E|X|^2 < \infty$ и $g(t) = \frac{1-e^{-pt}}{1-e^{-p}}$, $p > 0$. Тогда

$$g'(t) = \frac{pe^{-pt}}{1-e^{-p}} \leq \frac{p}{1-e^{-p}},$$

поэтому по следствию 3.3.1:

$$p \frac{e^{-p}}{1-e^{-p}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{(i)} e^{\frac{pi}{n+1}} = H_g(X) \text{ с вероятностью } 1.$$

Пример 3.3.4 Пусть $E|X|^2 < \infty$ и

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} t/\alpha, & 0 \leq t \leq \alpha, \\ 1, & \alpha < t \leq 1; \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Тогда

$$g'_\alpha(t) = \begin{cases} 1/\alpha, & 0 \leq t \leq \alpha \\ 0, & \alpha < t \leq 1, \end{cases}$$

Таким образом, по следствию 3.3.1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha n} \sum_{i=[(n+1)(1-\alpha)]+1}^n X_{(i)} = H_g(X) \text{ с вероятностью } 1.$$

Пример 3.3.5 Пусть $E|X|^r < \infty$, $r > 1$, и $g(t) = t(1 - \ln t)$. Тогда $g'(t) = 1 - \ln t$. Заметим, что условие $r > 1$ позволяет выбрать такое $\delta > 0$, что $|\ln t| \leq t^{-1+1/r+\delta}$. Таким образом, все условия теоремы 3.3.1 выполнены и, значит,

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{(i)} \ln \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) = H_g(X) \text{ с вероятностью } 1.$$

Лемма 3.3.2 ([40, пример 1]). Пусть X_1, \dots, X_n — случайная выборка из распределения F такого, что $E|X|^r < \infty$ для некоторого $r > 0$. Пусть для некоторой функции $J : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n J(t_{ni}) X_{(i)},$$

где $n \max_{1 \leq i \leq n} |t_{ni} - i/n| = \underline{O}(1)$ при $n \rightarrow \infty$ и предположим, что для некоторого $a > 0$ выполнено (3.3) для $1 \leq i \leq n$. Предположим, что J' существует и непрерывна на $(0, 1)$ и выполнено условие:

$$|J'(t)| \leq M(t(1-t))^{-3/2+1/r+\delta}, 0 < t < 1$$

для некоторого $\delta > 0$. Тогда

$$\sqrt{n} \left(T_n - \int_0^1 J(u) F^{-1}(u) du \right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2), n \rightarrow \infty,$$

где

$$\sigma^2 = \int_0^1 \int_0^1 (s \wedge t - st) J(s) J(t) dF^{-1}(s) dF^{-1}(t).$$

Теорема 3.3.2 Пусть X_1, \dots, X_n — случайная выборка из распределения F такого, что $\mathbf{E}|X|^r < \infty$ для некоторого $r > 0$. Рассмотрим эмпирическую оценку премии Ванга:

$$H_g[X]_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{(i)} g' \left(1 - \frac{i}{n+1} \right),$$

где $X_{(i)}$ — i -ая порядковая статистика. Предположим, что g'' существует и непрерывна на $(0, 1)$ и выполнено условие:

$$|g''(t)| \leq M(t(1-t))^{-3/2+1/r+\delta}, 0 < t < 1 \quad (3.5)$$

для некоторого $\delta > 0$. Тогда

$$\sqrt{n} (H_g[X]_n - H_g(X)) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2), n \rightarrow \infty,$$

где

$$\sigma^2 = \int_0^1 \int_0^1 (s \wedge t - st) g'(1-s) g'(1-t) dF^{-1}(s) dF^{-1}(t). \quad (3.6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как уже было отмечено ранее,

$$H_g(X) = \int_0^1 F_X^{-1}(u) g'(1-u) du.$$

Обозначим $J(t) = g'(1-t)$, $t_{ni} = i/(n+1)$. Тогда условие (3.3) выполняется для $a = 1/2$. Очевидно, что $n \max_{1 \leq i \leq n} |i/(n+1) - i/n| = n/(n+1) = \underline{O}(1)$ при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, все условия леммы 3.3.2 выполнены, откуда следует требуемое утверждение. \square

Следствие 3.3.2 В условиях теоремы 3.3.2 предположим, что $r > 1$, а вместо условия (3.5), что $|g''(t)| \leq C$. Тогда

$$\sqrt{n} (H_g[X]_n - H_g(X)) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2), n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Аналогично доказательству следствия 3.3.1.

Пример 3.3.6 Пусть $E|X|^r < \infty$, $r > 2$, и РНр с $\rho < 2r/(r+2)$. Тогда $g''(t) = (1/\rho)(1/\rho - 1)t^{-2+1/\rho}$, все условия теоремы 3.3.2 выполнены и, значит,

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{\rho n} \sum_{i=1}^n X_{(i)} \left(1 - \frac{i}{n+1} \right)^{1/\rho-1} - \pi_\rho^{\text{PH}}(X) \right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2), n \rightarrow \infty,$$

где

$$\sigma^2 = \frac{1}{\rho^2} \int_0^1 \int_0^1 (s \wedge t - st) s^{1/\rho-1} t^{1/\rho-1} dF^{-1}(s) dF^{-1}(t).$$

Замечание 3.3.1 Если распределение имеет моменты сколь угодно большого порядка, получаем условие $\rho < 2$.

Пример 3.3.7 Пусть $E|X| < \infty$ и $g(t) = 1 - (1-t)^3$. Тогда $g'(t) = 3(1-t)^2$, $g''(t) = -6(1-t)$. Поскольку $|g''(t)| \leq 6$, то по следствию 3.3.2:

$$\sqrt{n} \left(\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_{(i)} \left(\frac{i}{n+1} \right)^2 - H_g(X) \right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2), n \rightarrow \infty,$$

где

$$\sigma^2 = 9 \int_0^1 \int_0^1 (s \wedge t - st)(st)^2 dF^{-1}(s) dF^{-1}(t).$$

Пример 3.3.8 Пусть $E|X|^2 < \infty$ и $g(t) = \frac{1-e^{-pt}}{1-e^{-p}}$, $p > 0$. Тогда

$$|g''(t)| = \left| -\frac{p^2 e^{-pt}}{1-e^{-p}} \right| \leq \frac{p^2}{1-e^{-p}}.$$

Поэтому по следствию 3.3.2:

$$\sqrt{n} \left(p \frac{e^{-p}}{1-e^{-p}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{(i)} e^{\frac{pi}{n+1}} - H_g(X) \right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2), n \rightarrow \infty,$$

где

$$\sigma^2 = \left(p \frac{e^{-p}}{1-e^{-p}} \right)^2 \int_0^1 \int_0^1 (s \wedge t - st) e^{p(s+t)} dF^{-1}(s) dF^{-1}(t).$$

Пример 3.3.9 Пусть $E|X|^r < \infty$, $r > 2$, и $g(t) = t(1 - \ln t)$. Тогда $|g''(t)| = 1/t$. Заметим, что условие $r > 2$ позволяет выбрать такое $\delta > 0$, что $1/t \leq t^{-3/2+1/r+\delta}$. Таким образом, все условия теоремы 3.3.2 выполнены и, значит,

$$\sqrt{n} \left(-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{(i)} \ln \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) - H_g(X) \right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2), n \rightarrow \infty,$$

где

$$\sigma^2 = \int_0^1 \int_0^1 (s \wedge t - st) \ln s \ln t dF^{-1}(s) dF^{-1}(t).$$

Далее вычислим σ^2 для некоторых конкретных распределений и функций искажения. Но предварительно докажем утверждение, что если у нас имеется сдвиговое, масштабное или сдвигово-масштабное семейство, то достаточно посчитать σ^2 для одного (стандартного) распределения из этого семейства.

Утверждение 3.3.1 Если $X = aX_0 + b$, то $\sigma^2 = a^2\sigma_0^2$.

Доказательство. $F_X(u) = F_{X_0}(\frac{u-a}{b})$, поэтому $F_X^{-1}(t) = aF_{X_0}^{-1}(t) + b$ и, следовательно, $dF_X^{-1}(t) = adF_{X_0}^{-1}(t)$. Далее, утверждение получается непосредственной подстановкой в (3.6).

Для более простого расчета преобразуем σ^2 к следующему виду:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_0^1 \int_0^1 (s \wedge t - st) g'(1-s) g'(1-t) dF^{-1}(s) dF^{-1}(t) = \\ &= \int_0^1 \int_0^t s(1-t) g'(1-s) g'(1-t) dF^{-1}(s) dF^{-1}(t) + \\ &+ \int_0^1 \int_t^1 (1-s)t g'(1-s) g'(1-t) dF^{-1}(s) dF^{-1}(t) = \\ &= 2 \int_0^1 \int_t^1 (1-s)t g'(1-s) g'(1-t) dF^{-1}(s) dF^{-1}(t). \end{aligned}$$

Пример 3.3.10. Пусть X имеет показательное распределение: $F(t) = 1 - e^{-t}$, $t \geq 0$. Найдем σ^2 для РН-принципа, т.е. $g(t) = t^{1/\rho}$, $\rho \geq 1$:

$$g'(t) = \frac{1}{\rho} t^{-1+1/\rho}, \quad dF^{-1}(t) = \frac{dt}{1-t}.$$

Тогда

$$\int_t^1 (1-s) g'(1-s) dF^{-1}(s) = \frac{1}{\rho} \int_0^{1-t} s^{-1+1/\rho} ds = (1-t)^{1/\rho}.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-t)^{1/\rho} t g'(1-t) dF^{-1}(t) &= \frac{1}{\rho} \int_0^1 t(1-t)^{2/\rho-2} dt = \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{\rho^2}{2(2-\rho)} = \frac{\rho}{2(2-\rho)}. \\
\sigma^2 &= \frac{\rho}{2-\rho}.
\end{aligned}$$

Пример 3.3.11 Пусть X имеет показательное распределение: $F(t) = 1 - e^{-t}$, $t \geq 0$. Найдем σ^2 для принципа Ванга с $g(t) = 1 - (1-t)^2$:

$$\begin{aligned}
g'(t) &= 2(1-t), \quad dF^{-1}(t) = \frac{dt}{1-t}. \\
\int_t^1 (1-s)g'(1-s)dF^{-1}(s) &= \int_t^1 (1-s)2s \frac{ds}{1-s} = 1-t^2. \\
\int_0^1 (1-t^2)tg'(1-t)dF^{-1}(t) &= \int_0^1 (1-t)^2 t 2t \frac{dt}{1-t} = \\
&= 2 \int_0^1 t^2(1+t)dt = \frac{7}{6}. \\
\sigma^2 &= \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

Пример 3.3.12 Пусть X имеет распределение Парето: $F(t) = 1 - t^{-\alpha}$, $t \geq 1$, $\alpha > 0$. Найдем σ^2 для РН-принципа, т.е. $g(t) = t^{1/\rho}$, $\rho \geq 1$.

$$g'(t) = \frac{1}{\rho} t^{-1+1/\rho}, \quad dF^{-1}(t) = \frac{1}{\alpha} (1-t)^{-1-\frac{1}{\alpha}} dt.$$

Для сходимости интегралов необходимо ввести дополнительные условия на параметры: $\rho < 2$ и $\alpha > \frac{2\rho}{2-\rho}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\int_t^1 (1-s)g'(1-s)dF^{-1}(s) &= \int_t^1 (1-s) \frac{1}{\rho} (1-s)^{-1+\frac{1}{\rho}} \frac{1}{\alpha} (1-s)^{-1-\frac{1}{\alpha}} ds = \\
&= \frac{1}{\alpha\rho} \int_t^1 (1-s)^{-1+\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\alpha}} ds = \frac{1}{\alpha-\rho} (1-t)^{\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\alpha}}. \\
\int_0^1 \frac{1}{\alpha-\rho} (1-t)^{\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\alpha}} t g'(1-t) dF^{-1}(t) &= \frac{1}{\alpha\rho(\alpha-\rho)} \int_0^1 t(1-t)^{\frac{2}{\rho}-\frac{2}{\alpha}-2} dt = \\
&= \frac{1}{\alpha\rho(\alpha-\rho)} \int_0^1 (1-t)t^{\frac{2}{\rho}-\frac{2}{\alpha}-2} dt = \frac{\alpha\rho}{2(\alpha-\rho)^2(2(\alpha-\rho)-\alpha\rho)} \\
\sigma^2 &= \frac{\alpha\rho}{(\alpha-\rho)^2(2(\alpha-\rho)-\alpha\rho)}.
\end{aligned}$$

Например, для $\alpha = 3$ получаем

$$\sigma^2 = \frac{3\rho}{(3 - \rho)^2(6 - 5\rho)}.$$

Пример 3.3.13 Пусть X имеет распределение Парето: $F(t) = 1 - t^{-\alpha}$, $t \geq 1$, $\alpha > 0$. Найдем σ^2 для принципа Ванга с $g(t) = 1 - (1 - t)^2$:

$$g'(t) = 2(1 - t), \quad dF^{-1}(t) = \frac{1}{\alpha}(1 - t)^{-1-\frac{1}{\alpha}}dt.$$

