

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА



ФАКУЛЬТЕТ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И КИБЕРНЕТИКИ



Алгебра и геометрия

Учебно-методическое пособие
для студентов 1 курса

*Под редакцией
В.С. Панфёрова и Е.Е. Тыртышников*



МОСКВА – 2024

УДК 512.6+514.1(075.8)
ББК 22.143я73
А45



<https://elibrary.ru/qbaktb>

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова*

Коллектив авторов:

Н.Л. Замарашкин, Н.Д. Золотарёва, О.С. Лебедева,
С.А. Матвеев, В.А. Морозова, Ю.Р. Нестеренко, В.С. Панфёров,
С.Г. Руднев, И.Н. Смирнов, Е.Е. Тыртышников

Под редакцией

В.С. Панфёрова и Е.Е. Тыртышникова

Рецензенты:

к.ф.-м.н., доцент А.Г. Разборов,
д.ф.-м.н., профессор А.С. Фурсов

А45 **Алгебра и геометрия** : учеб.-метод. пособие для студентов
1 курса / Н.Л. Замарашкин, Н.Д. Золотарёва, О.С. Лебедева
и др.; Под ред. В.С. Панфёрова и Е.Е. Тыртышникова. –
Москва: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени
М.В. Ломоносова (лицензия ИД №05899 от 24.09.2001 г.) ;
МАКС Пресс, 2024. – 86 с.

е-ISBN 978-5-89407-639-3 (ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова)

ISBN 978-5-317-07136-3 (МАКС Пресс)

<https://doi.org/10.29003/m3797.978-5-317-07136-3>

Настоящее пособие содержит методические материалы,
сопровожающие учебный процесс: программу курса, пла-
ны семинарских занятий, программы коллоквиумов, образцы
контрольных работ, задач для подготовки к зачётам, зачёт-
ным комиссиям и вопросы к экзаменам.

Ключевые слова: *линейная алгебра, геометрия, элементы
общей алгебры, матрицы, линейные операторы.*

УДК 512.6+514.1(075.8)

ББК 22.143я73

е-ISBN 978-5-89407-639-3 © Факультет ВМК МГУ

ISBN 978-5-317-07136-3 имени М. В. Ломоносова, 2024

© Кафедра общей математики, 2024

© Кафедра вычислительных технологий
и моделирования, 2024

© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2024

Содержание

Предисловие	4
Программа курса	6
I семестр	6
II семестр	10
Семинарские занятия	15
План семинарских занятий, I семестр	15
План семинарских занятий, II семестр	20
Коллоквиумы	26
Программы коллоквиумов, I семестр	26
Программы коллоквиумов, II семестр	27
Контрольные работы	32
Примерные варианты, I семестр	32
Примерные варианты, II семестр	34
Зачёт	37
Задачи для подготовки к зачёту, I семестр	37
Образец задания зачётной комиссии, I семестр	40
Задачи для подготовки к зачёту, II семестр	41
Образец задания зачётной комиссии, II семестр	44
Экзамен	46
Вопросы к экзамену, I семестр	46
Вопросы к экзамену, II семестр	62
Список литературы	83

Предисловие

За прошедшие два учебных года курс алгебры и геометрии был существенно изменён. В настоящее время для студентов ВМК первого года обучения читается фундаментальный, насыщенный курс алгебры и геометрии. Помимо линейной алгебры, основ теории матриц, линейных многообразий и квадратичных гиперповерхностей, он содержит такие разделы, как введение в теорию групп, колец и полей, а также элементы выпуклой геометрии, включая теорию систем линейных алгебраических неравенств. Актуальные материалы лекций по курсу алгебры и геометрии размещены на сайте-хранилище факультета ВМК МГУ [17, 23]. Вместе с изменением программы курса был обновлён список теоретических вопросов к экзамену, из которых формируются экзаменационные билеты. Одновременно с этим появилась необходимость внесения изменений в планы семинарских занятий. Накопившийся практический опыт проведения занятий и приёма экзаменов показал возможность вполне успешного освоения студентами обновлённого курса. Предлагаемое учебно-методическое пособие содержит материалы, сопровождающие учебный процесс: программу курса, планы семинарских занятий, программы коллоквиумов, образцы контрольных работ, зачётных заданий, зачётных комиссий и вопросы к экзамену.

Хорошей учебной литературы по алгебре и геометрии сегодня довольно много – как классической (см., например, [4, 7, 22, 27]), так и современной [14, 18, 32, 33]. Опыт преподавания этого курса на факультете ВМК представлен в учебниках [10, 30]. Настоящий курс алгебры и геометрии продолжает и развивает традиции, заложенные академиком В.В. Воеводиным [5, 24, 26]. Важнейшим критерием усвоения любого математического курса является умение решать задачи: как вычислительные, так и теоретические. Для сохранения преемственности номера задач в примерном плане семинарских занятий приводятся по задачникам [12, 13] с использованием задач из сборника [9] и материалов учебно-методического пособия [3]. Для новых тем предложены отдельные списки задач. При изучении многочленов, структуры решений систем линейных неравенств и задач линейного программирования рекомендуется обратить внимание на монографии [2, 11, 19, 29]. В большинстве из указанных выше книг содержится очень много задач и примеров, поэтому нам хотелось выделить небольшое количество опорных задач, относительно плотно покрывающих всю семестровую про-

грамму. В пособии приводятся наборы задач к зачёту для осеннего и весеннего семестров.

Для развития общей математической культуры рекомендуем книги [1, 16, 21] и литературу, где подробно рассмотрены вычислительные аспекты матричного анализа – прежде всего, монографии Р. Хорна и Ч. Джонсона [28], а также Дж. Голуба и Ч. Ван Лоуна [8]. Рекомендуем также ознакомиться с учебником Е.Е. Тыртышниковой [25], который используется студентами старших курсов. Имеет смысл обратить внимание на видеозаписи лекций по линейной алгебре Гильберта Стрэнга в MIT [34], а также А.В. Савватеева и А.С. Тониса по линейной алгебре и элементам топологии в МФТИ [20]. Интересный курс лекций по вычислительной линейной алгебре на английском языке составлен И.В. Оселедцем в Сколтехе [31]. Большинство перечисленных книг и курсов лекций ценны не только оригинальным авторским изложением материала, но и подборками задач, которые действительно стоит научиться решать в процессе освоения материала.

Программа курса

I семестр

I. Линейные пространства и алгебра матриц

1. Операции над матрицами. Умножение блочных матриц. Линейное пространство матриц. Алгебра квадратных матриц. Обратимые матрицы.
2. Арифметические векторы и арифметические пространства и подпространства. Линейные комбинации, линейные оболочки, линейная зависимость и независимость, базис и размерность.
3. Перестановки (подстановки), циклы, транспозиции, чётность. Симметрическая группа. Знакопеременная группа.
4. Определитель квадратной матрицы как полилинейная функция её столбцов (строк). Обнуление при совпадении аргументов и знакопеременность.
5. Сохранение определителя при транспонировании. Определитель произведения матриц.
6. Миноры и их алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
7. Присоединённая матрица и её связь с обратной матрицей. Обратимость и невырожденность. Матрицы с диагональным преобладанием. Правило Крамера.
8. Разделение переменных и разложимые матрицы. Скелетное разложение.
9. Ранг матрицы и линейная зависимость её столбцов (строк). Теорема о базисном миноре.
10. Ранг суммы и произведения матриц. Неравенства Сильвестра и Фробениуса.
11. Элементарные преобразования и их матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому виду. Приведение матрицы к диагональному виду. Эквивалентные матрицы.
12. LU-разложение и строго регулярные матрицы.
13. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Ранг и дефект матрицы.
14. Линейное многообразие и плоскость. Направляющее пространство.

15. Сумма и пересечение подпространств. Теорема Грассмана.
16. Число арифметических операций в методах умножения матриц, решения системы линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей, построения обратной матрицы и вычисления определителя.

II. Элементы геометрии

1. Направленные отрезки. Свободный вектор. Линейное пространство векторов и аффинное пространство точек.
2. Проекции вектора и координаты. Свойства линейности проекций. Аффинная система координат. Переход к другой системе координат. Матрица перехода.
3. Алгебраические многообразия и поверхности. Линейные многообразия и гиперплоскости. Гиперплоскости и полупространства. Размерность плоскости. Плоскость как пересечение гиперплоскостей.
4. Общее уравнение прямой на двумерной геометрической плоскости и плоскости в трёхмерном геометрическом пространстве с аффинной системой координат. Критерий параллельности вектора и гиперплоскости, заданной общим уравнением в аффинной системе координат.
5. Аффинные и выпуклые комбинации векторов. Аффинные и выпуклые оболочки множеств векторов. Теоремы Каратеодори, Радона и Хелли.
6. Скалярное произведение геометрических и арифметических векторов. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Длины и углы.
7. Расстояние от точки до гиперплоскости, заданной общим уравнением в декартовой системе координат.
8. Ориентация базиса. Векторное и смешанное произведения геометрических векторов. Геометрический смысл определителя.
9. Основная и расширенная матрицы квадратичной поверхности. Замена переменных и конгруэнтное преобразование матриц. Аффинные инварианты квадратичной поверхности.
10. Конгруэнтная диагонализация и приведённые уравнения квадратичной поверхности.
11. Параллельные хорды и центры симметрии квадратичной поверхности.

12. Касательные плоскости к квадратичной поверхности.
13. Декартовы системы координат и ортогональные матрицы. Ортокongруэнтная диагонализация в двумерном случае. Кривые второго порядка в декартовых координатах.
14. Эллипс, гипербола, парабола. Эксцентриситет, фокусы, директрисы. Параметрические уравнения.
15. Метод вращений для ортокongруэнтной диагонализации вещественной симметричной матрицы.
16. Поверхности второго порядка в декартовых координатах. Конические сечения. Линейчатые поверхности.

III. Элементы общей алгебры

1. Декартово произведение множеств и бинарные отношения. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности. Бинарные операции. Ассоциативность и скобки.
2. Определение группы. Мультипликативные и аддитивные группы. Степень и кратное. Порядок элемента группы.
3. Группа невырожденных матриц (полная линейная группа). Группа невырожденных треугольных матриц. Группа ортогональных матриц.
4. Подгруппы. Централизаторы элементов и центр группы. Циклические группы и их подгруппы. Смежные классы. Теорема Лагранжа для конечных групп.
5. Сопряжённые элементы. Нормальные подгруппы (нормальные делители) и фактор-группы. Нетривиальность центра примарной группы.
6. Изоморфизмы и гомоморфизмы групп. Теорема о гомоморфизме. Действие группы на множестве, орбиты, неподвижные множества и стабилизаторы. Симметрическая группа и отображение Кэли.
7. Представление конечнопорождённой аддитивной абелевой группы прямой суммой циклических подгрупп. Представление конечной аддитивной циклической группы прямой суммой примарных подгрупп.
8. Определение кольца. Делители нуля. Унитарное кольцо (кольцо с единицей). Делители единицы (обратимые элементы). Определение поля. Характеристика поля. Целостное кольцо

и поле дробей (частных). Кольцо вычетов и его обратимые элементы. Функция Эйлера. Поле вычетов по простому модулю.

9. Линейные пространства и алгебры. Размерность и базис. Изоморфизмы колец, полей, линейных пространств и алгебр. Линейные пространства при расширении поля. Конечные расширения и степень расширения.
10. Многочлены как формальные выражения и как функции специального (полиномиального) вида. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Старшие члены многочлена. Лексикографическое упорядочение мономов. Целостность кольца многочленов над полем. Формулы Виета и симметрические многочлены.
11. Делимость в целостном унитарном кольце. Значения многочлена и корни. Деление с остатком. Теорема Безу. Алгоритм Евклида и теорема (соотношение Безу) о наибольшем общем делителе. Кратные корни и производные. Дискриминант и результатant многочлена. Интерполяционный многочлен.
12. Неприводимые многочлены с целыми коэффициентами и признак Эйзенштейна. Лемма Гаусса для многочленов над факториальными кольцами. Факториальность кольца многочленов от нескольких переменных над полем.
13. Поле комплексных чисел. Комплексная плоскость. Тригонометрическая форма комплексного числа. Модуль и аргумент произведения комплексных чисел. Формула Муавра. Корни из единицы, первообразные корни из единицы. Стереогрифическая проекция.
14. Непрерывность и рост модуля комплексного многочлена. Лемма Даламбера. Основная теорема алгебры. Формулы в радикалах для решений алгебраических уравнений степени 2, 3, 4. Разложение комплексных многочленов на линейные множители. Разложение вещественных многочленов на линейные и квадратичные множители.
15. Алгебраическое расширение поля. Алгебраические числа и их минимальные многочлены. Присоединение корня. Алгебраичность конечного расширения полей. Поле алгебраических чисел. Расширения поля рациональных чисел, много-

члены деления круга и геометрические построения с помощью циркуля и линейки.

16. Поле разложения многочлена, существование и единственность с точностью до изоморфизма.
17. Количество элементов в конечном поле. Мультипликативная группа конечного поля. Конечное поле как поле вычетов по неприводимому многочлену над полем вычетов по простому модулю.

II семестр

I. Линейные операторы и их матрицы

1. Линейные операторы и линейное пространство линейных операторов.
2. Матрица линейного оператора в паре базисов. Переход к другому базису, матрица перехода. Изменение матрицы оператора при изменении пары базисов. Матрица произведения линейных операторов. Эквивалентность матриц, подобие матриц и инварианты.
3. Ядро и образ линейного оператора. Соотношение между рангом и дефектом линейного оператора. Обратимый оператор. Линейность обратного оператора. Оператор проектирования.
4. Собственные значения и собственные векторы. Характеристический многочлен линейного оператора (матрицы). Матрица Фробениуса.
5. Геометрическая и алгебраическая кратность собственного значения. Операторы простой структуры и диагонализуемые матрицы. Критерий диагонализуемости.
6. Инвариантные подпространства и сужение оператора. Верхняя треугольная форма матрицы линейного оператора в комплексном пространстве.
7. Многочлен от линейного оператора (матрицы). Теорема Гамильтона-Кэли.
8. Нильпотентные и квазискалярные операторы (матрицы). Индекс нильпотентности. Критерий нильпотентности.
9. Прямая сумма линейных операторов (матриц). Теорема о расщеплении вырожденного оператора. Корневое расщепление линейного оператора.
10. Нерасщепляемые операторы и подпространства Крылова. Ус-

ловие линейной независимости составной системы векторов Крылова нильпотентного оператора.

11. Максимальное расщепление и жорданова форма нильпотентного оператора.
12. Теорема Жордана о структуре линейного оператора. Максимальное расщепление линейного оператора. Единственность жордановой формы линейного оператора (матрицы). Критерий подобия комплексных матриц.
13. Блочно-диагональная жорданова форма вещественной матрицы.
14. Минимальный многочлен матрицы (оператора). Условие совпадения минимального и характеристического многочленов.

II. Метрические, нормированные и унитарные пространства

1. Метрическое пространство. Открытые и замкнутые шары. Ограниченные множества. Открытые и замкнутые множества. Топологические свойства открытых (замкнутых) множеств.
2. Сходящиеся и фундаментальные последовательности. Полные метрические пространства.
3. Компактные множества в метрических пространствах. Непрерывные отображения метрических пространств. Теорема Вейерштрасса в метрическом пространстве.
4. Нормированное пространство. Нормы Гёльдера.
5. Выпуклые функции. Достаточное условие выпуклости дважды дифференцируемой функции. Неравенства Юнга, Гёльдера и Минковского.
6. Линейные пространства со скалярным произведением. Евклидовы и унитарные пространства.
7. Длина вектора (евклидова норма). Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.
8. Тождество параллелограмма и критерий евклидовости нормы.
9. Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. QR-разложение матрицы. Ортогональное дополнение множества.

10. Задача о наилучшем приближении вектора на конечномерном подпространстве в пространстве со скалярным произведением. Теорема о перпендикуляре.
11. Матрица Грама. Положительно и неотрицательно определённые матрицы. Общий вид скалярного произведения в конечномерном пространстве.
12. Существование элемента наилучшего приближения вектора на замкнутом множестве в конечномерном подпространстве нормированного пространства.
13. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном пространстве.
14. Критерий компактности единичной сферы в нормированном пространстве.

III. Линейные операторы в нормированных и унитарных пространствах

1. Непрерывность и ограниченность линейного оператора.
2. Операторная норма, порождённая векторными нормами. Матричные нормы. Норма Фробениуса и спектральная норма матрицы. Унитарно инвариантные нормы.
3. Спектральный радиус и круги Гершгорина.
4. Ряд Неймана. Теорема Бауэра-Файка. Число обусловленности матрицы.
5. Примеры итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений.
6. Сопряжённый оператор. Существование, линейность, единственность сопряжённого оператора. Матрицы оператора и сопряжённого к нему в паре ортонормированных базисов.
7. Нормальный оператор в унитарном пространстве и нормальная матрица. Критерии нормальности оператора и матрицы.
8. Унитарные и эрмитовы операторы и матрицы. Критерии унитарности и эрмитовости нормального оператора (матрицы).
9. Эрмитово разложение оператора (матрицы) и эрмитовость знакоопределённого оператора в унитарном пространстве.
10. Существование и единственность неотрицательно определённого квадратного корня из неотрицательно определённой матрицы.

11. Блочно-диагональная форма вещественной нормальной матрицы. Блочно-диагональная форма ортогональной матрицы. Матрицы вращения и отражения. Представление оператора простого поворота в виде произведения операторов простого отражения.
12. Сингулярное разложение линейного оператора (матрицы). Три формы записи сингулярного разложения. Полярное разложение оператора (матрицы).
13. Альтернатива Фредгольма для линейных операторных уравнений в унитарных пространствах.
14. Метод наименьших квадратов и нормальное псевдорешение. Псевдообратная матрица и условия Мура-Пенроуза. Метод регуляризации.
15. Вариационные свойства собственных значений эрмитовых матриц, теорема Куранта-Фишера. Вариационные свойства сингулярных чисел.
16. Соотношения разделения собственных значений эрмитовой матрицы и её главной подматрицы. Соотношения разделения для сингулярных чисел.
17. Закон сохранения инерции эрмитовой матрицы при переходе к эрмитово конгруэнтной матрице.
18. Билинейные и эрмитовы (полуторалинейные) формы. Квадратичные и эрмитово квадратичные формы и их приведение к алгебраической сумме квадратов.
19. Общий вид линейного функционала и эрмитовой билинейной формы в конечномерном пространстве со скалярным произведением.
20. Критерий Сильвестра положительной определённости эрмитовой матрицы. Критерий неотрицательной определённости эрмитовой матрицы.
21. Наилучшее приближение матрицы на множестве матриц меньшего ранга в спектральной норме и норме Фробениуса.

