



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.383
MSC 2010: 34K11

Компенсация погрешностей и учет нелинейности колебаний вибрационного кольцевого микрогирокопа в режиме датчика угловой скорости

Д. А. Маслов, И. В. Меркурьев

Исследуется динамика резонатора вибрационного кольцевого микрогирокопа в разомкнутом и в компенсационном режимах функционирования датчика угловой скорости. Используется математическая модель вынужденных колебаний тонкого упругого резонатора, учитывающая разностотность, разнородность, параметры управляющих воздействий на резонатор и коэффициент нелинейности. При помощи метода усреднения Крылова – Боголюбова исследована динамика резонатора в медленных переменных, измеряемых электронным контуром прибора. Получены формулы для определения угловой скорости при нелинейных колебаниях резонатора с алгоритмической компенсацией указанных дефектов при работе гироскопа в разомкнутом режиме функционирования датчика угловой скорости. Приведены управляющие сигналы, учитывающие дефекты гироскопа при работе гироскопа в компенсационном режиме датчика угловой скорости. Проведено численное моделирование процесса определения угловой скорости в рассматриваемых режимах функционирования гироскопа.

Ключевые слова: вибрационный кольцевой микрогирокоп, датчик угловой скорости, нелинейные колебания, компенсация дрейфа

Получено 09 января 2017 года
После доработки 15 апреля 2017 года

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00772-а, № 16-08-01269-а).

Маслов Дмитрий Александрович
MaslovDmA@mpei.ru
Меркурьев Игорь Владимирович
MercuryevIV@yandex.ru
Национальный исследовательский университет «МЭИ»
111250, Россия, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14

Введение

В настоящее время вопросам совершенствования микромеханических гироскопов, работающих в режиме датчика угловой скорости, уделяется большое внимание [1–3]. Гироскопы такого типа находят широкое применение в автомобильной электронике, медицинской технике, робототехнике, в товарах широкого потребления. Микромеханические гироскопы с кольцевым резонатором производит фирма Silicon Sensing (Великобритания). Разработкой и исследованием таких гироскопов занимается Мичиганский университет [4, 5] и Институт электроники Китайской академии наук [6], лаборатория микросистем Национального исследовательского университета МИЭТ [7], Раменское приборостроительное бюро [8], АО «Инерциальные технологии «Технокомплекс» [9], Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения [10].

В [7] разработана математическая модель колебаний кольцевого микрогироскопа в разомкнутом режиме функционирования датчика угловой скорости и представлены результаты численного моделирования. В работе [10] проведено исследование динамики кольцевого микрогироскопа, работающего в режиме датчика угловой скорости. Дан анализ технических характеристик микромеханического волнового гироскопа как единой микромеханической системы, содержащей механическую часть (резонатор) и электронные модули. Рассмотрены вопросы возбуждения и управления колебаниями резонатора для достижения требуемых характеристик по чувствительности, линейности и рабочей полосе частот пропускания прибора. Датчик угловой скорости на базе данного микрогироскопа рассматривается также в [11]. Однако в этих работах не рассматривается алгоритмическая и силовая компенсация дефектов резонатора.

В данной работе ставится задача компенсации погрешностей вибрационного кольцевого микрогироскопа, вызванных нелинейностью колебаний резонатора и его дефектами, при работе гироскопа в режиме датчика угловой скорости.

Уравнения нелинейных колебаний резонатора

Рассмотрим кольцевой микромеханический гироскоп [7], резонатор которого представляет собой тонкое упругое кольцо 2, связанное с основанием 1 с помощью торсионов 3 (рис. 1).

Осевая линия резонатора в недеформированном состоянии представляет собой окружность радиусом R . Колебания резонатора возбуждаются и регистрируются системой управляющих и измерительных контуров. Каждый контур образован двумя ближайшими тор-

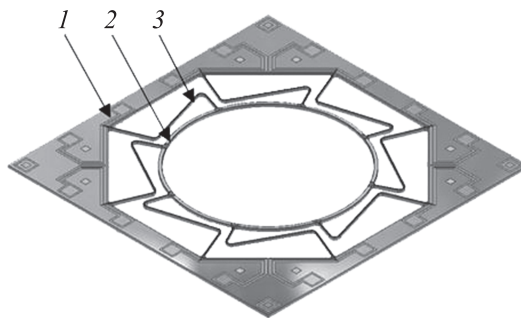


Рис. 1. Кольцевой микромеханический гироскоп.

сионами и участком резонатора с окружным размером $\pi/4$. Ток, протекающий по контуру, находящемуся в постоянном магнитном поле, вызывает силы Ампера, возбуждающие колебания.

Вторая основная форма колебаний тонкого упругого кольцевого резонатора представляет собой суперпозицию двух нормальных форм (стоячих волн колебаний), которые повернуты относительно друг друга на угол $\pi/4$. В режиме вынужденных колебаний с помощью системы управляющих контуров возбуждается первичная нормальная форма колебаний резонатора. При вращении основания гироскопа возникает вторичная нормальная форма, пучности которой совпадают с узлами первичной нормальной формы. Как показано в работах [12, 13], в разомкнутом режиме амплитуда вторичной нормальной формы пропорциональна угловой скорости основания гироскопа, то есть гироскоп является датчиком угловой скорости.

Предположим, что основание 1 (рис. 1) вращается относительно оси, перпендикулярной его плоскости, с угловой скоростью Ω , которую в дальнейшем будем считать малой по сравнению с резонансной частотой ω колебаний упругого кольца. Кроме того, пусть Ω будет медленной функцией времени. Система дифференциальных уравнений, описывающая динамику резонатора в одномодовом приближении, имеет вид [13, 14]

$$\begin{aligned} \ddot{f} + \omega^2 f &= -(c^* + h_c^*)f - (n^* + h_s^*)g - (\gamma + b_c)\dot{f} - (v + b_s)\dot{g} + \xi^*(f^2 + g^2)f - \\ &\quad - u_1^* \sin \omega_0 t + u_2^* \cos \omega_0 t, \\ \ddot{g} + \omega^2 g &= -(c^* - h_c^*)g - (-n^* + h_s^*)f - (\gamma - b_c)\dot{g} - (-v + b_s)\dot{f} + \xi^*(f^2 + g^2)g - \\ &\quad - u_3^* \sin \omega_0 t + u_4^* \cos \omega_0 t, \end{aligned} \quad (1)$$

где f и g — обобщенные координаты основной формы колебаний резонатора в двух фиксированных точках, отстоящих друг от друга под углом в 45° , c^* и n^* — параметры позиционных сил, $h_s^* = h^* \sin 4\alpha$, $h_c^* = h^* \cos 4\alpha$ и $b_s = b \sin 4\beta$, $b_c = b \cos 4\beta$ — компоненты, характеризующие упругую и вязкую анизотропию соответственно, h^* и b — модули разночастотности и разноточности, α и β — углы ориентации главных осей жесткости и главных осей диссипации относительно отсчетных осей, $\gamma = \omega/Q$ — коэффициент демпфирования, Q — добротность колебательного контура, $v = 8\Omega/5$ — параметр, характеризующий угловую скорость, ξ^* — коэффициент нелинейности, $u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*$ — нормализованные сигналы управления колебаниями резонатора, пропорциональные силам, ω_0 — частота внешнего гармонического возбуждения основной моды колебаний резонатора, точкой обозначено дифференцирование по времени t . В уравнениях (1) опущены слагаемые, пропорциональные квадрату угловой скорости основания и угловому ускорению основания.