Для сходимости интегралов необходимо ввести дополнительное условие на параметр: $\alpha > 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_t^1 (1 - s)g'(1 - s)dF^{-1}(s) &= \int_t^1 (1 - s)2s\frac{1}{\alpha}(1 - s)^{-1-\frac{1}{\alpha}}ds = \\ &= \frac{2}{\alpha} \int_t^1 s(1 - s)^{-\frac{1}{\alpha}}ds = \frac{2}{\alpha} \int_0^{1-t} (1 - s)s^{-\frac{1}{\alpha}}ds = \\ &= \frac{2}{\alpha} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha}}(1 - t)^{1-\frac{1}{\alpha}} - \frac{1}{2 - \frac{1}{\alpha}}(1 - t)^{2-\frac{1}{\alpha}} \right) = \\ &= \frac{2(1 - t)^{1-\frac{1}{\alpha}}(\alpha + (\alpha - 1)t)}{(\alpha - 1)(2\alpha - 1)}. \\ \int_0^1 \frac{2(1 - t)^{1-\frac{1}{\alpha}}(\alpha + (\alpha - 1)t)}{(\alpha - 1)(2\alpha - 1)}tg'(1 - t)dF^{-1}(t) &= \\ = \frac{2}{(\alpha - 1)(2\alpha - 1)} \int_0^1 (1 - t)^{1-\frac{1}{\alpha}}(\alpha + (\alpha - 1)t)t2t\frac{1}{\alpha}(1 - t)^{-1-\frac{1}{\alpha}} &= \\ = \frac{4}{\alpha(\alpha - 1)(2\alpha - 1)} \int_0^1 (1 - t)^2((2\alpha - 1) - (\alpha - 1)t)t^{-\frac{2}{\alpha}}dt &= \\ = \frac{4}{(\alpha - 1)(2\alpha - 1)} \left(\frac{2\alpha - 1}{\alpha - 2} - \frac{5\alpha - 3}{2(\alpha - 1)} + \frac{4\alpha - 3}{3\alpha - 2} - \frac{\alpha - 1}{2(2\alpha - 2)} \right). \\ \sigma^2 = \frac{8}{(\alpha - 1)(2\alpha - 1)} \left(\frac{2\alpha - 1}{\alpha - 2} - \frac{5\alpha - 3}{2(\alpha - 1)} + \frac{4\alpha - 3}{3\alpha - 2} - \frac{\alpha - 1}{2(2\alpha - 1)} \right). \end{aligned}$$

Например, для $\alpha = 3$ получаем

$$\sigma^2 = \frac{432}{175} \approx 2,5.$$

Замечание 3.3.2 Для РН-принципа, в отличие от других рассмотренных семейств премий, всегда существует некоторый диапазон значений параметра ρ , в котором имеет место строгая состоятельность оценки, но мы не можем

гарантировать ее асимптотическую нормальность (см. примеры 3.3.1 и 3.3.6). Даже для распределений с моментами любого порядка мы накладываем условие $\rho < 2$. Так вот, пример 3.3.10 (показательного распределения) указывает на то, что это условие не техническое, а содержательное, поскольку при $\rho \uparrow 2$ получается, что $\sigma^2 \rightarrow \infty$. Можно сделать вывод, что на практике нежелательно использовать РН-премии с $\rho \geq 2$, статистически оцениваемые по формуле (3.2).

Теорема 3.3.3 Пусть X_1, \dots, X_n — случайная выборка из распределения F из некоторого масштабного семейства, такого что $\mathbf{E}|X|^r < \infty$ для некоторого $r > 0$, $X = cX_0$ ($c > 0$) и существуют конечные $H_g(X_0) > 0$ и $\sigma^2(X_0)$. Рассмотрим эмпирическую оценку премии Ванга $H_g[X]_n$ по формуле (3.2). Предположим, что g'' существует и непрерывна на $(0, 1)$ и выполнено условие (3.5). Тогда асимптотический доверительный интервал для премии $H_g(X)$ может быть построен следующим образом:

$$H_g[X]_n - \frac{H_g[X]_n}{H_g(X_0)} \cdot \frac{\sigma(X_0)}{\sqrt{n}} u_\gamma < H_g(X) < H_g[X]_n + \frac{H_g[X]_n}{H_g(X_0)} \cdot \frac{\sigma(X_0)}{\sqrt{n}} u_\gamma,$$

где u_γ определяется из соотношения $\Phi_0(u_\gamma) = \gamma/2$, Φ_0 — функция стандартного нормального распределения.

Доказательство. В силу масштабной инвариантности принципа Ванга $H_g(X) = cH_g(X_0)$, откуда $c = \frac{H_g(X)}{H_g(X_0)}$. Далее,

$$\sigma^2(X) = c^2 \sigma^2(X_0) = \left(\frac{H_g(X)}{H_g(X_0)} \right)^2 \sigma^2(X_0).$$

Согласно теореме 3.3.2,

$$\sqrt{n}(H_g[X]_n - H_g(X)) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(X)), n \rightarrow \infty,$$

откуда и получаем формулу асимптотического доверительного интервала для премии $H_g(X)$. \square

Глава 4

Экономия от совместного страхования

4.1 Определения и постановка задачи

Одним из важных свойств принципа Ванга является его суббаддитивность в случае вогнутости функции искажения. Проще говоря, премия от суммы случайных величин не больше суммы премий от каждой случайной величины. При этом равенство достигается только в случае комонотонности случайных величин, т.е. когда каждая выражается как непрерывная возрастающая функция от другой ([47, теорема 3]). Интересно выяснить, насколько велика разность между правой и левой частями неравенства в остальных случаях. С практической точки зрения, эта величина показывает, сколько может сэкономить клиент, имеющий два риска X и Y , если застрахует их вместе, а не по отдельности (при условии, что страховая компания руководствуется принципом Ванга при назначении премий). Далее везде полагаем функцию искажения вогнутой.

Определение 4.1 Назовем разность:

$$H_g(X) + H_g(Y) - H_g(X + Y)$$

экономией (от совместного страхования рисков по сравнению с отдельным).

Предположим, что распределения X и Y принадлежат некоторым сдвигово-масштабным семействам (не обязательно одинаковым). При вычислении экономии параметры сдвига сократятся. Так что достаточно рассматривать масштабные семейства. Понятно также, что при увеличении X и Y во сколько-то раз во столько же раз увеличится экономия. Чтобы исключить этот эффект, введем относительную экономию, разделив исходную на сумму

страховых надбавок.

Определение 4.2 Назовем величину:

$$\delta_g = \frac{(H_g(X) + H_g(Y)) - H_g(X + Y)}{(H_g(X) - \mathbf{E}X) + (H_g(Y) - \mathbf{E}Y)}$$

относительной экономией (от совместного страхования рисков по сравнению с отдельным).

Эквивалентная формула для относительной экономии имеет вид:

$$\delta_g = 1 - \frac{H_g(X + Y) - \mathbf{E}(X + Y)}{(H_g(X) - \mathbf{E}X) + (H_g(Y) - \mathbf{E}Y)}.$$

Относительная экономия принимает значения от 0 до 1 и не меняется при сдвигово-масштабных преобразованиях вектора (X, Y) , т.е. зависит не от самих параметров масштаба распределений X и Y , а только от соотношения между ними. Поэтому предположим, что $X = \alpha X_0$, $Y = \beta Y_0$, где X_0, Y_0 имеют стандартные распределения (в своих семействах), $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geq 0$. Тогда при α , пробегающем от 0 до 1, и $\beta = 1 - \alpha$, их отношение пробегает все значения от 0 до бесконечности. Таким образом, можем обозначить относительную экономию, принимающую значения от 0 до 1, через $\delta_g(\alpha)$ и исследовать ее зависимость от параметра α , также от 0 до 1:

$$\begin{aligned} \delta_g(\alpha) &= 1 - \frac{H_g(\alpha X_0 + (1 - \alpha)Y_0) - (\alpha \mathbf{E}X_0 + (1 - \alpha)\mathbf{E}Y_0)}{\alpha(H_g(X_0) - \mathbf{E}X_0) + (1 - \alpha)(H_g(Y_0) - \mathbf{E}Y_0)} = \\ &= \frac{(\alpha H_g(X_0) + (1 - \alpha)H_g(Y_0)) - H_g(\alpha X_0 + (1 - \alpha)Y_0)}{\alpha(H_g(X_0) - \mathbf{E}X_0) + (1 - \alpha)(H_g(Y_0) - \mathbf{E}Y_0)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что при α , стремящемся к 0 и к 1, относительная экономия должна стремиться к нулю, а наибольшее значение принимается где-то между ними (оно достигается, если функция непрерывна).

Заметим также, что если распределения X_0 и Y_0 одинаковы, то

$$\begin{aligned} \delta_g(\alpha) &= 1 - \frac{H_g(\alpha X_0 + (1 - \alpha)Y_0) - \mathbf{E}X_0}{H_g(X_0) - \mathbf{E}X_0} = \\ &= \frac{H_g(X_0) - H_g(\alpha X_0 + (1 - \alpha)Y_0)}{H_g(X_0) - \mathbf{E}X_0}. \end{aligned}$$

4.2 Основные свойства экономики

Здесь и далее будем предполагать, что числовые характеристики $\mathbf{E}X_0$, $\mathbf{E}Y_0$, $H_g(X_0)$, $H_g(Y_0)$, $H_g(X_0 - Y_0)$, $H_g(Y_0 - X_0)$ конечны.

Теорема 4.2.1 *Относительная экономия является непрерывной функцией, удовлетворяющей условию Гельдера 1-й степени.*

Доказательство. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2$. Обозначим

$$\gamma_g(\alpha) = (\alpha H_g(X_0) + (1 - \alpha)H_g(Y_0)) - H_g(\alpha X_0 + (1 - \alpha)Y_0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & |\gamma_g(\alpha_1) - \gamma_g(\alpha_2)| = \\ = & |H_g(\alpha_2 X_0 + (1 - \alpha_2)Y_0) - H_g(\alpha_1 X_0 + (1 - \alpha_1)Y_0) + (\alpha_2 - \alpha_1)(H_g(Y_0) - H_g(X_0))|. \end{aligned}$$

Обозначим

$$Z_1 = \alpha_1 X_0 + (1 - \alpha_1)Y_0, \quad Z_2 = \alpha_2 X_0 + (1 - \alpha_2)Y_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & H_g(\alpha_2 X_0 + (1 - \alpha_2)Y_0) - H_g(\alpha_1 X_0 + (1 - \alpha_1)Y_0) = H_g(Z_2) - H_g(Z_1) = \\ = & H_g(Z_1 + (Z_2 - Z_1)) - H_g(Z_1) \leq H_g(Z_1) + H_g(Z_2 - Z_1) - H_g(Z_1) = H_g(Z_2 - Z_1) = \\ & = H_g((\alpha_2 - \alpha_1)(X_0 - Y_0)) = (\alpha_2 - \alpha_1)H_g(X_0 - Y_0). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} & H_g(Z_2) - H_g(Z_1) \geq H_g(Z_1) - H_g(Z_1 - Z_2) - H_g(Z_1) = -H_g(Z_1 - Z_2) = \\ & = -(\alpha_2 - \alpha_1)H_g(Y_0 - X_0). \end{aligned}$$

Обозначим $C = \max(|H_g(X_0 - Y_0)|, |H_g(Y_0 - X_0)|)$. Тогда

$$|H_g(\alpha_2 X_0 + (1 - \alpha_2)Y_0) - H_g(\alpha_1 X_0 + (1 - \alpha_1)Y_0)| \leq C(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Таким образом,

$$|\gamma_g(\alpha_1) - \gamma_g(\alpha_2)| \leq \tilde{C}(\alpha_2 - \alpha_1),$$

где $\tilde{C} = C + |H_g(Y_0) - H_g(X_0)|$. Отсюда следует гельдеровость 1-й степени и непрерывность по α числителя относительной экономики. А поскольку в знаменателе стоит линейная функция, отделенная от нуля (минимумом из

страховых надбавок от X_0 и Y_0 , которые положительны), то и вся дробь будет гельдерова и непрерывна. \square

Следствие 4.2.1 *Если относительная экономия не равна тождественно нулю, то она достигает максимума на интервале $(0,1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение верно, поскольку относительная экономия непрерывна и равна нулю на концах отрезка $[0,1]$. \square

Теорема 4.2.2 *В случае, когда X_0 и Y_0 имеют одинаковое распределение, относительная экономия является вогнутой функцией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\begin{aligned}
& \delta_g(t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2) = \\
&= \frac{H_g(X_0) - H_g((t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2)X_0 + (1-t\alpha_1 - (1-t)\alpha_2)Y_0)}{H_g(X_0) - \mathbf{E}X_0} = \\
&= \frac{H_g(X_0) - H_g(t(\alpha_1 X_0 + (1-\alpha_1)Y_0) + (1-t)(\alpha_2 X_0 + (1-\alpha_2)Y_0))}{H_g(X_0) - \mathbf{E}X_0} \geq \\
&\geq \frac{H_g(X_0) - tH_g(\alpha_1 X_0 + (1-\alpha_1)Y_0) + (1-t)H_g(\alpha_2 X_0 + (1-\alpha_2)Y_0)}{H_g(X_0) - \mathbf{E}X_0} = \\
&= \frac{t(H_g(X_0) - H_g(\alpha_1 X_0 + (1-\alpha_1)Y_0))}{H_g(X_0) - \mathbf{E}X_0} + \\
&+ \frac{(1-t)(H_g(X_0) - H_g(\alpha_2 X_0 + (1-\alpha_2)Y_0))}{H_g(X_0) - \mathbf{E}X_0} = \\
&= t\delta_g(\alpha_1) + (1-t)\delta_g(\alpha_2). \quad \square
\end{aligned}$$

Теорема 4.2.3 (о симметрии). *Если (X_0, Y_0) распределено как (Y_0, X_0) , то $\delta(\alpha) = \delta(1-\alpha)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим в формулу относительной чувствительности пару (Y_0, X_0) вместо пары (X_0, Y_0) .

$$\begin{aligned}
\delta_g(\alpha) &= \frac{(\alpha H_g(Y_0) + (1-\alpha)H_g(X_0)) - H_g(\alpha Y_0 + (1-\alpha)X_0)}{\alpha(H_g(Y_0) - \mathbf{E}Y_0) + (1-\alpha)(H_g(X_0) - \mathbf{E}X_0)} = \\
&= \frac{((1-\alpha)H_g(X_0) + \alpha H_g(Y_0)) - H_g((1-\alpha)X_0 + \alpha Y_0)}{(1-\alpha)(H_g(X_0) - \mathbf{E}X_0) + \alpha(H_g(Y_0) - \mathbf{E}Y_0)} = \delta_g(1-\alpha). \quad \square
\end{aligned}$$

Следствие 4.2.2 *Если (X_0, Y_0) распределено как (Y_0, X_0) , то относительная экономия достигает максимума в точке $1/2$.*

Доказательство. Следует из теорем 4.2.2 и 4.2.3:

$$\delta(1/2) \geq (\delta(\alpha) + \delta(1 - \alpha))/2 = \delta(\alpha), 0 \leq \alpha \leq 1. \quad \square$$

Следствие 4.2.3 Если (X_0, Y_0) распределено как (Y_0, X_0) , то для любого α верно

$$\delta(\alpha) \geq 2\delta\left(\frac{1}{2}\right) \min(\alpha, 1 - \alpha).$$

Доказательство. Следует из теорем 4.2.2 и 4.2.3 и следствия 4.2.2.