IV. Выпуклые множества и системы линейных неравенств

1. Выпуклые множества. Выпуклая оболочка множества. Наилучшее приближение вектора на замкнутом выпуклом множестве.
2. Разделяющие и опорные гиперплоскости.

3. Геометрические свойства единичных шаров и функционал Минковского.
4. Размерность выпуклого множества. Внутренние точки выпуклого множества. Лучи, выходящие из внутренней точки выпуклого множества.
5. Полиэдры и многогранники. Проекция полиэдра.
6. Грани полиэдра, размерность грани.
7. Конечнопорождённый конус и однородный полиэдр.
8. Рёбра конуса. Вершины полиэдра и рёбра ассоциированного конуса.
9. Общее решение системы линейных неравенств.
10. Лемма Фаркаша и неоднородные системы неравенств. Теорема о вложенности полиэдров.
11. Экстремумы линейных функционалов на полиэдре. Постановка задачи линейного программирования.

Семинарские занятия

Планы семинарских занятий определяются по потокам и уточняются в начале каждого семестра. Для ориентира предлагается примерный план первого и второго семестров. Номера задач приводятся по задачникам [12, 13] с использованием материалов учебно-методического пособия [3]. Задачи разделены на две группы: **А** — для решения в аудитории, **Д** — для самостоятельного решения (домашняя работа). В списке задач её полный номер указывается только для первой задачи (например, 7.48), а для следующих за ней задач указывается только последняя часть номера (например, вместо 7.53 указывается 53).

План семинарских занятий, I семестр

- Операции над матрицами.
А 1.1, 7, 13, 19(б,е), пример 1.4, 14, 30, 31, 35, 36, 36.1, 37, 42.
Д 1.2(а–г), 11, 15(б), 19(в–д), 20(б,г), 21, 27(б), 28, 32, 38, 40, 43.
- Матрицы специального вида. Умножение блочных матриц.
А 2.1, 4, 5, 7, 8(а,б), 10, 12, 17, 19, 20, 21(а), 25, 29.
Д 2.2, 3, 8(в,г), 15, 18, 21(б,в), 23, 30, 31, 36, 51.
- Группы: определение и примеры. Симметрическая группа.
А 39.1(1–8), 3(1–5), 8, 10, 4.1, 2(б,в,д), 3(а), 6, 9(а).
Д 39.1(9–17), 3(6–13), 5, 9, 4.2(а,г,з), 3(б), 5, 7, 8, 9(б), 10.
- Линейное пространство. Линейная зависимость, базис и размерность.
А 14.1, 5, 7, 8, 10, 11, 15.1, 4, 6–8, 11, 25, 29.
Д 14.2–4, 6, 9, 12, 15.2, 3, 5, 12, 21, 23, 24, 26, 30.
- Элементарные преобразования матриц. Определитель квадратной матрицы.
А 3.1(а,б), 2, 4, 7, 5.2, 9, 12, 18, 19, 24, 39(а,б), 40, 42, 48, 57, 64(б), 68, 70, 74.
Д 3.1(в,г), 3, 6, 8, 12, 16, 19, 20, 23, 5.3, 10, 13, 16, 20, 25, 39(в,г), 43, 47, 49, 60, 61, 64(а), 67, 75, 81.
- Теорема Лапласа. Метод Гаусса. Определитель Вандермонда.
А 6.2, 8, 11, 15, 7.1, 8, 16, 20, 22, 26, 27, 41, 82, 83, 91.
Д 6.7, 9, 12, 20, 27, 44, 7.2, 13, 21, 23, 24, 28, 42, 43, 84, 89, 90, 93.

7. Метод рекуррентных соотношений. Другие методы вычисления определителя.

А 7.48, 53, 54, 56, 64, 98, 115, 117, 125, 8.5(а), 6, 14, 15, 27, 33.

Д 7.51, 55, 57, 59, 72, 99, 103, 116, 126, 8.5(б), 7(а), 8, 13, 18, 22(а), 34, 42.

8. Группы, подгруппы, фактор-группа. Нормальные подгруппы, центр группы.

А 39.13, 14, 17, 20, 23, 25, 26, 28(а), 30, 38, 44(а-в), 45(а,в), 47(а,б), 82(а,б), 84(а), задачи 21 и 22 на стр. 56 данного пособия.

Д 39.12, 16, 19, 21, 24, 27, 29, 32, 40, 44(г,д), 46, 48, 82(в,г), 84(б,в), задачи 14 и 23 на стр. 56 данного пособия.

9. Обратная матрица и группа невырожденных матриц. Ранг матрицы.

А 9.1-3, 5, 18, 19, 26, 31, 48, 50, 16.1, 5, 10, 15, 17, 18, 20, 24, 34-36, 38, 39, 42, 55.

Д 9.4, 6, 12, 24, 28, 33, 36, 37, 49, 52, 55, 78(в,г), 16.2, 3, 7, 11, 23, 28, 37, 40, 41, 43.

10. Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера. Критерий совместности.

А 19.3, 10, 17, 26, 20.1, 3, 5, 7, 21.57, 62.

Д 19.2, 8, 11, 19, 20.2, 4, 6, 8, 21.55, 58, 59, 60.

11. Линейные системы. Метод Гаусса. Базис в пространстве решений однородной системы.

А 21.1-3, 26, 35, 46(б), 52, 22.1, 2, 4, 14, 15.

Д 21.4, 5, 12, 17, 27, 33, 35, 46(а), 47, 48(а), 53, 22.3, 9, 12, 16.

12. Неоднородные системы линейных алгебраических уравнений.

А 22.20, 26, 30, 32(а,б), 33, 35, 38-40.

Д 22.21, 27, 28, 32(в), 34, 48-50.

13. Контрольная работа №1.

14. Коллоквиум №1.

15. Метод координат. Линейное пространство геометрических векторов.

А 13.1, 3, 4, 9, 16, 17, 22, 29, 34, 23.1, 3, 5, 14, 19, 26, 33, 43, 48, 56, 62, 63.

Д 13.2, 5, 7, 10, 14, 23, 33, 35, 37, 46, 23.2, 6, 7, 17, 20, 22, 34, 35, 47, 51, 53, 57, 64.

16. Скалярное произведение векторов и матрица Грама.

- А 24.2, 6, 8, 12, 15, 20, 27, 32, 47, 58, 67, 75, 78.
Д 24.5, 7, 13, 16, 17, 26, 28, 34, 36, 48, 49, 57, 63, 69, 74.
17. Векторное и смешанное произведения векторов.
А 25.5, 7, 11, 14, 22, 26, 35, 37, 44, 49, 59, 62.
Д 25.4, 6, 8, 9, 16, 17, 25, 27, 33, 36, 38, 40, 46, 48, 52, 64, 65, 71.
18. Прямая на плоскости. Взаимное расположение прямых. Полу-
плоскости.
А 26.7, 18, 21, 27.8, 15, 20, 25, 28.4, 11, 20.
Д 26.8, 10, 15, 19, 20, 22, 24, 27.10, 13, 16, 22, 24, 28.6, 9, 13.
19. Метрические задачи на плоскости. Плоскость в пространстве.
А 29.1, 6, 18, 33, 37, 44(1), 45(1), 56, 65, 26.31, 39, 44.
Д 29.3–5, 9, 35, 38, 43, 44(2), 45(2), 55, 57, 78, 26.29, 32, 34, 38,
50.
20. Взаимное расположение плоскостей. Полупространства. Метри-
ческие задачи.
А 27.37, 40, 53, 28.19, 29.79, 88, 91.
Д 27.33, 35, 39, 49, 54, 28.17, 18, 21, 29.81, 83, 89, 93, 102.
21. Прямая в пространстве. Способы задания. Взаимное распо-
ложение прямых. Метрические задачи.
А 31.2(1), 4(1), 11(2), 13, 18(1,2), 23, 32.3, 5, 8, 13, 20, 34, 39.
Д 31.1, 2(2), 3, 4(2), 5, 11(1), 14, 15, 18(3,4), 19, 24, 31, 34, 32.10,
17, 21, 26, 36–38.
22. Векторные уравнения прямой и плоскости.
А 33.5, 8, 10, 15, 20, 26, 29, 31, 35, 41.
Д 33.6, 7, 11, 12, 22, 23, 27, 30, 33, 36, 40, 42.
23. Парабола, эллипс и гипербола.
А 34.1, 6, 13(1-3), 18, 20, 26, 32, 36, 40, 49, 61, 66.
Д 34.2, 4, 9, 11, 13(4-6), 16, 22–24, 29, 39, 44, 64, 65.
24. Линии второго порядка и их уравнения.
А 35.5, 11, 14, 19, 22, 23(1), 24(4), 27(1).
Д 35.6, 7, 10, 20, 21, 23(2,3), 24(7), 26, 27(5).
25. Поверхности второго порядка и их уравнения. Инварианты ли-
ний и поверхностей.
А 36.1, 5, 8(1), 13(1), 17, 18, 25, 33, 40, 46, 37.1, 6, 8, 16, 38.1,
9(1,2), 10(1,2), 11(1,2), 12(2).
Д 36.3, 6, 8(2), 11, 13(2,3), 19, 20, 23, 31, 36, 47, 52, 37.2, 5, 7,
15, 19, 38.4, 9(3), 10(3), 11(3), 12(3).

26. Поле комплексных чисел. Формы комплексного числа.
 А 41.1(а,г,е), 5(а), 6(а), 7, 9(а), 10(в,г), 11(а), 15.
 Д 41.1(б,в,д), 5(б), 6(б), 8, 9(б), 10(б,д,е), 11(б), 17, 20, 23.
27. Формы комплексного числа (продолжение). Формула Муавра.
 Корни из единицы.
 А 42.1(1-8), 2, 3(1-8), 8, 21(а), 23(а), 27, 32, 43.2, 6, 7, 11, 15(а,в), 20, 25.
 Д 42.1(9-12), 3(9-14), 5, 6, 9, 10, 19, 23(б), 28, 31(а,б), 43.1-3, 5, 8, 9, 14-17, 21, 23, 24, 27.
28. Кольцо алгебраических многочленов.
 А
 А1. Пусть R – кольцо. Убедитесь, что многочлены $R[x]$ образуют кольцо.
 А2. Докажите: если R – ассоциативное кольцо, то и $R[x]$ – ассоциативное кольцо; если R – коммутативное кольцо, то и $R[x]$ – коммутативное кольцо; если в R есть единица, то и в $R[x]$ есть единица.
 А3. Пусть R – кольцо с единицей, $a, b \in R[x]$, $b \neq 0$, $n = \deg(b)$, а коэффициент b_n имеет обратный. Докажите, что тогда существуют многочлены $p, r \in R[x]$, что $b = ap + r$, причём r – либо нулевой многочлен, либо $\deg r < \deg b$, а если при этом в R нет делителей нуля, то p и r единственны.
 А4. Поделите с остатком многочлен $a = x^4 + 2x^3 + x + 2$ на $b = 2x^2 + 1$ над $\mathbb{Z}_3$.
 А5. Теорема Безу. Пусть R – коммутативное кольцо без делителей нуля. $a \in R[x]$. Известно, что $a(z) = 0$. Докажите, что $a(x) = b(x) \cdot (x - z)$ для некоторого $b \in R[x]$.
 А6. Пусть многочлены p и q от одной переменной взаимно просты. Докажите, что тогда существуют многочлены u, v такие, что $up + vq = 1$. Верно ли то же самое для многочленов от $n \geq 2$ переменных?
 А7. Пусть P – поле, а многочлен $p \in P[x]$ неприводим, причём $ab \vdots p$. Докажите, что тогда или $a \vdots p$, или $b \vdots p$.
 А8. Пусть R – кольцо, $P \subset R$ – подкольцо. Докажите, что $P[x]$ – подкольцо в $R[x]$.
 А9. Многочлен называется чётным, если все его коэффициенты при нечётных степенях равны нулю. Докажите, что чётные многочлены образуют подкольцо в $R[x]$, изоморфное ему.
 А10. Докажите, что если производная многочлена над полем

нулевой характеристики равна нулю, то многочлен является константой. Верно ли это в случае поля положительной характеристики?

А11. Применяя алгоритм Евклида, найдите НОД многочленов $f = x^6 + 2x^4 - 4x^3 + 8x - 5$, $g = x^5 + x^2 - x + 1$.

Д

Д1. Пусть $\mathbb{Z}_p$ – поле вычетов по простому модулю p . Раскладывается ли многочлен $f(x) = x^{p-1} - 1 \in \mathbb{Z}_p[x]$ на линейные множители?

Д2. Докажите, что многочлен $f(x) = x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ неприводим.

Д3. Докажите, что многочлены $f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$, $g(x) = x^n + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ взаимно просты.

Д4. Докажите, что многочлен $f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ неприводим для простых n .

Д5. Пусть P – поле, $f \in P[x]$ – ненулевой многочлен. Докажите, что либо $P[x]/fP[x]$ – поле, либо в $P[x]/fP[x]$ есть делители нуля.

Д6. Докажите, что любой многочлен над полем нулевой характеристики является производной некоторого многочлена над тем же полем. Верно ли это утверждение в случае поля положительной характеристики?

Д7. Является ли кольцом множество всех многочленов $f \in \mathbb{Z}[x]$ таких, что $f(0) = f(1) = 0$? Обязана ли производная принадлежать тому же множеству?

Д8. Можно ли построить неприводимый многочлен $f \in \mathbb{Q}[x]$ сколь угодно большой степени?

Д9. Докажите, что многочлен $x^{17} + y^{17} + z^{17} \in \mathbb{Z}_{17}[x, y, z]$ является приводимым.

Д10. Применяя алгоритм Евклида, найдите НОД многочленов $f = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$, $g = x^2 - x + 1$.

Д11. Получите разложение наибольшего общего делителя $d = fu + gv$, если $f = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $g = x^4 - 1$.

29. Кольцо и поле, примеры.

А 40.1–4, 8(а,б), 10, 11, 26, 27, 33, 38.

Д 40.1–4, 8(в,г), 13, 15, 30, 32, 39, 45.

30. Циклические группы. Конечные группы. Конечные поля.

А 39.28(б), 53(а,б), 54(а), 56–58, 61, 64, 40.40, 46, 54(а), 56(а).

Д 39.53(в,д), 54(б), 59, 60, 65, 72, 40.47, 48, 54(б), 56(б), 59.

31. Контрольная работа №2.

План семинарских занятий, II семестр

1. Линейное пространство. Координаты вектора. Матрица перехода к другому базису.

А 44.4(а,б), 9, 11(а), 13(а,б,в), 20(а), 24, 31, 55, 62, 68, 70, 75, 80, 87, 91, 92, 94.

Д 44.3, 6, 8, 11(б), 12, 14, 22, 25, 38, 42, 47, 58, 64, 71(а), 72(б), 77(а), 89, 90, 93.

2. Подпространства. Их сумма и пересечение. Дополнительное подпространство.

А 45.2, 6, 12, 13, 17, 27, 42, 49, 54, 58, 69, 70, 71, 74(а), 79, 82.

Д 45.4, 7, 14, 16(а), 18, 29, 34, 41, 50, 55, 60, 64, 74(б), 78.

3. Линейное аффинное многообразие.

А 46.3, 7, 14(а), 15(а), 16(а), 17, 24, 25, 39, 41, 65.

Д 46.4, 5, 8, 14(б), 15(б), 16(б), 19, 21, 26, 27, 37, 42, 64.

4. Линейный оператор и его матрица.

А 52.3, 5(а,б) 6(а,б), 7, 11(а,б), 19, 24, 27, 39, 46, 48(б), 54(а), 53.1, 4, 17.

Д 52.4, 5(в,г), 6(в,г), 8(а), 9, 12(а,б,в), 20, 25, 28, 40, 48(в), 49(а), 53(а), 53.3, 5, 18.

5. Ядро и образ линейного оператора.

А 54.1, 3(а), 5, 9(1), 10(3), 11(1), 14, 17, 21, 27(1), 28(1), 38, 41(1).

Д 54.2, 3(б), 6, 9(2), 10(4), 11(3), 12, 19, 22, 27(2), 28(2), 35, 41(2).

6. Линейное пространство линейных операторов.

А 55.1, 4, 5, 7, 9, 17(а,в), 18(а), 19, 27, 30, 31, 34.

Д 55.2, 3, 6, 8, 10, 17(б,г), 18(б), 20, 23, 24, 25, 32, 33.

7. Умножение операторов. Обратный оператор.

А 56.1, 4, 7, 8, 9, 10, 13(а,б,в), 17, 21, 22, 29, 50, 54, 56, 64.

Д 56.2, 3, 5, 6, 12, 19, 20, 23, 30, 35, 37, 52, 65, 76.

8. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен.

А 57.1, 5, 7, 10, 11, 17, 25(а,в), 34, 41, 50, 51, 63, 64, 73(а,д), 77, 85.

Д 57.3, 6–8, 13–16, 23, 25(б,е), 30, 32, 35, 37, 43, 59, 73(в,г,е), 74, 78(а).

9. Оператор простой структуры.
 А 58.1, 2(б), 3, 5, 8, 10, 12, 29, 40, 47(а), 48, 49, 50, 63, 65, 77.
 Д 58.2(а,в), 4, 6, 7, 9, 11, 14, 30, 41, 47(б), 51, 52, 66, 67, 73, 75.
10. Инвариантные подпространства.
 А 59.2, 4, 9, 11(б,д), 12(б), 16, 25–27, 34, 35(а), 43.
 Д 59.3, 5, 6, 10, 11(в,ж), 12(а,в), 13, 17, 28, 29, 32(г), 35(б), 45, 47.
11. Корневые подпространства.
 А 60.1, 2(а,б,в), 3, 5, 7, 11(а), 13, 15, 17.
 Д 60.2, 4, 6, 8, 11(б), 14, 16, 20, 20.1(а).
12. Жорданов базис и жорданова форма матрицы линейного оператора.
 А 60.21, 24, 27, 29, 36, 37, 45, 50, 53.
 Д 60.22, 25, 32, 46, 55, 58.
13. Жорданов базис и жорданова форма матрицы линейного оператора (продолжение).
 А 60.65, 68, 71, 74, 84, 88.
 Д 60.70, 72, 73, 75, 86, 89.
14. Жорданова форма и критерий подобия.
 А 60.92, 95, 99, 101, 105, 110, 113.
 Д 60.93, 94, 100, 102, 106, 111, 114.
15. Контрольная работа №1.
16. Нормы, метрики и скалярное произведение. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Ортогональность векторов.
 А 47.1, 2, 3, 5(а,б,д), 6, 10(а,б), 24, 27, 32, 48.1, 5, 8, 70.1, 2, 6, 12, задачи из учебного пособия [21].
 Д 47.4, 7, 8(а,в), 9, 10(в,г), 11, 20, 25, 26, 28(а), 33, 48.3, 4, 6, 70.3, 4, 8, 20, задачи из учебного пособия [21].
17. Ортонормированный базис. Процесс ортогонализации. Матрица Грама.
 А 48.10, 11, 14, 17, 19, 21, 24, 25(2,3), 26, 30, 31, 33(1,2), 34(1), 37(1–3), 38, 41.
 Д 48.15(1,2), 20(а), 21.1, 25(1, 4–6), 28, 32, 33(3,4), 34(2), 37(4–6), 39.
18. Ортогональное дополнение. Задача о перпендикуляре. Метрические задачи.