Методики определения коэффициентов уравнений (1) без учета нелинейности представлены в работах [11, 14], а с учетом коэффициента нелинейности — в [15, 16]. Нелинейные эффекты в волновом твердотельном гироскопе рассматривались в [12, 13, 17].

Сигналы управления $u_1^*, \dots, u_4^*$ полагаются медленно изменяющимися функциями времени. В частном случае управления по разомкнутому контуру функции $u_1^*, \dots, u_4^*$ являются константами. В компенсационном режиме функционирования значения $u_1^*, \dots, u_4^*$ медленно изменяются в виде обратной связи по измерению медленных переменных p_1, q_1, p_2, q_2 . Будем полагать, что частота внешнего воздействия близка к резонансной частоте колебательного контура, то есть

$$\omega_0 = \omega + \lambda, \quad \lambda \ll \omega,$$

где λ — поправка к частоте, которая вводится для настройки резонансного режима работы гироскопа на подвижном основании.

Решение системы (1) имеет колебательный характер с характерной резонансной частотой ω порядка 10 кГц. При отсутствии возмущений в правой части (1) решение системы будет чисто гармоническим. Малые возмущения вызваны инструментальными погрешностями изготовления резонатора, неравномерным демпфированием колебаний, гироскопическими силами и нелинейностью, присущей гироскопам класса обобщенного маятника Фуко [14]. Малые позиционные и скоростные силы в правой части уравнений (1) приводят к малому изменению резонансной частоты на величину порядка 1 Гц, что позволяет применить асимптотические методы исследования задачи. К системе (1) применим метод усреднения Крылова – Боголюбова [18]. Для этого приведем ее к стандартному виду посредством перехода от переменных $f, \dot{f}, g, \dot{g}$ к медленным переменным p_1, q_1, p_2, q_2 по следующим формулам:

$$\begin{aligned} f &= p_1 \sin \omega_0 t + q_1 \cos \omega_0 t, & \dot{f} &= p_1 \omega_0 \cos \omega_0 t - q_1 \omega_0 \sin \omega_0 t, \\ g &= p_2 \sin \omega_0 t + q_2 \cos \omega_0 t, & \dot{g} &= p_2 \omega_0 \cos \omega_0 t - q_2 \omega_0 \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), разрешая полученную систему уравнений относительно медленных переменных $\dot{p}_1, \dot{q}_1, \dot{p}_2, \dot{q}_2$ и проводя осреднение по явно входящему времени [13, 14], приходим к системе уравнений движения в медленных переменных p_1, q_1, p_2, q_2 в первом приближении метода осреднения:

$$\begin{aligned} 2\dot{q}_1 &= -\gamma q_1 + u_1 - b_c q_1 + h_c p_1 + c p_1 - b_s q_2 + h_s p_2 + n p_2 - 2\lambda p_1 - v q_2 + \xi k_1, \\ 2\dot{p}_1 &= -\gamma p_1 + u_2 - b_c p_1 - h_c q_1 - c q_1 - b_s p_2 - h_s q_2 - n q_2 - v p_2 + 2\lambda q_1 + \xi k_2, \\ 2\dot{q}_2 &= -\gamma q_2 + u_3 + b_c q_2 - h_c p_2 + c p_2 - b_s q_1 + h_s p_1 - n p_1 - 2\lambda p_2 + v q_1 + \xi k_3, \\ 2\dot{p}_2 &= -\gamma p_2 + u_4 + b_c p_2 + h_c q_2 - c q_2 - b_s p_1 - h_s q_1 + n q_1 + v p_1 + 2\lambda q_2 + \xi k_4, \end{aligned} \quad (3)$$

где $k_1 = -p_1 E - q_2 X$, $k_2 = q_1 E - p_2 X$, $k_3 = -p_2 E + q_1 X$, $k_4 = q_2 E + p_1 X$, $E = 3(q_1^2 + p_1^2 + q_2^2 + p_2^2)/4$, $X = (p_2 q_1 - p_1 q_2)/2$ – нелинейные слагаемые модели, являющиеся первыми интегралами свободной системы, $c = c^*/\omega$, $n = n^*/\omega$, $h_s = h_s^*/\omega$, $h_c = h_c^*/\omega$, $\xi = \xi^*/\omega$, $u_i = u_i^*/\omega$ ($i = 1, \dots, 4$).

Сигналы управления $u_1, \dots, u_4$ являются входными сигналами системы (3), позволяющими стабилизировать амплитуды колебаний двух нормальных форм, а также провести точную резонансную настройку колебательного контура.

Отметим, что в электронном контуре гироскопа физически реализуется схема осреднения Крылова – Боголюбова: измеряемые индукционными датчиками высокочастотные функции времени f, g с помощью контуров обработки сигналов [13] представляются в виде (2). Таким образом, медленные переменные p_1, q_1, p_2, q_2 системы (3) являются измеряемыми.

Уравнения динамики (3) будут использоваться далее для определения параметров гироскопа, для силовой и аналитической компенсации его погрешностей.

Динамика резонатора в разомкнутом режиме функционирования датчика угловой скорости

Вначале рассмотрим случай возбуждения первичных колебаний в разомкнутом режиме функционирования. Определим стационарные значения системы (3) при постоянных значениях управляющих сигналов: $u_1 = u_0$, $u_2 = u_3 = u_4 = 0$, где u_0 – заданная амплитуда входного воздействия для возбуждения первичной нормальной формы колебаний.