Если $\alpha \leq 1/2$, то

$$\delta(\alpha) = \delta\left(2\alpha \cdot \frac{1}{2} + (1 - 2\alpha) \cdot 0\right) \geq 2\alpha \cdot \delta\left(\frac{1}{2}\right) + (1 - 2\alpha) \cdot \delta(0) = 2\alpha\delta\left(\frac{1}{2}\right).$$

Если $\alpha > 1/2$, то

$$\begin{aligned} \delta(1 - \alpha) &= \delta\left(2(1 - \alpha) \cdot \frac{1}{2} + (1 - 2(1 - \alpha)) \cdot 1\right) \geq \\ &\geq 2(1 - \alpha) \cdot \delta\left(\frac{1}{2}\right) + (2\alpha - 1) \cdot \delta(1) = 2(1 - \alpha)\delta\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\delta(\alpha) \geq 2\delta\left(\frac{1}{2}\right) \min(\alpha, 1 - \alpha). \quad \square$$

4.3 Случай независимых рисков

Необходимо отметить, что вычисление относительной экономии в явном виде для большинства случаев либо невозможно, либо затруднительно, поэтому мы ограничимся только примерами равномерного, показательного, нормального распределения рисков, распределений Лапласа и Бернулли, а также устойчивых распределений. В качестве функции искажения будем рассматривать квадратичную функцию $g(t) = 1 - (1 - t)^2$ (в соответствии с принципом Джини).

Пример 4.3.1 Показательное распределение. Рассмотрим независимые случайные величины X и Y , имеющие показательное распределение с параметрами λ_1 и λ_2 , соответственно. Тогда $S_X(t) = e^{-\lambda_1 t}$, $S_Y(t) = e^{-\lambda_2 t}$, $t \geq 0$. Найдем плотность распределения суммы $X + Y$.

$$f_{X+Y}(x) = \int_{+\infty}^{\infty} f_X(t) f_Y(x - t) dt = \int_0^x \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \lambda_2 e^{-\lambda_2(x-t)} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \int_0^x e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} dt = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 x} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \Big|_0^x = \\
&= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 x} (e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} - 1) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x}). \\
S_{X+Y}(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) dt = \\
&= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(-\frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} \Big|_x^{+\infty} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2} \Big|_x^{+\infty} \right) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2} \right).
\end{aligned}$$

Для функции искажения $g(t) = 1 - (1 - t)^2$ оценим премии Ванга:

$$\begin{aligned}
H_g(X) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\lambda_1}, \quad H_g(Y) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\lambda_2}, \\
H_g(X + Y) &= \int_0^{\infty} (2S_{X+Y}(t) - S_{X+Y}(t)^2) dt = \\
&= \int_0^{\infty} 2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} - \frac{1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \right) dt - \\
&\quad - \int_0^{\infty} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \right)^2 \left(\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} - \frac{1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \right)^2 dt = \\
&= 2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2} \right) - \\
&\quad - \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \right)^2 \left(\frac{1}{2\lambda_1^3} + \frac{1}{2\lambda_2^3} - \frac{2}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)} \right) = \\
&= \frac{2(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2} - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \lambda_1 \lambda_2}{2\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)} = \\
&= \frac{3(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - \lambda_1 \lambda_2}{2\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)}.
\end{aligned}$$

Соответственно,

$$\begin{aligned}
&(H_g(X) + H_g(Y)) - H_g(X + Y) = \\
&= \frac{3(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\lambda_1 \lambda_2} - \frac{3(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - \lambda_1 \lambda_2}{2\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)} = \frac{1}{2(\lambda_1 + \lambda_2)}. \\
(H_g(X) - \mathbf{E}X) - (H_g(Y) - \mathbf{E}Y) &= \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1} \right) + \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\lambda_1 \lambda_2}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\delta_g = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}.$$

Теперь рассмотрим независимые случайные величины X_0 и Y_0 , имеющие стандартное показательное распределение, т.е. $S_{X_0}(t) = S_{Y_0}(t) = e^{-t}$, $t \geq 0$. Тогда, обозначив $\lambda_1 = 1/\alpha$, $\lambda_2 = 1/(1-\alpha)$, $X = \alpha X_0$, $Y = (1-\alpha)Y_0$, получим

$$\delta_g(\alpha) = \alpha(1-\alpha).$$

Согласно следствию 4.2.2:

$$\max_{\alpha} \delta_g(\alpha) = \delta_g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Пример 4.3.2 *Равномерное распределение.* Рассмотрим независимые случайные величины X_0 и Y_0 , имеющие стандартное равномерное распределение, т.е. распределение на отрезке $[0,1]$. Тогда

$$f_{X_0}(x) = f_{Y_0}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$S_{X_0}(x) = S_{Y_0}(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 1-x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Обозначим $Z = \alpha X_0 + (1-\alpha)Y_0$.

$$f_{\alpha X_0}(x) = \begin{cases} 1/\alpha, & 0 \leq x \leq \alpha, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$S_{\alpha X_0}(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 1-x/\alpha, & 0 < x \leq \alpha, \\ 0, & x > \alpha. \end{cases}$$

$$f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha X_0}(t) f_{(1-\alpha)Y_0}(x-t) dt.$$

Рассмотрим случай, когда $0 \leq \alpha \leq 1/2$.

1. Если $0 \leq x \leq \alpha$, то

$$f_Z(x) = \int_0^x \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1-\alpha} dt = \frac{x}{\alpha(1-\alpha)}.$$

2. Если $\alpha < x \leq 1 - \alpha$, то

$$f_Z(x) = \int_0^\alpha \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1-\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha}.$$

3. Если $1 - \alpha < x \leq 1$, то

$$f_Z(x) = \int_{x+\alpha-1}^\alpha \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1-\alpha} dt = \frac{1-x}{\alpha(1-\alpha)}.$$

Таким образом,

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{x}{\alpha(1-\alpha)}, & 0 \leq x \leq \alpha, \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < x \leq 1 - \alpha, \\ \frac{1-x}{\alpha(1-\alpha)}, & 1 - \alpha < x \leq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$S_Z(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 1 - \frac{x^2}{2\alpha(1-\alpha)}, & 0 \leq x \leq \alpha, \\ 1 - \frac{2x-\alpha}{2(1-\alpha)}, & \alpha < x \leq 1 - \alpha, \\ \frac{(1-x)^2}{2\alpha(1-\alpha)}, & 1 - \alpha < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Для функции искажения $g(t) = 1 - (1 - t)^2$ оценим премии Ванга:

$$H_g(X_0) = \int_0^1 (1 - x^2) dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad \mathbf{E}X_0 = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} H_g(Z) &= \int_0^\alpha \left(1 - \frac{x^4}{4\alpha^2(1-\alpha)^2} \right) dx + \int_\alpha^{1-\alpha} \left(1 - \left(\frac{\alpha - 2x}{2(1-\alpha)} \right)^2 \right) dx + \\ &+ \int_{1-\alpha}^1 2 \frac{(1-x)^2}{\alpha(1-\alpha)} dx + \int_{1-\alpha}^1 \left(\frac{(1-x)^2}{\alpha(1-\alpha)} \right)^2 dx = \\ &= \frac{40 - 90\alpha + 65\alpha^2 - 16\alpha^3}{60(1-\alpha)^2}. \end{aligned}$$

В случае, когда $1/2 < \alpha \leq 1$ в силу симметрии получаем:

$$S_Z(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 1 - \frac{x^2}{2\alpha(1-\alpha)}, & 0 \leq x \leq 1 - \alpha, \\ \frac{1+\alpha-2x}{2\alpha}, & 1 - \alpha < x \leq \alpha, \\ \frac{(1-x)^2}{2\alpha(1-\alpha)}, & \alpha < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$H_g(Z) = \frac{16\alpha^3 + 17\alpha^2 + 8\alpha - 1}{60\alpha^2},$$

$$H_g(X_0) - \mathbf{E}X_0 = \frac{1}{6}.$$

Тогда

$$\delta_g(\alpha) = \frac{H_g(X_0) - H_g(Z)}{H_g(X_0) - \mathbf{E}X_0} = \begin{cases} \frac{\alpha(16\alpha^2 - 25\alpha + 10)}{10(1-\alpha)^2}, & 0 \leq \alpha \leq 1/2, \\ \frac{1-8\alpha+23\alpha^2-16\alpha^3}{10\alpha^2}, & 1/2 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Согласно следствию 4.2.2:

$$\max_{\alpha} \delta_g(\alpha) = \delta_g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{10}.$$

Заметим, что случай равномерного распределения может рассматриваться в рамках факторизационной модели риска ([4, §5.3]), когда величина риска представляется произведением двух независимых случайных величин: страховой суммы и ее доли (от 0 до 1), которая реально выплачивается. Примером является страхование от несчастных случаев, когда осуществляется страхование на некоторую сумму, выплачиваемую либо полностью — при таком серьезном ущербе здоровью, который считается по условиям договора страхования "максимальным", либо частично — в соответствии с конкретным видом причиненного ущерба здоровью. Степень ущерба здоровью определяется соответствующей экспертной комиссией и не зависит от максимальной суммы, на которую застрахован клиент, т.е. от страховой суммы ([4, с. 230]). В нашем случае мы считаем страховую сумму фиксированной.

Пример 4.3.3 *Показательное и равномерное распределения.* Рассмотрим независимые случайные величины X_0 и Y_0 такие, что X_0 имеет показательное

распределение с параметром 1, а Y_0 равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Тогда

$$f_{X_0}(t) = e^{-t}, t \geq 0; \quad f_{Y_0}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$f_{\alpha X_0}(t) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{t}{\alpha}}, t \geq 0; \quad f_{(1-\alpha)Y_0}(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & 0 \leq t \leq 1-\alpha \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим $\lambda = 1/\alpha$, $A = 1 - \alpha$, $Z = \alpha X_0 + (1 - \alpha)Y_0$. Найдем плотность распределения с.в. Z .

Если $x \leq A$, то

$$f_Z(x) = \int_0^x f_{(1-\alpha)Y_0}(t) f_{\alpha X_0}(x-t) dt = \int_0^x \frac{1}{A} \lambda e^{-\lambda(x-t)} dt = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{A}.$$

Если $x > A$, то

$$f_Z(x) = \int_0^A f_{(1-\alpha)Y_0}(t) f_{\alpha X_0}(x-t) dt = \int_0^A \frac{1}{A} \lambda e^{-\lambda(x-t)} dt = \frac{e^{-\lambda x}}{A} (e^{\lambda A} - 1).$$

Найдем функцию дожития с.в. Z .

Если $x \leq A$, то

$$\begin{aligned} S_Z(x) &= \int_A^{+\infty} \frac{e^{\lambda A} - 1}{A} e^{-\lambda t} dt + \int_x^A \frac{1 - e^{-\lambda t}}{A} dt = \\ &= \frac{e^{\lambda A} - 1}{A} \cdot \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \Big|_A^{+\infty} + \frac{A - x}{A} + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda A} \Big|_x^A = \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda A}}{\lambda A} + \frac{A - x}{A} + \frac{e^{-\lambda A} - e^{-\lambda x}}{\lambda A} = 1 - \frac{(\lambda x - 1) + e^{-\lambda x}}{\lambda A}. \end{aligned}$$

Если $x > A$, то

$$S_Z(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{\lambda A} - 1}{A} e^{-\lambda t} dt = \frac{e^{\lambda A} - 1}{\lambda A} e^{-\lambda x}.$$

Для функции искажения $g(t) = 1 - (1 - t)^2$ оценим премии Ванга.

$$H_g(X_0) = \frac{3}{2},$$

$$H_g(Y_0) = \int_0^1 (1 - t^2) dt = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned}
H_g(Z) &= \int_0^A \left[1 - \left(\frac{(\lambda x - 1) + e^{-\lambda x}}{\lambda A} \right)^2 \right] dx + \\
&+ \int_A^{+\infty} 2 \frac{e^{\lambda A} - 1}{\lambda A} e^{-\lambda x} dx - \int_A^{+\infty} \left(\frac{e^{\lambda A} - 1}{\lambda A} e^{-\lambda x} \right)^2 dx = \\
&= A - \frac{1}{\lambda^2 A^2} \left(\frac{\lambda^2 A^3}{3} - \frac{2\lambda A^2}{2} + A + \frac{2\lambda(1 - e^{-\lambda A} - \lambda A e^{-\lambda A})}{\lambda^2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2(1 - e^{-\lambda A})}{\lambda} + \frac{1 - e^{-2\lambda A}}{2\lambda} \right) + \frac{2(1 - e^{-\lambda A})}{\lambda^2 A} - \frac{1 - 2e^{-\lambda A} + e^{-2\lambda A}}{2\lambda^3 A^2} = \\
&= \frac{2A}{3} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2 A} + \frac{2e^{-\lambda A}}{\lambda^2 A} - \frac{1 - e^{-2\lambda A}}{2\lambda^3 A^2} + \frac{2(1 - e^{-\lambda A})}{\lambda^2 A} + \frac{1 - 2e^{-\lambda A} - e^{-2\lambda A}}{2\lambda^3 A^2} = \\
&= \frac{2A}{3} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2 A} + \frac{e^{-\lambda A} - 1}{\lambda^3 A^2}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\delta_g(\alpha) = \frac{3\alpha \left(1 - 4\alpha + 5\alpha^2 - 2\alpha^2 e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right)}{(1 - \alpha)^2 (1 + 2\alpha)}.$$

Численными расчетами получаем, что максимум достигается при $\alpha \approx 0,2467$ и равен

$$\max_{\alpha} \delta_g(\alpha) = \delta_g(0,2467) \approx 0,27.$$

Пример 4.3.4 *Нормальное распределение.* Рассмотрим независимые случайные величины X_0 и Y_0 , имеющие стандартное нормальное распределение $N(0, 1)$. Тогда с.в. $Z = \alpha X_0 + (1 - \alpha)Y_0$ имеет нормальное распределение $N(0, 1 - 2\alpha + 2\alpha^2)$. Поэтому для любой функции искажения

$$\begin{aligned}
\delta_g(\alpha) &= 1 - \frac{H_g(Z)}{\alpha H_g(X_0) + (1 - \alpha)H_g(Y_0)} = 1 - \frac{\sqrt{1 - 2\alpha + 2\alpha^2} H_g(X_0)}{H_g(X_0)} = \\
&= 1 - \sqrt{1 - 2\alpha + 2\alpha^2}.
\end{aligned}$$

Согласно следствию 4.2.2:

$$\max_{\alpha} \delta_g(\alpha) = \delta_g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,29.$$

Пример 4.3.5 *Строго устойчивые распределения.* Рассмотрим независимые случайные величины X_0 и Y_0 , имеющие строго устойчивое распределение с показателем $A \in (1, 2)$ (значения $A \in (0, 1]$ не рассматриваются, поскольку необходимо существование математического ожидания). Тогда с.в.