А 49.7(б,в), 12(а), 14(а), 15, 17(а,в), 18(а,б), 19, 26(а), 30, 43, 50.5(3), 9, 29, 33, 42, 51.17(а,б), 20.

Д 49.7(г), 12(б,в), 14(б), 16, 17(б,г), 18(в,г), 21, 24(а), 31, 42, 50.5(2), 7, 30, 34, 44, 51.17(в), 18(а).

19. Коллоквиум №1.

20. Сопряжённый оператор.

А 61.2, 5, 25, 26(а), 30(а), 34, 39(а), 40(а), 51(а), 59.

Д 61.3, 4, 21, 24, 27(а), 30(б), 32, 35, 39(б), 40(б), 41(а,б), 51(б), 60.

21. Нормальный оператор.

А 62.5, 9, 17, 20, 26, 33, 34, 37, 39, 44, 47, 49, 50, 60.

Д 62.4, 12, 18, 19, 21, 27, 32, 35, 36, 38(а,б), 40, 45, 51, 53, 62.

22. Унитарный (ортогональный) оператор.

А 63.1, 3, 5, 6(а,б,в), 9, 10(в), 11, 13(а,б,в), 15(а), 17, 19(а), 23, 32, 35(а,б,в), 38(б), 44.

Д 63.2, 4, 6(г,д), 8, 10(г), 12, 14(а,б,в), 15(б), 19(б), 24, 31(б), 34, 39, 42, 47.

23. Самосопряжённый оператор.

А 64.1, 3, 6, 8, 11, 13, 15, 17, 18(б), 24, 32, 39, 42, 48.

Д 64.2, 4, 5(а,б), 7, 9, 10, 16, 19(в), 20, 33, 34, 44.

24. Знакоопределённые операторы. Квадратный корень из оператора. Разложения линейного оператора.

А 65.1, 2, 4, 11, 13, 15, 20, 22, 34, 37, 44, 62, 66.1, 2, 5, 9, 10, 22, 24, 27, 29, 35(а,в), 45, 49, 50, 52.

Д 65.3, 8, 12, 14, 24, 26, 30, 31, 43, 46, 63, 64, 66.3, 6, 12, 23, 25, 28, 35(б), 51, 53, 59, 61.

25. Билинейные и квадратичные формы. Канонический вид. Метод Лагранжа.

А 67.1(2–5), 2, 3(1,2), 4(2), 5(1,2), 6, 7, 8, 9(2,7), 11(3,7), 13, 14, 15(2), 17.

Д 67.1(6–8), 2, 3(3,4), 4(3,4), 9(4,6,9), 11(2,9,12), 15(2), 18.

26. Закон инерции. Сигнатурное правило Якоби. Критерий Сильвестра. Метод вращений. Одновременное приведение к каноническому виду пары квадратичных форм.

А 68.1(1–3), 2(1), 5(1), 7, 9, 12(1), 30(1,6), 31(1,6), 32, 69.1(1), 2(1), 6(1), 15(1), 17(1), 18(1), 22(1,2).

Д 68.1(4–6), 2(2), 5(2,3), 9(2), 12(2), 30(2,8), 31(2,8), 33, 69.1(2,6), 2(2), 6(3), 14, 15(2), 17(2,3), 18(3).

27. Нормы оператора и матрицы. Линейные операторные уравнения. Псевдорешение.

А 71.6, 9, 14, 17, 18, 30.1, 31, 32, 35, 72.2, 4, 8, 19, 21, 23(а,б), 24(а), 25, 28, 31, 41(а).

Д 71.7, 10, 16, 19, 32, 33, 51, 53, 72.3, 5, 7, 9, 20, 23(в), 24(б), 30, 33, 41(б,г).

28. Выпуклые множества и системы линейных неравенств.

А

А1. Определите, является ли аффинно-зависимой система векторов, и чему равна размерность их выпуклой оболочки:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}.$$

А2. Опишите все выпуклые множества в $\mathbb{R}$.

А3. Пусть A – непусто и ограничено. Докажите, что $\mathbb{R}^n \setminus A$ не выпукло.

А4. Докажите, что множество внутренних точек выпуклого множества – выпуклое множество.

А5. Докажите, что замыкание выпуклого множества является выпуклым множеством.

А6. Докажите, что выпуклая оболочка точек компактного множества образует компактное множество.

А7. Докажите, что множество M неотрицательных матриц выпукло. Чему равна размерность этого множества? Предложите способ получения элемента наилучшего приближения по норме Фробениуса произвольной матрицы элементом из множества M . Можно ли обобщить эти построения на случай матриц, чьи элементы содержатся в отрезке $[0, 1]$?

А8. Пусть A – неотрицательно определённая матрица. Докажите, что множество векторов $M = \{x : (Ax, x) \leq c\}$ – выпуклое для любого c .

А9. Докажите, что непустое пересечение выпуклых множеств выпукло. Можно ли сказать то же самое про объединение выпуклых множеств?

A10. Докажите, что выпуклая оболочка из $d + 1$ аффинно-независимых векторов в $\mathbb{R}^d$ имеет внутреннюю точку.

A11. Докажите, что для пары выпуклых множеств в конечно-мерном пространстве без пересечения существует разделяющая гиперплоскость.

A12. Запишите уравнение гиперплоскости, нестрого отделяющей точку $x = [-4 \ 2 \ 1 \ -2]$ от множества, заданного системой неравенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 \leq 1, \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 2, \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 9. \end{cases}$$

Д

Д1. Определите, является ли аффинно-зависимой система векторов, и чему равна размерность их выпуклой оболочки:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}.$$

Д2. Изобразите допустимое множество с ограничениями $x + 2y \geq 6$, $2x + y \geq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Какие точки находятся в вершинах этого множества?

Д3. Покажите, что допустимое множество, определяемое неравенствами $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 5y \leq 3$ и $-3x + 8y \leq -5$, является пустым.

Д4. Какую форму имеет допустимое множество $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y + z = 1$? Можно ли его описать с использованием только линейных неравенств? Чему равен максимум выражения $x + 2y + 3z$ на данном множестве?

Д5. Найдите двойственную к следующей задаче: минимизировать $x_1 + x_2$ при условиях $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $2x_1 \geq 4$, $x_1 + 3x_2 \geq 11$.

Д6. Докажите альтернативу Гордана: либо система $Ax = 0$ имеет ненулевое решение $x \geq 0$, либо существует вектор y такой, что $y^T A > 0$.

Д7. Докажите, что множество $X = \{x_1^2 \leq x_2\} \in \mathbb{R}^2$ выпукло.

Д8. Найдите минимальное α , при котором множество $X = \{(x_1 - 1)^3 - x_2^2 \leq 0, x_2 - x_1 \leq \alpha\}$ выпукло.

Д9. Докажите, что у стохастической по столбцам матрицы с положительными элементами существует максимальное вещественное собственное значение, равное единице, к тому же простое.

29. Контрольная работа №2.

30. Коллоквиум №2.

Коллоквиумы

Коллоквиумы проводятся в течение семестра на основе пройденного лекционного материала в форме письменной работы и/или устного собеседования. Для успешной сдачи коллоквиума необходимо владеть теоретическим материалом (см. программу коллоквиума) и уметь решать предложенные задачи по теме. Коллоквиумы обязательны для всех студентов и рассматриваются как элемент зачёта.

Программы коллоквиумов, I семестр

Коллоквиум №1

1. Вещественное линейное пространство. Линейная зависимость, критерии. Базис и размерность. Изоморфизм линейных пространств.
2. Подстановки (перестановки), свойства. Симметрическая группа подстановок.
3. Определитель квадратной матрицы, свойства. Определитель как полилинейная функция столбцов (строк). Теорема Лапласа.
4. Обратная матрица, присоединённая матрица. Группа невырожденных матриц.
5. Ранг матрицы, столбцовый и строчный ранги, свойства. Теорема о базисном миноре.
6. Система линейных алгебраических уравнений. Критерии совместности и определённости. Общее решение, геометрические свойства множества решений, фундаментальная система решений.
7. Линейное пространство геометрических векторов. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов и их свойства.

Коллоквиум №2

1. Уравнения прямой и плоскости. Метрические задачи на прямые и плоскости в прямоугольных координатах.

2. Общее уравнение линии второго порядка на плоскости. Матричная запись общего уравнения и его квадратичной части. Приведённые уравнения линии второго порядка в пространстве. Метод вращений.
3. Классификация линий второго порядка. Инварианты. Эллипс, гипербола, парабола. Эксцентриситет, фокусы и директрисы. Сферы Данделена и конические сечения. Уравнения конических сечений. Канонические уравнения кривых второго порядка.
4. Поле комплексных чисел. Комплексная плоскость, комплексная прямая. Стереографическая проекция и расширенная комплексная плоскость.
5. Тригонометрическая форма комплексного числа. Возведение в степень комплексного числа. Формула Муавра. Формула Эйлера. Извлечение корня из комплексного числа. Группа корней из единицы. Первообразные корни.
6. Кольцо алгебраических многочленов. Деление с остатком. Наибольший общий делитель.
7. Канонические разложения многочлена над полем комплексных и над полем действительных чисел.
8. Группа. Степени элемента. Циклические группы. Подгруппы циклической группы. Подгруппы, смежные классы, нормальные делители (нормальные подгруппы). Теорема Лагранжа. Конечные абелевы группы.
9. Изоморфизм и гомоморфизм групп. Теорема о гомоморфизме.
10. Кольцо. Делители нуля. Целостные кольца. Изоморфизм колец. Кольцо вычетов. Поле вычетов по простому модулю. Мультипликативная группа поля вычетов.
11. Линейное пространство. Линейные пространства и расширения полей. Конечные расширения полей. Количество элементов в конечном поле. Линейные пространства и алгебры.

Программы коллоквиумов, II семестр

Коллоквиум №1

1. Линейные операторы и линейное пространство линейных операторов.

2. Матрица линейного оператора в паре базисов. Переход к другому базису, матрица перехода. Изменение матрицы оператора при изменении пары базисов. Матрица произведения линейных операторов. Эквивалентность матриц, подобие матриц и инварианты.
3. Ядро и образ линейного оператора. Соотношение между рангом и дефектом линейного оператора. Обратимый оператор. Линейность обратного оператора. Оператор проектирования.
4. Собственные значения и собственные векторы. Характеристический многочлен линейного оператора (матрицы). Матрица Фробениуса.
5. Геометрическая и алгебраическая кратность собственного значения. Операторы простой структуры и диагонализуемые матрицы. Критерий диагонализуемости.
6. Инвариантные подпространства и сужение оператора. Верхняя треугольная форма матрицы линейного оператора в комплексном пространстве.
7. Многочлен от линейного оператора (матрицы). Теорема Гамильтона-Кэли.
8. Метрическое пространство. Открытые и замкнутые шары. Ограниченные множества. Открытые и замкнутые множества. Топологические свойства открытых (замкнутых) множеств.
9. Сходящиеся и фундаментальные последовательности. Полные метрические пространства.
10. Компактные множества в метрических пространствах. Непрерывные отображения метрических пространств. Теорема Вейерштрасса в метрическом пространстве.
11. Нормированное пространство. Нормы Гёльдера.
12. Выпуклые функции. Достаточное условие выпуклости дважды дифференцируемой функции. Неравенства Юнга, Гёльдера и Минковского.
13. Линейные пространства со скалярным произведением. Евклидовы и унитарные пространства.
14. Длина вектора (евклидова норма). Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.
15. Тожество параллелограмма и критерий евклидовости нормы.

16. Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. QR-разложение матрицы. Ортогональное дополнение множества.
17. Задача о наилучшем приближении вектора на конечномерном подпространстве в пространстве со скалярным произведением. Теорема о перпендикуляре.
18. Матрица Грама. Положительно и неотрицательно определённые матрицы. Общий вид скалярного произведения в конечномерном пространстве.
19. Существование элемента наилучшего приближения вектора на замкнутом множестве в конечномерном подпространстве нормированного пространства.
20. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном пространстве.
21. Критерий компактности единичной сферы в нормированном пространстве.

Коллоквиум №2

1. Прямая сумма линейных операторов (матриц). Расщепление линейного оператора. Корневое расщепление. Связь между делителями характеристического многочлена и инвариантными подпространствами.
2. Нильпотентные и квазискалярные операторы (матрицы). Критерий нильпотентности. Теорема о расщеплении вырожденного оператора. Нерасщепляемые операторы и подпространства Крылова.
3. Теорема о нерасщепляемом минимальном подпространстве. Теорема о ненулевых векторах Крылова нильпотентного оператора. Индекс нильпотентности и теорема о системах векторов Крылова.
4. Теорема Жордана для нильпотентного оператора. Жордановы цепочки и циклические подпространства. Теорема Жордана о структуре линейного оператора. Максимальное расщепление линейного оператора. Единственность жордановой формы линейного оператора (матрицы). Критерий подобия комплексных матриц.
5. Влочно-диагональная жорданова форма вещественной матрицы.

6. Минимальный многочлен матрицы (оператора). Совпадение минимального и характеристического многочленов. Критерий диагонализуемости матрицы.
7. Симметрические и эрмитовы формы. Критерий невырожденности и эрмитовости. Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы и её изменение при изменении базиса.
8. Общий вид линейного функционала и эрмитовой билинейной формы в конечномерном пространстве со скалярным произведением. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов. Метод Лагранжа. Метод верхнетреугольных преобразований (метод Якоби).
9. Знакоопределённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра знакоопределённости. Инерция квадратичной формы. Закон инерции. Сигнатурное правило Якоби. Критерий конгруэнтности и эрмитовой конгруэнтности.
10. Сопряжённый оператор. Существование, линейность, единственность сопряжённого оператора и его явный вид. Матрицы оператора и сопряжённого к нему в паре биортогональных базисов.
11. Нормальный оператор в унитарном пространстве. Критерии нормальности оператора (матрицы).
12. Унитарные и эрмитовы (самосопряжённые) операторы (матрицы). Критерии унитарности и эрмитовости оператора (матрицы). Приведение квадратичной формы к главным осям.
13. Эрмитово разложение оператора (матрицы). Спектральное разложение эрмитова (самосопряжённого) оператора.
14. Знакоопределённый оператор (матрица). Существование и единственность квадратного корня из неотрицательного оператора. Положительно определённые операторы (матрицы) и скалярное произведение. Одновременное приведение пары квадратичных форм к главным осям.
15. Нормальные операторы в евклидовых пространствах. Критерий нормальности. Блочная-диагональная форма вещественной нормальной матрицы. Симметрические операторы (матрицы). Приведённые уравнения гиперповерхностей второго порядка.
16. Ортогональные операторы (матрицы). Блочная-диагональная форма ортогональной матрицы. Матрицы Гивенса и Хаусхолдера. Представление оператора простого поворота в виде произведения операторов простого отражения.

17. Сингулярные числа, сингулярная пара базисов. Сингулярное разложение линейного оператора (матрицы). Три формы записи сингулярного разложения. Полярное разложение оператора (матрицы). Линейные операторные уравнения в унитарных пространствах. Теорема и альтернатива Фредгольма.
18. Теорема Куранта-Фишера. Экстремальные свойства сингулярных чисел. Соотношения разделения собственных значений эрмитовой матрицы и её подматрицы. Соотношения разделения сингулярных чисел матрицы и её подматрицы.
19. Операторные уравнения. Нормальное решение. Псевдорешение. Нормальное псевдорешение и сингулярное разложение. Матрица псевдообратная по Муру-Пенроузу. Условия Мура-Пенроуза.
20. Непрерывность и ограниченность линейного оператора. Норма линейного оператора. Теорема об операторной норме. Спектральная норма. Дуальные (двойственные) нормы. Матричные нормы. Операторная норма и норма Фробениуса. Унитарно инвариантные нормы.
21. Спектральный радиус и круги Гершгорина. Ряд Неймана. Теорема Бауэра-Файка. Число обусловленности матрицы. Малоранговые приближения.

Контрольные работы

Примерные варианты, I семестр

Контрольная работа №1

1. Вычислите A^k , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, где $A = [1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n]^T [1 \ 1 \ \dots \ 1]$.
2. Вычислите определитель матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. а) Постройте общее решение системы линейных уравнений $Ax = b$ с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

и правой частью $b = [4 \ 6 \ 8]^T$.

- б) Вычислите ранг и дефект вещественной матрицы A порядка 2023, элементы которой заданы условием $a_{i,j} = \cos(i+j)+1$.
4. а) Найдите размерность подпространства многочленов в M_5 , порождённого линейной оболочкой векторов

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 + t + t^2, \quad v_2 = 1, \quad v_3 = t, \quad v_4 = t^2, \quad v_5 = t^4, \\ v_6 &= t^4 - t + 1. \end{aligned}$$

- б) Разложите вектор $1 + t + t^2 + t^3$ по базису

$$v_1 = t + 1, \quad v_2 = t^2 + 1, \quad v_3 = t^3 + 1, \quad v_4 = t^2.$$

и постройте матрицу перехода из него в естественный базис пространства многочленов.

5. а) Найдите обратную к матрице $A = I - 2uu^T \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ при условии $u^T u = 1$.