Для определения стационарных значений приравняем нулю правую часть дифференциальных уравнений (3)

$$\begin{aligned} -\gamma q_1 - b_c q_1 + h_c p_1 + c p_1 - b_s q_2 + h_s p_2 + n p_2 - 2\lambda p_1 - v q_2 + \xi k_1 &= -u_0, \\ -\gamma p_1 - b_c p_1 - h_c q_1 - c q_1 - b_s p_2 - h_s q_2 - n q_2 - v p_2 + 2\lambda q_1 + \xi k_2 &= 0, \\ -\gamma q_2 + b_c q_2 - h_c p_2 + c p_2 - b_s q_1 + h_s p_1 - n p_1 - 2\lambda p_2 + v q_1 + \xi k_3 &= 0, \\ -\gamma p_2 + b_c p_2 + h_c q_2 - c q_2 - b_s p_1 - h_s q_1 + n q_1 + v p_1 + 2\lambda q_2 + \xi k_4 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим сначала линейный случай ($\xi = 0$) и разрешим полученную систему алгебраических уравнений относительно p_1, q_1, p_2, q_2 . В этом случае система неоднородных уравнений (4) является линейной, и если определитель ее матрицы отличен от нуля $\Delta = \det A \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами

$$q_1 = \Delta_1/\Delta, \quad p_1 = \Delta_2/\Delta, \quad q_2 = \Delta_3/\Delta, \quad p_2 = \Delta_4/\Delta,$$

где Δ_i — определитель матрицы, полученной из матрицы системы заменой i -го столбца столбцом свободных членов.

Для исследования стационарного решения системы (4) удобно перейти к медленным переменным амплитуда–фаза A, B, φ, ψ :

$$q_1 = A \sin \varphi, \quad p_1 = A \cos \varphi, \quad q_2 = B \sin \psi, \quad p_2 = B \cos \psi. \quad (5)$$

Из (5) следует, что квадраты амплитуд имеют вид

$$\begin{aligned} A^2 &= q_1^2 + p_1^2 = ((\gamma - b_c)^2 + (c - 2\lambda - h_c)^2) u_0^2 / \Delta, \\ B^2 &= q_2^2 + p_2^2 = ((v + b_s)^2 + (n - h_s)^2) u_0^2 / \Delta. \end{aligned}$$

На подвижном основании отношение амплитуд стационарных колебаний равно

$$\frac{B}{A} = \sqrt{\frac{(v + b_s)^2 + (n - h_s)^2}{(\gamma - b_c)^2 + (c - 2\lambda - h_c)^2}}.$$

Если упругой h_s, h_c и вязкой анизотропией b_s, b_c резонатора, а также параметрами позиционных сил c и n можно пренебречь, то есть $h_s = h_c = b_s = b_c = c = n = 0$, то выражения для амплитуд принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} A^2 &= q_1^2 + p_1^2 = \frac{(\gamma^2 + 4\lambda^2) u_0^2}{\gamma^4 + 2(4\lambda^2 + v^2)\gamma^2 + (\lambda^2 - v^2)^2}, \\ B^2 &= q_2^2 + p_2^2 = \frac{v^2 u_0^2}{\gamma^4 + 2(4\lambda^2 + v^2)\gamma^2 + (4\lambda^2 - v^2)^2}. \end{aligned}$$

В случае неподвижного основания ($v = 0$) имеем $A = u_0/\sqrt{\gamma^2 + 4\lambda^2}$, $B = 0$.

При резонансном совмещении частот ($\lambda = 0$) на неподвижном основании получим амплитуды колебаний резонатора: $A = u_0/\gamma$, $B = 0$. Учитывая, что коэффициент демпфирования γ обратно пропорционален добротности колебательного контура Q , по измеренной амплитуде колебаний можно найти амплитуду входного воздействия u_0 .

Отметим, что увеличение амплитуды колебаний до заданного уровня может быть обеспечено за счет увеличения добротности колебательного контура и резонансной настройки колебательного контура.

На подвижном основании отношение амплитуд стационарных колебаний пропорционально модулю угловой скорости основания:

$$\frac{B}{A} = \frac{v}{\sqrt{\gamma^2 + 4\lambda^2}}.$$

Угловая скорость в этом случае определяется по формуле

$$v = B\sqrt{\gamma^2 + 4\lambda^2}/A. \quad (6)$$

При нулевой частотной расстройке ($\lambda = 0$) формула (6) с учетом обозначений совпадает с известной расчетной зависимостью для определения угловой скорости основания [13]

$$\Omega = \frac{5}{8} \frac{B}{A} \frac{\omega}{Q}. \quad (7)$$

Таким образом, в режиме вынужденных колебаний гироскоп является датчиком угловой скорости.

Время выхода на режим установившихся колебаний при значении коэффициента демпфирования $\gamma = 17.6 \text{ с}^{-1}$, которое получено [7] при $\omega = 8.80 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$, $Q = 5000$, составляет примерно 0.5 с (рис. 2). Зависимости медленных переменных от времени определялись из системы (3) при равенстве нулю всех параметров, кроме коэффициента демпфирования γ и сигнала u_0 . Пунктирная линия соответствует амплитуде колебаний $A = \sqrt{q_1^2 + p_1^2}$, а сплошная линия — амплитуде $B = \sqrt{q_2^2 + p_2^2}$. Для нормализации использовалось максимальное характерное значение амплитуды колебаний. При построении решения задавались следующие начальные значения медленных переменных: $q_{10} = 0$, $p_{10} = 0$, $q_{20} = 0.5$, $p_{20} = 0$.

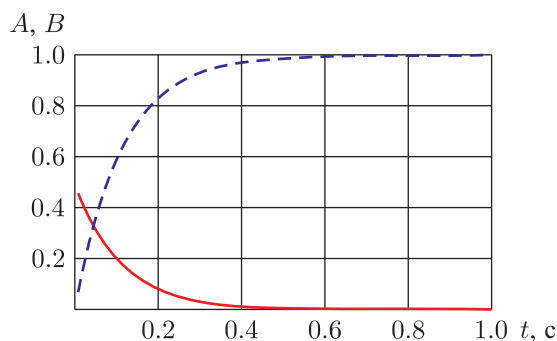


Рис. 2. Выход на режим установившихся колебаний.

Отметим, что для вычисления угловой скорости с учетом нелинейности колебаний можно использовать формулы, получаемые из уравнений (4):

$$v = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} / \sqrt{q_1^2 + p_1^2}, \quad (8)$$

$$v = a_1 / q_1, \quad (9)$$

$$v = a_2 / p_1, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= (\xi X - b_s)q_1 + u_3 + (-n + h_s)p_1 + (c - 2\lambda - \xi E - h_c)p_2 + (-\gamma + b_c)q_2, \\ a_2 &= (\xi X - b_s)p_1 + u_4 + (n - h_s)q_1 + (-c + 2\lambda + \xi E + h_c)q_2 + (-\gamma + b_c)p_2. \end{aligned}$$

Если компонентами упругой h_s , h_c и вязкой анизотропии b_s , b_c резонатора, а также параметрами позиционных сил c и n и нелинейностью можно пренебречь, то есть $h_s = h_c = b_s = b_c = c = n = \xi = 0$, то выражения для определения скорости основания (8) при $u_3 = u_4 = 0$ совпадает с формулой (6).

Если $q_1 > p_1$, то желательно для повышения точности вычисления использовать формулу (9), а если $p_1 > q_1$, то применять выражение (10).