$Z = \alpha X_0 + (1 - \alpha)Y_0$ распределена как $\alpha_0 Z_0$, где с.в. Z_0 имеет то же распределение, что и X_0 , Y_0 и

$$\alpha^A + (1 - \alpha)^A = \alpha_0^A.$$

Таким образом,

$$H_g(Z) = H_g(\alpha_0 Z_0) = \alpha_0 H_g(Z_0) = \alpha_0 H_g(X_0).$$

Поэтому для любой функции искажения

$$\begin{aligned} \delta_g(\alpha) &= 1 - \frac{H_g(Z)}{\alpha H_g(X_0) + (1 - \alpha)H_g(Y_0)} = 1 - \frac{\alpha_0 H_g(X_0)}{H_g(X_0)} = \\ &= 1 - \alpha_0 = 1 - (\alpha^A + (1 - \alpha)^A)^{1/A}. \end{aligned}$$

Согласно следствию 4.2.2:

$$\max_{\alpha} \delta_g(\alpha) = \delta_g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 2^{1/A-1}.$$

Например, при $A = 3/2$ значение максимальной относительной экономии равно $1 - 2^{-1/3} \approx 0,21$.

Замечание 4.3.1 Примеры 4.3.4, 4.3.5 показывают, что для нормального и прочих строго устойчивых распределений относительная экономия не зависит от выбора функции искажения.

Пример 4.3.6 *Распределение Бернулли.* Рассмотрим независимые случайные величины X_0 и Y_0 , имеющие распределение Бернулли с вероятностью успеха $p > 1/2$ и вероятностью неудачи $q = 1 - p$.

$$\begin{cases} P(X_0 = 1) = p, \\ P(X_0 = 0) = q. \end{cases}$$

Обозначим $Z = \alpha X_0 + (1 - \alpha)Y_0$. Тогда

$$\begin{cases} P(Z = 1) = p^2, \\ P(Z = \alpha) = pq, \\ P(Z = 1 - \alpha) = pq, \\ P(Z = 0) = q^2; \end{cases}$$

$$H_g(X_0) = 1 - q^2 = p(2 - p).$$

В случае, когда $0 \leq \alpha \leq 1/2$,

$$\begin{aligned} H_g(Z) &= \alpha(2p^2 - p^4) + (1 - 2\alpha)(2p - p^2) + \alpha(2p(1 + q) - p^2(1 + q)^2) = \\ &= p(2 - p - 2\alpha p + 4\alpha p^2 - 2\alpha p^3). \end{aligned}$$

В случае, когда $1/2 < \alpha \leq 1$, в силу симметрии получаем

$$H_g(Z) = p(2 - p - 2(1 - \alpha)p + 4(1 - \alpha)p^2 - 2(1 - \alpha)p^3).$$

Таким образом,

$$H_g(Z) = \begin{cases} p(2 - p - 2\alpha p + 4\alpha p^2 - 2\alpha p^3), & 0 \leq \alpha \leq 1/2, \\ p(2 - p - 2(1 - \alpha)p + 4(1 - \alpha)p^2 - 2(1 - \alpha)p^3), & 1/2 < \alpha \leq 1; \end{cases}$$

$$\delta_g(\alpha) = 2p(1 - p) \min(\alpha, 1 - \alpha) = 2pq \min(\alpha, 1 - \alpha).$$

Согласно следствию 4.2.2:

$$\max_{\alpha} \delta_g(\alpha) = \delta_g\left(\frac{1}{2}\right) = p(1 - p) = pq.$$

Максимум по p достигается при $p = 1/2$ и равен $1/4$.

Пример 4.3.7 *Распределение Лапласа.* Рассмотрим независимые случайные величины X и Y , имеющие распределение Лапласа с параметрами $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ и $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Тогда

$$f_X(x) = \frac{\alpha_1}{2} e^{-\alpha_1|x|}, \quad f_Y(x) = \frac{\alpha_2}{2} e^{-\alpha_2|x|}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$S_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{\alpha_1 x}, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}e^{-\alpha_1 x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$S_Y(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{\alpha_2 x}, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}e^{-\alpha_2 x}, & x > 0. \end{cases}$$

Найдем плотность распределения суммы $X + Y$.

$$f_{X+Y}(x) = \int_{+\infty}^{\infty} f_X(t) f_Y(x - t) dt.$$

Рассмотрим случай, когда $x \geq 0$:

$$f_{X+Y}(x) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{4} \left(\int_{-\infty}^0 e^{\alpha_1 t} e^{-\alpha_2(x-t)} dt + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^x e^{-\alpha_1 t} e^{-\alpha_2(x-t)} dt + \int_x^{+\infty} e^{-\alpha_1 t} e^{\alpha_2(x-t)} dt \Big) = \\
& = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{4} \left(\frac{e^{-\alpha_2 x}}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{e^{-\alpha_2 x} (e^{(\alpha_2 - \alpha_1)x} - 1)}{\alpha_2 - \alpha_1} + \frac{e^{-\alpha_2 x} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)x}}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) = \\
& = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{4} \left(\frac{e^{-\alpha_1 x} + e^{-\alpha_2 x}}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{e^{-\alpha_1 x} + e^{-\alpha_2 x}}{\alpha_2 - \alpha_1} \right) = \\
& = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)} (\alpha_2 e^{-\alpha_1 x} - \alpha_1 e^{-\alpha_2 x}).
\end{aligned}$$

Проведя аналогичные вычисления для случая, когда $x < 0$, получим

$$f_{X+Y}(x) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)} (\alpha_2 e^{-\alpha_1 |x|} - \alpha_1 e^{-\alpha_2 |x|}).$$

Найдем функцию дожития суммы $X + Y$.

Рассмотрим случай, когда $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
S_{X+Y}(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)} (\alpha_2 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{-\alpha_2 t}) dt = \\
&= \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 x} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} e^{-\alpha_2 x} \right) = \\
&= \frac{\alpha_2^2 e^{-\alpha_1 x} - \alpha_1^2 e^{-\alpha_2 x}}{2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда $x < 0$.

$$\begin{aligned}
S_{X+Y}(x) &= \int_x^0 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)} (\alpha_2 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t}) dt + \frac{1}{2} = \\
&= \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} (1 - e^{\alpha_1 x}) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} (1 - e^{\alpha_2 x}) \right) + \frac{1}{2} = \\
&= 1 - \frac{\alpha_2^2 e^{\alpha_1 x} - \alpha_1^2 e^{\alpha_2 x}}{2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$S_{X+Y}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha_2^2 e^{\alpha_1 x} - \alpha_1^2 e^{\alpha_2 x}}{2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)}, & x < 0, \\ \frac{\alpha_2^2 e^{-\alpha_1 x} - \alpha_1^2 e^{-\alpha_2 x}}{2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Для функции искажения $g(t) = 1 - (1 - t)^2$ оценим премии Ванга:

$$H_g(X) = - \int_{-\infty}^0 \frac{e^{2\alpha_1 x}}{4} dx + \int_0^{+\infty} \left(e^{-\alpha_1 x} - \frac{e^{-2\alpha_1 x}}{4} \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha_1 x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha_1 x} dx = -\frac{1}{4\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_1} = \frac{3}{4\alpha_1}, \\
H_g(X + Y) &= - \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\alpha_2^2 e^{\alpha_1 x} - \alpha_1^2 e^{\alpha_2 x}}{2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)} \right)^2 dx + \int_0^{+\infty} \frac{\alpha_2^2 e^{-\alpha_1 x} - \alpha_1^2 e^{-\alpha_2 x}}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} dx - \\
&\quad - \int_0^{+\infty} \left(\frac{\alpha_2^2 e^{-\alpha_1 x} - \alpha_1^2 e^{-\alpha_2 x}}{2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)} \right)^2 dx = \\
&= \frac{3(\alpha_1^6 + \alpha_2^6) + 3\alpha_1\alpha_2(\alpha_1^4 + \alpha_2^4) - 4\alpha_1^2\alpha_2^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - 4\alpha_1^3\alpha_2^3}{4\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)^2}.
\end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 0$, то относительная экономия равна

$$\delta_g = 1 - \frac{H_g(X + Y)}{H_g(X) + H_g(Y)} = \frac{\alpha_1\alpha_2(3(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + \alpha_1\alpha_2)}{3(\alpha_1 + \alpha_2)^4}.$$

Теперь рассмотрим независимые случайные величины X_0 и Y_0 , имеющие стандартное распределение Лапласа, т.е. с $\alpha = 1$. Тогда, обозначив $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 1/(1 - \alpha)$, $X = \alpha X_0$, $Y = (1 - \alpha)Y_0$, получим

$$\delta_g(\alpha) = \frac{\alpha(1 - \alpha)(3 + \alpha(1 - \alpha))}{3}.$$

Согласно следствию 4.2.2:

$$\max_{\alpha} \delta_g(\alpha) = \delta_g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{48}.$$

Графики относительных экономий представлены на рисунке 4.1 (для распределения Бернулли принято $p = 1/2$, для строго устойчивого распределения — $A = 3/2$).

В результате, хотя были рассмотрены очень разные распределения, для относительных экономий получились, в основном, схожие графики с довольно близкими значениями максимальной относительной экономии (при одинаковых распределениях X_0 и Y_0). Это наводит на мысль, что относительная экономия слабо чувствительна к типу распределения, и для ее оценки на практике можно использовать модельные распределения из числа перечисленных выше.

4.4 Случай зависимых рисков

Всем хорошо известно, что на практике риски, принимаемые на страхование одной компанией, могут быть зависимы, поскольку на различные объекты

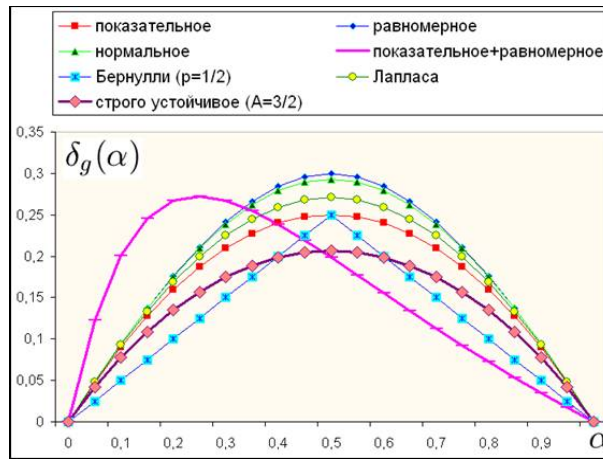


Рис. 4.1: Графики относительных экономий для независимых рисков

могут действовать общие факторы (например, страхование ОСАГО и КАСКО автомобилей, страхование имущества и ответственности перед третьими лицами и пр.).

Традиционным видом зависимости является корреляционная зависимость в случае многомерного нормального распределения (мы ограничимся двумерным). Далее будет рассмотрен соответствующий пример, демонстрирующий, что в этом случае относительная экономия от совместного страхования не зависит от выбора функции искажения, как и в случае независимых рисков. Это оказывается верным и для масштабных нормальных смесей.

Пример 4.4.1 Нормальное распределение. Рассмотрим случайные величины X_0 и Y_0 , имеющие стандартное нормальное распределение $N(0, 1)$ такие, что их коэффициент корреляции $r(X, Y) = \rho$. Тогда одна с.в. выражается через другую с помощью линейной регрессии:

$$Y_0 = \rho X_0 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_0,$$

где Z_0 — тоже стандартная нормальная величина, не зависящая от X_0 . Тогда

$$\begin{aligned} Z &= \alpha X_0 + (1 - \alpha) Y_0 = \alpha X_0 + (1 - \alpha)(\rho X_0 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_0) = \\ &= (\alpha + (1 - \alpha)\rho) X_0 + (1 - \alpha)\sqrt{1 - \rho^2} Z_0 \end{aligned}$$

имеет нормальное распределение $N(0, 1 - 2\alpha(1 - \alpha)(1 - \rho))$. Поэтому для любой функции искажения

$$\delta_g(\alpha, \rho) = 1 - \frac{H_g(Z)}{\alpha H_g(X_0) + (1 - \alpha) H_g(Y_0)} = 1 - \frac{\sqrt{1 - 2\alpha(1 - \alpha)(1 - \rho)} H_g(X_0)}{H_g(X_0)} =$$

$$= 1 - \sqrt{1 - 2\alpha(1 - \alpha)(1 - \rho)}.$$

$$\max_{\alpha} \delta_g(\alpha, \rho) = \delta_g(1/2, \rho) = 1 - \sqrt{\frac{1 + \rho}{2}}.$$

График относительной экономии для нормально распределенных зависимых случайных величин при различных коэффициентах корреляции представлен на рисунке 4.2.

