

УДК 519.6:537.84

ОБ ОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ДИАГНОСТИКИ В ВОЛНОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

© 2000 г. А. В. Гончарский, С. Ю. Романов

(119899 Москва, Воробьевы горы, МГУ, НИВЦ)

Поступила в редакцию 20.09.99 г.

Рассматривается задача определения неоднородностей в однородных физических средах по наблюдениям за распространением в этих средах полей, описываемых скалярной волновой моделью. Рассмотрена так называемая задача с нулевым сдвигом данных. Было получено явное аналитическое выражение для обратного оператора. Подобная задача имеет большое практическое значение в вопросах неразрушающего контроля, диагностики, георазведки (в том числе в сейсморазведке месторождений нефти, минерального сырья и т.д.).

В настоящей работе рассматривается задача определения неоднородностей в однородных физических средах по наблюдениям за распространением в этих средах полей, описываемых скалярной волновой моделью. Подобная задача имеет большое практическое значение в вопросах георазведки (в том числе в сейсморазведке месторождений нефти, минерального сырья и т.д.) [1], [2].

Рассмотрим распространение излучения в среде, ограничиваясь следующей скалярной волновой моделью гиперболического типа:

$$\Delta u(r, q, t) - \frac{1}{c^2(r)} u_{tt}(r, q, t) = \delta(r - q) f(t), \quad (1)$$

где $u(r, q, t)$ – скалярная функция излучения в среде, зависящая от пространственной переменной $r \in \mathbb{R}^3$, времени $t \geq 0$, Δ – оператор Лапласа, $c(r)$ – скорость распространения излучения, $\delta(r - q)f(t)$ описывает возмущение среды точечным источником, располагающимся в точке $q \in \mathbb{R}^3$, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака. Начальные условия имеют вид $u(r, q, t)|_{t=0} = 0$, $u_t(r, q, t)|_{t=0} = 0$.

В работе рассмотрена следующая постановка обратной задачи (фиг. 1). Общая схема эксперимента предполагает наличие трех областей: источников, детекторов и неоднородности. Пусть неоднородность среды локализована на области H . Предположим, что источники волн (положение которых характеризуется координатой q) располагаются в области Q ($q \in Q$), а измерения поля $u(r, q, t)$ доступны только в области P ($r \in P$). Область H не имеет общих точек с областями Q и P . Будем предполагать, что $c(r)$ – гладкая функция, отличающаяся от известной константы c_0 только в пределах области H ($0 < \underline{c} < c^2(r) < \bar{c}$). Функция $f(t)$, описывающая возмущение, известна априори.

В обратной задаче мы должны определить функцию $c(r)$ при $r \in H$, используя экспериментальные данные $u(r, q, t)$, полученные при $r \in P$.

Рассмотренная обратная задача, очевидно, является нелинейной, т.е. функция $u(r, q, t)$ при $r \notin P$ не известна. Подобная постановка коэффициентной задачи распространена в задачах сейсморазведки.

Остановимся на методах решения обратной задачи.

Вводя обозначение $\xi(r) = c_0^{-2} - c^{-2}(r)$, уравнение (1) можно записать в виде

$$\Delta u(r, q, t) - \frac{1}{c_0^2} u_{tt}(r, q, t) = \delta(r - q) f(t) - u_{tt}(r, q, t) \xi(r). \quad (2)$$

Обозначим через $G(r, t, q, \tau)$ функцию Грина для волнового уравнения (2):

$$G(r, t, q, \tau) = \frac{\delta(t - \tau - |r - q|/c_0)}{4\pi|r - q|}, \quad (3)$$



Фиг. 1.

где $|\cdot|$ – норма вектора.

Предположим, что интегралы, рассмотренные ниже, существуют; легко видеть, что (2) может быть переписано как

$$u(r, q, t) - \frac{f(t - |r - q|/c_0)}{4\pi|r - q|} = - \int_H \left(\int_{\tau \geq 0} u_{\tau\tau}(r', q, \tau) \xi(r') G(r, t, r', \tau) d\tau \right) dr'. \quad (4)$$

Рассмотрим борновское приближение, т.е. будем считать, что функция $u(r', q, \tau)$, стоящая под интегралом в правой части (4), равна

$$u(r', q, \tau) = f(\tau - |r' - q|/c_0) (4\pi|r' - q|)^{-1}, \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), а также беря интеграл по τ в (4), имеем

$$U(r, q, t) = - \int_H \frac{f''(t - (|r' - r| + |r' - q|)/c_0)}{16\pi^2|r' - r||r' - q|} \xi(r') dr', \quad (6)$$

где через $U(r, q, t)$ обозначена левая часть уравнения (4), которая известна в области измерений (при $r \in P$).