б) Две плоскости в декартовых координатах заданы уравнениями

$$\pi_1 : a_1x + a_2y + a_3z = b_1,$$

$$\pi_2 : p_1x + p_2y + p_3z = b_2.$$

Известно, что они различны и пересекаются по прямой l . Найдите ранги матриц

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & b_2 \end{bmatrix}.$$

6. Пусть A – невырожденная матрица порядка n . Удовлетворяет ли аксиомам скалярного произведения функция $f(x, y) = x^T A A^T y$?

Контрольная работа №2

1. а) Найдите смежные классы подгруппы H матриц с определителем, равным 1, в группе G невырожденных вещественных матриц порядка n по умножению.
б) Приведите пример бесконечной группы, содержащей и конечную, и бесконечную (неизоморфную исходной группе) подгруппы.
2. а) Образуется ли поле множество функций вида $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $x \in [a, b]$, где $p(x)$ – произвольные многочлены, а $q(x)$ – многочлены с корнями вне отрезка $[a, b]$?
б) Приведите пример кольца с единицей и без делителей нуля, которое не является полем (ответ обосновать).
3. а) Решите линейную систему над полем $\mathbb{Z}_7$ с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

и правой частью $b = [0 \ 6 \ 4]^T$.

- б) Над полем $\mathbb{Z}_{11}$ решите уравнение $x^{34} = 4$.
4. а) Центр правильного n -угольника расположен на комплексной плоскости в точке z_0 . Найдите сумму комплексных чисел, соответствующих его вершинам.
б) Решите уравнение $z + |z|^2 = 0, z \in \mathbb{C}$.

5. а) Найдите ортогональную проекцию вектора $x = (-14, 2, 5)^T$ на прямую с направляющим вектором $r = (2, -2, 1)^T$. Чему равен объём параллелепипеда на векторах x , r и $p = (1, 0, 1)^T$?
 б) Выведите общее уравнение плоскости из её параметрического уравнения

$$x = u + v, \quad y = u - v, \quad z = 5 + 6u - 4v.$$

6. Найдите сумму квадратов комплексных корней степени n из единицы.

Примерные варианты, II семестр

Контрольная работа №1

1. а) Найдите α и β такие, чтобы матрица $I - \alpha uu^T + \beta vv^T$ стала проектором ($u^T u = v^T v = 1, v^T u = 0$).
 б) Постройте матрицу оператора двукратного дифференцирования в естественном базисе пространства многочленов M_n .
 2. а) Найдите диагональный вид и канонический базис матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

- б) $f_1 = (5, 3, 1)$, $f_2 = (1, -3, -2)$, $f_3 = (1, 2, 1)$, $g_1 = (-2, 1, 0)$, $g_2 = (-1, 3, 0)$, $g_3 = (-2, -3, 0)$. Известно, что $Af_i = g_i$. Постройте матрицу линейного оператора A в базисе f .
 3. а) Проверьте диагонализуемость матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- б) Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы $A = I - 2uu^T$, $u^T u = 1$.

4. а) Найдите все инвариантные подпространства матрицы $A = uv^T, v^T u = 0$.
 б) Найдите все собственные подпространства матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. а) Найдите жорданову форму и канонический базис матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- б) Найдите жорданову форму матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 5 & 7 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 8 & 6 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

6. $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Вычислите $e^A = I + A + A^2/2! + A^3/3! + \dots$.

Контрольная работа №2

- а) Найдите $\max \|x\|_1, \min \|x\|_1$ при условии $\|x\|_2 = 1$.
 б) Найдите $\max \|x\|_\infty, \min \|x\|_\infty$ при условии $\|x\|_2 = 1$.
- а) Может ли оператор/матрица проектирования не быть нормальным/нормальной? Ответ обоснуйте.
 б) Докажите, что для любой самосопряжённой матрицы H матрица $Q = (I - iH)^{-1}(I + iH)$ является унитарной.
- а) Докажите, что $\|A\|_C = \max |a_{ij}| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_1}$.

б) Выясните, является ли функция $f(x, y) = y^T A x$ скалярным произведением для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 1 & 20 & 3 \\ 2 & 3 & 30 \end{bmatrix}.$$

4. а) Найдите сингулярное разложение матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}.$$

б) Решите задачу $\|Ax - b\|_2 \rightarrow \min_x$, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b^T = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

5. а) Является ли функция $f(x) = \sqrt{(Ax, x)}$ нормой для $A = A^T > 0$? Ответ обоснуйте.

б) Вычислите сигнатуру квадратичной формы (Ax, x) с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 10 & 20 & 3 \\ 10 & 200 & 15 & 0 \\ 20 & 15 & 300 & 10 \\ 3 & 0 & 10 & -400 \end{bmatrix}.$$

6. Оцените сложность алгоритма построения QR-разложения квадратной матрицы A методом вращений.

Зачёт

Задачи для подготовки к зачёту, I семестр

1. Приведите пример кольца с единицей и с делителями нуля. Ответ обоснуйте.
2. Приведите пример кольца с единицей, без делителей нуля, но не являющегося полем.
3. При наличии $A = LU$ -разложения невырожденной матрицы оцените сложность получения решения системы $Ax = y$.
4. Получите параметрическое уравнение плоскости через общее уравнение $Ax + By + Cz = D$.
5. Докажите, что матрицы вида

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

образуют группу.

6. Приведите пример группы бесконечного порядка с нетривиальной конечной подгруппой.
7. Образует ли группу множество вещественных матриц порядка n вида $\{I - 2uu^T\} \cup \{I\}$ при условии $\sum_{i=1}^n u_i^2 = 1$? Ответ обоснуйте.
8. Пользуясь только определением, выведите свойство линейности определителя матрицы по столбцам.
9. Пользуясь только определением, докажите, что перестановка столбцов/строк матрицы меняет знак определителя.
10. Вычислите ранги квадратных матриц порядка 128, элементы которых заданы формулами: $\sin(i+j)$, $\sin(i+j+1)$, $\sin(i+j)+1$.
11. Пусть первые r строк матрицы A – базисные ($\text{rank} A = r$), обозначим соответствующую подматрицу через R . Подматрицу из первых r столбцов обозначим через C , подматрицу на их пересечении – B . Докажите, что $A = CB^{-1}R$.
12. Оцените сложность умножения квадратной матрицы ранга $r \ll n$ на вектор, где n – порядок матрицы.

13. Вычислите A^n , если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

14. Вычислите A^n для вещественной квадратной матрицы порядка n вида $I - 2uu^T$ при условии, что $\sum_{i=1}^n u_i^2 = 1$.

15. Вычислите A^{n-2} для матрицы A порядка n , $n \geq 3$, если

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

16. Образует ли множество $\mathbb{Z}_6$ поле?
17. Образует ли множество $\mathbb{Z}_p$ поле, если p – простое число?
18. Для невырожденной строго регулярной матрицы A докажите, что $A = LU$, где L – униинжетреугольная, U – верхнетреугольная матрица.
19. Пусть f – базис пространства V , F – матрица перехода из естественного базиса в f . Докажите, что скалярное произведение векторов в координатах базиса f имеет вид

$$(x_f, y_f) = x^T (FF^T) y.$$

20. Покажите, что множество многочленов от одной переменной образует кольцо, но не поле.
21. Даны координаты векторов x, y, z в базисе f и матрица Грама $G = (f_i, f_j)$. Вычислите объём параллелепипеда, натянутого на x, y, z .
22. Всегда ли верно, что вектор (A, B, C) перпендикулярен плоскости, заданной уравнением $Ax + By + Cz = D$?
23. Приведите пример нетривиального нормального делителя.
24. Докажите, что $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}A + \text{rank}B$.

25. В случае квадратных матриц порядка n докажите, что $\text{rank}(AB) \geq \text{rank}A + \text{rank}B - n$.
26. Для натуральных n выведите и обоснуйте формулу Муавра.
27. Докажите, что множество комплексных чисел является полем.
28. Докажите, что для линейной независимости функций $f_1(x), \dots, f_n(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для некоторых точек $x_1, \dots, x_n$ матрица $[f_i(x_j)]_{i,j=1}^n$ была обратимой.
29. Докажите тождество $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$. Докажите, что для произвольных геометрических векторов a, b, c выполняется равенство $[a, [b, c]] = (a, c)b - (a, b)c$.
30. Вычислите $\sqrt[4]{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}$, приведите рисунок.
31. Докажите, что определитель блочно-диагональной матрицы равен произведению определителей диагональных блоков.
32. Докажите, что определитель блочно-треугольной матрицы равен произведению определителей диагональных блоков.
33. Докажите, что невырожденные нижнетреугольные матрицы образуют группу.
34. Квадратная матрица A порядка $n > 2$ представима в виде $A = u_1 v_1^T + u_2 v_2^T$ при условии, что u_1, u_2 и v_1, v_2 — линейно независимые пары столбцов. Чему равен ранг такой матрицы? Ответ обоснуйте.
35. Прямая l_1 представлена как линия пересечения плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ и $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$, а прямая l_2 — как линия пересечения плоскостей $A_3x + B_3y + C_3z = D_3$ и $A_4x + B_4y + C_4z = D_4$. Что можно сказать о рангах матриц

$$F = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{bmatrix}$$

в зависимости от расположения прямых l_1 и l_2 в пространстве?

36. Найдите образ единичной окружности для комплексного отображения $f(z) = \frac{1}{z^2}$.

37. Являются ли приводимыми многочлены $x^2 + 1$ и $x^4 + 1$ над полем рациональных чисел? А в поле вычетов по модулю 2?
38. Чему равна размерность линейного пространства множества комплексных чисел над полем вещественных чисел? Чему равна размерность множества вещественных чисел над полем рациональных чисел?
39. Чем является пересечение двух линейных многообразий, если оно непустое?
40. Найдите расстояние от точки до плоскости в пространстве.
41. Определитель матрицы попарных скалярных произведений системы векторов равен нулю. Что можно сказать об этой системе?
42. Решите уравнение $z^5 = \bar{z}^2, z \in \mathbb{C}$.

Образец задания зачётной комиссии, I семестр

1. Применяя теорему Лапласа, найдите определитель матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

2. При каких $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ вектор $p = (1, 2, 3)$ единственным образом выражается через векторы $a = (1, \alpha, \alpha^2)$, $b = (1, \beta, \beta^2)$ и $c = (1, \gamma, \gamma^2)$?
3. Исследуйте на совместность и найдите общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 2 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -1 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

4. Найдите ортогональную проекцию точки $(1, 3, 5)$ на прямую

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + y + 2z - 3 = 0. \end{cases}$$

5. Вычислите

$$\sqrt[11]{-\frac{18}{1+i\sqrt{3}}}.$$

6. Используя метод Лагранжа, определите тип линии второго порядка

$$2x^2 - 4xy + y^2 + 4x - y = 0.$$

Задачи для подготовки к зачёту, II семестр

1. Постройте проектор на ортогональное дополнение к подпространству L с ортонормированным базисом $f_1, \dots, f_k$.
2. Вычислите все собственные векторы и собственные значения матрицы вида $A = I - \alpha u u^T - \beta v v^T$ при условиях $v^T v = u^T u = 1, v^T u = 0$.
3. Докажите, что в случае линейной зависимости векторов $x, Ax, \dots, A^k x$ размерности линейных подпространств, образованных векторами $x, Ax, \dots, A^k x, A^{k+1}x, \dots, A^{k+s}x$, совпадают для любого $s \geq 0$.
4. Докажите, что образ и ядро линейного оператора являются инвариантными подпространствами.
5. Для матрицы вида

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

проверьте, является ли она матрицей простой структуры.

6. Вычислите все собственные значения оператора проектирования на подпространство L при условии, что $\dim L = k, \dim V = n$.
7. Постройте жорданову форму и найдите канонические базисы для матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Докажите, что собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям, линейно независимы.
9. Докажите, что характеристические многочлены подобных матриц совпадают.

10. Пусть λ – собственное значение оператора A . Докажите, что для оператора $B = A - \lambda I$ выполнено соотношение $\ker B \subseteq \ker B^2 \subseteq \ker B^3 \subseteq \dots$
11. Докажите, что если $A^m = 0$, то матрица $I - A$ обратима.
12. Докажите, что собственные значения матриц A и A^T совпадают.
13. Для оператора простой структуры, заданного в собственном базисе, вычислите e^A ; для нильпотентного оператора вычислите e^A .
14. Докажите, что $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$.
15. Докажите, что $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$.
16. Покажите, что любая норма порождает метрику, а любое скалярное произведение порождает норму.
17. Могут ли сингулярные числа матрицы проектирования быть больше единицы? Могут ли сингулярные числа матрицы проектирования быть меньше единицы, но больше нуля?
18. Докажите, что $\|A\|_F$ является матричной нормой.
19. Докажите, что операторные нормы $\|A\|_p$ являются матричными нормами.
20. Докажите, что множество ортогональных матриц образует группу по умножению. Чему равна норма Фробениуса произвольной унитарной матрицы?
21. Докажите, что разложение $A = QR$ в вещественном случае можно получить, используя матрицы вращения для преобразований строк матрицы A .
22. Дан линейный оператор $A : V \rightarrow V$. Как связаны между собой $\operatorname{im} A$ и $\ker A^*$?
23. Дан линейный оператор $A : V \rightarrow V$. Как связаны между собой $\operatorname{im} A^* A$ и $\operatorname{im} A^*$?
24. Получите достаточные условия для матрицы A , чтобы функция $y^* A x$ являлась скалярным произведением.
25. Получите константы эквивалентности между $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$.
26. Докажите, что либо $Ax = b$ имеет решение для любой правой части, либо $A^* w = 0$ имеет нетривиальное решение.
27. Докажите, что у эрмитовой матрицы собственные значения

вещественные, а из собственных векторов можно составить ортонормированный базис.

28. Пусть у нормальной матрицы Q все собственные значения попарно различны и по модулю равны 1. Докажите, что Q – унитарная матрица.
29. Для линейно независимой системы векторов v_1, v_2, v_3, v_4 запишите шаги процесса ортогонализации Грама-Шмидта.
30. Элементы квадратной матрицы A – неотрицательные числа, а все столбцовые суммы равны единице. Докажите, что для такой матрицы существует собственное значение $\lambda = 1$.
31. Является ли матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

нормальной?

32. Докажите, что A – нормальный оператор тогда и только тогда, когда

$$\text{tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2.$$

33. Докажите, что любая матрица представима в виде

$$A = U\Sigma V^*,$$

где U, V – унитарные матрицы, а Σ – неотрицательно-определённая диагональная матрица.

34. Получите сингулярное разложение $n \times n$ и $2 \times n$ -матриц с элементами $a_{ij} = 1$.
35. При помощи сингулярного разложения матрицы A получите решение задачи

$$\|Ax - b\|_2 \rightarrow \min_x$$

с наименьшей евклидовой нормой.

36. Докажите, что матрицы A^*A и AA^* имеют одинаковые ненулевые собственные значения, а в случае нормальных матриц выполнено равенство $\lambda(AA^*) = |\lambda(A)|^2$.

37. Докажите, что спектральная норма линейного оператора равна старшему сингулярному числу, а число обусловленности в евклидовой норме равно отношению старшего и младшего сингулярных чисел.
38. Докажите, что матрица

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

обратима и положительно определена.

39. Приведите пример аффинно-независимой системы векторов, которая при этом линейно зависима. Что собой представляют их аффинная оболочка и выпуклая оболочка?
40. Докажите, что $\|A\|_F \leq \sqrt{\text{rank}(A)} \|A\|_2$.
41. Может ли норма подвектора быть больше нормы всего вектора?
42. Докажите, что положительно определённая матрица конгруэнтна единичной матрице.

Образец задания зачётной комиссии, II семестр

- Найдите базисы суммы и пересечения подпространств $L_1(a_1, a_2, a_3)$ и $L_2(b_1, b_2, b_3)$, задаваемых базисными векторами $a_1 = (2, 3, 4)$, $a_2 = (3, 4, 5)$, $a_3 = (4, 5, 6)$ и $b_1 = (1, 0, 0)$, $b_2 = (1, 1, 0)$, $b_3 = (2, 1, 0)$.
- Найдите расстояние $\rho(x_0, P)$, где $x_0 = (2, 4, -4, 2)$, а P – множество решений линейной системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$$

- Найдите жорданову форму и канонический базис матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. В пространстве многочленов M_n постройте матрицу оператора двукратного дифференцирования в базисе $1 + t^n, t + t^{n-1}, t^2 + t^{n-2}, t^3, t^4, \dots, t^n$.

5. Для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

обоснуйте существование или отсутствие $B = \sqrt{A}$ и вычислите B , если это возможно.

6. Для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

постройте QR-разложение.

7. Найдите инерцию квадратичной формы

$$100x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 200x_2^2 + 8x_2x_3 - 300x_3^2.$$

Экзамен

Экзамен сдаётся в устной форме. На экзамене студент должен продемонстрировать знание и понимание основного содержания курса лекций, уметь давать чёткие определения и формулировки теорем, владеть логикой доказательств, уметь решать предложенные задачи по теме. Для студентов, не сдавших экзамен, учебным планом предусмотрена переэкзаменовка. Ниже приводится список вопросов к экзамену.

Вопросы к экзамену, I семестр

Линейные пространства и матрицы

1. Докажите, что любые два базиса конечномерного линейного пространства содержат одинаковое количество векторов.
2. Докажите, что любую линейно независимую систему векторов конечномерного пространства можно дополнить до базиса.
3. Система векторов $a_1, \dots, a_m$ линейно независима и каждый её вектор является линейной комбинацией векторов $b_1, \dots, b_n$. Докажите, что $m \leq n$.
4. Система векторов $a_1, \dots, a_n$ является базисом пространства V и $b \in V$ – произвольный ненулевой вектор. Докажите, что найдётся вектор a_i , при замене которого на b новая система также будет базисом.
5. Докажите, что размерность линейного подпространства L в n -мерном линейном пространстве не больше n .
6. Докажите, что сумма и пересечение линейных подпространств являются подпространствами.
7. Докажите, что любая ортонормированная система векторов является линейно независимой.
8. Пусть L – линейное подпространство в n -мерном линейном пространстве V . Докажите, что если $\dim L < n$, то в пространстве V имеется базис, в котором ни один из векторов не принадлежит подпространству L .
9. В n -мерном пространстве задана линейно независимая система из k векторов. Докажите, что эти векторы принадле-

жат некоторой и притом только одной плоскости размерности $k - 1$.