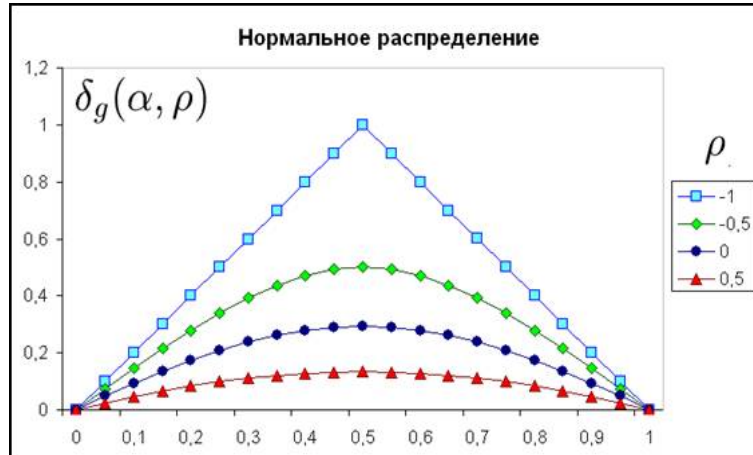


Рис. 4.2: График относительной экономии для нормального распределения

График максимальной относительной экономии для нормально распределенных зависимых случайных величин при различных коэффициентах корреляции представлен на рисунке 4.3.

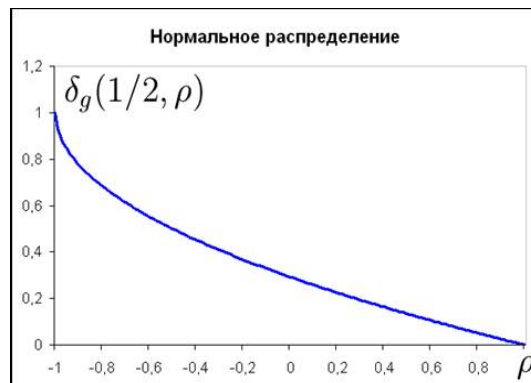


Рис. 4.3: График максимальной относительной экономии для нормального распределения

Пример 4.4.2 *Масштабные нормальные смеси.* Рассмотрим случайные величины X_0 и Y_0 такие, что $(X_0, Y_0) = \xi(X_1, Y_1)$, где (X_1, Y_1) имеет двумерное нормальное распределение со стандартными компонентами и коэффициентом корреляции ρ , а ξ — не зависящая от него неотрицательная случайная

величина. Тогда

$$Z = \alpha X_0 + (1 - \alpha)Y_0 = \xi(\alpha X_1 + (1 - \alpha)Y_1) = \xi Z_1,$$

где с.в. Z_1 имеет нормальное распределение $N(0, 1 - 2\alpha(1 - \alpha)(1 - \rho))$. Следовательно, Z распределено так же, как и

$$\sqrt{1 - 2\alpha(1 - \alpha)(1 - \rho)}\xi X_1 = \sqrt{1 - 2\alpha(1 - \alpha)(1 - \rho)}X_0.$$

Поэтому для любой функции искажения

$$\begin{aligned} \delta_g(\alpha, \rho) &= 1 - \frac{H_g(Z)}{\alpha H_g(X_0) + (1 - \alpha)H_g(Y_0)} = 1 - \frac{\sqrt{1 - 2\alpha(1 - \alpha)(1 - \rho)}H_g(X_0)}{H_g(X_0)} = \\ &= 1 - \sqrt{1 - 2\alpha(1 - \alpha)(1 - \rho)}. \\ \max_{\alpha} \delta_g(\alpha, \rho) &= \delta_g(1/2, \rho) = 1 - \sqrt{\frac{1 + \rho}{2}}. \end{aligned}$$

Например, если взять $\xi = 1/\sqrt{\zeta/n}$, где ζ имеет распределение хи-квадрат с n степенями свободы, то вектор (X_0, Y_0) будет иметь двумерное распределение Стьюдента с n степенями свободы.

Отметим, что одномерные масштабные нормальные смеси подробно изучались в [4, глава 12], а многомерные масштабные нормальные смеси и эллиптические распределения — в [30].

Здесь, однако, необходимо отметить, что большинство данных на практике (в том числе, страховые и финансовые риски) имеют формы зависимости, сильно отличающиеся от гауссовской, и ее использование в расчетах может привести к серьезным ошибкам. Наиболее полной и при этом свободной от влияния частных распределений характеристикой зависимости случайных величин является копула [31].

Определение 4.4.1 ([31]) *Копула (двумерная)* — это любая функция $C : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ со следующими свойствами:

1. Для любых $u, v \in [0, 1]$

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v),$$

$$C(u, 1) = u, C(1, v) = v.$$

2. Для любых $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$ таких, что $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$, верно

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

Применение копул в теории вероятностей связано с теоремой Склера.

Теорема Склера. ([31]) *Для произвольной двумерной функции распределения $H(x, y)$ с одномерными частными функциями распределения $F(x) = H(x, \infty)$ и $G(y) = H(\infty, y)$ существует копула C такая, что для любых $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ верно*

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)). \quad (4.1)$$

Если F и G непрерывны, то C задается однозначно. Иначе C однозначно определяется на $\text{Ran}F \times \text{Ran}G$ (где Ran — множество значений).

Обратно, если C — копула, а F и G — функции распределения, то функция H , определенная (4.1), является двумерной функцией распределения для одномерных частных F и G .

В страховании копулы активно используются для агрегации рисков и моделирования капитала (см., например, [10], [11], [19], [32], [42]).

Отметим, что для часто используемых копул вычисление относительной экономии в явном виде невозможно или затруднительно, поэтому мы ограничимся рассмотрением более простых примеров, причем только в случае показательного распределения рисков (т.е. $S_{X_0}(t) = S_{Y_0}(t) = e^{-t}$) и квадратичной функции искажения $g(t) = 1 - (1 - t)^2$.

Пример 4.3.3 *Копула Фарли-Гумбеля-Моргенштерна.* Рассмотрим копулу Фарли-Гумбеля-Моргенштерна:

$$C(u, v) = uv(1 + \theta(1 - u)(1 - v)), \quad \theta \in [-1, 1].$$

Данная копула описывает довольно слабую зависимость, и может рассматриваться как первое приближение для ряда других копул (таких, как копулы Плаккетта, Франка, Али-Михаила-Хака, Лина и др. [31]).

Тогда

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) = e^{-(x+y)}(1 + \theta(1 - e^{-x})(1 - e^{-y})).$$

$$\frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x \partial y} = e^{-(x+y)}(1 + \theta(1 - 2e^{-x})(1 - 2e^{-y})).$$

Тогда случайная величина $Z = \alpha X_0 + (1 - \alpha)Y_0$ имеет распределение

$$F_Z(t) = \int_0^{\frac{t}{\alpha}} \int_0^{\frac{t-\alpha x}{1-\alpha}} e^{-(x+y)}(1 + \theta(1 - 2e^{-x})(1 - 2e^{-y})) dy dx =$$

$$= 1 - \frac{1}{1-2\alpha} \left((1-\alpha)e^{-\frac{t}{1-\alpha}} - \alpha e^{-\frac{t}{\alpha}} \right) +$$

$$+ \theta \frac{\alpha(1-\alpha)}{1-2\alpha} \left(\frac{e^{-\frac{2t}{1-\alpha}} - e^{-\frac{t}{\alpha}}}{1-3\alpha} + \frac{e^{-\frac{2t}{\alpha}} - e^{-\frac{t}{1-\alpha}}}{2-3\alpha} \right).$$

Для $g(t) = 1 - (1-t)^2$ получаем:

$$H_g(Z) = \int_0^{+\infty} (1 - F_Z(t)^2) dt =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} + \frac{\theta}{3} \cdot \frac{\alpha(1-\alpha)(1+\alpha-\alpha^2)}{(1+\alpha)(2-\alpha)} - \frac{\theta^2}{12} \cdot \frac{\alpha^2(1-\alpha)^2}{(1+\alpha)(2-\alpha)} =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} + \frac{\theta}{3} \cdot \frac{\alpha(1-\alpha)(1+\alpha(1-\alpha))}{(1+\alpha)(1+(1-\alpha))} - \frac{\theta^2}{12} \cdot \frac{\alpha^2(1-\alpha)^2}{(1+\alpha)(1+(1-\alpha))}.$$

$$\delta_g(\alpha, \theta) = 1 - \frac{H_g(\alpha X_0 + (1-\alpha)Y_0) - (\alpha \mathbf{E}X_0 + (1-\alpha)\mathbf{E}Y_0)}{\alpha(H_g(X_0) - \mathbf{E}X_0) + (1-\alpha)(H_g(Y_0) - \mathbf{E}Y_0)} =$$

$$= \alpha(1-\alpha) \left(1 - \frac{4(1+\alpha-\alpha^2)\theta + \alpha(1-\alpha)\theta^2}{6(1+\alpha)(2-\alpha)} \right) =$$

$$= \alpha(1-\alpha) \left(1 - \frac{4(1+\alpha(1-\alpha))\theta + \alpha(1-\alpha)\theta^2}{6(1+\alpha)(1+(1-\alpha))} \right).$$

$$\max_{\alpha} \delta_g(\alpha, \theta) = \delta_g(1/2, \theta) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{20\theta + \theta^2}{54} \right).$$

График относительной экономии для показательно распределенных зависимых случайных величин в случае копулы Фарли-Гумбеля-Моргенштерна представлен на рисунке 4.4.

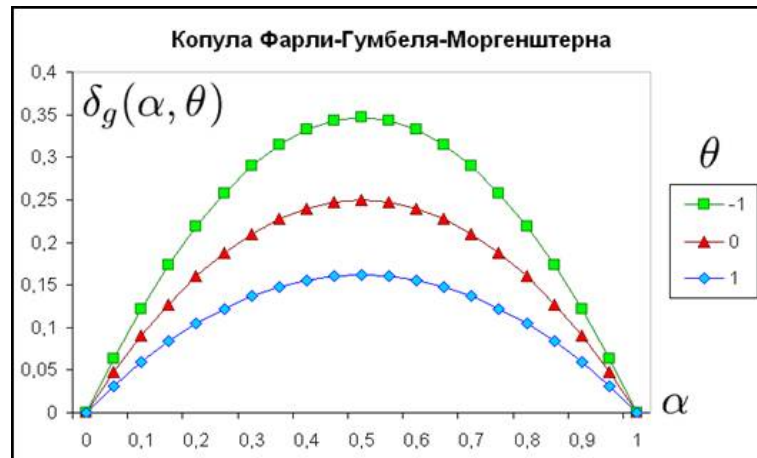


Рис. 4.4: График относительной экономии для копулы Фарли-Гумбеля-Моргенштерна

График максимальной относительной экономии для показательно распределенных зависимых случайных величин в случае копулы Фарли-Гумбеля-Моргенштерна представлен на рисунке 4.5.

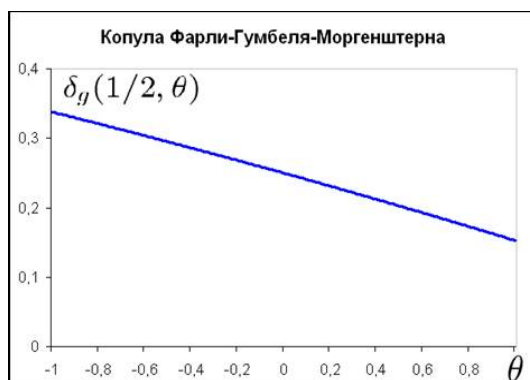


Рис. 4.5: График максимальной относительной экономии для копулы Фарли-Гумбеля-Моргенштерна

Пример 4.4.4 Копула Спирмена. Рассмотрим случай зависимости, лежащий между независимостью и комонотонностью. Если равномерно распределенные на отрезке $[0,1]$ случайные величины независимы с вероятностью $1 - \theta$ и равны с вероятностью θ ($0 < \theta < 1$), то их совместное распределение задается линейной копулой Спирмена:

$$C_{\theta}(u, v) = \begin{cases} (u + \theta(1 - u))v, & v \leq u, \\ (v + \theta(1 - v))u, & v > u. \end{cases}$$

Данная копула называется линейной, потому что ее плотность кусочно-линейна, а Спирмена — потому что параметр θ совпадает с коэффициентом корреляции Спирмена.

Копула Спирмена удачно применяется на практике для расчета совместного накопленного дохода от рыночного индекса и облигаций на основе суточных данных [26].

Содержательная интерпретация линейной копулы Спирмена может заключаться в следующем: иногда убытки определяются независимыми факторами, а иногда одним общим (доминирующим) фактором, при котором они становятся пропорциональными.