Параметры γ , v , b_c , b_s , c , n , h_c , h_s , u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ξ определяются по методике, предложенной в [15, 16]. В качестве калибровочных уравнений используется система уравнений (4), записанная следующим образом:

$$Gx = d, \quad (11)$$

где

$$G = \begin{pmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_1 & -q_2 & p_1 & p_2 & p_1 & p_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & k_1 \\ -p_1 & -p_2 & -p_1 & -p_2 & -q_1 & -q_2 & -q_1 & -q_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & k_2 \\ -q_2 & q_1 & q_2 & -q_1 & p_2 & -p_1 & -p_2 & p_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & k_3 \\ -p_2 & p_1 & p_2 & -p_1 & -q_2 & q_1 & q_2 & -q_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & k_4 \end{pmatrix},$$

$x = (\gamma, v, b_c, b_s, c, n, h_c, h_s, u_1, u_2, u_3, u_4, \xi)^T$ — вектор параметров, $d = (2\lambda p_1, -2\lambda q_1, 2\lambda p_2, -2\lambda q_2)^T$ — измеряемый вектор, $k_1 = -p_1 E - q_2 X$, $k_2 = q_1 E - p_2 X$, $k_3 = -p_2 E + q_1 X$, $k_4 = q_2 E + p_1 X$.

В системе алгебраических уравнений (11) измеряемыми являются стационарные значения p_1 , q_1 , p_2 , q_2 , полученные при заданной частотной расстройке λ .

Составляется переопределенная алгебраическая система уравнений из блоков (11), соответствующих заданной частотной расстройке. По методу наименьших квадратов получим оценку $\hat{x}$ параметров математической модели

$$\hat{x} = (G^T G)^{-1} G^T d.$$

Искомые оценки минимизируют сумму квадратов отклонений

$$S = (d - G\hat{x})^T (d - G\hat{x})$$

и остаточную дисперсию.

Разработанная методика определения параметров гироскопа с учетом нелинейности колебаний кольцевого резонатора позволяет проводить испытания при больших амплитудах колебаний, при которых отношение сигнала к шуму достаточно высокое.

На рисунке 3 представлены экспериментальные и расчетные амплитудно-фазочастотные характеристики (АФЧХ) вибрационного кольцевого микрогироскопа [15]. Модули радиус-векторов $(p_1, q_1)^T$ и $(p_2, q_2)^T$ равны амплитудам A и B , а фазы колебаний φ и ψ определяются положением этих векторов на плоскости. Как следует из рисунка 3а, экспериментальные и расчетные данные, полученные по результатам идентификации параметров линейной математической модели ВТГ, достаточно близки, однако имеется систематическая погрешность.

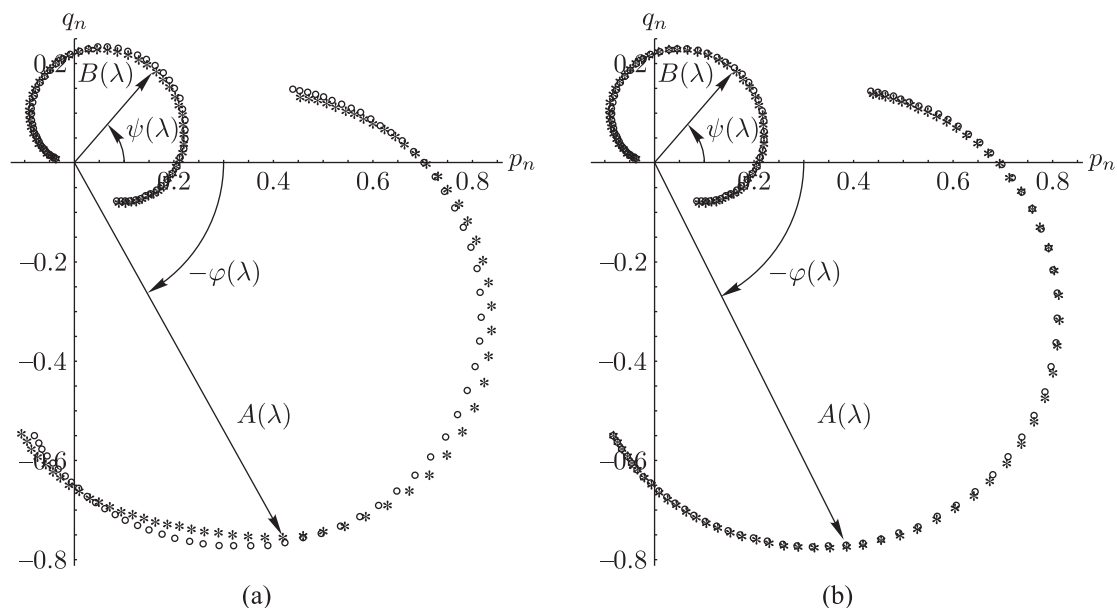


Рис. 3. Амплитудно-фазочастотные характеристики микрогироскопа: а) экспериментальные данные и значения, рассчитанные по линейной модели, б) экспериментальные данные и значения, рассчитанные по нелинейной модели. Кругом обозначены экспериментальные данные, а звездочкой — значения, рассчитанные по математическим моделям.

На рисунке 3б экспериментальная и расчетная АФЧХ, полученная по результатам идентификации параметров нелинейной математической модели микрогироскопа, практически совпадают. В [15] показано, что учет коэффициента нелинейности позволяет уменьшить остаточное среднеквадратическое отклонение $\hat{\sigma}$ в 3.2 раза. Это указывает на то, что при достаточно больших амплитудах колебаний резонатора учет нелинейности значительно повышает точность определения параметров вибрационного кольцевого микрогироскопа. Учет найденных параметров и коэффициента нелинейности позволит повысить точность прибора за счет работы его при больших амплитудах колебаний резонатора.

Формулы (8), (9), (10), в отличие от (6), учитывают алгоритмически значения дефектов резонатора и нелинейность колебаний, что позволяет измерять скорость при больших амплитудах, при которых отношение сигнала к шуму выше. Применение этих формул позволит увеличить диапазон измеряемой угловой скорости (полосы пропускания гироскопа). Таким образом, использование предложенных формул позволит повысить точность гироскопа, работающего в разомкнутом режиме функционирования датчика угловой скорости.

Управление движением резонатора в компенсационном режиме датчика угловой скорости

Рассмотрим функционирование микрогироскопа в режиме датчика угловой скорости компенсационного типа. В этом случае задается первичная возбуждающая волна с заданным значением амплитуды колебаний. Из-за вращения основания возникает вторая пульсирующая волна, пучности которой располагаются под углом $\pi/4$ к пучностям первичной возбуждающей волны. Целью управления является возбуждение и поддержание заданной амплитуды колебаний первичной возбуждающей волны и полная компенсация колебаний

второй пульсирующей волны. Сигналы управления, необходимые для компенсации, позволяют определить угловую скорость основания гироскопа.