10. Пусть L и M – подпространства n -мерного линейного пространства. Докажите, что $\dim(L \cap M) \geq \dim L + \dim M - n$.
11. Докажите, что произведение обратимых матриц является обратимой матрицей.
12. Докажите, что определитель матрицы не меняется при транспонировании.
13. Докажите, что определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей сомножителей.
14. Докажите, что при умножении квадратной матрицы A на присоединённую матрицу получается скалярная матрица вида $|A| \cdot I$.
15. Докажите, что для обратимости квадратной матрицы необходимо и достаточно, чтобы её определитель был отличен от нуля.
16. Докажите, что ранг произведения матриц не больше ранга каждого сомножителя.
17. Докажите, что ранг суммы матриц не превосходит суммы рангов слагаемых.
18. Докажите, что ранг верхней ступенчатой матрицы равен количеству её ненулевых строк.
19. Докажите, что матрицы эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают их размеры и ранги.
20. Докажите, что ядро матрицы является линейным подпространством.
21. В квадратной матрице элементы главной диагонали равны 2, элементы соседних диагоналей равны -1 , а все остальные элементы равны 0. Докажите, что матрица является обратной.
22. Любые k столбцов матрицы A линейно независимы. Докажите, что система $Ax = b$ не может иметь двух разных решений с числом ненулевых компонент меньше $k/2$.
23. Докажите, что любую квадратную вещественную матрицу можно представить в виде суммы двух обратимых матриц.

24. Докажите, что при $m < n$ столбцы $m \times n$ -матрицы образуют линейно зависимую систему.
25. Докажите, что для любой вещественной прямоугольной матрицы A её ранг равен рангу матрицы $A^T A$.
26. Квадратные матрицы A и B коммутируют. Докажите, что если $A^k = 0$ и $B^l = 0$ для каких-то натуральных чисел k и l , то $(A + B)^{k+l} = 0$.
27. Докажите, что обратимая трёхдиагональная матрица останется обратимой, если каждый поддиагональный элемент поделить, а каждый наддиагональный элемент умножить на одно и то же число.
28. Докажите, что если в квадратной матрице каждый диагональный элемент по модулю больше суммы модулей других элементов своего столбца, то такая матрица невырождена.
29. Докажите, что каждая подстановка разлагается в произведение транспозиций.
30. Какие значения может принимать количество инверсий в подстановках степени n ? Ответ обосновать.
31. Докажите, что полилинейная функция столбцов квадратной матрицы, обнуляющаяся при совпадении любой пары столбцов, совпадает с определителем этой матрицы, умноженным на значение данной функции на столбцах единичной матрицы.
32. Докажите, что определитель матрицы с элементами из произвольного поля равен нулю, если матрица имеет пару одинаковых столбцов.
33. Известно, что ранг матрицы порядка n равен $n - 1$. Докажите, что ранг присоединённой матрицы равен 1.
34. Докажите, что любую обратимую матрицу можно сделать вырожденной путём изменения одного из её элементов.
35. Докажите, что размерность линейной оболочки строк матрицы равна размерности линейной оболочки её столбцов.
36. Докажите, что при изменении k строк матрицы её ранг может измениться не больше чем на k .
37. Докажите, что для любых трёх матриц A , B и C таких, что существует произведение ABC , справедливо неравенство

$$\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \leq \text{rank}(ABC) + \text{rank}(B).$$

38. Докажите, что если ранг матрицы A равен единице, то матрица A^{2024} отличается от A лишь числовым множителем.
39. Докажите, что сумма ранга и дефекта матрицы равна количеству её столбцов.
40. Пусть I – единичная матрица порядка n , u и v – векторы-столбцы, содержащие n элементов. Докажите, что $|I + uv^T| = 1 + v^T u$.
41. Докажите, что в случае квадратных матриц A и B порядка n для невырожденности матрицы $I - AB$ необходима и достаточна невырожденность матрицы $I - BA$.
42. Докажите, что линейное многообразие решений системы $Ax = b$ с $m \times n$ -матрицей A представляет собой плоскость размерности $n - \text{rank} A$.
43. Заданы матрицы A и B порядка n такие, что уравнение $AX - XB = 0$ относительно матрицы X имеет единственное решение. Докажите, что для любой матрицы C порядка n уравнение $AX - XB = C$ имеет решение.
44. Задана вещественная диагональная матрица D порядка n с попарно различными диагональными элементами. Докажите, что множество матриц X , удовлетворяющих уравнению $DX - XD = 0$, является линейным пространством, и найдите его размерность.
45. Даны $n \times n$ -матрицы A и B ранга r , а элементы $n \times n$ -матриц X и Y удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений, записанной в виде матричного уравнения $AX + YB = 0$. Найдите дефект матрицы коэффициентов данной системы.
46. Докажите, что минимальное количество матриц ранга 1, дающих в сумме заданную матрицу, равно её рангу.
47. Найдите ортогональную матрицу, при умножении которой на вектор-столбец $x = [0, 3, 4]^T$ получается вектор-столбец $y = [5, 0, 0]^T$.
48. Докажите, что при умножении вещественной матрицы на ортогональную матрицу сумма квадратов всех её элементов сохраняется.
49. Пусть $C = AB$, где A и B – невырожденные матрицы, и пусть

- $\hat{C}$, $\hat{A}$, $\hat{B}$ – соответствующие присоединённые матрицы. Докажите, что $\hat{C} = \hat{B}\hat{A}$.
50. Докажите, что любая невырожденная матрица допускает LU-разложение после некоторой перестановки её строк.
 51. Ранг матрицы порядка n равен r . Найдите ранг присоединённой матрицы.
 52. Матрица A называется кососимметричной, если $A^T = -A$. Как изменится определитель кососимметричной матрицы порядка 2022, если ко всем её элементам прибавить число 2021?
 53. Вещественная матрица $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ составлена из $n \times n$ -блоков, таких что $|A_{11}| \neq 0$ и $A_{11}A_{21} = A_{21}A_{11}$. Докажите, что $|A| = |A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}|$.
 54. Ранг матрицы A равен r . Докажите, что подматрица, расположенная на пересечении произвольных r линейно независимых строк и r линейно независимых столбцов, невырождена.
 55. Докажите, что базисный минор симметричной матрицы можно найти среди её главных миноров.
 56. Докажите, что система функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx$ от вещественной переменной x линейно независима над полем вещественных чисел.
 57. Пусть в квадратной матрице A порядка n выбраны k строк ($1 \leq k < n$). Чему равна сумма $\sum MA_M$, где суммирование ведётся по всем минорам M всевозможных порядков $1, 2, \dots, k$, расположенным в выбранных строках, а A_M – алгебраическое дополнение к минору M ?
 58. Докажите, что ранг матрицы A равен наименьшему из размеров матриц B и C , таких что $A = BC$.
 59. Докажите, что $n \times n$ -матрица с элементами a_{ij} невырожденная, если для любого $1 \leq i \leq n$ выполняется неравенство $|a_{ii}|/i^{2022} > \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} |a_{ij}|/j^{2021}$.
 60. Матрица A имеет r столбцов, а матрица B имеет r строк. Докажите, что

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} AB & A \\ B & 0_{r \times r} \end{bmatrix} \right) \leq \text{rank}(AB) + r.$$

61. Докажите, что для любых чисел α и β ранг $n \times n$ -матрицы с элементами $a_{ij} = (\alpha i + \beta j)^{2021}$ не превышает 2022.
62. Докажите, что любая вещественная симметричная матрица второго или третьего порядка ортоконгруэнтна диагональной матрице.
63. Докажите, что LU-разложение строго регулярной матрицы определяется однозначно.
64. Докажите, что произведение любой пары независимых транспозиций в группе подстановок степени $n \geq 4$ можно представить в виде произведения тройных циклов.

Элементы геометрии

1. На декартовой плоскости прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ пересекаются в одной точке, а точка $M(x_0, y_0)$ им не принадлежит. Найдите общее уравнение биссектрисы того угла между этими прямыми, в котором находится точка $M(x_0, y_0)$.
2. Стороны треугольника на плоскости лежат на прямых, заданных общими уравнениями $A_0 + A_1x_1 + A_2x_2 = 0$, $B_0 + B_1x_1 + B_2x_2 = 0$ и $C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 = 0$. Найдите ранги матриц

$$P = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ C_0 & C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad Q = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 \\ C_0 & C_1 \end{bmatrix}.$$

3. Пусть a, b, c – длины сторон треугольника ABC , M – точка пересечения его медиан и N – произвольная точка в плоскости треугольника. Докажите, что

$$|NA|^2 + |NB|^2 + |NC|^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3|MN|^2.$$

4. В аффинной системе координат плоскость задана уравнением $A_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0$. Можно ли утверждать, что вектор (A_1, A_2, A_3) ортогонален данной плоскости?
5. В аффинной системе координат плоскость задана уравнением $A_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0$. Можно ли утверждать, что если для вектора (v_1, v_2, v_3) выполняется равенство $A_1v_1 + A_2v_2 + A_3v_3 = 0$, то он параллелен данной плоскости?

6. Докажите, что сумма квадратов длин ортогональных проекций рёбер куба на любую плоскость в восемь раз больше квадрата длины ребра куба.
7. Дана 3×3 -матрица с элементами $a_{ij} = (a_i, a_j)$, где a_1, a_2, a_3 — линейно независимые геометрические векторы. Докажите, что её определитель равен квадрату объёма параллелепипеда, построенного на этих векторах.
8. Найдите расстояние от точки, заданной радиус-вектором $\vec{r}_0$ до плоскости, заданной уравнением $\vec{r} = \vec{r}_1 + u\vec{a} + v\vec{b}$, $u, v \in \mathbb{R}$.
9. При каких значениях координат x, y, z угол между векторами $\vec{a} = (x, y, z)$ и $\vec{b} = (z, y, x)$ будет наибольшим?
10. Докажите, что сумма квадратов длин рёбер тетраэдра равна учетверённой сумме квадратов расстояний между серединами его противоположных рёбер.
11. Вершины тетраэдра $A_0A_1A_2A_3$ заданы радиус-векторами $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ соответственно. Найдите радиус сферы, вписанной в этот тетраэдр.
12. Докажите, что площадь любой грани тетраэдра не больше суммы площадей трёх остальных его граней.
13. Докажите, что векторное произведение меняет знак при перестановке аргументов.
14. Докажите, что векторное произведение является билинейной функцией от своих множителей.
15. Докажите, что уравнение $[a, x] + [b, x] = [a, b]$ имеет решение для любых векторов a, b и найдите все решения.
16. Докажите, что для векторных произведений векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ справедливо тождество $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] + [\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]] + [\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]] = \vec{0}$.
17. Докажите, что смешанное произведение трёх векторов по модулю равно определителю, строки которого составлены из координат этих векторов в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.
18. В трёхмерном пространстве две прямые заданы векторными уравнениями $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ и $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$. Используя скалярные, векторные и смешанные произведения векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, найдите расстояние между этими прямыми.
19. Докажите, что любая кривая второго порядка в некоторой

прямоугольной декартовой системе координат задаётся одним из трёх типов приведённых уравнений $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + c = 0$, $\lambda_1 x_1^2 + c = 0$, $\lambda_1 x_1^2 + 2\beta x_2 = 0$, где все коэффициенты ненулевые кроме, возможно, величины c .

20. Докажите, что ранг матрицы квадратичной части и ранг расширенной матрицы уравнения $(Ax, x) + 2(b, x) + c = 0$ сохраняются при переходе от одной аффинной системы координат к другой.
21. Докажите, что определитель матрицы квадратичной части и определитель расширенной матрицы уравнения $(Ax, x) + 2(b, x) + c = 0$ сохраняются при переходе от одной декартовой системы координат к другой.
22. Докажите, что геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных различных точек этой плоскости постоянна и больше, чем расстояние между этими точками, является эллипсом.
23. Докажите, что разность расстояний от любой точки гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ до её левого и правого фокусов для каждой ветви гиперболы постоянна и равна $2a$ для правой ветви и $-2a$ для левой ветви.
24. Докажите, что отношение расстояний от любой точки эллипса (или гиперболы) до фокуса и до соответствующей ему директрисы постоянно.
25. Докажите, что для каждой точки параболы расстояние до фокуса равно расстоянию до директрисы.
26. Докажите, что точки пересечения парабол $x^2 + y = 5$ и $y^2 + x = 6$ лежат на одной окружности. Найдите координаты центра и радиус этой окружности.
27. Докажите, что стороны прямоугольника, вписанного в эллипс, параллельны осям эллипса.
28. Докажите, что косинус не тупого угла между противоположными рёбрами AB и CD тетраэдра $ABCD$ равен $\left| \frac{AC^2 + BD^2 - AD^2 - BC^2}{2AB \cdot CD} \right|$.
29. Докажите, что любая прямая, лежащая в плоскости эллипса и имеющая с ним единственную общую точку, является касательной к эллипсу.

30. Докажите, что любая прямая, лежащая в плоскости параболы, имеющая с ней единственную общую точку и не параллельная оси параболы, является касательной к параболе.
31. Докажите, что любая прямая, лежащая в плоскости гиперболы, имеющая с ней единственную общую точку и не параллельная её асимптотам, является касательной к гиперболе.
32. Найдите геометрическое место точек, из которых касательные, проведённые к параболе, взаимно перпендикулярны.
33. Лучи, выходящие из фокусов эллипса, пересекаются в точке K , лежащей на эллипсе. Докажите, что касательная к эллипсу, проходящая через точку K , образует равные углы с этими лучами.
34. Лучи, выходящие из фокусов гиперболы, пересекаются в точке K , лежащей на гиперболе. Докажите, что касательная к гиперболе, проходящая через точку K , является биссектрисой угла, образованного этими лучами.
35. Докажите, что геометрическое место точек пересечения взаимно ортогональных касательных к эллипсу $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ есть окружность $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.
36. Докажите, что геометрическое место точек пересечения взаимно ортогональных касательных к параболе совпадает с её директрисой.
37. Докажите, что через каждую точку однополостного гиперболоида проходят ровно две прямые, все точки которых принадлежат данной поверхности.
38. Докажите, что через каждую точку гиперболического параболоида проходят ровно две прямые, все точки которых принадлежат данной поверхности.
39. Докажите, что сечение кругового конуса $x^2 + y^2 = z^2$ плоскостью, не проходящей через начало координат, является эллипсом, гиперболой или параболой.
40. Докажите, что сечение прямого кругового цилиндра плоскостью, не параллельной его оси, является либо окружностью, либо эллипсом.
41. Докажите, что в сечении любого эллипсоида некоторой плоскостью можно получить окружность.

42. Докажите, что аффинная оболочка системы точек представляет собой плоскость, проходящую через данные точки.
43. Докажите, что выпуклая оболочка множества точек является выпуклым множеством.
44. Докажите, что в n -мерном пространстве произвольное множество из $k \geq n + 2$ векторов можно разбить на два непересекающихся подмножества, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.

Элементы общей алгебры

1. Докажите, что если квадрат каждого элемента мультипликативной группы равен единице, то группа абелева.
2. Докажите, что любая группа порядка 4 является абелевой. Сколько, с точностью до изоморфизма, существует таких групп?
3. Докажите, что в конечной группе порядок любой подгруппы является делителем порядка группы.
4. Найдите все подгруппы группы целых чисел по сложению.
5. Докажите, что любая подгруппа циклической группы является циклической.
6. Докажите, что любая циклическая группа бесконечного порядка содержит бесконечно много подгрупп.
7. Докажите, что любая группа бесконечного порядка содержит бесконечно много подгрупп.
8. Приведите пример группы и её подгруппы, которая не является нормальной.
9. Докажите, что любая подгруппа, для которой имеется ровно два смежных класса, является нормальной.
10. Докажите, что для любой конечной группы и любой её подгруппы количество левых смежных классов всегда равно количеству правых смежных классов.
11. Докажите, что в циклической группе порядка n для любого делителя d числа n существует ровно одна подгруппа порядка d .
12. В бесконечной циклической группе найдите количество подгрупп, индекс которых ограничен заданным натуральным числом n .

13. Докажите, что конечная аддитивная абелева группа представима в виде прямой суммы циклических подгрупп.
14. Докажите, что любая конечная аддитивная циклическая группа представляется в виде прямой суммы примарных подгрупп.
15. Докажите, что в группе нечётного порядка $n \geq 3$ порядок централизатора любого элемента, отличного от единичного элемента, не меньше трёх.
16. Докажите, что множество ортогональных матриц фиксированного порядка образует группу относительно операции умножения матриц.
17. Пусть u и v – векторы-столбцы такие, что $v^T u = 0$. Докажите, что множество матриц вида $I + \alpha uv^T$ при всевозможных вещественных α является мультипликативной абелевой группой.
18. Докажите, что множество отображений комплексной плоскости $z \rightarrow a + bz$ для всевозможных $a, b \in \mathbb{C}$, $|b| = 1$, является группой относительно операции композиции отображений.
19. Докажите, что все чётные подстановки A_n образуют нормальную подгруппу симметрической группы S_n .
20. Приведите пример нетривиальной подгруппы H некоммутативной группы G такой, что фактор-группа G/H является абелевой.
21. Найдите центр симметрической группы S_n .
22. Найдите центр группы обратимых матриц порядка n .
23. Найдите порядок централизатора транспозиции $\sigma = (1, 2)$ в группе S_n .
24. Докажите, что фактор-группа циклической группы является циклической.
25. Докажите, что множество вещественных матриц порядка n с определителем, равным 1, является нормальной подгруппой мультипликативной группы всех обратимых матриц порядка n .
26. Докажите, что множество верхних унитреугольных матриц порядка n образует группу по умножению. Является ли эта группа нормальной подгруппой группы всех обратимых матриц порядка n ? Ответ обосновать.
27. На конечном множестве G задана замкнутая бинарная опера-

- ция $*$, которая является ассоциативной и обладает нейтральным элементом $e \in G$. Докажите, что если $a * b = e$ для каких-то элементов $a, b \in G$, то выполняется также равенство $b * a = e$.
28. Пусть G – мультипликативная абелева группа, a и b – её элементы порядка m и n . Докажите, что если числа m и n взаимно просты, то порядок элемента ab равен mn .
 29. Докажите, что все группы, порядок которых равен одному и тому же простому числу, изоморфны.
 30. Докажите, что при гомоморфизме групп единица переходит в единицу.
 31. Докажите, что множество автоморфизмов группы образует группу относительно операции композиции автоморфизмов.
 32. Найдите все автоморфизмы группы целых чисел по сложению.
 33. Является ли отображение $A \rightarrow A^T$ автоморфизмом полной линейной группы?
 34. Найдите количество гомоморфизмов циклической группы порядка 4 в циклическую группу порядка 2021.
 35. Докажите, что аддитивная группа вещественных чисел не изоморфна мультипликативной группе ненулевых вещественных чисел.
 36. Докажите, что ядро гомоморфизма групп является нормальной подгруппой, и всякая нормальная подгруппа является ядром некоторого гомоморфизма.
 37. Пусть $f : H \rightarrow G$ – гомоморфизм группы H в группу G и K – его ядро. Докажите, что образ f изоморфен фактор-группе H/K .
 38. Докажите, что аддитивная группа векторов вещественного линейного пространства не может быть изоморфна аддитивной группе целых чисел.
 39. Докажите, что число внутренних автоморфизмов конечной группы равно числу смежных классов по её центру.
 40. Докажите, что отображение Кэли является инъективным и сохраняет операцию.
 41. Приведите пример бесконечного поля ненулевой характеристики.