Пусть $X_0 = Y_0$ с вероятностью θ и X_0 и Y_0 независимы с вероятностью $1 - \theta$. Оценим премию Ванга для случайной величины W , представляющей

собой смесь распределения $Z = \alpha X_0 + (1 - \alpha)Y_0$ и распределения X_0 с весами θ и $1 - \theta$.

$$\begin{aligned}
 S_W(t) &= (1 - \theta)S_Z(t) + \theta S_{X_0}(t), \\
 S_Z(t) &= \frac{1}{1 - 2\alpha} \left((1 - \alpha)e^{-\frac{t}{1-\alpha}} - \alpha e^{-\frac{t}{\alpha}} \right), \quad S_{X_0}(t) = e^{-t}. \\
 H_g(W) &= 2 \int_0^\infty S_W(t) dt - \int_0^\infty S_W(t)^2 dt = \\
 &= \frac{3}{2} - \frac{\alpha(1 - \alpha)}{2} + \frac{\alpha(1 - \alpha)}{(1 + \alpha)(2 - \alpha)} \left(\theta(1 + \alpha - \alpha^2) - \frac{\theta^2}{2}\alpha(1 - \alpha) \right). \\
 \mathbf{E}W &= 1, \quad \alpha(H_g(X_0) - \mathbf{E}X_0) + (1 - \alpha)(H_g(Y_0) - \mathbf{E}Y_0) = \frac{1}{2}. \\
 \delta_g(\alpha, \theta) &= 1 - \frac{H_g(W) - \mathbf{E}W}{\alpha(H_g(X_0) - \mathbf{E}X_0) + (1 - \alpha)(H_g(Y_0) - \mathbf{E}Y_0)} = \\
 &= \alpha(1 - \alpha) \left(1 - \frac{2(1 + \alpha - \alpha^2)\theta - \alpha(1 - \alpha)\theta^2}{(1 + \alpha)(2 - \alpha)} \right) = \\
 &= \alpha(1 - \alpha) \left(1 - \frac{2(1 + \alpha(1 - \alpha))\theta - \alpha(1 - \alpha)\theta^2}{(1 + \alpha)(1 + (1 - \alpha))} \right). \\
 \max_{\alpha} \delta_g(\alpha, \theta) &= \delta_g(1/2, \theta) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{10\theta - \theta^2}{9} \right).
 \end{aligned}$$

График относительной экономии для показательно распределенных зависимых случайных величин в случае копулы Спирмена представлен на рисунке 4.6.

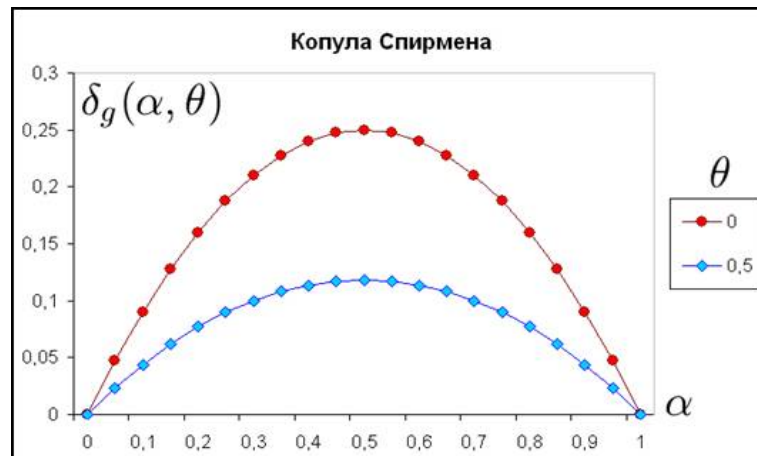


Рис. 4.6: График относительной экономии для копулы Спирмена

График максимальной относительной экономии для показательно распределенных зависимых случайных величин в случае копулы Спирмена представлен на рисунке 4.7.

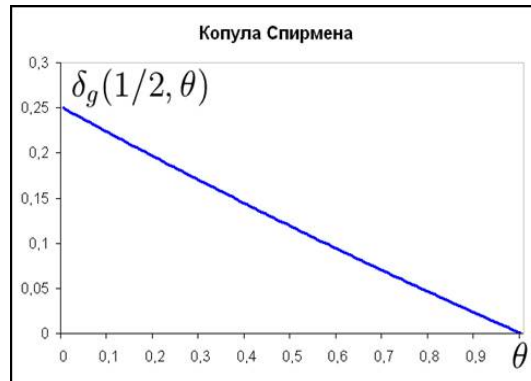


Рис. 4.7: График максимальной относительной экономии для копулы Спирмена

Пример 4.4.5 Копула Рафтери. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые в совокупности показательные случайные величины с параметром $\lambda > 0$ и J — случайная величина, не зависящая от ξ_i , имеющая распределение Бернулли с параметром $\theta \in (0, 1)$. Положим

$$\eta_1 = (1 - \theta)\xi_1 + J\xi_3,$$

$$\eta_2 = (1 - \theta)\xi_2 + J\xi_3.$$

Тогда совместное распределение η_1 и η_2 задается функцией

$$\overline{H}(x, y) = e^{-\lambda(x \vee y)} + \frac{1 - \theta}{1 + \theta} e^{-\frac{\lambda}{1-\theta}(x+y)} (1 - e^{-\lambda \frac{1+\theta}{1-\theta}(x \wedge y)}),$$

где $x \vee y = \max(x, y)$, $x \wedge y = \min(x, y)$, и называется двумерным показательным распределением Рафтери. Копула дожития распределения Рафтери имеет следующий вид:

$$\hat{C}_\theta(u, v) = (x \vee y) + \frac{1 - \theta}{1 + \theta} (uv)^{\frac{1}{1-\theta}} \left(1 - (x \wedge y)^{-\frac{1+\theta}{1-\theta}} \right),$$

а исходная копула

$$C(u, v) = u + v - 1 + \hat{C}(1 - u, 1 - v).$$

Содержательная интерпретация копулы Рафтери может заключаться в следующем: убытки определяются независимыми факторами, но иногда к ним прибавляются дополнительные убытки от некоторого общего фактора.

В данном примере удобнее воспользоваться непосредственно определением распределения Рафтери.

Пусть $X_0 = \eta_1$, $Y_0 = \eta_2$. Положим $Z^* = \alpha\xi_1 + (1 - \alpha)\xi_2$, $U_0 = \xi_3$ и рассмотрим случайную величину Z :

$$Z = \alpha X_0 + (1 - \alpha)Y_0 = (1 - \theta)Z^* + J\xi_3 = (1 - \theta)Z^* + JU_0,$$

т.е. распределение Z есть смесь распределения $(1 - \theta)Z^*$ и распределения $(1 - \theta)Z^* + U_0$, (где U_0 — стандартная показательная величина, не зависящая от Z) с весами $1 - \theta$ и θ соответственно ($0 < \theta < 1$). Тогда

$$\begin{aligned} S_Z(t) &= (1 - \theta)S_{(1-\theta)Z^*}(t) + \theta S_{(1-\theta)Z^*+U_0}(t), \\ S_{(1-\theta)Z^*}(t) &= \frac{1}{1 - 2\alpha} \left((1 - \alpha)e^{-\frac{t}{(1-\alpha)(1-\theta)}} - \alpha e^{-\frac{t}{\alpha(1-\theta)}} \right), \quad S_{U_0}(t) = e^{-t}. \\ f_{(1-\theta)Z^*}(t) &= \frac{1}{(1 - 2\alpha)(1 - \theta)} \left(e^{-\frac{t}{(1-\alpha)(1-\theta)}} - e^{-\frac{t}{\alpha(1-\theta)}} \right), \quad f_{U_0}(t) = e^{-t}. \\ f_{(1-\theta)Z^*+U_0}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(1-\theta)Z^*}(t) f_{U_0}(x - t) dt = \\ &= \int_0^x \frac{1}{(1 - 2\alpha)(1 - \theta)} \left(e^{-\frac{t}{(1-\alpha)(1-\theta)}} - e^{-\frac{t}{\alpha(1-\theta)}} \right) e^{-(x-t)} dt = \\ &= \frac{1}{(1 - 2\alpha)(1 - \theta)} e^{-x} \int_0^x \left(e^{-\frac{\alpha+\theta-\alpha\theta}{(1-\alpha)(1-\theta)}t} - e^{-\frac{1-\alpha+\alpha\theta}{\alpha(1-\theta)}t} \right) dt = \\ &= \frac{(1 - 2\alpha)e^{-x} + \alpha(\alpha + \theta - \alpha\theta)e^{-\frac{x}{\alpha(1-\theta)}} - (1 - \alpha)(1 - \alpha + \alpha\theta)e^{-\frac{x}{(1-\alpha)(1-\theta)}}}{(1 - 2\alpha)(\alpha + \theta - \alpha\theta)(1 - \alpha + \alpha\theta)}. \\ S_{(1-\theta)Z^*+U_0}(x) &= \int_x^{+\infty} f_{(1-\theta)Z^*+U_0}(t) dt = ((1 - 2\alpha)e^{-x} + \\ &+ \left(\alpha^2(\alpha + \theta - \alpha\theta)e^{-\frac{x}{\alpha(1-\theta)}} - (1 - \alpha)^2(1 - \alpha + \alpha\theta)e^{-\frac{x}{(1-\alpha)(1-\theta)}} \right) (1 - \theta)) / \\ &/[(1 - 2\alpha)(\alpha + \theta - \alpha\theta)(1 - \alpha + \alpha\theta)]. \\ H_g(Z) &= 2 \int_0^\infty S_V(t) dt - \int_0^\infty S_V(t)^2 dt = \\ &= 2(1 - \theta) \int_0^\infty S_{(1-\theta)Z^*}(t) dt + 2\theta \int_0^\infty S_{(1-\theta)Z^*+U_0}(t) dt - \\ &- (1 - \theta)^2 \int_0^\infty S_{(1-\theta)Z^*}(t)^2 dt - \theta^2 \int_0^\infty S_{(1-\theta)Z^*+U_0}(t)^2 dt - \\ &- 2\theta(1 - \theta) \int_0^\infty S_{(1-\theta)Z^*}(t) S_{(1-\theta)Z^*+U_0}(t) dt. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty S_{(1-\theta)Z^*}(t)dt = 1 - \theta, \\
& \int_0^\infty S_{(1-\theta)Z^*+U_0}(t)dt = 2 - \theta, \\
& \int_0^\infty S_{(1-\theta)Z^*}(t)^2 dt = \frac{1}{(1-2\alpha)^2} \int_0^\infty \left((1-\alpha)^2 e^{-\frac{2t}{(1-\alpha)(1-\theta)}} + \right. \\
& \quad \left. + \alpha^2 e^{-\frac{2t}{\alpha(1-\theta)}} - 2\alpha(1-\alpha) e^{-\frac{t}{\alpha(1-\alpha)(1-\theta)}} \right) dt = \\
& = \frac{1-\theta}{(1-2\alpha)^2} \left(\frac{(1-\alpha)^3}{2} + \frac{\alpha^3}{2} - 2\alpha^2(1-\alpha)^2 \right) = \frac{1+\alpha-\alpha^2}{2}(1-\theta), \\
& \int_0^\infty S_{(1-\theta)Z^*+U_0}(t)^2 dt = \frac{1}{(1-2\alpha)^2(\alpha+\theta-\alpha\theta)^2(1-\alpha+\alpha\theta)^2} \times \\
& \times \int_0^\infty \left(\left[\alpha^4(\alpha+\theta-\alpha\theta)^2 e^{-\frac{2t}{\alpha(1-\theta)}} + (1-\alpha)^4(1-\alpha+\alpha\theta)^2 e^{-\frac{2t}{(1-\alpha)(1-\theta)}} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2\alpha^2(1-\alpha)^2(\alpha+\theta-\alpha\theta)(1-\alpha+\alpha\theta) e^{-\frac{t}{\alpha(1-\alpha)(1-\theta)}} \right] (1-\theta)^2 + \right. \\
& \quad \left. + (1-2\alpha)^2 e^{-2t} + 2(1-2\alpha) \left[\alpha^2(\alpha+\theta-\alpha\theta) e^{-\frac{1+\alpha-\alpha\theta}{\alpha(1-\theta)}t} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (1-\alpha)^2(1-\alpha+\alpha\theta) e^{-\frac{2-\alpha-\theta+\alpha\theta}{(1-\alpha)(1-\theta)}t} \right] \right) (1-\theta) dt = \\
& = \frac{1}{(1-2\alpha)^2(\alpha+\theta-\alpha\theta)^2(1-\alpha+\alpha\theta)^2} \times \\
& \times \left(\left[\frac{\alpha^5(\alpha+\theta-\alpha\theta)^2}{2} - 2(1-\alpha)^3(1-\alpha)^3(\alpha+\theta-\alpha\theta)(1-\alpha+\alpha\theta) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{(1-\alpha)^5(1-\alpha+\alpha\theta)^2}{2} \right] (1-\theta)^3 + \frac{(1-2\alpha)^2}{2} + \right. \\
& \quad \left. + 2(1-2\alpha) \left[\frac{\alpha^3(\alpha+\theta-\alpha\theta)}{1+\alpha-\alpha\theta} - \frac{(1-\alpha)^3(1-\alpha+\alpha\theta)}{2-\alpha-\theta+\alpha\theta} \right] (1-\theta)^2 \right) = \\
& = \frac{1}{2(\alpha+\theta-\alpha\theta)^2(1-\alpha+\alpha\theta)^2} + \frac{(1-\theta)^3}{2(\alpha+\theta-\alpha\theta)^2(1-\alpha+\alpha\theta)^2} \times \\
& \times \left[(1-3\alpha+5\alpha^2-3\alpha^3-\alpha^4+3\alpha^5-\alpha^6) + 2\alpha(1-\alpha)(1-\alpha+2\alpha^3-\alpha^4)\theta + \right. \\
& \quad \left. + \alpha^2(1-\alpha)^2(1+\alpha-\alpha^2)\theta^2 \right] - \\
& - 2 \frac{(1-\alpha+2\alpha^3-\alpha^4) + \alpha^2(1-\alpha)^2\theta(2-\theta)}{(\alpha+\theta-\alpha\theta)^2(1-\alpha+\alpha\theta)^2(1+\alpha-\alpha\theta)(2-\alpha-\theta+\alpha\theta)} (1-\theta)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty S_{(1-\theta)Z^*}(t)S_{(1-\theta)Z^*+U_0}(t)dt = \frac{1-\theta}{(1-2\alpha)^2(\alpha+\theta-\alpha\theta)(1-\alpha+\alpha\theta)} \times \\
& \quad \times \int_0^\infty \left[\alpha^2(1-\alpha)(\alpha+\theta-\alpha\theta)e^{-\frac{t}{\alpha(1-\alpha)(1-\theta)}} + \right. \\
& \quad \quad \left. + \alpha(1-\alpha)^2(1-\alpha+\alpha\theta)e^{-\frac{t}{\alpha(1-\alpha)(1-\theta)}} - \right. \\
& \quad \quad \left. - \alpha^3(\alpha+\theta-\alpha\theta)e^{-\frac{2t}{\alpha(1-\theta)}} - (1-\alpha)^3(1-\alpha+\alpha\theta)e^{-\frac{2t}{(1-\alpha)(1-\theta)}} \right] dt + \\
& \quad \quad \quad + \frac{1}{(1-2\alpha)(\alpha+\theta-\alpha\theta)(1-\alpha+\alpha\theta)} \times \\
& \quad \quad \times \int_0^\infty \left((1-\alpha)e^{-\frac{2-\alpha-\theta+\alpha\theta}{(1-\alpha)(1-\theta)}t} - \alpha e^{-\frac{1+\alpha-\alpha\theta}{\alpha(1-\theta)}t} \right) dt = \\
& \quad \quad \quad = \frac{(1-\theta)^2}{2(1-2\alpha)^2(\alpha+\theta-\alpha\theta)(1-\alpha+\alpha\theta)} \times \\
& \quad \quad \times [2\alpha^2(1-\alpha)^2(1-2\alpha+2\alpha^2+2\alpha\theta-2\alpha^2\theta) - \\
& \quad \quad \quad - \alpha^4(\alpha+\theta-\alpha\theta) - (1-\alpha)^4(1-\alpha+\alpha\theta)] + \\
& \quad \quad \quad + \frac{(1-\alpha)^2(1+\alpha-\alpha\theta) - \alpha^2(2-\alpha-\theta+\alpha\theta)}{(1-2\alpha)(\alpha+\theta-\alpha\theta)(1-\alpha+\alpha\theta)(1+\alpha-\alpha\theta)(2-\alpha-\theta+\alpha\theta)}(1-\theta) = \\
& \quad \quad \quad = -\frac{(1-\theta)^2}{2} \cdot \frac{(1-\alpha+2\alpha^3-\alpha^4) + \alpha(1-\alpha)(1+\alpha-\alpha^2)\theta}{(\alpha+\theta-\alpha\theta)(1-\alpha+\alpha\theta)} + \\
& \quad \quad \quad + \frac{(1+\alpha-\alpha^2) - \alpha(1-\alpha)\theta}{(\alpha+\theta-\alpha\theta)(1-\alpha+\alpha\theta)(1+\alpha-\alpha\theta)(2-\alpha-\theta+\alpha\theta)}(1-\theta).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
H_g(Z) &= 2 - \frac{1+\alpha-\alpha^2}{2}(1-\theta)^3 - \frac{\theta^2}{2(\alpha+\theta-\alpha\theta)^2(1-\alpha+\alpha\theta)^2} - \\
& - \frac{\theta^2(1-\theta)^3}{2(\alpha+\theta-\alpha\theta)^2(1-\alpha+\alpha\theta)^2} [(1-3\alpha+5\alpha^2-3\alpha^3-\alpha^4+3\alpha^5-\alpha^6) + \\
& \quad + 2\alpha(1-\alpha)(1-\alpha+2\alpha^3-\alpha^4)\theta + \alpha^2(1-\alpha)^2(1+\alpha-\alpha^2)\theta^2] + \\
& + 2 \frac{(1-\alpha+2\alpha^3-\alpha^4) + \alpha^2(1-\alpha)^2\theta(2-\theta)}{(\alpha+\theta-\alpha\theta)^2(1-\alpha+\alpha\theta)^2(1+\alpha-\alpha\theta)(2-\alpha-\theta+\alpha\theta)} \theta^2(1-\theta)^2 + \\
& \quad + \theta(1-\theta)^3 \frac{(1-\alpha+2\alpha^3-\alpha^4) + \alpha(1-\alpha)(1+\alpha-\alpha^2)\theta}{(\alpha+\theta-\alpha\theta)(1-\alpha+\alpha\theta)} - \\
& - 2 \frac{(1+\alpha-\alpha^2) - \alpha(1-\alpha)\theta}{(\alpha+\theta-\alpha\theta)(1-\alpha+\alpha\theta)(1+\alpha-\alpha\theta)(2-\alpha-\theta+\alpha\theta)} \theta(1-\theta)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_g(\alpha, \theta) &= 1 - \frac{H_g(Z) - \mathbf{E}Z}{\alpha(H_g(X_0) - \mathbf{E}X_0) + (1 - \alpha)(H_g(Y_0) - \mathbf{E}Y_0)} = \\
&= -1 + (1 + \alpha - \alpha^2)(1 - \theta)^3 + \frac{\theta^2}{(\alpha + \theta - \alpha\theta)^2(1 - \alpha + \alpha\theta)^2} + \\
&+ \frac{\theta^2(1 - \theta)^3}{(\alpha + \theta - \alpha\theta)^2(1 - \alpha + \alpha\theta)^2} [(1 - 3\alpha + 5\alpha^2 - 3\alpha^3 - \alpha^4 + 3\alpha^5 - \alpha^6) + \\
&\quad + 2\alpha(1 - \alpha)(1 - \alpha + 2\alpha^3 - \alpha^4)\theta + \alpha^2(1 - \alpha)^2(1 + \alpha - \alpha^2)\theta^2] - \\
&- 4 \frac{(1 - \alpha + 2\alpha^3 - \alpha^4) + \alpha^2(1 - \alpha)^2\theta(2 - \theta)}{(\alpha + \theta - \alpha\theta)^2(1 - \alpha + \alpha\theta)^2(1 + \alpha - \alpha\theta)(2 - \alpha - \theta + \alpha\theta)} \theta^2(1 - \theta)^2 - \\
&\quad - 2\theta(1 - \theta)^3 \frac{(1 - \alpha + 2\alpha^3 - \alpha^4) + \alpha(1 - \alpha)(1 + \alpha - \alpha^2)\theta}{(\alpha + \theta - \alpha\theta)(1 - \alpha + \alpha\theta)} + \\
&+ 4 \frac{(1 + \alpha - \alpha^2) - \alpha(1 - \alpha)\theta}{(\alpha + \theta - \alpha\theta)(1 - \alpha + \alpha\theta)(1 + \alpha - \alpha\theta)(2 - \alpha - \theta + \alpha\theta)} \theta(1 - \theta)^2. \\
\max_{\alpha} \delta_g(\alpha, \theta) &= \delta_g(1/2, \theta) = -1 + 1,25(1 - \theta)^3 + \frac{\theta^2}{0,0625(1 + \theta)^4} + \\
&+ \frac{27,85 + 5,5\theta + 1,25\theta^2}{(1 + \theta)^4} \theta^2 - \frac{176 + 20\theta(2 - \theta)}{(1 + \theta)^4(3 - \theta)^2} \theta^2(1 - \theta)^2 - \\
&- \frac{5,5 + 2,5\theta}{(1 + \theta)^2} \theta(1 - \theta)^3 + \frac{80 - 16\theta}{(1 + \theta)^2(3 - \theta)^2} \theta(1 - \theta)^2.
\end{aligned}$$