Зададим программные значения амплитуд колебаний: $\bar{A} = \sqrt{\bar{q}_1^2 + \bar{p}_1^2}$, $\bar{B} = 0$, где $\bar{q}_1$, $\bar{p}_1$ — заданные значения медленных переменных.

Пропорциональный регулятор. Вначале построим пропорциональный регулятор (П-регулятор). Зададим управление $u_1, \dots, u_4$ в виде обратной связи по измерению медленных переменных p_1, q_1, p_2, q_2 :

$$\begin{aligned} u_1 &= b_c q_1 - (c + h_c - \lambda) p_1 + b_s q_2 - (h_s + n) p_2 + \xi(E p_1 + X q_2) - K_1(q_1 - \bar{q}_1), \\ u_2 &= (c + h_c - \lambda) q_1 + b_c p_1 + (h_s + n) q_2 + b_s p_2 + \xi(-E q_1 + X p_2) - K_1(p_1 - \bar{p}_1), \\ u_3 &= b_s q_1 - (h_s - n) p_1 - b_c q_2 + (-c + h_c + \lambda) p_2 + \xi(-X q_1 + E p_2) - K_1 q_2, \\ u_4 &= (h_s - n) q_1 + b_s p_1 - (-c + h_c + \lambda) q_2 - b_c p_2 + \xi(-X p_1 - E q_2) - K_1 p_2, \end{aligned} \quad (12)$$

где K_1 — коэффициент усиления в цепи обратной связи.

Подставляя (12) в (3), получаем уравнения замкнутой системы управления:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= -(K_1 + \gamma) q_1 + v q_2 + K_1 \bar{q}_1 / 2, \\ \dot{p}_1 &= -(K_1 + \gamma) p_1 + v p_2 + K_1 \bar{p}_1 / 2, \\ \dot{q}_2 &= (-v q_1 - (K_1 + \gamma) q_2) / 2, \\ \dot{p}_2 &= (-v p_1 - (K_1 + \gamma) p_2) / 2. \end{aligned} \quad (13)$$

Для исследования устойчивости замкнутой системы дифференциальных уравнений (13) построим характеристическое уравнение

$$((s + K_1 + \gamma)^2 + v^2)^2 = 0$$

и найдем его корни

$$s_{1,2} = -(K_1 + \gamma + iv), \quad s_{3,4} = -(K_1 + \gamma - iv).$$

Так как коэффициент K_1 и коэффициент демпфирования γ принимают только положительные значения, действительные части корней характеристического уравнения отрицательны. Следовательно, решение системы асимптотически устойчиво.

Таким образом, решение замкнутой системы (13) можно представить в виде суммы асимптотически устойчивого решения, зависящего от начальных условий $q_1(0) = q_{10}$, $p_1(0) = p_{10}$, $q_2(0) = q_{20}$, $p_2(0) = p_{20}$, и программных значений $\bar{q}_1$, $\bar{p}_1$,

$$\begin{aligned} q_{1u} &= e^{-(K_1 + \gamma)t/2} [q_{10} \cos vt + q_{20} \sin vt + K_1(v \sin vt - (K_1 + \gamma) \cos vt) \bar{q}_1 / P], \\ p_{1u} &= e^{-(K_1 + \gamma)t/2} [p_{10} \cos vt + p_{20} \sin vt + K_1(v \sin vt - (K_1 + \gamma) \cos vt) \bar{p}_1 / P], \\ q_{2u} &= e^{-(K_1 + \gamma)t/2} [q_{20} \cos vt - q_{10} \sin vt + K_1(v \cos vt + (K_1 + \gamma) \sin vt) \bar{q}_1 / P], \\ p_{2u} &= e^{-(K_1 + \gamma)t/2} [p_{20} \cos vt - p_{10} \sin vt + K_1(v \cos vt + (K_1 + \gamma) \sin vt) \bar{p}_1 / P], \end{aligned}$$

и частного решения

$$\begin{aligned} q_{1*} &= K_1 \bar{q}_1 (K_1 + \gamma) / P, & q_{2*} &= -K_1 \bar{q}_1 v / P, \\ p_{1*} &= K_1 \bar{p}_1 (K_1 + \gamma) / P, & p_{2*} &= -K_1 \bar{p}_1 v / P, \end{aligned} \quad (14)$$

где $P = v^2 + (K_1 + \gamma)^2$.

Анализ установившегося решения (14) показывает, что имеется статическая ошибка регулирования, вызванная наличием угловой скорости основания. Значения установившихся амплитуд колебаний отличаются от программных значений на величину, зависящую от коэффициента усиления K_1 , угловой скорости основания v и коэффициента демпфирования γ .

Отметим, что отношение установившихся значений (14) пропорционально угловой скорости основания:

$$\frac{p_{2*}}{p_{1*}} = \frac{q_{2*}}{q_{1*}} = -\frac{\hat{v}}{K_1 + \gamma}.$$

Таким образом, оценка угловой скорости основания $\hat{v}$ может быть произведена по измерениям установившихся значений:

$$\hat{v} = -(K_1 + \gamma) \frac{p_{2*}}{p_{1*}}, \quad \hat{v} = -(K_1 + \gamma) \frac{q_{2*}}{q_{1*}}. \quad (15)$$

Точность определения угловой скорости основания зависит от уровня случайных и систематических погрешностей в измерениях медленных переменных.

Приведенные выше формулы для расчета компенсационного режима подтверждаются результатами моделирования (рис. 4, 5), которое проводилось при близких к существующим конструктивным параметрам гироскопа [7] с кольцевым резонатором радиуса $R = 3$ мм. Пусть гироскоп находится на подвижном основании, вращающемся с постоянной угловой скоростью $\Omega = 300$ °/с. При построении решения зададим следующие числовые значения параметров системы: $K_1 = 500$ с⁻¹, $\bar{q}_1 = 1$, $\bar{p}_1 = 0$, $q_{10} = 0$, $p_{10} = 1$, $q_{20} = 0.6$, $p_{20} = 0.3$.