42. Докажите, что количество элементов в конечном поле является степенью некоторого простого числа.
43. Докажите, что для любого простого p и любого натурального числа n существует поле с количеством элементов p^n .
44. Докажите, что мультипликативная группа конечного поля является циклической.
45. Постройте таблицы сложения и умножения для поля из 8-ми элементов.
46. Докажите, что число $1 + \sqrt{2} + \sqrt[2021]{2022}$ является алгебраическим над полем рациональных чисел.
47. Докажите, что обратимые элементы кольца вычетов образуют мультипликативную группу.
48. Докажите, что множество вещественных чисел вида $a + b\sqrt{p}$, где a и b – произвольные рациональные числа, а p – фиксированное простое число, является подполем поля вещественных чисел.
49. Докажите, что множество нижних треугольных матриц порядка n является алгеброй.
50. Пусть $a(x)$ и $b(x) \neq 0$ – многочлены с коэффициентами из некоторого поля. Докажите, что остаток и неполное частное при делении $a(x)$ на $b(x)$ являются многочленами с коэффициентами из того же поля и определены однозначно.
51. Докажите, что степень неприводимого многочлена над полем вещественных чисел не выше 2.
52. Докажите, что лексикографически старший член произведения многочленов равен произведению лексикографически старших членов сомножителей.
53. Докажите, что линейное пространство комплексных чисел над полем рациональных чисел бесконечномерное.
54. Докажите, что существуют неалгебраические числа.
55. Докажите, что кольцо многочленов от одной переменной над полем $\mathbb{R}$ является факториальным.
56. Пусть $\mathbb{C}^*$ – мультипликативная группа поля комплексных чисел, а $\mathbb{F}$ – множество всех комплексных чисел, модуль которых равен единице. Докажите, что $\mathbb{F}$ – нормальная подгруппа группы $\mathbb{C}^*$, а фактор-группа $\mathbb{C}^*/\mathbb{F}$ изоморфна мультипликативной группе положительных вещественных чисел.

57. Докажите, что множество всех матриц порядка n с элементами из некоторого поля, коммутирующих с заданной матрицей Z , является алгеброй.
58. Докажите, что множество всех комплексных чисел, алгебраических над полем рациональных чисел, является полем.
59. Докажите, что многочлен $f(x) = x^p - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ при простом p не может иметь кратных корней ни в одном из расширений поля $\mathbb{Z}_p$.
60. Докажите, что отображение $z \rightarrow z^n$ является гомоморфизмом мультипликативной группы поля комплексных чисел в себя. Найдите его ядро и образ.
61. Пусть $a(x)$ и $b(x)$ – ненулевые многочлены с коэффициентами из некоторого поля и пусть $d(x)$ – их наибольший общий делитель. Докажите, что существуют многочлены $u(x)$ и $v(x)$, для которых $a(x)u(x) + b(x)v(x) = d(x)$, $\deg u(x) < \deg b(x)$, $\deg v(x) < \deg a(x)$.
62. Пусть $z_0, z_1, \dots, z_n$ – произвольный набор попарно различных комплексных чисел. Докажите, что для любых чисел $f_0, \dots, f_n$ существует многочлен $p(x)$ степени не выше n , для которого выполняются равенства $p(z_k) = f_k$ для всех $k = 0, 1, \dots, n$.
63. Для трёх полей, связанных соотношениями $P \subseteq F \subseteq H$, рассматриваются три расширения $P \subseteq F$, $F \subseteq H$, $P \subseteq H$. Докажите, что из конечности первых двух расширений следует конечность третьего, из конечности третьего – конечность первых двух, а для степеней расширений выполнено равенство $\dim(H, P) = \dim(H, F) \cdot \dim(F, P)$.
64. Докажите, что циркулем и линейкой при заданном единичном отрезке нельзя построить отрезок длины $\sqrt[3]{7}$.
65. Докажите, что в кольце многочленов над любым полем существует бесконечно много неприводимых многочленов.
66. Представьте многочлен $x^{10} - 1$ в виде произведения многочленов, неприводимых над полем вещественных чисел.
67. Докажите, что сумма всех комплексных корней степени n из единицы равна нулю.
68. Найдите сумму квадратов всех корней степени 2022 из 1.
69. Найдите количество комплексных первообразных корней степени $n = 3072$ из единицы.

70. Докажите, что для любых комплексных чисел a и b выполнено тождество

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2.$$

71. На комплексной плоскости задана окружность $|z| = 1$. Найдите её образ при отображении $z \rightarrow 1 + 1/z^{2022}$.
72. Множество M на комплексной плоскости состоит из точек окружности $|z - 1| = 1$, кроме точки 0 . Найдите образ множества M при отображении $z \rightarrow 1/z$.
73. Для каждого комплексного числа a найдите геометрическое место точек z комплексной плоскости таких, что $|z - i| - |z + i| = a$.
74. Для каждого комплексного числа a найдите геометрическое место точек z комплексной плоскости таких, что $|z - i| + |z + i| = a$.
75. Для каждого комплексного числа a найдите геометрическое место точек z комплексной плоскости таких, что $\left| \frac{z - i}{z + i} \right| = a$.
76. Среди комплексных чисел $\sqrt[8]{-1 - i\sqrt{3}}$ найдите число с минимальной мнимой частью.
77. Для каждого комплексного числа a найдите геометрическое место точек z комплексной плоскости таких, что $a|z - 2 - i| = |\bar{z} - z|$.
78. Для каждого вещественного числа a найдите геометрическое место точек z комплексной плоскости таких, что $|z - i|^2 + |z + i|^2 = a$.
79. Докажите, что любое поле является расширением либо поля рациональных чисел, либо поля вычетов по простому модулю.
80. Докажите, что любое целостное кольцо можно вложить в поле.
81. Докажите, что для любого многочлена от одной переменной над произвольным полем существует поле разложения.
82. Докажите, что многочлен с целыми коэффициентами нельзя представить в виде произведения многочленов ненулевой степени с целыми коэффициентами в том и только том случае, когда он неприводим над полем рациональных чисел.

83. Докажите, что множество комплексных чисел вида $a + bi$, где i – мнимая единица, a и b – всевозможные целые числа, является целостным унитарным кольцом (в качестве операций рассматриваются сложение и умножение комплексных чисел), и найдите все делители единицы.
84. Докажите, что произведение и сумма всех комплексных первообразных корней степени n из единицы являются целыми числами.
85. Непустое квадратичное многообразие задано уравнением $(Ax, x) + 2(b, x) + c = 0$. Докажите, что оно является центрально симметричным тогда и только тогда, когда система $Az + b = 0$ совместна. При этом множество центров симметрии совпадает с множеством решений этой системы.
86. Непустое квадратичное многообразие задано уравнением $(Ax, x) + 2(b, x) + c = 0$. Докажите, что для любого вектора h с неасимптотическим направлением середины всех хорд, параллельных вектору h , лежат на одной гиперплоскости.
87. Докажите, что преобразование комплексной плоскости: $z \rightarrow \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ переводит точки окружности $|z| = r$ ($0 < r \neq 1$) в точки эллипса. Найдите фокусы и эксцентриситет этого эллипса.
88. В n -мерном пространстве заданы $k \geq n + 1$ выпуклых множеств и любые $n + 1$ из них имеют непустое пересечение. Докажите, что все эти множества имеют общую точку.
89. Докажите, что многочлен $1 + x + \dots + x^{p-1} \in \mathbb{Q}[x]$ является неприводимым в случае простого p .
90. Докажите, что всякая вырожденная матрица является пределом последовательности невырожденных матриц.
91. Многочлен $f(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_n)$ имеет целые коэффициенты. Докажите, что число $S_k = \sum_{i=1}^n \xi_i^k$ является целым при любом натуральном k .
92. Докажите, что все корни многочлена $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ лежат в круге $|z| \leq 1 + \max(|a_0|, \dots, |a_{n-1}|)$.
93. Вещественная часть каждого корня комплексного многочлена $f(x)$ отрицательна. Докажите, что если $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, то $\operatorname{Re} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right) > 0$.

94. Какое максимальное число нулей на отрезке $[0; 2\pi]$ может иметь не равный тождественно нулю тригонометрический полином $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx))$ с вещественными коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$?
95. Докажите, что в n -мерном пространстве любой вектор, принадлежащий выпуклой оболочке непустого множества, можно представить выпуклой комбинацией не более чем $n + 1$ векторов данного множества.
96. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – многочлены с целыми коэффициентами. Докажите, что наибольший общий делитель коэффициентов многочлена $f(x)g(x)$ равен произведению наибольших общих делителей коэффициентов многочленов $f(x)$ и $g(x)$.
97. Докажите факториальность кольца многочленов от n переменных с коэффициентами из произвольного поля.
98. Сформулируйте и докажите теорему о представлении симметрического многочлена от нескольких переменных в виде алгебраического многочлена от элементарных симметрических многочленов.
99. Докажите, что многочлен не имеет кратных корней тогда и только тогда, когда он взаимно прост со своей производной.
100. Докажите, что минимальный многочлен алгебраического числа над заданным полем неприводим и определён однозначно с точностью до ненулевого числового множителя.
101. Пусть старший коэффициент многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами не делится на простое число p , а все остальные коэффициенты делятся на p , но при этом свободный член не делится на p^2 . Докажите, что $f(x)$ неприводим над кольцом целых чисел.
102. Докажите, что множество алгебраических чисел образует поле.

Вопросы к экзамену, II семестр

Линейные операторы, инвариантность, спектр

1. Докажите, что линейная комбинация линейных операторов является линейным оператором.
2. Докажите, что произведение линейных операторов является линейным оператором.

3. Докажите, что если линейный оператор обратим, то обратный оператор определён однозначно и является линейным.
4. Пусть V и W — конечномерные пространства над общим полем. Докажите, что для обратимости линейного оператора $A : V \rightarrow W$ необходимо и достаточно выполнение условий $\dim V = \dim W$ и $\ker A = 0$.
5. Докажите, что ядро и образ линейного оператора являются его инвариантными подпространствами.
6. Докажите, что сумма ранга и дефекта линейного оператора равна размерности его области определения.
7. Докажите, что если сумма ядер двух линейных операторов, действующих на одном пространстве, совпадает с этим пространством, то образ суммы этих операторов равен сумме их образов.
8. Линейный оператор $A : V \rightarrow V$ удовлетворяет равенству $A^m = 0$. Докажите, что оператор $I - A$ обратим.
9. Линейные операторы A и B таковы, что оператор $A + B$ обратимый. Докажите, что операторы $P = (A + B)^{-1}A$ и $Q = (A + B)^{-1}B$ коммутируют.
10. Докажите, что для того чтобы линейный оператор $P : V \rightarrow V$ был оператором проектирования, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $P^2 = P$.
11. Докажите, что для того чтобы матрицы одинаковых размеров были матрицами одного и того же линейного оператора в каких-то парах базисов, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковый ранг.
12. Докажите, что определитель и след квадратной матрицы являются инвариантами подобия.
13. Докажите, что характеристический многочлен квадратной матрицы является инвариантом подобия.
14. Найдите характеристический многочлен матрицы

$$A = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

15. Найдите все инвариантные подпространства оператора дифференцирования в пространстве всех вещественных многочленов.

16. Докажите, что элемент поля является собственным значением линейного оператора на конечномерном пространстве в том и только том случае, когда он является корнем его характеристического многочлена.
17. Линейный оператор действует в n -мерном пространстве над полем, содержащим все корни его характеристического многочлена. Докажите, что существует базис пространства, в котором матрица оператора имеет верхний треугольный вид с главной диагональю, заполненной корнями характеристического многочлена в любом заранее предписанном порядке.
18. Докажите, что если матрицы A и B подобны, то для произвольного многочлена $f(\lambda)$ матрицы $f(A)$ и $f(B)$ тоже подобны.
19. Докажите, что минимальный многочлен, аннулирующий квадратную матрицу, является делителем её характеристического многочлена.
20. Докажите, что любая квадратная матрица с элементами из произвольного поля аннулируется своим характеристическим многочленом.
21. Докажите, что любой приведённый многочлен степени $n \geq 1$ является приведённым характеристическим многочленом некоторой матрицы.
22. Преобразование $A \rightarrow PAP^{-1}$ будем называть элементарным преобразованием подобия, если матрица P является либо матрицей перестановки, либо матрицей вида $I + \gamma E_{kl}$, где матрица E_{kl} отличается от нулевой матрицы только одним элементом – единицей в позиции (k, l) при $k \neq l$, а γ – некоторое число. Докажите, что матрица порядка n с помощью $O(n^2)$ элементарных преобразований подобия приводится к верхнему почти треугольному виду.
23. Докажите, что алгебраическая кратность собственного значения не меньше его геометрической кратности.
24. Докажите, что собственные векторы для попарно различных собственных значений линейно независимы.
25. Докажите, что если матрица порядка n имеет n попарно различных собственных значений, то она диагонализуема.
26. Докажите, что для нильпотентности линейного оператора необходимо и достаточно, чтобы он был квазискалярным с единственным собственным значением, равным нулю.

27. Докажите, что линейный оператор A является квазискалярным с единственным собственным значением λ тогда и только тогда, когда сдвинутый оператор $A - \lambda I$ является нильпотентным.
28. Докажите, что любой вырожденный линейный оператор либо является нильпотентным, либо расщепляется в прямую сумму нильпотентного и обратимого операторов.
29. Пусть линейный оператор действует на конечномерном пространстве над полем, которое содержит все корни его характеристического многочлена. Докажите, что он расщепляется в прямую сумму своих сужений на корневые пространства своих попарно различных собственных значений.
30. Матрица A порядка n имеет попарно различные собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и соответствующие им собственные векторы $v_1, \dots, v_n$. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора $X \mapsto A^3 X A^4$, $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$.
31. Докажите, что минимальное инвариантное относительно оператора A подпространство $M(A, x)$, содержащее заданный ненулевой вектор x , совпадает с пространством Крылова $L_k(A, x)$, содержащим вектор $A^k x$. Его размерность равна минимальному значению k , при котором $A^k x \in L_k(A, x)$.
32. Докажите, что минимальное инвариантное относительно оператора A подпространство $M(A, x)$, содержащее заданный вектор $x \neq 0$, нерасщепляемо в том и только том случае, когда сужение оператора A на нём квазискалярно.
33. Докажите, что если B – нильпотентный линейный оператор, векторы $x, Bx, \dots, B^{k-1}x$ ненулевые и $B^k x = 0$, то векторы $x, Bx, \dots, B^{k-1}x$ линейно независимы.
34. Линейный оператор A называется *нильпотентным на векторе* $x \neq 0$, если существует натуральное число k , для которого $A^k x = 0$. Минимальное такое k называется *индексом нильпотентности оператора A на векторе x* . Пусть A – линейный оператор и $k_1, \dots, k_t$ – его индексы нильпотентности на ненулевых векторах $x_1, \dots, x_t$. Докажите, что для линейной независимости составной системы векторов Крылова

$$x_1, Ax_1, \dots, A^{k_1-1}x_1, \dots, x_t, Ax_t, \dots, A^{k_t-1}x_t$$

необходима и достаточна линейная независимость векторов $A^{k_1-1}x_1, \dots, A^{k_t-1}x_t$.

35. Докажите, что любой нильпотентный оператор, действующий на конечномерном пространстве, расщепляется в прямую сумму нерасщепляемых операторов, действующих на инвариантных подпространствах Крылова.
36. Докажите, что в любом расщеплении конечномерного пространства в прямую сумму инвариантных подпространств Крылова для нильпотентного оператора A число подпространств размерности k равно $N_k = 2\text{def}A^k - \text{def}A^{k-1} - \text{def}A^{k+1}$.
37. Докажите, что максимальное расщепление линейного оператора A на конечномерном пространстве состоит из квазискалярных операторов, отвечающих его попарно различным собственным значениям и действующих на инвариантных подпространствах Крылова. При этом число подпространств размерности k для собственного значения λ равно $N_k(\lambda) = 2\text{def}(A - \lambda I)^k - \text{def}(A - \lambda I)^{k+1} - \text{def}(A - \lambda I)^{k-1}$.
38. Докажите, что любая комплексная матрица A подобна некоторой жордановой матрице. При этом в любой жордановой матрице, подобной матрице A , число жордановых клеток вида $J(\lambda, k)$ равно $N_k(\lambda) = 2\text{def}(A - \lambda I)^k - \text{def}(A - \lambda I)^{k+1} - \text{def}(A - \lambda I)^{k-1}$.
39. Докажите, что комплексные матрицы подобны в том и только том случае, когда они имеют одну и ту же жорданову форму с точностью до перестановки жордановых клеток.
40. Всегда ли можно построить жорданов базис, содержащий произвольно выбранные базисы в собственных подпространствах?
41. Докажите, что любая вещественная матрица порядка $n \geq 2$ имеет вещественное инвариантное подпространство размерности 2.
42. Нильпотентная матрица J порядка $n = 10$ имеет две жордановы клетки порядка 3 и две жордановы клетки порядка 2. Найдите жорданову форму матрицы $A = J^2$.
43. Известно, что $A^k = A$, $k \geq 2$. Докажите, что матрица A диагонализуема.
44. Сумма двух линейных операторов, действующих на конечномерном пространстве V , является обратимым оператором, а произведение – нулевым оператором. Докажите, что сумма рангов этих операторов равна размерности пространства V .