График относительной экономии для показательно распределенных зависимых случайных величин в случае копулы Рафтери представлен на рисунке 4.8.

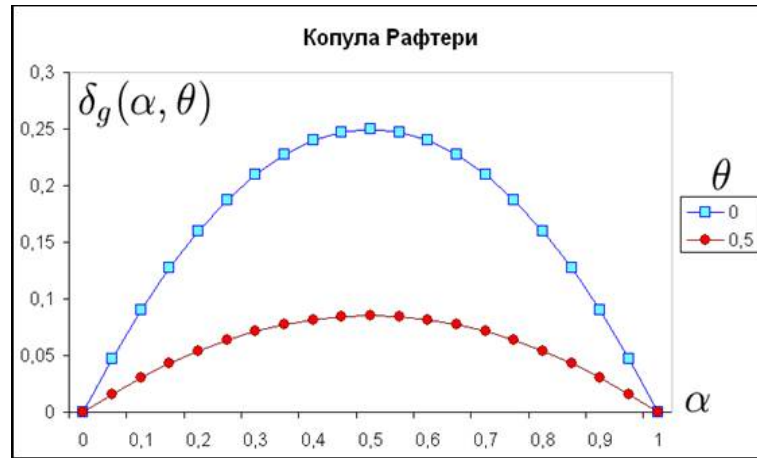


Рис. 4.8: График относительной экономии для копулы Рафтери

График максимальной относительной экономии для показательно распределенных зависимых случайных величин в случае копулы Рафтери представлен на рисунке 4.9.

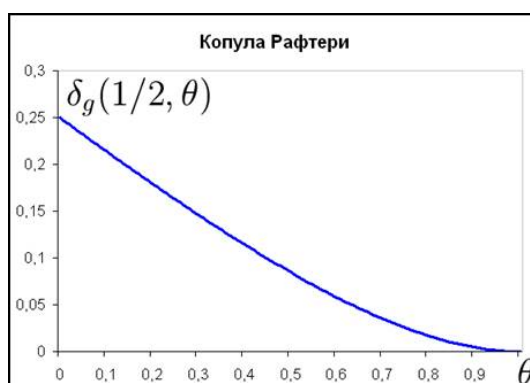


Рис. 4.9: График максимальной относительной экономии для копулы Рафтери

Интересно выяснить, как влияет тип копулы на относительную экономию при одинаковой мере зависимости. В качестве такой меры нельзя использовать параметр θ , поскольку в каждом случае он имеет свой смысл, однако можно использовать более универсальную характеристику, такую, как коэффициент корреляции Спирмена ρ_C .

Определение 4.4.2 Пусть X и Y — непрерывные случайные величины с копулой C . Тогда коэффициент корреляции Спирмена определяется следующей формулой:

$$\rho_C = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) du dv - 3.$$

Согласно [31], для копулы Фарли-Гумбеля-Моргенштерна:

$$\rho_C = \frac{\theta}{3},$$

для линейной копулы Спирмена:

$$\rho_C = \theta,$$

для копулы Рафтери:

$$\rho_C = \frac{\theta(4 - 3\theta)}{(2 - \theta)^2}.$$

Рассмотрим, для примера, три степени положительной зависимости рисков: слабую ($\rho_C = 0,25$), среднюю ($\rho_C = 0,5$) и сильную ($\rho_C = 0,75$). Найдем

для них соответствующие значения параметра θ для разных копул и функции относительной экономии. Причем, к сожалению, для копулы Фарли-Гумбеля-Моргенштерна в случаях средней и сильной зависимости оценки не производятся, т.к. максимальный достижимый коэффициент корреляции Спирмена для нее равен $1/3$.

1. $\rho_C = 0,25$.

Для копулы Фарли-Гумбеля-Моргенштерна:

$$\theta = 0,75; \quad \delta_g(\alpha; 0,75) = \alpha(1-\alpha) \left(1 - \frac{3(1+\alpha(1-\alpha)) + 0,5625\alpha(1-\alpha)}{6(1+\alpha)(1+(1-\alpha))} \right),$$

для линейной копулы Спирмена:

$$\theta = 0,25; \quad \delta_g(\alpha; 0,25) = \alpha(1-\alpha) \left(1 - \frac{0,5(1+\alpha(1-\alpha)) - 0,0625\alpha(1-\alpha)}{(1+\alpha)(1+(1-\alpha))} \right),$$

для копулы Рафтери:

$$\theta = \frac{10 - 4\sqrt{3}}{13} \approx 0,236.$$

График относительной экономии в случае, когда коэффициент Спирмена $\rho_C = 0,25$, представлен на рисунке 4.10.

2. $\rho_C = 0,5$.

Для линейной копулы Спирмена:

$$\theta = 0,5; \quad \delta_g(\alpha; 0,5) = \alpha(1-\alpha) \left(1 - \frac{(1+\alpha(1-\alpha)) - 0,25\alpha(1-\alpha)}{(1+\alpha)(1+(1-\alpha))} \right),$$

для копулы Рафтери:

$$\theta = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{7} \approx 0,453.$$

График относительной экономии в случае, когда коэффициент Спирмена $\rho_C = 0,5$, представлен на рисунке 4.11.

3. $\rho_C = 0,75$.

Для линейной копулы Спирмена:

$$\theta = 0,75; \quad \delta_g(\alpha; 0,75) = \alpha(1-\alpha) \left(1 - \frac{1,5(1+\alpha(1-\alpha)) - 0,5625\alpha(1-\alpha)}{(1+\alpha)(1+(1-\alpha))} \right),$$

для копулы Рафтери:

$$\theta = \frac{2}{3}.$$

График относительной экономии в случае, когда коэффициент Спирмена $\rho_c = 0,75$, представлен на рисунке 4.12.

Отметим, что относительные экономии для копул Фарли-Гумбеля-Моргенштерна и Спирмена практически совпадают при слабой зависимости (их разность в примере составляет не более 0,0009) в то время, как для копулы Рафтери относительная экономия во всех случаях оказывается заметно меньше.

На практике коэффициент корреляции Спирмена легко оценивается статистически (как обычный выборочный коэффициент корреляции, но применительно к рангам наблюдений), и соответствующая опция имеется во многих статистических пакетах (STATISTICA, SPSS и др.).