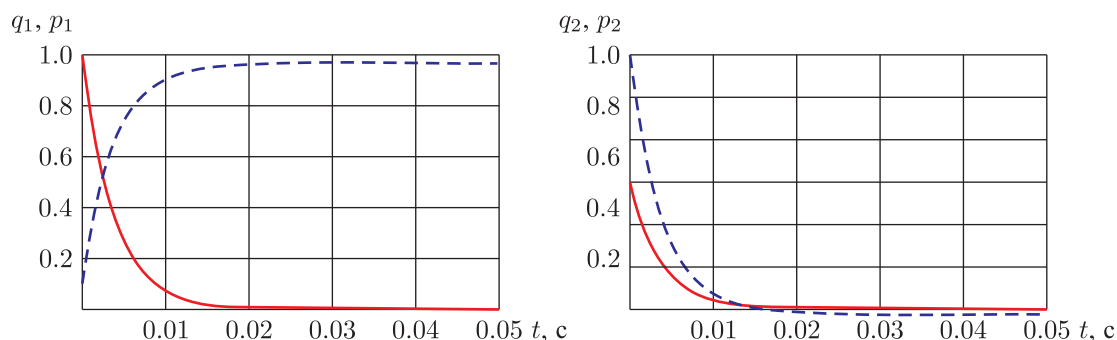


Рис. 4. Зависимость медленных переменных от времени t (переменные p_1 , p_2 — сплошная линия, q_1 , q_2 — пунктирная).

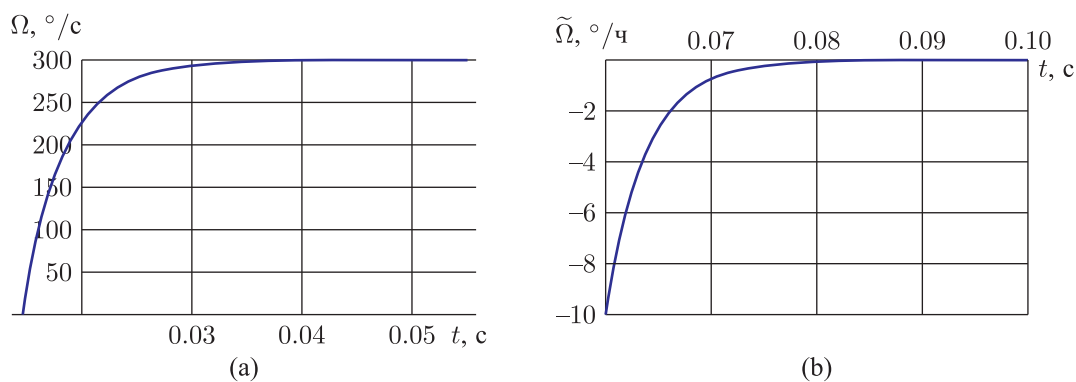


Рис. 5. Зависимость расчетной скорости от времени (а) и невязка в измерениях угловой скорости (б).

Время выхода на режим установившихся колебаний составляет примерно 0.02 с (рис. 4). Значения q_1 , q_2 в установившемся режиме не совпадают с заданными значениями медленных переменных, то есть имеется статическая ошибка регулирования, вызванная наличием угловой скорости основания. Отклонения q_1 , q_2 вызывают дрейф, который компенсируется управляющими сигналами (12). Из рисунка 5, на котором представлена зависимость угловой скорости основания от времени, рассчитанная по второй формуле (15), видно, что время функциональной готовности прибора существенно сокращается.

Применение в обратной связи пропорционального регулятора позволит существенно сократить время функциональной готовности прибора к работе.

Пропорционально-интегральный регулятор. Далее построим пропорционально-интегральный регулятор (ПИ-регулятор), позволяющий устранить статическую ошибку регулирования. Зададим управление $u_1, \dots, u_4$ в виде обратной связи по измерению медленных переменных p_1 , q_1 , p_2 , q_2 :

$$\begin{aligned} u_1 &= b_c q_1 - (c + h_c) p_1 + b_s q_2 - (h_s + n) p_2 + \xi(E p_1 + X q_2) - K_1 (q_1 - \bar{q}_1) - K_2 \int_0^t (q_1 - \bar{q}_1) dt_1, \\ u_2 &= (c + h_c) q_1 + b_c p_1 + (h_s + n) q_2 + b_s p_2 + \xi(-E q_1 + X p_2) - K_1 (p_1 - \bar{p}_1) - K_2 \int_0^t (p_1 - \bar{p}_1) dt_1, \\ u_3 &= b_s q_1 - (h_s - n) p_1 - b_c q_2 + (-c + h_c) p_2 + \xi(-X q_1 + E p_2) - K_1 q_2 - K_2 \int_0^t q_2 dt_1, \\ u_4 &= (h_s - n) q_1 + b_s p_1 - (-c + h_c) q_2 - b_c p_2 + \xi(-X p_1 - E q_2) - K_1 p_2 - K_2 \int_0^t p_2 dt_1, \end{aligned} \quad (16)$$

где K_1 и K_2 — коэффициенты усиления в цепи обратной связи.

Для исследования замкнутой системы управления введем новые переменные

$$z_1 = \int_0^t (q_1 - \bar{q}_1) dt_1, \quad z_2 = \int_0^t (p_1 - \bar{p}_1) dt_1, \quad z_3 = \int_0^t q_2 dt_1, \quad z_4 = \int_0^t p_2 dt_1$$

и соответствующие дифференциальные уравнения

$$\dot{z}_1 = q_1 - \bar{q}_1, \quad \dot{z}_2 = p_1 - \bar{p}_1, \quad \dot{z}_3 = q_2, \quad \dot{z}_4 = p_2$$

с начальными условиями

$$z_1(0) = z_2(0) = z_3(0) = z_4(0) = 0.$$

Подставляя (16) в (3), получим уравнения замкнутой системы управления:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= (-\gamma q_1 - \lambda p_1 + v q_2 - K_1 q_1 - K_2 z_1 + K_1 \bar{q}_1) / 2, \\ \dot{p}_1 &= (-\gamma p_1 + \lambda q_1 + v p_2 - K_1 p_1 - K_2 z_2 + K_1 \bar{p}_1) / 2, \\ \dot{q}_2 &= (-\gamma q_2 - \lambda p_2 - v q_1 - K_1 q_2 - K_2 z_3) / 2, \\ \dot{p}_2 &= (-\gamma p_2 + \lambda q_2 - v p_1 - K_1 p_2 - K_2 z_4) / 2, \\ \dot{z}_1 &= q_1 - \bar{q}_1, \quad \dot{z}_2 = p_1 - \bar{p}_1, \quad \dot{z}_3 = q_2, \quad \dot{z}_4 = p_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Коэффициенты усиления K_1, K_2 выберем из условия обеспечения заданной степени устойчивости замкнутой системы. Таким образом, решение замкнутой системы (17) можно представить в виде суммы асимптотически устойчивого решения, зависящего от начальных условий и программных значений $\bar{q}_1, \bar{p}_1$, и стационарного частного решения

$$\begin{aligned} q_{1*} &= \bar{q}_1, & p_{1*} &= \bar{p}_1, & q_{2*} &= 0, & p_{2*} &= 0, \\ z_{1*} &= -\frac{\lambda \bar{p}_1 + \gamma \bar{q}_1}{K_2}, & z_{2*} &= -\frac{\gamma \bar{p}_1 - \lambda \bar{q}_1}{K_2}, & z_{3*} &= -\frac{v \bar{q}_1}{K_2}, & z_{4*} &= -\frac{v \bar{p}_1}{K_2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Анализ установившегося решения (18) показывает, что статическая ошибка регулирования скомпенсирована. Таким образом, оценка угловой скорости основания $\hat{v}$ может быть произведена по измерениям установившихся значений z_{3*}, z_{4*} из (18):

$$\hat{v} = -\frac{K_2}{\bar{q}_1} \int_0^t q_2 dt_1, \quad \hat{v} = -\frac{K_2}{\bar{p}_1} \int_0^t p_2 dt_1. \quad (19)$$

Как и ранее, точность определения угловой скорости основания зависит от уровня случайных и систематических погрешностей в измерениях медленных переменных.