Для источников возмущений взрывного типа основные значения функции $f(t)$ сосредоточены при малых t . Будем считать, что функция $f''(t) = \delta(\cdot)$. В этом случае уравнение (6) сводится к виду

$$U(r, q, t) = - \int_H \frac{\delta(t - (|r' - r| + |r' - q|)/c_0)}{16\pi^2|r' - r||r' - q|} \xi(r') dr'. \quad (7)$$

Таким образом, обратная задача в борновском приближении сводится к определению $\xi(r')$ из линейного интегрального уравнения (7).

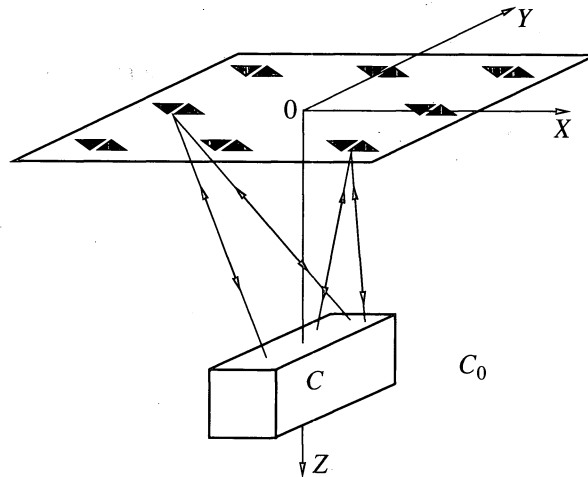
Интересно отметить связь рассмотренной обратной задачи с задачами томографии. Заметим, что интеграл в уравнении (7) имеет специальный вид. Он представляет собой интеграл от функции $\xi(r')$ с некоторым весовым множителем по 2-мерной поверхности пересечения области H и эллипсоида

$$t = (|r' - r| + |r' - q|)/c_0 \quad (8)$$

при различных значениях параметров t, r, q . Параметры r, q определяют фокусы эллипсоидов, а при увеличении параметра t эллипсоиды расширяются.

Подобная задача относится к области томографических задач, в которых требуется найти некоторую функцию в $\mathbb{R}^3$ по известным интегралам от этой функции вдоль различных 2-мерных поверхностей [3].

Остановимся на методах решения томографического уравнения (7). К настоящему времени разработан богатый арсенал методов, например метод ρ -фильтрации обратной проекции. Идея



Фиг. 2.

метода состоит в сведении уравнения (7) к уравнению, которое в операторной записи имеет вид

$$R^*U = R^*R\xi, \quad (9)$$

где через R обозначен интегральный оператор (7), R^* – сопряженный оператор, имеющий вид

$$R^*U(r, q, t) = - \int_P \left(\int_{t \geq 0} \frac{\delta(t - (|r' - r| + |r' - q|)/c_0)}{16\pi^2 |r' - r| |r' - q|} U(r, q, t) dt \right) dr = v(r', q), \quad (10)$$

где $r' \in \mathbb{R}^3$.

Как видно, вычисление выражения (10) сводится к интегрированию функции $U(r, q, t)$, измеренной в ходе эксперимента, с некоторым весовым множителем по гиперболоидам, определяемым уравнением (8) при различных значениях параметра r' .

Интересно отметить, что идеи метода миграции, широко применяемого в обратных задачах сейсморазведки [1], [2], сводятся именно к вычислению выражения (10) от известной функции $U(r, q, t)$. Таким образом, в методе миграции для обращения интегрального уравнения (7) применяется сопряженный оператор R^* . Однако в рассматриваемой задаче, как будет показано ниже, сопряженный оператор отличен от обратного R^{-1} .

Будем рассматривать задачу (7), когда $r = q$, что соответствует эксперименту, при котором измерения поля проводятся в точке взрыва q . В сейсморазведке подобная задача называется задачей с нулевым сдвигом данных. На фиг. 2 представлена схема эксперимента для случая, когда положения источников и приемников совпадают (данные с нулевым сдвигом) и располагаются на плоскости, а неоднородность имеет вид параллелепипеда, помещенного в однородную среду C_0 .