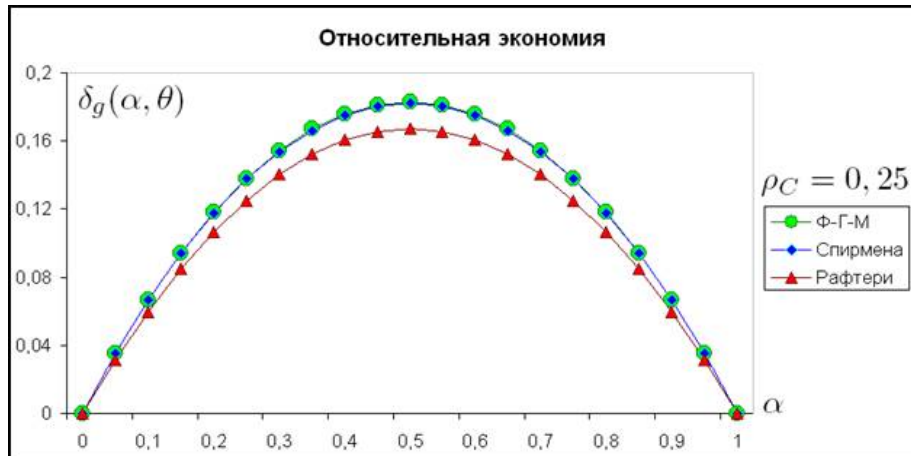


Рис. 4.10: График относительной экономии ($\rho_C = 0,25$)

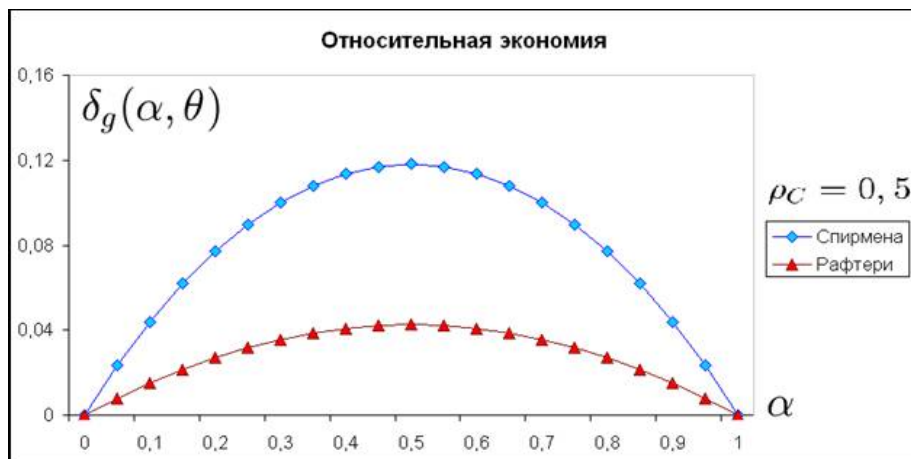


Рис. 4.11: График относительной экономии ($\rho_C = 0,5$)

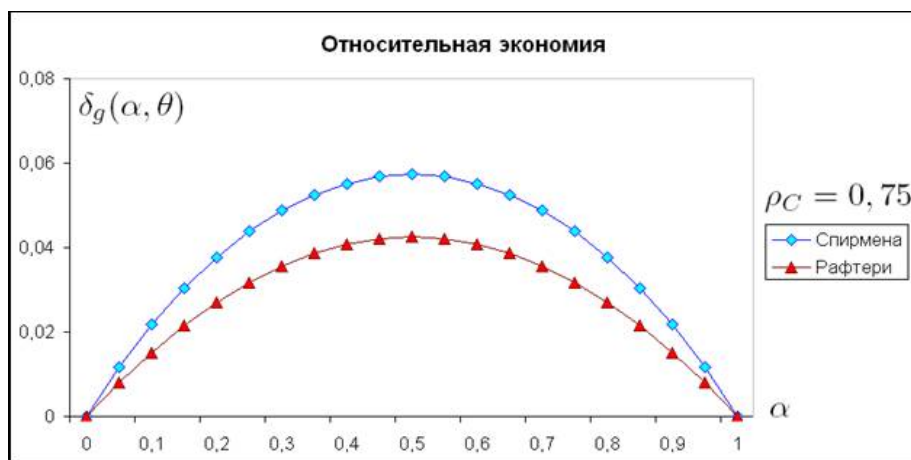


Рис. 4.12: График относительной экономии ($\rho_C = 0,75$)

Список литературы

- [1] Булинская Е.В., *Теория риска и перестрахование*, Мэйлер, 2009.
- [2] Голубин А.Ю., *Математические модели в теории страхования: построение и оптимизация*, Москва, Анкил, 2003.
- [3] Евграфов М.М., *Аналитические функции*, Москва, "Наука", 1991.
- [4] Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я., *Математические основы теории риска*, Физматлит, 2007.
- [5] Куликов А.В., *Многомерные когерентные и выпуклые меры риска*, Теория вероятностей и ее применения, 2007, Том 52, №4, стр: 685-710.
- [6] Мишина А.П., Проскуряков И.В., *Высшая алгебра*, Москва, "Наука", 1965.
- [7] Нефедова Ю.С., Шевцова И.Г., *О точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм*, Информатика и ее применения, 2011, №1 (в печати).
- [8] Орлов Д.В., *О двух оценках одной меры риска*, Теория вероятностей и ее применения, 2008, Том 53, №1, стр: 168-172.
- [9] Тюрин И.С., *О скорости сходимости в теореме Ляпунова*, www.moebiuscontest.ru/files/2009/tyurin.pdf.
- [10] Belguise O., Levi C., *Tempêtes: Etude des dépendances entre les branches Automobile et Incendie à l'aide de la théorie des copulas*, Economic Capital Management For Insurance Companies Using Conditional Value at Risk and a Copula Approach — Economia, Societae Istituzioni, 2006, Vol.18, №3.

- [11] Bisignani R., Masala G., Micocci M., *Economic Capital Management For Insurance Companies Using Conditional Value at Risk and a Copula Approach*, Economia, Societae Istituzioni, 2006, Vol.18, №3.
- [12] Bogdan M., *Asymptotic distributions of linear combinations of order statistics*, Applicationes mathematicae, 1994, Vol.22, №2, pp: 201-225.
- [13] Borch K., *The utility concept applied to the theory of insurance*, ASTIN BULLETIN, 1961, Vol.1, pp: 245-255.
- [14] Bühlmann H., *An economic premium principle*, ASTIN BULLETIN, 1980, Vol.11, pp: 52-60.
- [15] Bühlmann H., Gagliardi B., Gerber H., Straub E., *Some inequalities for stop-loss premiums*, ASTIN BULLETIN, 1977, Vol.9, pp: 75-83.
- [16] Cherny A.S., *Weighted V@R and its properties*, Finance and Stochastics, 2006, Vol.10, pp: 367-393.
- [17] Christofides S., *Pricing for risk in financial transactions*, Proceedings of the GISG/ ASTIN Joint Meeting in Glasgow, Scotland, October, 1998, pp: 62-109.
- [18] Denneberg D., *Premium calculation: why standard deviation should be replaced by absolute deviation*, ASTIN BULLETIN, 1990, Vol.20, pp: 181-190.
- [19] Frees E.W., Valdez E.A., *Understanding Relations Using Copulas*, North American Actuarial Journal, January 1998, Vol. 2, №1, pp. 1-25.
- [20] Freifelder L.R., *Exponential utility theory ratemaking an alternative ratemaking approach*, Journal of Risk and Insurance, 1979, Vol. 46, pp. 515-530.
- [21] Gerber H.U., *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, Huebner Foundation Monograph, Wharton School, University of Pennsylvania, 1979.
- [22] Govindarajulu Z., *Asymptotic normality of linear combinations of functions of order statistics*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1968, Vol.59, №3, pp: 713-719.

- [23] Goovaerts M.J., de Vylder F., Haezendonck J. *Ordering risks: a review*, Insurance: Mathematics and Economics, 1982, Vol.1, pp: 131-163.
- [24] Goovaerts M.J., de Vylder F., Haezendonck J. *Insurance Premiums Theory and Applications*, Nort-Holland, Amsterdam, 1946.
- [25] Hartley H.O., David H.A., *Universal bounds for mean range and extreme observation*, The Annals of Mathematical Statistics, 1954, Vol.25, №1, pp: 85-99.
- [26] Hürlimann W., *Fitting bivariate cumulative returns with copulas*, Computational Statistics & Data Analysis, 2004, Vol.45, №2, pp: 355-372.
- [27] Jung J., *On linear estimates defined by a continuous weight function*, Arkiv för matematik, 1955, 3, 15.
- [28] Mason D.M., *Asymptotic normality of linear combinations of order statistics with a smooth core function*, The Annals of Mathematical Statistics, 1981, Vol.9, №4, pp: 899-908.
- [29] Mason D.M., *A minimax criterion for choosing weight functions for L-estimates of location*, The Annals of Mathematical Statistics, 1983, Vol.11, №1, pp: 317-325.
- [30] McNeil A.J., Frey R., Embrechts P., *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press, 2005.
- [31] Nelsen R.B., *An Introduction to Copulas*, Springer Series in Statistics, 2nd ed. 2006.
- [32] Pfeifer D., Nešlehová J., *Modelling and simulation of dependence structures in nonlife insurance with Bernstein copulas*, Blätter der DGVMF, 2003, Vol. 26, №2, pp. 177-191.
- [33] Pisarenko V.F., Sornette D., *Characterization of the Frequency of Extreme Earthquake Events by the Generalized Pareto Distribution*, Pure and Applied Geophysics, 2003, Vol. 160, №12, pp. 2343-2364.

- [34] Ramsay C.M., *Loading gross premiums for risk without using utility theory, with Discussions*, Transactions of the Society of Actuaries, 1994, Vol. 45, pp. 305-349.
- [35] Reich A., *Properties of premium calculation principles*, Insurance: Mathematics and Economics, 1986, Vol.5, pp: 97-101.
- [36] Resnick S.I., *Discussion of the Danish data on large fire insurance losses*, ASTIN BULLETIN, 1997, Vol.27, №1, pp: 139-152.
- [37] Robbin, *Discussion of Meyers' paper — The competitive market equilibrium risk load formula for increased limit ratemaking*, Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 1992, Vol. 79, pp. 367-384.
- [38] Serfling R.J., *Approximation theorems of Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, 1980.
- [39] Shao J., *Mathematical statistics (Second edition)*, Springer, 2007.
- [40] Shorack G.R., *Functions of order statistics*, The Annals of Mathematical Statistics, 1972, Vol.43, №2, pp: 412-427.
- [41] Stigler S.M., *Linear functions of order statistics*, The Annals of Mathematical Statistics, 1969, Vol.40, №3, pp: 770-788.
- [42] Tang A., Valdez E., *Economic Capital and the Aggregation of Risks using Copulas*, Economic Capital and the Aggregation of Risks using Copulas, Sydney, 2006, www.ica2006.com/Papiers/282/282.pdf.
- [43] van Helrwaarden A.E., Kaas R., *The Dutch premium principle*, Insurance: Mathematics and Economics, 1992, Vol.11, pp: 129-133.
- [44] Venter G.G., *Premium calculation implications of reinsurance without arbitrage*, ASTIN BULLETIN, 1991, Vol.21, pp: 223-230.
- [45] Wang J.-L., *A note on Christofides' conjecture regarding Wang's premium principle*, ASTIN BULLETIN, 2000, Vol.30, №1, pp: 13-17.
- [46] Wang S.S., *Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms*, Insurance: Mathematics and Economics, 1995, 17, pp: 43-54.

- [47] Wang S.S., *Premium calculation by transforming the layer premium density*, ASTIN BULLETIN 1996, Vol.26, pp: 71-92.
- [48] Wang S., Young V., Panjer H., *Axiomatic characterization of insurance prices*, Actuarial Research Clearing House, 1997, 1, pp: 15-31.
- [49] Wellner J.A., *A Glivenko-Cantelli theorem and strong laws of large numbers for functions of order statistics*, The Annals of Mathematical Statistics, 1977, Vol.5, №3, pp: 473-480.
- [50] Wu X.-Y., *The natural sets of Wang's premium principle*, ASTIN BULLETIN, 2001, Vol.31, №1, pp: 139-145.
- [51] Young V.R., *Optimal insurance under Wang's premium principle*, Insurance: Mathematics and Economics, 1999, Vol.25, pp: 109-122.
- [52] Young V.R., *Discussion of Christofides conjecture regarding Wang's premium principle*, ASTIN BULLETIN, 1999, Vol.29, №2, pp: 191-195.
- [53] Zwet W.R., *A strong law for linear functions of order statistics*, The Annals of Probability, 1980, Vol.8, №5, pp: 986-990.
- [54] Ирхина Н.А., *Принцип Ванга подсчета премии в страховании и некоторые критерии сводимости*, Обзорение прикладной и промышленной математики, 2009, Том 16, №2, стр: 262-263.
- [55] Ирхина Н.А., *Обобщение достаточного критерия сводимости принципа Ванга*, Обзорение прикладной и промышленной математики, 2009, Том 16, №4, стр: 594-606.
- [56] Ирхина Н.А., *Принцип Ванга подсчета премии и проблема сводимости в теории страхования*, Тезисы докладов секции "Математика и механика" Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2009", 2009, стр: 28-29.
- [57] Ирхина Н.А., *Об одном достаточном условии сводимости для принципа Ванга*, Теория вероятностей и ее применения, 2010, Том 55, №1, стр: 148-156.

- [58] Ирхина Н.А., *Максимизация чувствительности РНР-премии для семейств рисков, распределенных по Парето*, Вестник МГУ, Сер. 1. Математика. Механика, 2010, №4, стр: 28-33.
- [59] Ирхина Н.А., *Экономия от совместного страхования рисков по принципу Ванга*, Деп. в ВИНТИ № 549-В2010, 35 стр.
- [60] Ирхина Н.А., *Предельные теоремы и оценки для премий Ванга*, Деп. в ВИНТИ № 550-В2010, 25 стр.
- [61] Ирхина Н.А., *Пример Янг и его обобщения*, Материалы Международного молодежного научного форума "Ломоносов-2010"/ Отв. ред. И.А. Алешковский, П.Н. Костылев, А.И. Андреев, А.В. Андриянов. [Электронный ресурс] - М.: МАКС Пресс, 2010. [http : //lomonosov – msu.ru/archive/Lomonosov_2010/index.htm](http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2010/index.htm).