Кроме того, заметим, что при достаточно большой угловой скорости основания потребуются значительные управляющие сигналы для компенсации амплитуды второй нормальной формы и, как следствие, увеличатся дополнительные погрешности системы управления.

Отметим также, что параметры, характеризующие частотную расстройку λ и коэффициент демпфирования γ , могут быть оценены по измерениям z_{1*}, z_{2*} :

$$\hat{\gamma} = -K_2 \frac{\bar{p}_1 z_{2*} + \bar{q}_1 z_{1*}}{\bar{p}_1^2 + \bar{q}_1^2}, \quad \hat{\lambda} = -K_2 \frac{z_{1*} \bar{p}_1 - z_{2*} \bar{q}_1}{\bar{p}_1^2 + \bar{q}_1^2}.$$

Приведенные выше формулы для расчета компенсационного режима подтверждаются результатами моделирования (рис. 6, 7, 8), которое проводилось при близких к существующим конструктивным параметрам гироскопа [7] с кольцевым резонатором. При построении решения зададим следующие числовые значения параметров системы: $K_1 = 500 \text{ с}^{-1}$, $K_2 = 500 \text{ с}^{-2}$, $\bar{q}_1 = 1$, $\bar{p}_1 = 0$, $q_{10} = 0$, $p_{10} = 1$, $q_{20} = 0.6$, $p_{20} = 0.3$. На рисунках 6, 7 представлены графики переходных процессов по медленным переменным прибора компенсационного типа. Переходные процессы носят аperiодический характер, а установившиеся значения соответствуют заданным $\bar{q}_1 = 1$, $\bar{p}_1 = 0$.

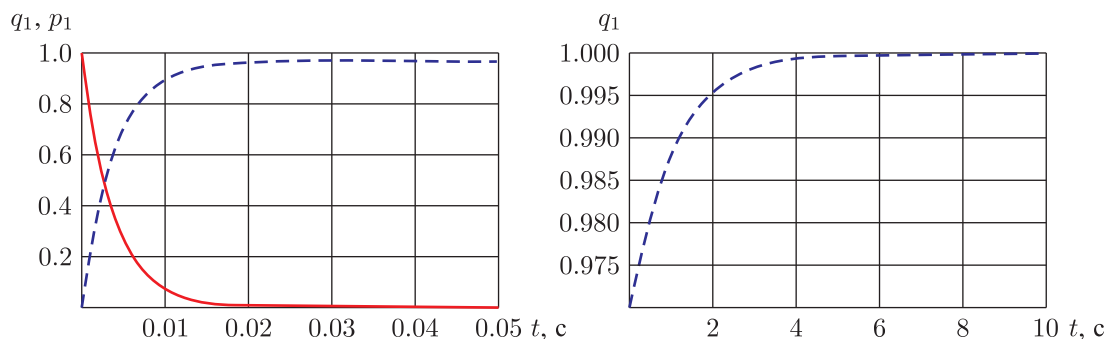


Рис. 6. Зависимость медленных переменных от времени t (переменная p_1 — сплошная линия, q_1 — пунктирная).

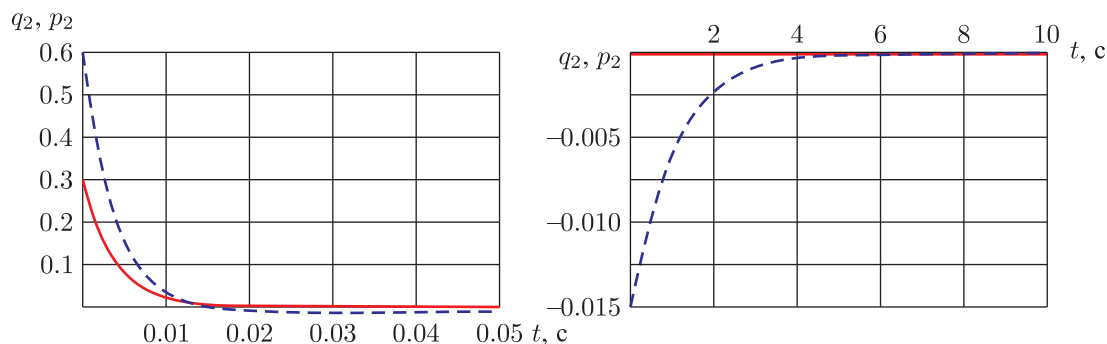


Рис. 7. Зависимость медленных переменных от времени t (переменная p_2 — сплошная линия, q_2 — пунктирная).

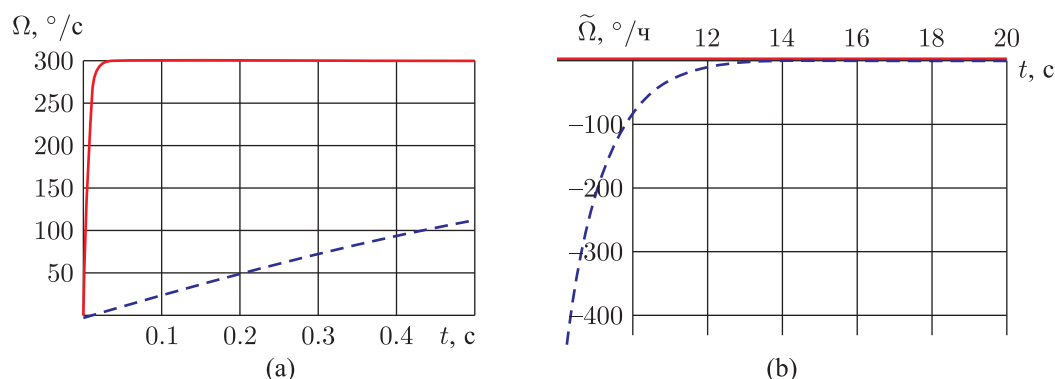


Рис. 8. Зависимость расчетной скорости от времени (а) и невязка в измерениях угловой скорости (б), рассчитанные по формуле (19) — пунктирная линия, а по формуле (20) — сплошная.