45. Матрицы A, B, C, X, Y порядка n над одним и тем же полем удовлетворяют равенству $XA + BY = C$. Докажите эквивалентность матриц $L = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$ и $D = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$.
46. Многочлены $f_A(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$ и $f_B(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \mu_i)$ являются характеристическими многочленами матриц A и B . Найдите характеристический многочлен линейного оператора $X \rightarrow AX + XB$, действующего на пространстве $n \times n$ -матриц X .
47. Пусть A – матрица порядка n и ранга r . Докажите, что матрица $I + A$ имеет собственное значение 1 алгебраической кратности $\geq n - r$.
48. Все элементы вещественной квадратной матрицы неотрицательны, а суммы элементов в каждой строке одинаковы и равны a . Докажите, что число a является наибольшим по модулю собственным значением данной матрицы.
49. Комплексные квадратные матрицы $A_1, \dots, A_m$ попарно коммутируют. Докажите, что они имеют общий собственный вектор.
50. Докажите, что если $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $\text{rank}(I - A) = n - \text{rank} A$, то $A^2 = A$.
51. Линейный оператор A на конечномерном пространстве удовлетворяет условию $A^2 = A$. Найдите его собственные значения и докажите, что он имеет простую структуру.
52. Найдите жорданову форму матрицы A^3 , где A – жорданова клетка порядка n .
53. Найдите собственные значения и собственные подпространства комплексной матрицы $A = I - 2uu^*$, где $u^*u = 1$, $u \in \mathbb{C}^n$.
54. В вещественной матрице, которая является нильпотентной жордановой клеткой порядка n , элемент в позиции $(n, 1)$ заменяется на $\varepsilon > 0$. Докажите, что все собственные значения возмущённой матрицы простые и по модулю равны $\varepsilon^{1/n}$.
55. Докажите, что линейный оператор $A : V \rightarrow V$ коммутирует со всеми линейными операторами, действующими на бесконечномерном пространстве V над полем $\mathbb{P}$, в том и только том случае, когда он является оператором умножения на некоторое число из поля $\mathbb{P}$.

56. Пусть A и B – квадратные матрицы над одним и тем же полем. Докажите, что характеристические многочлены матриц AB и BA совпадают.
57. Пусть верхняя треугольная матрица порядка $n = n_1 + n_2$ имеет вид $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ и при этом блоки $A_{11} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$ и $A_{22} \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$ не имеют общих собственных значений. Докажите, что существует матрица $X \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$ такая, что

$$\begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

58. Пусть J – жорданова клетка порядка n с нулевым собственным значением. Докажите, что уравнение $X^2 = J$ относительно $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ не имеет решений, если $n \geq 2$.
59. Докажите, что любая вещественная матрица с помощью вещественного преобразования подобия приводится к прямой сумме вещественных жордановых клеток и вещественных блочных жордановых клеток.
60. Докажите, что матрица порядка $n \geq 2$ имеет конечное число инвариантных подпространств в том и только том случае, когда каждому собственному значению соответствует ровно одна жорданова клетка.
61. Пусть V, W, Z – конечномерные линейные пространства над общим полем. Докажите, что для произвольных линейных операторов $B : V \rightarrow Z$ и $A : Z \rightarrow W$ выполнено неравенство $\text{rank} A + \text{rank} B - \text{rank}(AB) \leq \dim Z$.
62. Докажите, что вещественная квадратная матрица подобна своей транспонированной матрице. Верно ли это для матриц над произвольным полем?
63. Докажите, что диагонализуемая матрица ранга r обладает ненулевым главным минором порядка r .
64. Докажите, что собственные значения матрицы $A = [a_{kl}]$ с элементами $a_{kl} = \varepsilon^{(k-1)(l-1)}$, $1 \leq k, l \leq n$, где ε – первообразный корень степени n из единицы, равны $\pm n^{1/2}$ и $\pm i n^{1/2}$.
65. Опишите алгоритм вычисления коэффициентов характеристического многочлена верхней почти треугольной матрицы порядка n с числом арифметических операций $O(n^3)$.
66. Пусть квадратная матрица A с элементами из некоторого по-

ля аннулируется неприводимым многочленом с коэффициентами из этого поля. Докажите, что если степень n этого многочлена равна порядку матрицы, то система векторов Крылова $x, Ax, \dots, A^{n-1}x$ будет линейно независимой для какого-то вектора x с элементами из данного поля.

Расстояния, нормы, скалярные произведения

1. Докажите, что функция $\rho(x, y) = |x - y|/(1 + |x - y|)$ задаёт расстояние в вещественном пространстве $\mathbb{R}$. Является ли пространство полным?
2. Докажите, что множество S замкнуто в метрическом пространстве M в том и только том случае, если дополнительное множество $M \setminus S$ открыто.
3. Пусть точками метрического пространства M являются натуральные числа, а расстояние между m и n определяется как $\rho(m, n) = 1 + \min\{1/m, 1/n\}$ при $m \neq n$ и 0 при $m = n$. Докажите, что M – полное метрическое пространство. Докажите также, что замкнутые шары $\bar{M}(1, 1 + 1/2) \supset \bar{M}(2, 1 + 1/3) \supset \bar{M}(3, 1 + 1/4) \supset \dots$ вложены, но имеют пустое пересечение.
4. Докажите, что p -норма Гёльдера является нормой.
5. Докажите, что на конечномерном пространстве любые две нормы эквивалентны.
6. Приведите пример неэквивалентных норм.
7. Найдите максимальное и минимальное значения нормы $\|x\|_1$ при условии $\|x\|_2 = 1$.
8. Пусть $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. Докажите, что $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.
9. Пусть $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. Докажите, что $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$.
10. Приведите пример матричной нормы, для которой норма матрицы $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ больше нормы матрицы $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
11. Найдите все значения $p \geq 1$, для которых $\|A\|_p = \|A^T\|_p$ для любой квадратной матрицы A .
12. Докажите, что в конечномерном нормированном пространстве множество является компактным тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

13. Пусть V – нормированное пространство и M – непустое замкнутое множество, которое содержится в некотором конечномерном подпространстве L пространства V . Докажите, что элемент наилучшего приближения на M существует для любого $x \in V$.
14. Докажите, что для всякой непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ существует многочлен $p_n(x)$ степени не выше n такой, что для любого многочлена $g_n(x)$ степени не выше n выполнено неравенство $\|f(x) - p_n(x)\|_{C[a,b]} \leq \|f(x) - g_n(x)\|_{C[a,b]}$.
15. Докажите неравенство Коши–Буняковского–Шварца. Когда в нём имеет место равенство?
16. Докажите, что если для двух векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнено равенство $\|x + y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$, то x и y линейно зависимы.
17. Для матриц $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ квадрат суммы диагональных элементов матрицы $A^T B$ равен произведению сумм диагональных элементов матриц $A^T A$ и $B^T B$. Докажите, что A и B отличаются лишь скалярным множителем.
18. Докажите, что норма $\|f(x)\|_{C[a,b]} \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ в пространстве $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, не порождается никаким скалярным произведением.
19. Найдите все значения $p \geq 1$, при которых гёльдеровская p -норма порождается некоторым скалярным произведением.
20. Докажите, что сумма попарно ортогональных подпространств $L = L_1 + \dots + L_m$ является прямой суммой.
21. Пусть L и M – подпространства конечномерного пространства V со скалярным произведением. Равносильны ли равенства $L^\perp \cap M = \{0\}$ и $L \cap M^\perp = \{0\}$?
22. Докажите, что для любой линейно независимой системы векторов $a_1, \dots, a_m$ существует ортогональная система $p_1, \dots, p_m$ такая, что линейные оболочки векторов $p_1, \dots, p_k$ и $a_1, \dots, a_k$ совпадают для всех $1 \leq k \leq m$.
23. Докажите, что в n -мерном пространстве со скалярным произведением любую ортонормированную систему можно дополнить до ортонормированного базиса.
24. Докажите, что любая квадратная комплексная матрица представима в виде произведения унитарной и верхней треугольной матрицы.

25. Пусть матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ имеет столбцы $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}^n$. Докажите неравенство

$$|\det A| \leq \prod_{j=1}^n \|a_j\|_2.$$

26. Докажите, что для любого вектора x в произвольном пространстве со скалярным произведением и любого конечномерного подпространства $L \subset V$ существуют и единственны перпендикуляр h и проекция z такие, что

$$x = z + h, \quad z \in L, \quad h \perp L, \quad |x - z| = |h| \leq |x - y| \quad \forall y \in L.$$

27. Пусть L – подпространство некоторого пространства со скалярным произведением. Докажите, что если L конечномерно, то $L = (L^\perp)^\perp$.
28. Пусть L и M – подпространства размерности m такие, что $L^\perp \cap M = \{0\}$. Докажите, что для любой линейно независимой системы $u_1, \dots, u_m \in L$ существует единственная биортогональная система $v_1, \dots, v_m \in M$ (биортогональность означает, что $(u_i, v_j) = 0$ при $i \neq j$ и 1 при $i = j$).
29. В пространстве со скалярным произведением даны две системы векторов $u_1, \dots, u_m$ и $v_1, \dots, v_m$. При этом $L^\perp \cap M = \{0\}$, где L и M – линейные оболочки векторов первой и второй системы. Докажите, что хотя бы одна из этих систем линейно зависима в том и только том случае, когда $m \times m$ -матрица A с элементами $a_{ij} = (v_j, u_i)$ вырождена.
30. Пусть M – замкнутое выпуклое множество в конечномерном евклидовом пространстве V . Докажите, что для любого вектора $x \in V$ существует единственный вектор $z \in M$, такой что $|x - z| \leq |x - y| \quad \forall y \in M$. При этом угол между векторами $x - z$ и $y - z$ не может быть острым, т.е. $(x - z, y - z) \leq 0 \quad \forall y \in M$.
31. Докажите, что для непрерывности линейного оператора необходима и достаточна его ограниченность.
32. Докажите, что множество всех ограниченных линейных операторов $A : V \rightarrow W$ является линейным пространством с нормой $\|A\| = \sup_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_W$.
33. Докажите, что если V – конечномерное пространство, то любой линейный оператор $A : V \rightarrow W$ является ограниченным

и при этом $\|A\| = \|Ax_0\|_W$ для некоторого зависящего от оператора вектора $x_0 \in V$ единичной нормы $\|x_0\|_V = 1$.

34. Пусть $u, v \in \mathbb{C}^n$. Докажите, что $\|uv^T\|_2 = \|u\|_2\|v\|_2$.
35. Докажите, что норма Фробениуса является матричной нормой.
36. Докажите, что все собственные значения комплексной матрицы $A = [a_{ij}]$ порядка n принадлежат объединению кругов Гершгорина $\bigcup_{1 \leq i \leq n} \Gamma_i$, где

$$\Gamma_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i\}, \quad R_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{ij}|.$$

37. Пусть $\|\cdot\|$ – произвольная матричная норма. Докажите, что если $\|F\| < 1$, то матрица $I - F$ обратима и ряд Неймана сходится к $(I - F)^{-1}$.
38. Докажите, что спектральная норма и норма Фробениуса являются унитарно инвариантными.
39. Докажите неравенство $\|A\|_F \leq \sqrt{\text{rank} A} \|A\|_2$.
40. Докажите, что максимум отношения $\|A\|_2/\|A\|_1$ на множестве всех ненулевых комплексных матриц A порядка n равен $\sqrt{n}$.
41. Комплексная матрица порядка n такова, что её спектральная норма не изменяется, если все внедиагональные элементы заменить на нули. Докажите, что в такой матрице нулевых элементов не меньше, чем $2n - 2$.
42. Докажите, что множество всех комплексных $n \times n$ -матриц A таких, что $\|Ax\|_2 = \|x\|_2$ для любого $x \in \mathbb{C}^n$, совпадает с множеством унитарных матриц.
43. Пусть заданы ненулевые векторы $u \in \mathbb{C}^n$ и $v \in \mathbb{C}^m$. Докажите, что среди всех матриц A таких, что $Au = v$, есть ровно одна, обладающая наименьшей фробениусовой нормой, и эта матрица имеет вид $A = \frac{vu^*}{\|u\|_2^2}$.
44. Докажите, что если A и B – матрицы с неотрицательными элементами и при этом известно, что каждый элемент матрицы B не превосходит соответствующего элемента матрицы A , то спектральный радиус матрицы B не превосходит спектрального радиуса матрицы A .

45. Докажите, что квадратная неотрицательная матрица A порядка n является неразложимой в том и только том случае, когда матрица $(I + A)^{n-1}$ является положительной.
46. Пусть $A > 0$ – положительная матрица порядка n , $x > 0$ – вектор с положительными элементами, α и β – положительные числа. Докажите, что если $\alpha x \leq Ax \leq \beta x$, то спектральный радиус $\rho(A)$ матрицы A удовлетворяет неравенствам $\alpha \leq \rho(A) \leq \beta$.
47. Докажите, что единичная сфера в нормированном пространстве компактна тогда и только тогда, когда пространство конечномерно.
48. Пусть $\rho(x)$ – произвольная непрерывная положительная функция при $0 \leq x \leq 1$. Докажите, что $n \times n$ -матрица A с элементами $a_{ij} = \int_0^1 x^{i+j} \rho(x) dx$ является невырожденной.
49. Докажите, что норма Фробениуса не может быть операторной нормой линейного оператора $x \rightarrow Ax$ ни при каком выборе векторных норм в пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$ при $m, n \geq 2$.
50. Пусть $\rho(A)$ – спектральный радиус матрицы A . Докажите, что для произвольной матричной нормы выполнено равенство $\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}$.

Нормальные операторы, эрмитовы матрицы

1. Докажите, что для всякой комплексной $n \times n$ -матрицы A с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ существует унитарная $n \times n$ -матрица Q такая, что матрица Q^*AQ является верхней треугольной с элементами главной диагонали, равными $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
2. Докажите, что матрица является нормальной в том и только том случае, когда она унитарно подобна диагональной матрице.
3. Докажите, что если матрица нормальна, то её спектральный радиус равен спектральной норме. Верно ли обратное?
4. Докажите, что нормальная матрица является унитарной тогда и только тогда, когда все её собственные значения по модулю равны 1.
5. Докажите, что нормальная матрица является эрмитовой то-

гда и только тогда, когда все её собственные значения вещественны.

6. Унитарная матрица $Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$ порядка $2n$ разбита на блоки порядка n . Докажите, что $|\det Q_{12}| = |\det Q_{21}|$.
7. Известно, что $A^2 = A$ и $\ker A \perp \operatorname{im} A$ (ортогональность относительно естественного скалярного произведения). Докажите, что $A = A^*$.
8. Дано подпространство $L \subset \mathbb{C}^n$. Докажите, что среди всех матриц A таких, что $\operatorname{im} A = L$ и $A^2 = A$, наименьшее значение 2-нормы достигается для некоторой эрмитовой и притом только одной матрицы A .
9. Докажите, что для любой эрмитовой матрицы H матрица $Q = (I - iH)^{-1}(I + iH)$ является унитарной. Любую ли унитарную матрицу можно представить таким образом?
10. Докажите, что для любой комплексной квадратной матрицы эрмитово разложение существует и единственно.
11. Докажите, что если эрмитова квадратичная форма $f(x) = x^*Ax$ принимает только вещественные значения при всех $x \in \mathbb{C}^n$, то матрица A является эрмитовой.
12. Докажите, что для неотрицательной (положительной) определённости комплексной квадратной матрицы необходимо и достаточно, чтобы она была эрмитовой матрицей с неотрицательными (положительными) собственными значениями.
13. Пусть $A = H + iK$ – эрмитово разложение матрицы A . Докажите, что вещественные части собственных значений матрицы A заключены между минимальным и максимальным собственными значениями эрмитовой матрицы H , а мнимые части – между минимальным и максимальным собственными значениями эрмитовой матрицы K .
14. Даны комплексные матрицы A и B одного порядка, при этом матрица B невырождена. Докажите, что из неотрицательной определённости матрицы $B^*B - A^*A$ вытекает, что спектральный радиус матрицы $B^{-1}A$ не больше 1.
15. Пусть заданы вещественная положительно определённая матрица A порядка n и вектор $b \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что функционал $f(x) = (Ax, x) + (b, x)$ при $x \in \mathbb{R}^n$ ограничен снизу и

существует единственная точка x_0 , в которой $f(x)$ принимает минимальное значение.

16. Матрицы A и B обе эрмитовы, при этом A положительно определена. Докажите, что собственные значения матриц AB и BA вещественные.
17. Докажите, что для любой вещественной нормальной матрицы существует вещественный ортонормированный базис, в котором она является прямой суммой вещественных блоков порядка 1 и вещественных блоков порядка 2 вида $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.
18. Докажите, что для любой ортогональной матрицы существует вещественный ортонормированный базис, в котором она является прямой суммой вещественных матриц порядка 1 с элементами ± 1 и вещественных матриц вращения порядка 2.
19. Докажите, что если оператор обладает сопряжённым оператором, то он сам и его сопряжённый оператор являются линейными операторами.
20. Докажите, что если унитарные пространства V и W конечномерны, то для любого линейного оператора $A : V \rightarrow W$ сопряжённый оператор существует и единственен.
21. Докажите, что линейный оператор на комплексном конечномерном пространстве со скалярным произведением является нормальным относительно данного скалярного произведения тогда и только тогда, когда он обладает ортонормированным в заданном скалярном произведении базисом из собственных векторов.
22. Докажите, что любой диагонализуемый линейный оператор на конечномерном пространстве можно сделать нормальным в некотором скалярном произведении.
23. Приведите пример неотрицательно определённого оператора, который теряет это свойство в некотором другом скалярном произведении.
24. Докажите, что минимальный по модулю элемент унитарной матрицы порядка n не превосходит $1/\sqrt{n}$. Для каждого n приведите пример унитарной матрицы, в которой все элементы по модулю равны $1/\sqrt{n}$.
25. Докажите, что если линейный оператор действует на ком-

плексном пространстве и неотрицательно определён в каком-либо скалярном произведении, то он является эрмитовым в данном скалярном произведении.