Пусть $\xi(r')$ – описывает неоднородность $r' \in \mathbb{R}^3$.

Прямой оператор обозначим через R , тогда данные $U(r, t)$, записанные на поверхности $z = 0$ ($r = (x, y, 0)$), выражаются следующим образом:

$$R\xi = U(r, t) = - \int \frac{\xi(r') \delta(t - 2|r' - r|/c_0)}{16\pi^2 |r' - r|^2} dr'.$$

Оператор миграции, который обозначим R^* , имеет вид

$$R^*U(r, t)(\bar{r}) = v(\bar{r}) = - \int U(r, t) \frac{\delta(t - 2|r - \bar{r}|/c_0)}{16\pi^2 |r - \bar{r}|^2} dr dt,$$

где $\bar{r} \in \mathbb{R}^3$.

В этом случае в работе было получено, что

$$\begin{aligned}
 R^*R\xi &= \int_{Pt \geq 0} \int \frac{\delta(t - 2|\bar{r} - r|/c_0)}{16\pi^2|\bar{r} - r|^2} \left[\int_{-H} \frac{\delta(t - 2|r - r'|/c_0)}{|r - r'|^2} \xi(r') dr' \right] dt dr = \\
 &= c_0 \int_H \frac{K}{|\bar{r} - r'|^2 |\bar{r} - r'^*|^2} \xi(r') dr' = R^*U = v(\bar{r}),
 \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$r' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \quad \bar{r} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^3, \quad r'^* = (x', y', -z') \in \mathbb{R}^3,$$

$K = K(r', \bar{r})$ – известная функция.

Как можно заметить, ядро оператора R^*R имеет особенность в точке r' , однако R^*R не является единичным оператором.

Полученное выражение (11) показывает, что функция $R^*U = v(\bar{r})$, рассматриваемая в методе миграции как реконструированное изображение, на самом деле существенно отличается от $\xi(r')$.

В настоящей работе предлагается для получения функции $\xi(r')$ решить уравнение (11), которое является 3-мерным линейным интегральным уравнением I рода.

Проведя несложные преобразования, уравнение (11) можно привести к уравнению типа свертки.

Для получения приближенного решения в некорректно поставленной задаче (11) можно воспользоваться схемой Тихонова [4], [5]. В ней приближенное решение находится по формуле

$$\eta^\alpha = (R^*R + \alpha E)^{-1}(\bar{z}R^*U), \tag{12}$$

где α – параметр регуляризации – выбирается стандартными методами [4], [5]. Для численной реализации алгоритма (12) для уравнений типа свертки удобно использовать преобразование Фурье. Вычисляя аналитически преобразование Фурье от ядра уравнения (11), получаем явное выражение для алгоритма (12):

$$\xi^\alpha(r') + \xi^\alpha(r'^*) = zF^{-1} \left[\frac{S}{(\omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2) + \alpha} F[\bar{z}R^*U] \right], \tag{13}$$

где F, F^{-1} – прямое и обратное преобразование Фурье в $\mathbb{R}^3$, а $S = S(\omega_1 \omega_2 \omega_3)$ – известная функция.

Проведенные модельные расчеты по реконструкции 3-мерных объектов описанным выше алгоритмом показали высокую эффективность предлагаемых методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yilmaz O. Seismic data processing // Series: Investigations in Geophys. Vol. 2. Soc. Exploration Geophys., 1987.
2. Baysal E., Kosloff D.D., Sherwood J.W.C. Reverse time migration // Geophysics. 1983. № 48. P. 1514–1524.
3. Natterer F. The mathematics of computerized tomography. Stuttgart: J. Wiley and Sons, 1986.
4. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153. № 1. С. 49–52.
5. Bakushinsky A.B., Goncharsky A.V. Ill-posed problems, theory and applications. Netherlands: Cluwer Publ., 1994.
6. Bakushinsky A.B., Goncharsky A.V., Romanov S.Yu., Seatzu S. On the identification of velocity in seismics and in acoustic sounding // Pubbl. Dell'ist. di Analisi Globale e Applic. Firenze, 1994. № 71. P. 1–14.