Через промежуток времени, равный примерно 0.02 с (рис. 6, 7), медленные переменные приближаются к значениям (14), содержащим статическую ошибку регулирования. В дальнейшем статическая ошибка регулирования компенсируется. Оценим время выхода на установившийся режим колебаний как время, необходимое для уменьшения в 100 раз амплитуды затухающей составляющей. В этом случае время выхода на режим установившихся колебаний составляет 1.65 с (рис. 6b).

Для исследования точности определения угловой скорости основания было проведено математическое моделирование управления волновой картиной колебаний без учета случайных погрешностей в измерениях первичных измерительных сигналов (рис. 8). Учитывая, что после 0.02 секунды $p_2 = 0$, а переменная q_2 изменяется незначительно (рис. 7), принимаем $\dot{q}_2 = 0$. Из третьего уравнения системы (17) получаем формулу для вычисления скорости при $q_1 \neq 0$:

$$\hat{v} = - \left((K_1 + \gamma)q_2 - K_2 \int_0^t q_2 dt_1 \right) / q_1. \quad (20)$$

Результаты оценки угловой скорости совпадают с заданным значением угловой скорости основания. Как видно из рисунков 8а и 8b, время готовности прибора к измерению скорости существенно сокращается при использовании формулы (20). Анализ рисунка 8b показывает, что невязка между заданной скоростью и рассчитанной по формулам (19) и (20) после подавления квадратурной волны колебаний уменьшается с течением времени.

Применение в обратной связи пропорционально-интегрального регулятора, предложенных управляющих сигналов, а также формул (8), (15), (20) позволит повысить точность гироскопа и уменьшить время его готовности.

Заключение

Разработаны алгоритмы определения угловой скорости гироскопа в разомкнутом режиме функционирования с учетом его параметров и нелинейности колебаний резонатора. Для реализации компенсационного режима измерения приведены управляющие сигналы, учитывающие как дефекты гироскопа, так и нелинейности. Предложена формула, сокращающая время готовности прибора к измерению скорости. Учет нелинейности колебаний резонатора в приведенных алгоритмах и при формировании управляющих сигналов позволит повысить отношение сигнала к шуму, а следовательно, и точностные характеристики гироскопа за счет увеличения амплитуды колебаний резонатора.

Список литературы

- [1] Пешехонов В. Г. Современное состояние и перспективы развития гироскопических систем // Гироскопия и навигация, 2011, № 1, с. 3–17.
- [2] Acar C., Shkel A. MEMS vibratory gyroscopes: Structural approaches to improve robustness. New York: Springer, 2009. 260 pp.
- [3] Басараб М. А., Лунин Б. С., Матвеев В. А., Фомичев А. В., Чуманкин Е. А., Юрин А. В. Микриаторные волновые твердотельные гироскопы для малых космических аппаратов // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение, 2014, № 4, с. 80–96.
- [4] Xia D., Yu C., Kong L. The development of micromachined gyroscope structure and circuitry technology // Sensors, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 1394–1473.
- [5] Ayazi F., Najafi K. A HARPSS polysilicon vibrating ring gyroscope // J. Microelectromech. Syst., 2001, vol. 10, no. 2, pp. 169–179.
- [6] Liu J., Chen D., Wang J. Fabrication and test of an electromagnetic vibrating ring gyro based on SOI wafer // J. Electron. (China), 2014, vol. 31, no. 2, pp. 168–173.
- [7] Тимошенко С. П., Анчутин С. А., Плеханов В. Е., Кочурина Е. С., Тимошенко А. С., Зуев Е. В. Разработка математического описания кольцевого резонатора микрогироскопа // Нано- и микросистемная техника, 2014, № 5, с. 18–25.
- [8] Гребенников В. А., Минаев Ю. А., Аксенов К. С. Вибрационный вакуумный микрогироскоп: Патент РФ 2518379 C1 (2014).
- [9] Редькин С. П. Математическая модель температурной скорости дрейфа твердотельного волнового гироскопа // Авиакосмическое приборостроение, 2014, № 5, с. 9–13.
- [10] Северов Л. А., Пономарев В. К., Панферов А. И., Овчинникова Н. А. Структура и характеристики волнового микромеханического датчика угловой скорости с кольцевым резонатором // Гироскопия и навигация, 2014, № 3, с. 59–72.
- [11] Гавриленко А. Б., Меркурьев И. В., Подалков В. В., Сбытова Е. С. Динамика микромеханических систем. Москва: МЭИ, 2016. 60 с.
- [12] Журавлёв В. Ф., Климов Д. М. Волновой твердотельный гироскоп. Москва: Наука, 1985. 125 с.
- [13] Меркурьев И. В., Подалков В. В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. Москва: Физматлит, 2009. 228 с.
- [14] Журавлёв В. Ф. Задача идентификации погрешностей обобщенного маятника Фуко // Изв. РАН. МТТ, 2000, № 5, с. 186–192.

- [15] Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркурьев И. В. Идентификация параметров волнового твердотельного гироскопа с учетом нелинейности колебаний резонатора // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика, 2014, № 5, с. 18–23.
- [16] Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркурьев И. В. Способ определения параметров волнового твердотельного гироскопа: Патент РФ 2544308 (2015).
- [17] Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркурьев И. В. Нелинейные эффекты в динамике цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа с электростатической системой управления // Гироскопия и навигация, 2015, № 2, с. 71–80.
- [18] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Наука, 1974. 503 с.

Compensation of errors taking into account nonlinear oscillations of the vibrating ring microgyroscope operating in the angular velocity sensor mode

Dmitry A. Maslov¹, Igor V. Merkuryev²

^{1,2}National Research University “Moscow Power Engineering Institute”
ul. Krasnokazarmennaya 14, Moscow, 111250, Russia

¹MaslovDmA@pei.ru, ²MerkuryevIV@yandex.ru

The dynamics of a vibrating ring microgyroscope resonator with open-loop and closed feedback is investigated. We use a mathematical model of forced oscillations for thin elastic resonator, taking into account the nonlinearity coefficient, uneven stiffness, difference in Q -factors and control impact parameters. Using the Krylov–Bogolyubov averaging method, the resonator dynamics in slow variables measured by microgyroscope electronics has been investigated. Formulas with algorithmic compensation of the above defects for determining the angular velocity of the resonator under nonlinear oscillations and without feedback have been obtained. Control signals taking into account the defects are presented for feedback of the microgyroscope operating in the compensation mode of the angular velocity sensor. Numerical modeling of angular velocity determination in the operation modes considered has been carried out.

MSC 2010: 34K11

Keywords: vibrating ring microgyroscope, angular velocity sensor, nonlinear oscillations, drift compensation

Received January 09, 2017, accepted April 15, 2017

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 2, pp. 227–241 (Russian)