26. Докажите, что полный набор ненулевых собственных значений матрицы A^*A совпадает с полным набором ненулевых собственных значений матрицы AA^* .
27. Пусть V и W – комплексные пространства размерностей n и m , снабжённые скалярными произведениями, и $A : V \rightarrow W$ – произвольный линейный оператор. Докажите, что существуют ортонормированные базисы $u_1, \dots, u_n \in V$ и $v_1, \dots, v_m \in W$, в которых матрица оператора A имеет вид

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix}, \Sigma_r = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix}, \sigma_1, \dots, \sigma_r > 0.$$

28. Найдите сингулярное разложение $2 \times n$ -матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.
29. Докажите, что фробениусова норма матрицы равна корню квадратному из суммы квадратов её сингулярных чисел.
30. Докажите, что если матрица A обратима, то $\|A^{-1}\|_2 = 1/\sigma_{\min}$, где $\sigma_{\min}$ – минимальное сингулярное число матрицы A .
31. Дана квадратная матрица с нормой $\|A\|_2 \leq 1$. Докажите, что существуют квадратные матрицы B, C, D такие, что матрица $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ является унитарной.
32. Заданы унитарные пространства V, W и линейный оператор $A : V \rightarrow W$. Докажите, что ядро оператора $A^* : W \rightarrow V$ и образ оператора $A : V \rightarrow W$ являются взаимно дополнительными ортогональными подпространствами пространства W , а ядро оператора A и образ оператора A^* являются взаимно дополнительными ортогональными подпространствами пространства V .
33. Пусть $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \dots$ – сингулярные числа матрицы A , занумерованные по невозрастанию. Докажите, что $\min_{\text{rank } B \leq k} \|A - B\|_2 = \sigma_{k+1}(A)$.
34. Пусть A – комплексная квадратная матрица и $H_A = (A + A^*)/2$. Докажите, что для произвольной эрмитовой матрицы

H такого же порядка выполнено неравенство $\|A - H_A\|_F \leq \|A - H\|_F$.

35. Докажите, что для любой неотрицательно определённой комплексной матрицы неотрицательно определённый квадратный корень существует и единственен.
36. Докажите, что любая комплексная квадратная матрица A имеет полярное разложение $A = HQ$, и при этом матрица H определена однозначно.
37. Пусть $A = \sum_{i=1}^r \sigma_i v_i u_i^*$ – сингулярное разложение матрицы, $r = \text{rank} A$. Докажите, что нормальное псевдорешение (возможно, несовместной) системы $Ax = b$ имеет вид

$$z = \sum_{i=1}^r \frac{v_i^* b}{\sigma_i} u_i = A^\dagger b, \quad A^\dagger = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i} u_i v_i^*.$$

38. Пусть A – комплексная матрица. Докажите, что её псевдообратная матрица является единственным решением системы уравнений

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (AX)^* = AX, \quad (XA)^* = XA.$$

39. Найдите нормальное псевдорешение несовместной системы

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0.$$

40. Докажите, что система вида $A^*Ax = A^*b$ всегда совместна, а множество её решений совпадает с множеством псевдорешений (возможно, несовместной) системы $Ax = b$.
41. Пусть x_0 – нормальное псевдорешение системы $Ax = b$ (возможно, несовместной). Докажите, что $x_0 = \lim_{\alpha \rightarrow +0} (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*b$.
42. Пусть A и B – эрмитовы матрицы и одна из них положительно определена. Докажите, что существует невырожденная матрица P такая, что обе матрицы P^*AP и P^*BP диагональные.
43. Докажите, что эрмитовы матрицы A и B эрмитово конгруэнтны тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же инерцию.

44. Докажите, что для положительной определённости эрмитовой матрицы необходима и достаточна положительность всех её ведущих миноров.
45. Докажите, что собственные значения эрмитовой матрицы A порядка n разделяются собственными значениями её главной подматрицы порядка $n - 1$:

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n - 1.$$

46. Докажите, что собственные значения $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ эрмитовой матрицы A удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_k = \max_{\dim L=k} \min_{0 \neq x \in L} \frac{x^* A x}{x^* x} = \min_{\dim L=n-k+1} \max_{0 \neq x \in L} \frac{x^* A x}{x^* x}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

47. Пусть A и B – эрмитовы матрицы порядка n , собственные значения упорядочиваются по невозрастанию. Докажите, что $\lambda_i(A + B) \leq \lambda_i(A) + \lambda_1(B)$.
48. Пусть матрица B получена из A вычёркиванием какой-то одной строки, и пусть $\sigma_i(A)$ и $\sigma_i(B)$ – сингулярные числа матриц A и B , упорядоченные по невозрастанию. Докажите, что $\sigma_i(A) \geq \sigma_i(B) \geq \sigma_{i+1}(A)$.
49. Пусть $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots$ – сингулярные числа матрицы A размеров $m \times n$. Докажите, что

$$\sigma_k = \max_{\substack{\dim L=k \\ L \subset \mathbb{C}^n}} \min_{\substack{x \in L \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \min_{\substack{\dim L=n-k+1 \\ L \subset \mathbb{C}^n}} \max_{\substack{x \in L \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}.$$

50. Докажите, что для любой комплексной квадратной матрицы A наименьшее собственное значение её эрмитовой части $H = (A + A^*)/2$ не больше наименьшего сингулярного числа матрицы A .
51. Приведите пример эрмитовой матрицы, в которой все ведущие миноры неотрицательны, но матрица неотрицательно определённой не является.
52. В n -мерном унитарном пространстве задан ортормированный базис. Докажите, что сумма квадратов длин ортогональных проекций его векторов на произвольное подпространство размерности $n - 1$ равна $n - 1$.

53. Пусть $\Delta_0 = 1$ и Δ_k – ведущий минор порядка k строго регулярной эрмитовой матрицы порядка n . Докажите, что число перемен знаков между соседними элементами последовательности чисел $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n$ равно отрицательному индексу инерции матрицы A .
54. Пусть A и $B = A + R$ – эрмитовы матрицы порядка n , $R = R^*$ – неотрицательно определённая матрица ранга 1, собственные значения упорядочиваются по невозрастанию. Докажите, что $\lambda_1(A) + \|R\|_2 \geq \lambda_1(B)$, $\lambda_{i-1}(A) \geq \lambda_i(B) \geq \lambda_i(A)$, $2 \leq i \leq n$.
55. Пусть B – произвольная главная подматрица порядка k в эрмитовой положительно определённой матрице A порядка n . Докажите, что след и определитель матрицы B не больше, чем соответственно сумма и произведение k старших собственных значений матрицы A .
56. Пусть μ – собственное значение для $B = A + F$, но не для A . Докажите, что выполнено неравенство $1/\|(A - \mu I)^{-1}\|_2 \leq \|F\|_2$.
57. Эрмитовы матрицы $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ таковы, что $A^2 = A$ и $B^2 = B$. Докажите, что если $\|A - B\|_2 < 1$, то $\text{rank} A = \text{rank} B$.
58. Докажите, что любая ортогональная матрица является произведением конечного числа матриц отражения.
59. Докажите, что эрмитова матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ является неотрицательно определённой тогда и только тогда, когда все её главные миноры неотрицательны.
60. Пусть A – матрица с сингулярными числами σ_i , упорядоченными по невозрастанию. Докажите, что

$$\min_{\text{rank} B \leq k} \|A - B\|_F = \sqrt{\sum_{i \geq k+1} \sigma_i^2}.$$

61. Пусть A и B – эрмитовы матрицы порядка n , собственные значения упорядочиваются по невозрастанию. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i(A + B) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(B), \quad 1 \leq k \leq n.$$

62. Докажите, что если $\alpha > 0$, то $\|(A^*A + \alpha I)^{-1} A^*b\|_2 \leq \|b\|_2 / \sqrt{\alpha}$.
63. Докажите, что если H – эрмитова неотрицательно определённая, а U – унитарная матрица того же порядка, то $\|H - I\|_2 \leq \|H - U\|_2 \leq \|H + I\|_2$.

64. Докажите, что если какие-то s кругов Гершгорина не пересекаются ни с одним из остальных кругов, то в объединении этих s кругов содержится ровно s собственных значений с учётом кратностей.
65. Докажите, что ряд Неймана с матрицей F сходится в том и только том случае, когда спектральный радиус матрицы F меньше единицы.
66. Докажите, что минимальное значение функционала $f(x) = \|b - Ax\|_2^2 + \alpha\|x\|_2^2$ при фиксированном значении $\alpha > 0$ достигается на решении системы $(A^*A + \alpha I)x = A^*b$.
67. Пусть A и B – комплексные неотрицательно определённые матрицы порядка n . Докажите, что матрица $A \circ B$ (поэлементное произведение) неотрицательно определена.
68. Даны скалярная матрица H и столбец b . Докажите равенство

$$\left\| \begin{bmatrix} H & b \\ b^* & 0 \end{bmatrix} \right\|_2 = \frac{\|H\|_2 + \sqrt{\|H\|_2^2 + 4\|b\|_2^2}}{2}.$$

Будет ли верно это равенство для эрмитовой матрицы H ?

69. Докажите, что младшее сингулярное число двухдиагональной $n \times n$ -матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & \\ & 1 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

не превосходит 2^{1-n} , а остальные сингулярные числа принадлежат отрезку $[1, 3]$.

70. Пусть $\sigma_1(A) \geq \dots \geq \sigma_n(A) \geq 0$ – полный набор сингулярных чисел матрицы A порядка n . Докажите, что функция $f_k(A) = \sigma_1(A) + \dots + \sigma_k(A)$ является нормой на пространстве матриц порядка n .

Выпуклые множества, системы линейных неравенств

1. Докажите, что размерность выпуклого множества равна d в том и только том случае, когда оно содержит симплекс размерности d и не содержит ни одного симплекса размерности $d + 1$.

2. Докажите, что выпуклое множество размерности d в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет внутреннюю точку в том и только том случае, когда $d = n$.
3. Пусть M – выпуклое множество в вещественном пространстве V , x_0 – его внутренняя точка, v – произвольный ненулевой вектор, а луч $\{x_0 + tv : t \geq 0\}$ содержит точки, не входящие в M . Докажите, что при некотором значении $t = t_1$ ровно одна точка на луче является граничной для M , все точки луча при $0 \leq t < t_1$ являются внутренними для M , а при $t > t_1$ – внутренними для множества $V \setminus M$.
4. Докажите, что любая точка компактного выпуклого множества M в конечномерном вещественном пространстве V является выпуклой комбинацией каких-то угловых точек этого множества.
5. Докажите, что опорная плоскость компактного выпуклого множества обязательно содержит какую-то из его угловых точек.
6. Докажите, что проекция полиэдра на подпространство является полиэдром в данном подпространстве.
7. Докажите, что ограниченный полиэдр является выпуклым многогранником.
8. Докажите, что выпуклый многогранник является полиэдром.
9. Докажите, что вершины полиэдра и только они являются его угловыми точками.
10. Докажите, что конечнопорождённый конус является однородным полиэдром.
11. Докажите, что однородный полиэдр $K = \{x : Ax \leq 0\}$ является конечнопорождённым конусом.
12. Пусть $a_1, \dots, a_m, c, x \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что неравенство $(c, x) \leq 0$ является следствием системы неравенств $(a_1, x) \leq 0, \dots, (a_m, x) \leq 0$ в том и только том случае, если $b \in \text{con}(a_1, \dots, a_m)$.
13. Докажите, что для вложенности непустого полиэдра $\{x : Ax \leq b\}$ в полиэдр $\{x : Cx \leq d\}$ необходимо и достаточно существование неотрицательной матрицы H такой, что $HA = C$ и $Hb \leq d$.
14. Докажите, что для пустоты полиэдра $\{x : Ax \leq b\}$ необходимо и достаточно существование неотрицательного вектора-столбца h такого, что $h^T A = 0$ и $h^T b = -1$.

15. Докажите, что каждое ребро конечнопорождённого конуса определяется каким-то из векторов его порождающей системы.
16. Докажите, что если конечнопорождённый конус имеет вершину, то можно выбрать порождающую его систему векторов, в которой каждый вектор соответствует ребру данного конуса.
17. С непустым полиэдром $Ax \leq b$ в n -мерном пространстве ассоциируется однородный полиэдр $\begin{bmatrix} A & -b \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \leq 0_{n+1}$. Докажите, что если $\text{rank} A = n$ и вектор $\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ определяет ребро однородного полиэдра, то точка x является вершиной исходного полиэдра.
18. Пусть полиэдр $P = \{x : Ax \leq b\}$ имеет вершины, $K = \{x : Ax \leq 0\}$ – однородный полиэдр с той же матрицей, M – выпуклая оболочка всех вершин полиэдра P . Докажите, что $P = M + K$.
19. Докажите, что если линейный функционал ограничен сверху (снизу) на непустом полиэдре, то в некоторой его точке он принимает максимальное (минимальное) на нём значение. Если полиэдр имеет вершины, то максимум (минимум) достигается в вершине.
20. Пусть M – замкнутое выпуклое множество в конечномерном евклидовом пространстве V . Докажите, что любая точка $x_0 \in V \setminus M$ и множество M строго разделяются некоторой гиперплоскостью, а через любую граничную точку $x_0 \in M$ проходит хотя бы одна опорная гиперплоскость.

Список литературы

- [1] *Александров П.С.* Введение в теорию групп. М.: Бюро Квантум, 2008. 160 с.
- [2] *Ашманов С.А.* Линейное программирование. М.: Ленанд, 2021. 304 с.
- [3] *Будак А.Б., Дарьин А.Н., Есикова Н.В. Ионкин Н.И., Ким Г.Д. с соавт.* Алгебра и геометрия: учебно-методическое пособие (под ред. проф. Ломова И.С.). М.: МАКС Пресс, 2015. 56 с.
- [4] *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. М.: Наука, 1976. 648 с.
- [5] *Воеводин В.В.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1980. 400 с.
- [6] *Гайфуллин А.А., Пенской А.В., Смирнов С.В.* Задачи по линейной алгебре и геометрии. М.: МЦНМО, 2014. 150 с.
- [7] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2010. 560 с.
- [8] *Голуб Д., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.
- [9] *Икрамов Х.Д.* Задачник по линейной алгебре. СПб.: Лань, 2006. 320 с.
- [10] *Ильин В.А., Ким Г.Д.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия, 3-е изд. М.: Проспект, 2023. 400 с.
- [11] *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М.: Физматлит, 2005. 264 с.
- [12] *Ким Г.Д., Крицков Л.В.* Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи, Т. 1. М.: Планета знаний, 2007. 469 с.
- [13] *Ким Г.Д., Крицков Л.В.* Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи, Т. 2. М.: Планета знаний, 2009. 456 с.
- [14] *Кострикин А.И. (ред.)* Сборник задач по алгебре. М.: МЦНМО, 2015. 416 с.
- [15] *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
- [16] *Матоушек И.* Тридцать три миниатюры. Применения линейной алгебры в математике и информатике. М.: МЦНМО, 2021. 168 с.
- [17] *Панфёров В.С.* Конспекты лекций в хранилище факультета ВМК. Режим доступа: <https://wiki.cs.msu.ru/Main/MediaDO>

- [18] *Прасолов В.В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: МЦНМО, 2015. 576 с.
- [19] *Прасолов В.В.* Многочлены. М.: МЦНМО, 2014. 336 с.
- [20] *Савватеев А.В., Тонис А.С.* Линейная алгебра и элементы топологии. Курс лекций. Режим доступа: www.youtube.com
- [21] *Скворцов В.А.* Примеры метрических пространств. М.: МЦНМО, 2002. 24 с.
- [22] *Стрэнг Г.* Линейная алгебра и её применения. М.: Мир, 1980. 454 с.
- [23] *Тыртыхников Е.Е.* Конспекты лекций в хранилище факультета ВМК. Режим доступа: <https://wiki.cs.msu.ru/Main/MediaDO>
- [24] *Тыртыхников Е.Е.* Матричный анализ и линейная алгебра. М.: Физматлит, 2007. 480 с.
- [25] *Тыртыхников Е.Е.* Методы численного анализа. М.: Издательский центр “Академия”, 2007. 320 с.
- [26] *Тыртыхников Е.Е.* Основы алгебры. М.: Физматлит, 2017. 464 с.
- [27] *Халмош П.Р.* Конечномерные векторные пространства. М.: Физматгиз, 1963. 264 с.
- [28] *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
- [29] *Циглер Г.М.* Теория многогранников. М.: МЦНМО, 2014. 568 с.
- [30] *Шукин Е.В.* Линейные пространства и отображения. М.: Ленанд, 2022. 312 с.
- [31] *Oseledets I. V.* Numerical Linear Algebra. Lecture Course. Режим доступа: <https://nla.skoltech.ru/index.html>
- [32] *Strang G.* Introduction to Linear Algebra, 5th ed. Wellesley-Cambridge Press, 2016. 584 с.
- [33] *Strang G.* Linear Algebra for Everyone. Wellesley-Cambridge Press, 2020. 356 с.
- [34] *Strang G.* Linear Algebra. Video Lectures. Massachusetts Institute of Technology. Режим доступа: https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/video_galleries/video-lectures/

Reviewers:
Associate professor A.G. Razborov,
Professor A.S. Fursov

Authors' team:
N.L. Zamarashkin, N.D. Zolotareva, O.S. Lebedeva,
S.A. Matveev, V.A. Morozova, Yu.R. Nesterenko, V.S. Panferov,
S.G. Rudnev, I.N. Smirnov, E.E. Tyrtysnikov

Algebra and geometry: educational and methodological manual
for the 1st year students / Eds. V.S. Panferov and E.E. Tyrtysnikov. –
Moscow: MAKS Press, 2024. – 86 p.
e-ISBN 978-5-89407-639-3 (CMC Department of the Lomonosov MSU)
ISBN 978-5-317-07136-3 (MAKS Press)
<https://doi.org/10.29003/m3797.978-5-317-07136-3>

This manual contains methodological materials accompanying the educational
process: the course program, seminar plans, colloquium programs, test materials,
and questions for the exams.

*Keywords: linear algebra, geometry, elements of general algebra, matrices,
linear operators.*

Учебное издание

Авторы:

Замарашкин Николай Леонидович
Золотарёва Наталья Дмитриевна
Лебедева Ольга Сергеевна
Матвеев Сергей Александрович
Морозова Валентина Алексеевна
Нестеренко Юрий Русланович
Панфёров Валерий Семёнович
Руднев Сергей Геннадьевич
Смирнов Илья Николаевич
Тыртышников Евгений Евгеньевич

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие для студентов 1 курса

Под редакцией В.С. Панфёрова и Е.Е. Тыртышникова

Издательский отдел
Факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова

Лицензия ИД N 05899 от 24.09.01 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус

Издательство «МАКС Пресс».
Главный редактор: Е.М. Бугачева. Обложка: А.В. Кононова

Напечатано с готового оригинал-макета

Подписано в печать 19.02.2024 г.
Формат 60×90 1/16. Усл.печ.л. 5,5. Тираж 100 (1-8) экз. Заказ 017.

Издательство ООО "МАКС Пресс".
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 8(495) 939-3890/91, Тел./Факс 8(495) 939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42,
корп. 5, эт. 1, пом. I, ком. 6.3-23Н